

krańce całkowania, poprowadźmy przez μ elipsojdę o osiach A_1, B_1, C_1 , spółogniskową z elipsojdą A, B, C ; równanie téj elipsojdy będzie

$$(17) \quad \frac{\xi^2}{A^2+u} + \frac{\eta^2}{B^2+u} + \frac{\zeta^2}{C^2+u} = 1, \text{ więc}$$

$$(18) \quad A_1^2 = A^2 + u, \quad B_1^2 = B^2 + u, \quad C_1^2 = C^2 + u,$$

gdzie u oznacza jedyny pierwiastek dodatny równania (17). (Dwa inne pierwiastki ujemne dają obie hiperbolojdy spółogniskowe). Krańcami u są: $u=0$, $u=A$, którym odpowiadają $\lambda=0$ i $\lambda=\frac{A}{A_1}$, jako krańce λ .

Będzie więc ostatecznie

$$(19) \quad \begin{cases} X = -4\pi BC\xi \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{\sigma \lambda^2 \cdot d\lambda}{\sqrt{A^2+\lambda^2(B^2-A^2)} \sqrt{A^2+\lambda^2(C^2-A^2)}}; \text{ podobnie} \\ Y = -4\pi CA\eta \int_0^{\frac{B}{B_1}} \frac{\sigma \lambda^2 \cdot d\lambda}{\sqrt{B^2+\lambda^2(C^2-B^2)} \sqrt{B^2+\lambda^2(A^2-B^2)}}, \\ Z = -4\pi AB\zeta \int_0^{\frac{C}{C_1}} \frac{\sigma \lambda^2 \cdot d\lambda}{\sqrt{C^2+\lambda^2(A^2-C^2)} \sqrt{C^2+\lambda^2(B^2-C^2)}}. \end{cases}$$

Jeżeli punkt przyciągany znajduje się na powierzchni elipsojdy, to $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$, a wyższy kraniec każdej całki będzie równy jedności.

Możemy otrzymać stałe krańce całkowania dla punktu zewnętrznego, uważając w powyższych całkach odpowiednio

$$\lambda \cdot \frac{A_1}{A}, \quad \lambda \cdot \frac{B_1}{B} \quad \text{ i } \quad \lambda \cdot \frac{C_1}{C}$$

jako nową zmienną ρ . Stosując to podstawienie, otrzymamy

$$(20) \quad \begin{cases} X = -4\pi \frac{ABC}{A_1} \xi \int_0^1 \frac{\sigma \cdot \rho^2 \cdot d\rho}{\sqrt{A_1^2+\rho^2(B^2-A^2)} \sqrt{A_1^2+\rho^2(C^2-A^2)}}, \\ Y = -4\pi \frac{ABC}{B_1} \eta \int_0^1 \frac{\sigma \cdot \rho^2 \cdot d\rho}{\sqrt{B_1^2+\rho^2(C^2-B^2)} \sqrt{B_1^2+\rho^2(A^2-B^2)}}, \\ Z = -4\pi \frac{ABC}{C_1} \zeta \int_0^1 \frac{\sigma \cdot \rho^2 \cdot d\rho}{\sqrt{C_1^2+\rho^2(A^2-C^2)} \sqrt{C_1^2+\rho^2(B^2-C^2)}}. \end{cases}$$

132. POTENCJAL ELIPSOJDY. Kwadraty osi a_1, b_1, c_1 elipsojdy, spółogniskowej z elipsojdą (a, b, c) i przez punkt (ξ, η, ζ) przechodzącej, są $a_1^2 = a^2 + u$, $b_1^2 = b^2 + u$, $c_1^2 = c^2 + u$, gdzie u oznacza jedyny pierwiastek dodatny równania

$$(1) \quad \frac{\xi^2}{a^2 + u} + \frac{\eta^2}{b^2 + u} + \frac{\zeta^2}{c^2 + u} = 1.$$

Przyjmijmy $\kappa = A : a = B : b = C : c$, t. j. przez κ oznaczmy stosunek podobieństwa elipsoid (A, B, C) i (a, b, c) . Obliczmy stąd wartości a, b, c , podstawmy je w (1) i przyjmijmy $s = \kappa^2 u$; otrzymamy nowe równanie

$$(2) \quad \frac{\xi^2}{A^2 + s} + \frac{\eta^2}{B^2 + s} + \frac{\zeta^2}{C^2 + s} = \frac{1}{\kappa^2}.$$

Różniczkując to równanie względem zmiennych parametrów κ i s , i przyjmując

$$(3) \quad q = \frac{\xi^2}{(A^2 + s)^2} + \frac{\eta^2}{(B^2 + s)^2} + \frac{\zeta^2}{(C^2 + s)^2},$$

mieć będziemy

$$q \cdot ds = 2 \frac{d\kappa}{\kappa^3} = -2 \frac{A \cdot da}{a^2 \kappa^3} = -\frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{da}{a},$$

a stąd

$$(4) \quad \frac{da}{a} = -\frac{\kappa^2 q}{2} ds.$$

Nadto mamy

$$(5) \quad \mu = \frac{\xi^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2 + u)^2} = \kappa^4 q,$$

$$(6) \quad a_1 b_1 c_1 = \frac{1}{\kappa^3} \sqrt{(A^2 + s)(B^2 + s)(C^2 + s)}; \quad a_1^2 = \frac{A^2 + s}{\kappa^2}.$$

Gdy podstawimy wyrażenia (4), (5), (6) w równaniach (10) art. 131-go, to będziemy mieli

$$dX = 2\pi ABC \xi \frac{\sigma \cdot ds}{(A^2 + s) \sqrt{(A^2 + s)(B^2 + s)(C^2 + s)}},$$

a kładąc

$$(7) \quad D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{B^2}\right) \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)}, \quad \text{otrzymamy}$$

$$(8) \quad dX = 2\pi \xi \cdot \frac{\sigma \cdot ds}{D(A^2 + s)},$$

i podobne wyrażenia dla dY i dZ . Widzimy zatem, że dX, dY, dZ możemy wyrazić jako funkcje parametru $s = \kappa^2 u$, zależnego od stosunku podobieństwa κ i od parametru u elipsoidy o osiach a, b, c . Równanie (8) należy całkować od $a = 0$ do $a = A$. Dla $a = 0$ będzie $\kappa = \infty$; dla $a = A$ będzie $\kappa = 1$, a zatem s będzie pierwiastkiem dodatnim równania

$$(9) \quad \frac{\xi^2}{A^2 + u} + \frac{\eta^2}{B^2 + u} + \frac{\zeta^2}{C^2 + u} = 1,$$

który oznaczmy przez τ . Zmieniając znak, całkujemy od $s = \tau$ do $s = \infty$; otrzymamy

$$(10) \quad \begin{cases} X = -2\pi\xi \int_{\tau}^{\infty} \frac{\sigma \cdot ds}{D(A^2+s)}, \\ Y = -2\pi\eta \int_{\tau}^{\infty} \frac{\sigma \cdot ds}{D(B^2+s)}, \\ Z = -2\pi\zeta \int_{\tau}^{\infty} \frac{\sigma \cdot ds}{D(C^2+s)}. \end{cases}$$

Te wyrażenia stosują się do punktu zewnętrznego. Jeżeli p znajduje się na powierzchni elipsoidy, wtedy z równania (9) wypada $\tau = 0$; całki (10) należy zatem brać między krancami 0 i ∞ .

