

jego wielkość pozostaje ciągle zawarta między φ_0 i φ_1 . Między tymi krańcami odbywa się każde wahanie się w czasie $\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Z równania (2) mamy, kładąc $\sin \varphi = \varphi$,

$$(13) \quad d\theta = \frac{c \cdot dt}{r^2 \varphi^2} = \frac{c}{r^2} \cdot \frac{dt}{\varphi_0^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{r} + \varphi_1^2 \sin^2 t} \sqrt{\frac{g}{r}}}.$$

Stąd otrzymamy, przyjmując, że $\theta = 0$ dla $t = 0$,

$$\theta = \frac{c}{r^2 \varphi_0 \varphi_1} \sqrt{\frac{r}{g}} \arctg \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \operatorname{tg} t \sqrt{\frac{g}{r}} \right).$$

Ponieważ zaś z równania (11) wynika $\varphi_0 \varphi_1 = \frac{c}{r \sqrt{gr}}$, przeto

$$(14) \quad \theta = \arctg \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \operatorname{tg} t \sqrt{\frac{g}{r}} \right),$$

a z tego równania możemy kąt θ obliczyć w funkcji czasu. Widzimy więc, że kąt θ rośnie nieustannie z czasem i że płaszczyzna wahan, poprowadzona przez wahadło i pion CA, obraca się w czasie τ o kąt prosty około pionu, że przeto całkowity obrót tej płaszczyzny zachodzi w czasie $2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Czytelnik łatwo sprawdzi, że rzut poziomy wahadła na płaszczyznę xy opisuje elipsę $\frac{x^2}{r^2 \varphi_0^2} + \frac{y^2}{r^2 \varphi_1^2} = 1$, której środkiem jest punkt zawieszenia.

94. TAUTOCHRONY. Tor punktu nazywamy tautochroną, jeżeli punkt, poruszający się po tym torze przy działaniu wiadomej siły, przybywa do pewnego danego na tym torze punktu O w tymże samym czasie, niezależnie od tego, z którego punktu tego toru ruch się rozpoczyna. Niech M (fig. 39) będzie dowolnym położeniem początkowym punktu, w którym prędkość jest równa zeru, O zaś niech będzie stałym położeniem, do którego punkt zdąża, nadto m niech oznacza dowolne miejsce podczas ruchu; prócz tego przez σ oznaczmy łuk OM, przez s dowolny łuk Om, obadwa łuki licząc od punktu stałego O. Jeżeli P_t oznacza składową styczną siły przyłożonej w punkcie m , wziętą dodatnie w kierunku ruchu, to zasada pracy daje prędkość w punkcie m , gdy, dla uproszczenia, masę punktu przyjmujemy jako równą jedności. Mamy bowiem

$$(1) \quad \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = -2 \int_{\sigma}^s P_t \cdot ds = 2 \int_s^{\sigma} P_t \cdot ds,$$

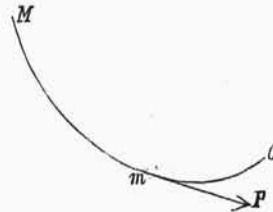


Fig. 39.

skąd

$$dt = -\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{ds}{\left(\int_s^{\sigma} P_t \cdot ds\right)^{\frac{1}{2}}};$$

czas zatem dojścia od M do O wyraża się

$$(2) \quad T = -\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int_{\sigma}^0 \frac{ds}{\left(\int_s^{\sigma} P_t \cdot ds\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\sigma} \frac