Niech dana elipsoida będzie jednorodna, a V niech będzie jej potencjałem względem punktu p ; z równań (10) wynika

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial V}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial V}{\partial \zeta} d\zeta = X \cdot d\xi + Y \cdot d\eta + Z \cdot d\zeta,$$

$$dV = -\pi\sigma \int_{\tau}^{\infty} \left(\frac{2\xi \cdot d\xi}{A^2+s} + \frac{2\eta \cdot d\eta}{B^2+s} + \frac{2\zeta \cdot d\zeta}{C^2+s} \right) \frac{ds}{D},$$

a zatem

$$(11) \quad V = \pi\sigma \int_{\tau}^{\infty} \left(c - \frac{\xi^2}{A^2+s} - \frac{\eta^2}{B^2+s} - \frac{\zeta^2}{C^2+s} \right) \frac{ds}{D},$$

gdzie c oznacza stałą, niezależną od kranców całkowania. Możemy ją obliczyć z warunku oczywistego, że potencjał elipsoidy względem punktu w nieskończoności jest równy zeru. Dla $\xi = \infty$, $\eta = \infty$, $\zeta = \infty$ będzie z (9) $u = \infty$, więc $\tau = \infty$, a zatem całka w (11) zredukuje się do jednego wyrazu

$$\left(c - \frac{\xi^2}{A^2+s} - \frac{\eta^2}{B^2+s} - \frac{\zeta^2}{C^2+s} \right) \frac{ds}{D},$$

którego czynnik, w nawias ujęty, z powodu warunku (9) ma wartość $c - 1$. Ponieważ przy założeniach powyższych $V = 0$, przeto $c = 1$. A zatem potencjał elipsoidy jednorodnej względem punktu zewnętrznego wyraża się wzorem

$$(12) \quad V = \pi\sigma \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{A^2+s} - \frac{\eta^2}{B^2+s} - \frac{\zeta^2}{C^2+s} \right) \frac{ds}{D},$$

w którym $\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} > 1$.

Niech punkt (ξ, η, ζ) znajduje się wewnątrz masy elipsoidy; poprowadźmy przezeń elipsoidę o osiach A_1, B_1, C_1 , homotetyczną z elipsoidą (A, B, C) wtedy, kładąc,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \kappa_1, \quad \text{gdzie} \quad \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = \frac{1}{\kappa_1^2},$$

otrzymamy

$$X = -2\pi\xi \int_0^\infty \frac{\sigma \cdot \kappa_1^2 ds}{(A^2 + \kappa_1^2 s) \sqrt{\left(1 + \frac{\kappa_1^2 s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{\kappa_1^2 s}{B^2}\right) \left(1 + \frac{\kappa_1^2 s}{C^2}\right)}}.$$

A jeżeli $\kappa_1^2 s$ będziemy uważali jako nową zmienną, którą także przez s oznaczyć możemy, to otrzymamy

$$(13) \quad X = -2\pi\xi \int_0^\infty \frac{\sigma \cdot ds}{D(A^2 + s)}.$$

Podobnie otrzymać możemy wyrażenia dla Y i Z . Będzie zatem dla punktu wewnętrznego

$$(14) \quad V = \pi\sigma \int_0^\infty \left(c_1 - \frac{\xi^2}{A^2 + s} - \frac{\eta^2}{B^2 + s} - \frac{\zeta^2}{C^2 + s} \right) \frac{ds}{D}.$$

A ponieważ wyrażenia (12) i (14) przedstawiają tożsamość V dla punktu na elipsoidzie, przeto $c_1 = c = 1$, otrzymamy więc dla punktu wewnątrz masy elipsoidy

$$(15) \quad V = \pi\sigma \int_0^\infty \left(1 - \frac{\xi^2}{A^2 + s} - \frac{\eta^2}{B^2 + s} - \frac{\zeta^2}{C^2 + s} \right) \frac{ds}{D},$$

przyczym $\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} < 1$. Powyższe wyrażenia potencjału elipsoidy jednorodnej podał Lejeune-Dirichlet.

133. PRZYCIĄGANIE SFEROJDY. Sferojda powstaje przez obrót elipsy około osi mniejszej. Gdy A i B , przyczym $A < B$, oznaczają połowy osi elipsy, obracającej się około osi A , którą obieramy za oś x -ów, to równanie sferojdy będzie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2 + z^2}{B^2} = 1,$$

a równanie sferojdy spółogniskowej, przechodzącej przez punkt przyciągany (ξ, η, ζ) , zewnątrz niej leżący, będzie

$$\frac{\xi^2}{A_1^2} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{A_1^2 + B^2 - A^2} = 1, \quad \text{gdzie} \quad B_1^2 = C_1^2 = A_1^2 + B^2 - A^2.$$

Masa danej sferojdy jednorodnej wynosi $M = \frac{4}{3} \pi A B^2 \sigma$. Podstawmy te wyrażenia w równaniach (20) art. 131-go, nie pisząc, dla krótkości, znaków —, których łatwo się dorozumieć. Otrzymamy bezwzględne wartości składowych przyciągania punktu przez sferojdę jednorodną

$$(1) \quad X = \frac{3M}{A_1} \xi \int_0^1 \frac{\rho^2 \cdot d\rho}{A_1^2 + \rho^2 (B^2 - A^2)}, \quad \frac{Y}{\eta} = \frac{Z}{\zeta} = \frac{3M}{B_1^2} \int_0^1 \frac{\rho^2 \cdot d\rho}{B_1^2 + \rho^2 (A^2 - B^2)}.$$

Całkując i wstawiając krańce, mieć będziemy

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{3M}{A_1} \xi \left\{ \frac{1}{B^2 - A^2} - \frac{A_1}{(B^2 - A^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A_1} \right\}, \\ \frac{Y}{\eta} = \frac{Z}{\zeta} = \frac{3M}{B_1^2} \left\{ \frac{B_1^2}{2(B^2 - A^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{B_1} - \frac{A_1}{2(B^2 - A^2)} \right\}. \end{cases}$$

Gdy $e = \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A}$ oznacza mimośród elipsy tworzącej, to $B^2 = A^2(1 + e^2)$, $B_1^2 = A_1^2 + e^2 A^2$. Oznaczmy przez ρ odległość punktu przyciąganego od osi sferoidy (osi x -ów), to $\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2$, a stąd wynika dla obliczenia osi A_1 równanie następujące:

$$(3) \quad \frac{\xi^2}{A_1^2} + \frac{\rho^2}{A_1^2 + e^2 A^2} = 1.$$

Składowa X wyraża przyciąganie punktu w kierunku, równoległym do osi sferoidy, siła zaś $\Xi = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ wyraża przyciąganie tego punktu w kierunku, prostopadłym do tej osi. Wyrażając B przez A i e , i obliczając Ξ , otrzymamy

$$(4) \quad \begin{cases} X = \frac{3M}{e^2 A^2 A_1} \xi \left(1 - \frac{A_1}{eA} \arctan \frac{eA}{A_1} \right), \\ \Xi = \frac{3M}{2e^2 A^2 (A_1^2 + e^2 A^2)} \cdot \rho \left(\frac{A_1^2 + e^2 A^2}{eA} \arcsin \frac{eA}{\sqrt{A_1^2 + e^2 A^2}} - A_1 \right). \end{cases}$$

Zastosujmy te wyrażenia do sferoidy o bardzo małym mimośrodku e . Przypuśćmy, że mimośród e jest tak mały, że jego potęgi wyższe od drugiej mogą być pominięte, wtedy możemy funkcje po prawych stronach równań (4) rozwinąć na szeregi, zatrzymując się na wyrazach tego rzędu co e^2 . Postępując sposobem opisanym z równaniem (3), otrzymamy kwadrat połowy osi głównej sferoidy spółogniskowej

$$(5) \quad A_1^2 = r^2 - \frac{A^2 e^2 \rho^2}{r^2},$$

gdzie $r = \sqrt{\xi^2 + \rho^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ oznacza odległość punktu przyciąganego od środka sferoidy. Rozwińmy funkcje kołowe, zachodzące we wzorze (4), na szeregi i wstawmy A_1 , to otrzymamy po uproszczeniach

$$(6) \quad \begin{cases} X = \frac{4}{3} \pi \frac{A^3}{r^3} \xi \left[1 + \left(1 - \frac{3}{5} \frac{A^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{A^2 \rho^2}{r^4} \right) e^2 \right], \\ \Xi = \frac{4}{3} \pi \frac{A^3}{r^3} \sigma \rho \left[1 + \left(1 - \frac{6}{5} \frac{A^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{A^2 \rho^2}{r^4} \right) e^2 \right]. \end{cases}$$

Według tych wzorów możemy z dostatecznym przybliżeniem obliczyć przyciąganie, którego doznaje punkt, odległy o r od środka, a o ρ od osi sferoidy jednorodnej, która z powodu małego mimośrodu e różni się mało od kuli. Jeżeli jednostka masy przyciąga jednostkę masy w jednostce odległości z siłą k , a μ jest masą punktu przyciąganego, wówczas wyrażenia (6) należy pomnożyć przez $k\mu$, aby otrzymać składowe całkowitego przyciągania.

134. PRZCIĄGANIE ZIEMI. Redukując ład stały do poziomu morza, możemy ziemię uważać za sferoidę, której oś mniejsza przechodzi przez obadwa bieguny, a której oś większa jest średnicą równika. Jeżeli A oznacza połowę osi ziemskiej, zaś B promień równika, to z najlepszych pomiarów geodezyjnych, gruntownie przedyskutowanych przez B. Listing'a, wynika dla powierzchni ziemi

$$A = 6355270 \text{ m}, \quad B = 6377377 \text{ m},$$

a stąd wynika mimośród sferoidy ziemskiej

$$e = \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A} = 0,0834 = \frac{1}{11,98}.$$

Liczbę $\eta = \frac{B - A}{B}$, wyrażającą stosunek różnicy połów obudwu osi do promienia równika, nazywamy spłaszczeniem powierzchni ziemi. Otrzymamy

$$\eta = \frac{B - A}{B} = 0,003466 = \frac{1}{288,48}.$$

Kładąc $B = A\sqrt{1 + e^2}$, mamy

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{\sqrt{1 + e^2}} = 1 - (1 + e^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) e^4 + \left(\frac{-1}{3}\right) e^6 - \dots,$$

jeżeli przeto z powodu małego e opuścimy wyrazy tego rzędu co e^4 i rzędów wyższych, natenczas $\frac{e^2}{2} = \eta$. Ziemia nie jest ciałem jednorodnym. Z najnowszych pomiarów otrzymano na podstawie rozmaitych metod następujące wartości średniej gęstości ziemi: Reich (1851) otrzymał 55,832; Cornu i Baille (1878) 5,56; Jolly (1879 — 1880) 5,692; Wilsing (1887) $5,594 \pm 0,032$. Gęstość średnia skorupy ziemskiej, którą znamy do głębokości, wynoszącej około 1000 metrów, wynosi prawie połowę średniej gęstości ziemi. Z tego wypada wnosić, że gęstość ziemi rośnie od powierzchni ku środkowi, a lubo nie znamy prawa tego przyrostu, musimy ziemię uważać za ciało niejednorodne.

Przypuścimy, że ziemia składa się z warstw sferoidalnych, spółśrodkowych, których mimośród i gęstość zmienia się od warstwy do warstwy tak, iż każda warstwa jest jednorodna. Gdy a , ε i σ oznaczają odpowiednio połowę osi obrotu, mimośród i gęstość takiej warstwy nieskończenie cienkiej, przy czym $\varepsilon = \varphi_1(a)$ i $\sigma = \varphi_2(a)$ są nieznanymi funkcjami parametru a , to, kładąc w równaniach (6) art. 133-go a i ε zamiast A i e , i różniczkując to równanie względem a , otrzymamy przyciąganie punktu o współrzędnych r , ρ ,

leżący zewnątrz lub na powierzchni takiej warstwy, przez tę warstwę. Otrzymamy tym sposobem

$$(1) \quad \begin{cases} dX = 4\pi k\mu \frac{\sigma}{r^3} \xi \left[a^2(1+\varepsilon^2) - a^4 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{\rho^2}{r^4} \right) \varepsilon^2 \right] da, \\ d\Xi = 4\pi k\mu \frac{\sigma}{r^3} \rho \left[a^2(1+\varepsilon^2) - a^4 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{\rho^2}{r^4} \right) \varepsilon^2 \right] da; \end{cases}$$

a całkując między krańcami $a=0$, $a=A$ i przyjmując

$$(2) \quad \alpha = \int_0^A a^2(1+\varepsilon^2) da, \quad \beta A^2 = \int_0^A a^4 \varepsilon^2 da,$$

mić będziemy

$$(3) \quad \begin{cases} X = 4\pi k\mu \frac{\xi}{r^3} \left[\alpha - \beta A^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{5}{2} \frac{\rho^2}{r^4} \right) \right], \\ \Xi = 4\pi k\mu \frac{\rho}{r^3} \left[\alpha - \beta A^2 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{5}{2} \frac{\rho^2}{r^4} \right) \right]. \end{cases}$$

Te wyrażenia pozwalają obliczyć przyciąganie punktu przez ziemię niejednorodną, jeżeli mimośród ε każdej warstwy przyjmiemy tak mały, iż wyrazy tego rzędu co ε^3 i rzędu wyższego mogą być pominięte. Spółczynnik β jest wielkością tego rzędu co ε^2 , a zatem tego rzędu co e^2 . Nie znając funkcji φ_1 i φ_2 , nie możemy obliczyć α i β ; według Laplace'a możemy jednak niezależnie od praw zmiany mimośrodu i gęstości warstw obliczyć przyciąganie punktu, znajdującego się na powierzchni ziemi, jeżeli uwzględnimy warunki równowagi tego punktu. Obierzmy punkt μ (fig. 56) na powierzchni ziemi,

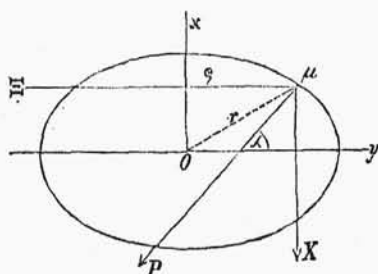


Fig. 56.

poprowadźmy przez niego południk $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2(1+e^2)} = 1$, i poprowadźmy przez ten punkt normalną do południka; wtedy kąt λ , który ta normalna tworzy z płaszczyzną równika, przedstawia szerokość geograficzną tego punktu. Dla punktu μ , (ρ, ξ) , będzie

$$\rho \cdot \tan \lambda = \xi(1+e^2), \quad \xi / \sqrt{1+e^2 \cos^2 \lambda} = A \sin \lambda, \quad \rho / \sqrt{1+e^2 \cos^2 \lambda} = A(1+e^2) \cos \lambda, \\ r / \sqrt{1+e^2 \cos^2 \lambda} = A \sqrt{1+(2e^2+e^4) \cos^2 \lambda}.$$

Rozwijając tu pierwiastki kwadratowe na szeregi aż do wyrazów tego rzędu co e^2 , otrzymamy

$$\begin{aligned}\xi &= A \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \lambda \right) \sin \lambda, \\ \rho &= A \left[1 + e^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \lambda}{2} \right) \right] \cos \lambda, \\ r &= A \left(1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 \lambda \right).\end{aligned}$$

Wstawmy te wyrażenia w (3) i rozwijajmy na szeregi podobnie jak wyżej, przyczym βe^2 jako wielkość tego rzędu co e^4 ma być pominięta; otrzymamy po uproszczeniach

$$(4) \quad \begin{cases} X = \frac{4\pi k\mu}{A^2} \sin \lambda \cdot \left[\alpha - \beta + \left(\frac{5}{2} \beta - 2e^2 \alpha \right) \cos^2 \lambda \right], \\ \Xi = \frac{4\pi k\mu}{A^2} \cos \lambda \cdot \left[\alpha(1 + e^2) - 2\beta + \left(\frac{5}{2} \beta - 2e^2 \alpha \right) \cos^2 \lambda \right]. \end{cases}$$

Jeżeli punkt μ ma być w spoczynku względem ziemi, obracającej się jednostajnie z prędkością kątową ω około osi A , wtedy wypadkowa P sił X , Ξ siły odśrodkowej tego punktu jest normalna do powierzchni ziemi, a zatem normalna do południka tego punktu. Wypadkowa P przedstawia ciężar punktu o masie μ . Ponieważ $\mu\omega^2\rho$ jest siłą odśrodkową, przeto mamy warunek

$$(5) \quad \operatorname{tang} \lambda = \frac{X}{\Xi - \mu\omega^2\rho},$$

przyczym siła odśrodkowa punktu wynosi

$$(6) \quad \mu\omega^2\rho = \mu\omega^2 A \left[1 + e^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \lambda}{2} \right) \right] \cos \lambda.$$

Podstawiawszy (4) i (6) w (5), otrzymamy warunek równowagi punktu

$$(7) \quad \frac{4\pi k}{A^2} (\alpha e^2 - \beta) = \omega^2 A \left[1 + e^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \lambda}{2} \right) \right].$$

To równanie stosuje się do każdego punktu na ziemi, a zatem niezależnie od λ , inaczej równowaga byłaby niemożliwa. Czynniki przeto $\omega^2 A e^2$, mnożący $1 - \frac{\cos^2 \lambda}{2}$, jest wielkością tego rzędu co e^3 lub rzędu wyższego, czyli iloczyn $\omega^2 A$ tego rzędu co e lub rzędu wyższego. Wskutek tego

$$(8) \quad \omega^2 A = \frac{4\pi k}{A^2} (\alpha e^2 - \beta),$$

a siła odśrodkowa będzie wyrażona przez iloczyn $\mu\omega^2 A \cos \lambda$; będzie przeto proporcjonalna względem dostawy szerokości geograficznej.

Gdy g oznacza przyspieszenie spadku w punkcie ρ , to $P = \mu g$. Z równania (5) wynika $\Xi - \mu \omega^2 \rho = X \cotg \lambda$, a ponieważ $P = \sqrt{X^2 + (\Xi - \mu \omega^2 \rho)^2}$, przeto $X = \mu g \cdot \sin \lambda$, a więc według (4)

$$g = \frac{4\pi k}{A^2} \left[\alpha - \beta + \left(\frac{5}{2} \beta - 2e^2 \alpha \right) \cos^2 \lambda \right],$$

czyli

$$(9) \quad g = \frac{4\pi k}{A^2} \left\{ \alpha(1 - 2e^2) + \frac{3}{2} \beta + \left[2(\alpha e^2 - \beta) - \frac{\beta}{2} \right] \sin^2 \lambda \right\}.$$

Uwzględniając warunek (8), otrzymamy

$$(10) \quad g = \frac{4\pi k}{A^2} \left[\alpha(1 - 2e^2) + \frac{3}{2} \beta \right] + \left(\frac{5}{2} \omega^2 A - \frac{4\pi k}{A^2} \cdot \frac{\alpha e^2}{2} \right) \sin^2 \lambda.$$

Wstawiając $\lambda = 0$, otrzymamy przyspieszenie g_0 na równiku, które zatym wynosi

$$(11) \quad g_0 = \frac{4\pi k}{A^2} \left[\alpha(1 - 2e^2) + \frac{3}{2} \beta \right].$$

Pisząc to równanie w postaci

$$\frac{4\pi k}{A^2} = \frac{g_0}{\alpha(1 - 2e^2) + \frac{3}{2} \beta}$$

i rozwijając prawą stronę na szereg aż do wyrazów tego rzędu co e^2 , otrzymamy

$$(12) \quad \frac{4\pi k}{A^2} = g_0 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2e^2}{\alpha} - \frac{3}{2} \frac{\beta}{\alpha^2} \right),$$

a stąd

$$(13) \quad g = g_0 + \left(\frac{5}{2} \omega^2 A - \frac{e^2}{2} g_0 \right) \sin^2 \lambda.$$

Iloczyn $\omega^2 A$ przedstawia w zakresie dokładności naszego rachunku siłę odśrodkową jednostki masy na równiku, t. j. dla $\lambda = 0$. Jakoż, wielkość tej siły jest równa $\omega^2 B = \omega^2 A(1 + e^2)^{\frac{1}{2}} = \omega^2 A \left(1 + \frac{e^2}{2} \right)$, czyli jest równa $\omega^2 A$, ponieważ $\omega^2 A e^2$ jest rzędu wyższego, niż e^2 . Przyjmijmy

$$(14) \quad n = \frac{\omega^2 A}{g_0},$$

to n oznacza stosunek siły odśrodkowej na równiku do przyspieszenia spadku na równiku. Stąd $\omega^2 A = n g_0$, a więc, według (13),

$$(15) \quad g = g_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} \right) \sin^2 \lambda \right].$$

Ten wzór Laplace'a przedstawia przyspieszenie spadku na powierzchni morza przy powyższych założeniach. Prawo, przez ten wzór wyrażone, nie zależy

od związków między mimośrodem, gęstością i osią biegunową jednorodnych warstw sferoidalnych ziemi.

Gdy przyjmiemy $\lambda = \frac{\pi}{2}$, to otrzymamy przyspieszenie G na biegunach ziemi; będzie więc

$$G = g_0 \left[1 + \frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} \right],$$

a stąd

$$\frac{G - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2},$$

czyli według (4)

$$(16) \quad \frac{G - g_0}{g_0} + \eta = \frac{5}{2} n.$$

Ostatnie równanie wyraża ważne twierdzenie, którego Clairaut dowiódł dla ziemi, a które stosuje się także do innych planet: *suma dwu liczb, z których jedna wyraża spłaszczenie ziemi, a druga stosunek różnicy przyspieszenia na biegunie i na równiku do przyspieszenia na równiku, jest równa $\frac{5}{2}$ stosunku siły odśrodkowej do przyspieszenia spadku na równiku.* W zakresie dokładności rachunku możemy przyjąć

$$(17) \quad g = g_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} n - \eta \right) \sin^2 \lambda \right].$$

Przyspieszenie spadku rośnie od równika do bieguna proporcjonalnie względem kwadratu wstawy szerokości geograficznej. Z równań (8) i (11) wynika

$$\alpha = \frac{A^2 g_0}{4 \pi k} \left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{2} n \right), \quad \beta = \frac{A^2 g_0}{4 \pi k} (e^2 - n).$$

135. Przyjmijmy punkt μ ponad ziemią w wysokości h , i niech r, ρ, ξ oznaczają jego współrzędne. Niech pion tego punktu (normalna do sferoidy) spotyka powierzchnię ziemi w punkcie $\mu_1, (r_1, \rho_1, \xi_1)$, którego szerokość jest λ . Wtedy

$$\xi = \xi_1 + h \sin \lambda, \quad \rho = \rho_1 + h \cos \lambda, \quad r = \sqrt{\rho^2 + \xi^2}.$$

Podstawiając zamiast ξ_1 i ρ_1 poprzednio znalezione wyrażenia, i rozwijając na szeregi te wielkości aż do wyrazów tego rzędu co e^2 , otrzymamy ze względu na to, że wysokość h jest mała w porównaniu z wymiarami ziemi,

$$\begin{aligned} \xi &= (A + h) \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \lambda \right) \sin \lambda, & \rho &= (A + h) \left[1 + e^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \lambda}{2} \right) \right] \cos \lambda, \\ r &= (A + h) \left(1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 \lambda \right); \end{aligned}$$

błąd popełniony będzie tego rzędu co $h e^2$. Podstawmy te wyrażenia w równaniach (3) art. 134-go, jak również wyrażenia dla α i β ; otrzymamy



$$(1) \quad \begin{cases} X = \mu g_0 \sin \lambda \cdot \left[\frac{A^2}{(A+h)^2} + \left(\frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} \right) \sin^2 \lambda \right], \\ \Xi = \mu g_0 \cos \lambda \cdot \left[\frac{A^2}{(A+h)^2} + n + \left(\frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} \right) \sin^2 \lambda \right]. \end{cases}$$

Siła odśrodkowa w punkcie μ wynosi $\mu \omega^2 \rho$; jeżeli wstawimy wartość ρ , to otrzymamy wielkość tej siły

$$(2) \quad \mu \omega^2 (A+h) \cos \lambda = \mu \omega^2 A \cos \lambda = \mu n g_0 \cos \lambda.$$

Wypadkowa $P' = \sqrt{X^2 + (\Xi - \mu n g_0 \cos \lambda)^2}$ przedstawia ciężar masy μ ; a ponieważ, jak wynika ze wzorów (1) i (2)

$$(3) \quad \frac{X}{\Xi - \mu n g_0 \cos \lambda} = \tan \lambda,$$

przeto widzimy, że kierunkiem siły ciężkości w punkcie μ jest pion tego punktu. W zakresie zatym dokładności naszego rachunku nie wpływa siła odśrodkowa na kierunek spadku.

Gdy g_h jest przyspieszeniem spadku w wysokości h nad ziemią, to $P' = \mu g_h$, wtedy po uwzględnieniu wzorów (1) otrzymamy,

$$(4) \quad g_h = g_0 \cdot \frac{A^2}{(A+h)^2} \left[1 + \left(\frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} \right) \sin^2 \lambda \right] = g \cdot \frac{A^2}{(A+h)^2}, \quad \text{czyli}$$

$$g_h : g = A^2 : (A+h)^2,$$

albo z dostateczną dokładnością

$$(5) \quad g_h : g = r_1^2 : r^2.$$

W małej wysokości nad ziemią przyspieszenie spadku, a zatym wielkość siły ciężkości, jest odwrotnie proporcjonalna względem kwadratu odległości od środka ziemi.

Przyspieszenie g odnosi się do punktu na poziomie morza. Jeżeli punkt przyciągany znajduje się na łodzi stałym, znacznie wystającym nad poziom morza, wtedy należy uwzględnić także tak zwane przyciąganie miejscowe,

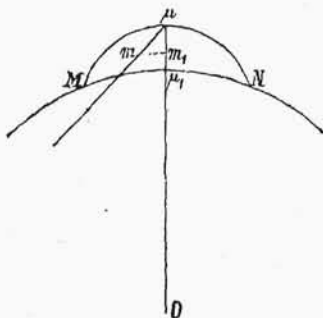


Fig. 57.

to znaczy przyciąganie, które otaczający łód stały wywiera na ów punkt, a które dodać należy do przyciągania punktu przez sferoidę ziemską. Niech $M\mu_1N$ (fig. 57) przedstawia poziom morza, a $M\mu N$ łód wystający, na którego powierzchni znajduje się punkt μ w wysokości $h = \mu_1\mu$, którą uważać możemy za stałą grubość odpowiedniej warstwy łądu. Obierzmy punkt dowolny m o współrzędnych $y = m_1m$, $z = \mu_1m_1$ i podzielmy masę przyciągającą na walce elementarne, których wspólną osią jest promień Op . Jeżeli y oznacza promień wewnętrzny, a $y + dy$ promień

zewnątrzny walca, zaś dz jego wysokość, σ_0 gęstość średnią łądu czyli skorupy ziemi, to $2\pi\sigma_0 y dy dz$ będzie masą walca. Pionowa składowa przyciągania, którego μ od walca doznaje, będzie

$$2\pi k\mu\sigma_0 \cdot \frac{yz \cdot dy \cdot dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

całkowite zatem przyciąganie punktu μ w kierunku $O\mu$ będzie

$$p = 2\pi k\mu\sigma_0 \iint \frac{yz \, dy \, dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a składowe, prostopadłe do $O\mu$, zniósł się. Kładąc $\rho = \mu_1 M = \mu_1 N$, gdzie ρ oznacza promień podstawy łądu, będziemy mieli $y = \rho$ i $y = \rho$, $z = \rho$, i $z = h$ iako odpowiednie krańce powyższej całki. Całkując więc, otrzymamy

$$p = 2\pi k\mu\sigma_0 h \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}\right),$$

a ponieważ h jest małe względem ρ , przeto możemy przyjąć

$$(6) \quad p = 2\pi k\mu h \sigma_0.$$

Niech O będzie środkiem ziemi, i przyjmijmy $r_1 = O\mu_1$, a przez g oznaczmy przyspieszenie spadku w punkcie μ_1 , natenczas $\frac{gr_1^2}{(r_1 + h)^2}$ byłoby przyspieszeniem w μ , gdybyśmy nie uwzględnili przyciągania miejscowego. Rzeczywiste zatem przyspieszenie g_h w punkcie μ będzie

$$(7) \quad g_h = \frac{gr_1^2}{(r_1 + h)^2} + \frac{p}{\mu} = \frac{gr_1^2}{(r_1 + h)^2} + 2\pi k h \sigma_0.$$

Ponieważ wysokość h jest bardzo mała w porównaniu z r_1 , możemy przyjąć $r_1^2 : (r_1 + h)^2 = 1 - \frac{2h}{r_1} = 1 - \frac{2h}{R}$, gdzie R oznacza promień kulio średniej gęstości ziemi, przyciągającej punkt μ_1 z taką samą siłą, jak ziemia sferoidalna. Aby wyrugować czynnik h , możemy przyjąć z dostateczną dokładnością

$$(8) \quad g = \frac{4}{3} \pi R k s,$$

oznaczywszy przez s średnią gęstość ziemi; ten wzór wyraża przyciąganie, którego jednostka masy doznaje od kuli jednorodnej o gęstości s i promieniu R . Stąd

$$(9) \quad k = \frac{3g}{4\pi R s},$$

a zatem

$$(10) \quad g_h = g \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{\sigma_0}{s}\right),$$

a ponieważ w przybliżeniu (art. 134) $\sigma_0 = \frac{s}{2}$, przeto

$$(11) \quad g_h = g \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3}{4} \frac{h}{R}\right) = g \left(1 - \frac{5}{4} \frac{h}{R}\right),$$

$$(12) \quad g = g_h \left(1 + \frac{5}{4} \frac{h}{R} \right).$$

Podstawiając zamiast g wyrażenie z równania Laplace'a (art. 134), otrzymamy ogólnie

$$(13) \quad g_h = g_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} \right) \sin^2 \lambda \right] \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3}{2} \frac{h}{R} \frac{e_0}{s} \right),$$

czyli, według (11)

$$(14) \quad g_h = g_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} \right) \sin^2 \lambda \right] \left(1 - \frac{5}{4} \frac{h}{R} \right).$$

Podstawmy $2 \sin^2 \lambda = 1 - \cos 2\lambda$, przyjmijmy $m = \frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2}$, $m_1 = m : (m + 2)$, i oznaczmy przez g_{45} przyspieszenie spadku na powierzchni morza dla $\lambda = 45^\circ$; wtedy

$$(15) \quad g_h = g_{45} \left(1 - m_1 \cos 2\lambda \right) \left(1 - \frac{5}{4} \frac{h}{R} \right).$$

Z pomiarów długości wahadła sekundowego w rozmaitych miejscach na ziemi wnosić należy, że przyspieszenie spadku na równiku (art. 63) $g_0 = 9,780 \text{ m}$. Stąd

$$\frac{5}{2} n = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 A}{g_0} = 0,008668; \text{ a ponieważ } \frac{e^2}{2} = 0,003478,$$

przeto

$$m = \frac{5}{2} n - \frac{e^2}{2} = 0,00519; \quad m_1 = 0,00259.$$

Wstawiając jeszcze $R = 637 \cdot 10^4 \text{ m}$, otrzymamy

$$(16) \quad g_h = g_{45} (1 - 0,00259 \cdot \cos 2\lambda) (1 - 0,000000196 \cdot h).$$

Tego wzoru, podanego przez J. O. Brocha, używa Komitet międzynarodowy wag i miar w Paryżu do porównywania między sobą ciężarów jednostki masy w rozmaitych miejscach na ziemi. Jeżeli przez l_h oznaczmy odpowiednią długość wahadła sekundowego, natenczas

$$(17) \quad l_h = l_{45} (1 - 0,00259 \cdot \cos 2\lambda) (1 - 0,000000196 \cdot h).$$

Do najdokładniejszych pomiarów długości wahadła sekundowego, wykonanych w czasie najnowszym, należy pomiar K. Orffa w obserwatorium astronomicznym w Bogenhausen koło Monachium, dokonany w r. 1877, a ogłoszony w r. 1883. Szerokość obserwatorium $\lambda = 48^\circ 8' 45''$, a jako długość wahadła sekundowego, zredukowaną na czas średni i poziom morza, otrzymamy $l = 0,9938102 \text{ m}$. Wstawmy tę wartość w (17), tudzież $2\lambda = 96^\circ 17' 30''$, wtedy otrzymamy $l_{45} = 0,9935282 \text{ m}$, a stąd $g_{45} = 9,8058970 \text{ m}$. Wstawiając te wartości w (16) i (17), otrzymamy ostatecznie

$$(18) \quad g_h = 9,8058970 (1 - 0,00259 \cdot \cos 2\lambda) (1 - 0,000000196 \cdot h)$$

$$(19) \quad l_h = 0,9935282 (1 - 0,00259 \cdot \cos 2\lambda) (1 - 0,000000196 \cdot h).$$

136. PRZYSIĄGANIE DWU CIAŁ. Niech będą dane dwie kule jednorodne o środkach O i o , i o promieniach R i r ; chcemy wyznaczyć przysiąganie, którego kula r doznaje od kuli R . Obierzmy O za początek, prostą Oo za oś x -ów, δ niech oznacza odległość obudwu środków, σ gęstość kuli przysiąganej. Przetnijmy kulę r dwiema płaszczyznami, prostopadłymi do osi x -ów, w odległościach x i $x + dx$ od O , otrzymamy warstwę o grubości dx , której promień niech będzie y . Element $d\mu$ tej warstwy, odległy o ρ od środka kuli przysiągającej, jest przysiągany w kierunku prostej ρ ku środkowi O , a wielkość tego przysiągania jest $k \cdot \frac{M \cdot d\mu}{\rho^2}$, gdzie M jest masą kuli przysiągającej. Rzut tej siły na oś x -ów jest

$$-k M \cdot d\mu \cdot \frac{x}{\rho^3} = -k M \cdot d\mu \cdot \frac{x}{(x^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

gdzie η oznacza odległość tego elementu od środka warstwy. Czynniki $x : (x^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}$ jest stały dla wszystkich elementów $d\mu$, znajdujących się na pierścieniu o promieniach η i $\eta + d\eta$, a ponieważ przysiągania, prostopadłe do osi x , znoszą się, przeto pierścień doznaje przysiągania w kierunku tej osi, a wielkość tego przysiągania jest $-2\pi k M \sigma \cdot \frac{x \eta \cdot dx \cdot d\eta}{(x^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Kula R przysiąga zatem kulę r w kierunku linii środków z siłą

$$(1) \quad X = -2\pi k M \sigma \iint \frac{x \eta \cdot dx \cdot d\eta}{(x^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Całkując naprzód względem η , mamy $\eta = 0$ i $\eta = y = \sqrt{r^2 - (\delta - x)^2}$ jako krańce. Będzie więc

$$\int_0^y \frac{\eta \cdot d\eta}{(x^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = - \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2\delta x - (\delta^2 - r^2)}}.$$

Całkując względem x , mamy $\delta - r$ i $\delta + r$ jako krańce, więc

$$\int_{\delta-r}^{\delta+r} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2\delta x - (\delta^2 - r^2)}} \right) x \cdot dx = 2r - \frac{4r^3 + 12\delta^2 r}{6\delta^2} = \frac{2}{3} \frac{r^3}{\delta^2},$$

a stąd

$$(2) \quad X = -\frac{4}{3} \pi k M \cdot \frac{r^3 \cdot \sigma}{\delta^2} = -\frac{k \cdot M \mu}{\delta^2},$$

gdzie $\mu = \frac{4}{3} \pi r^3 \sigma$ jest masą kuli przysiąganej. Mamy przeto następujące twierdzenie: *dwie kule jednorodne przysiągają się tak, jakgdyby ich masy były skupione w ich środkach.*

Powyższe twierdzenie może być przy pewnych warunkach uogólnione. Niech będzie ciało i punkt μ , którego odległość od każdego punktu tego ciała jest bardzo wielka w porównaniu z odległością wzajemną jakichkolwiek dwu

punktów tego ciała. Obierzmy którykolwiek punkt ciała za początek osi współrzędnych, względem których ξ, η, ζ niech będą współrzędnymi punktu μ ; wtedy $\delta^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ jest bardzo wielkie w porównaniu z $x^2 + y^2 + z^2$, gdzie x, y, z są współrzędnymi któregośkolwiek punktu ciała. Potencjał ciała względem μ będzie

$$V = \int \frac{dm}{r} = \int \frac{dm}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Rozwijając $\frac{1}{r}$ na szereg, mieć będziemy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\delta} \left\{ 1 + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\xi x + \eta y + \zeta z)}{\delta^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \text{ czyli}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\delta} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)_n \cdot \frac{[(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\xi x + \eta y + \zeta z)]^n}{\delta^{2n}} \right\}.$$

Dla bardzo więc wielkiego δ otrzymamy, rozwijając na szereg aż do wyrazów tego rzędu co δ^{-3} i pomijając $x^2 + y^2 + z^2$ w obec δ^2 ,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^3} (\xi x + \eta y + \zeta z),$$

skąd

$$(3) \quad V = \frac{m}{\delta} + \frac{1}{\delta^3} \left[\xi \int x \cdot dm + \eta \int y \cdot dm + \zeta \int z \cdot dm \right].$$

Obierzmy środek masy przyciągającej za początek osi, wtedy

$$\int x \, dm = 0, \int y \, dm = 0, \int z \, dm = 0, \text{ a zatem}$$

$$(4) \quad V = \frac{m}{\delta},$$

z czego wynika twierdzenie: jeżeli punkt przyciągany znajduje się bardzo daleko od ciała przyciągającego, natenczas to ciało przyciąga go tak, jakgdyby masa tego ciała była skupiona w środku masy. Z tego wynika wniosek, że dwa ciała, bardzo od siebie odległe, przyciągają się tak, jakgdyby ich masy były skupione w ich środkach masy.

Ć W I C Z E N I A.

(1). Obliczyć bezpośrednio przyciąganie punktu przez kulę jednorodną, nie używając wzorów Gauss'a.

(2). Okazać, że jedynie przy działaniu sił, według prawa Newton'a, warstwa jednorodna, ograniczona dwiema elipsoidami homotetycznymi, nie przyciąga punktu, znajdującego się wewnątrz jej powierzchni mniejszej.

(3). Jeżeli ρ, ϕ, ϑ są współrzędnymi biegunowymi punktu μ , a zatem $\xi = \rho \cos \phi, \eta = \rho \sin \phi \cos \vartheta, \zeta = \rho \sin \phi \sin \vartheta$, a V jest potencjałem ciała względem μ , to parametr różniczkowy rzędu 2-go będzie:

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (V \rho) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \cos \phi} \left(\sin^2 \phi \frac{\partial V}{\partial \cos \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}.$$

Dowieść tego równania, podanego przez Laplace'a; i na jego podstawie obliczyć potencjał kuli względem punktu zewnętrznego i punktu wewnętrznego, tudzież odpowiednie przyciągania.

(4). Znaleźć przyciąganie, które jednorodny łuk koła wywiera na środek tego koła.

(5). Wyznaczyć przyciąganie, którego doznaje wierzchołek jednorodnego stożka obrotowego od masy stożka.

(6). Okazać, że walec pusty nieskończony, składający się z warstw jednorodnych, nie przyciąga punktu, znajdującego się wewnątrz powierzchni mniejszej.

(7). Okazać, że jeżeli przyciąganie jest odwrotnie proporcjonalne względem wyższej potęgi odległości, niż drugiej, ciało wywiera nieskończenie wielkie przyciąganie na punkt swój powierzchni.

(8). Okazać, że wierzchołek odcinka kuli doznaje od odcinka przyciągania $2\pi k \mu h \sigma \left[1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2h}{R}} \right]$, gdzie R jest promieniem kuli, a h wysokością odcinka.

(9). Okazać, że odcinek paraboloidy obrotowej, ograniczony płaszczyzną, prostopadłą do osi i poprowadzoną w odległości δ od wierzchołka, przyciąga punkt μ , znajdujący się w ognisku, z siłą $4\pi k \mu \sigma p \log \frac{\delta + p}{p}$, gdzie p jest parametrem paraboloidy.

(10). Jeżeli wewnątrz elipsy znajduje się punkt (ξ, η) , przyciągany w stosunku odwrotnym względem odległości; a X, Y są składowymi przyciągania, okazać że $\frac{X}{\xi} + \frac{Y}{\eta} = \text{stały}$.

(11). Okazać następujące twierdzenie Ivory'ego: *Gdy mamy dwie elipsoidy jednorodne i współniskowe, to stosunek przyciągań, które jedna elipsoida w kierunkach osi głównych wywiera na punkt powierzchni drugiej elipsoidy, do przyciągań, które w tych samych kierunkach druga elipsoida wywiera na punkt odpowiedni (art. 128), jest równy stosunkowi pól tych przekrojów głównych obu elipsoid, które są prostopadłe do kierunków odpowiednich przyciągań.*

(12). Okazać, że jeżeli przyciąganie jest proporcjonalne względem odległości, wtedy ciało przyciąga każdy punkt tak, jak gdyby masa ciała była skupiona w środku masy (tw. Newton'a).

(13). Obliczyć względem danego punktu potencjał kuli o nieskończenie wielkim promieniu, której gęstość w punkcie, odległym o r od środka, wynosi e^{-r} .

(14). Obliczyć bezpośrednio przyciąganie, które sferoida jednorodna wywiera na punkt μ , znajdujący się na jej powierzchni, przyjmując następnie mianość ε dostatecznie mały, i rozwinać na szeregi siły aż do wyrazów tego rzędu co ε^2 .

(15). Okazać, że, jeżeli normalna do południka sferoidy w punkcie μ przecina oś B w punkcie b , a kierunek przyciągania tego punktu przecina tę oś w punkcie c , to $Oc = \frac{3}{5} Ob$, gdzie punkt O jest środkiem sferoidy. Przytym opuszczamy wyrazy tego rzędu co ϵ^4 i rzędów wyższych (tw. Stirling'a).

(16). Uwzględniając obrót sferoidy jednorodnej około jej osi, okazać, że siła ciężkości wyraża się wzorem następującym: $g = g_0 \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \lambda\right)$, w którym g_0 jest siłą na równiku, a λ szerokością.

(17). Okazać, że siła ciężkości na powierzchni sferoidy zmienia się proporcjonalnie względem długości odcinka normalnej między punktem a osią obrotu sferoidy (tw. Simpson'a).

(18). Wahadło, bijące sekundy czasu średniego we Lwowie ($\lambda = 49^\circ 50''$) zostało przeniesione do Warszawy ($\lambda = 52^\circ 13' 5''$): obliczyć różnicę ilości jego wahań na dobę.

L i t e r a t u r a (Rozdz. XII).

S. LAPLACE, *Mécanique céleste* (tomów 5 i dodatkowy, Paris 1799, 1805, 1825).—IVORY, On the attractions of homogenous ellipsoids, (Phil. transact., London, 1809).—S. D. POISSON: Rémarque sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes. (Bull. de la soc. philomatique, t. III, Paris, 1813); Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes (Paris, 1826); Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène. 1833, (Mém. de l'acad. d. sc., t. XIII, Paris, 1835).—C. F. GAUSS: Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata (1813; Werke, t. V, Göttingen, 1867); Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte (1840, tamże).—G. GREEN, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism (1828; Mathematical papers ed. by Ferrers, London, 1871).—M. CHASLES, Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes; solution synthétique pour le cas général d'un ellipsoïde hétérogène et d'un point extérieur (1838; Mém. des savants étrangers, t. IX, Paris, 1846); Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur (Journ. des math. t. V, 1840); Théorèmes généraux sur l'attraction des corps (Conn. des temps pour 1845, Paris, 1842).—J. PLANA, Mémoire sur différents procédés d'intégration par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les 3 axes sont inégaux, sur un point extérieur (J. v. CRELLE, t. XX, 1840; t. XXVI, 1843).—P. LEJEUNE — DIRICHLET: Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale (1839; Monatsberichte d. Akad. in Berlin, 1841); Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque homogène ou hétérogène (J. v. CRELLE, t. XXXII, 1846); Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte (Leipzig, 1876, 1887).—F. G. MEHLER, Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders. (J. v. CRELLE. t. LXVI, 1866).—F. MERTENS: De functione potentiali duarum ellipsoidum homogenearum (J. v. CRELLE. t. LXIII, 1864); Obliczenie potencjału dla wielościanów jednorodnych (Rocznik tow. nauk. t. XXXV, Kraków, 1867; to samo po nie-

miecku w J. v. CRELLE. t. LXIX, 1868); Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. (J. v. CRELLE. t. LXX, 1869). — MOIGNO, Leçons de Mécanique analytique. Statique (Paris, 1868, lekcya 17 — 19). — F. GRUBE, Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids (J. v. CRELLE. t. LXIX, 1868). — I. TODHUNTER, A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth (Dwa tomy, London, 1873). — J. B. LISTING: Ueber unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde (Göttingen, 1872); Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers (tamże, 1878). — H. ZÜGE, Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids (Math. Annalen, t. X, Leipzig, 1876). — R. CLAUSIUS, Die Potentialfunction und das Potential (wyd. 3-cie, Leipzig, 1877). — A. PICART, Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes (Ann. de l'éc. norm. sup. 2-e sér. t. IX, Paris, 1880). — *Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures* (t. I, Paris, 1881). — C. v. ORFF, Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen (München, 1883). — M. BACHARACH, Abriss der Geschichte der Potentialtheorie (Göttingen 1883). — E. MATHIEU, Théorie du potentiel (Paris, 1885). — E. SARRAU, Sur un théorème de la théorie de l'attraction (Nouv. ann. des math. 3-e sér. t. VI, Paris, 1887). — J. WILSING, Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde mit Hilfe eines Pendelapparates (Potsdam, 1887).
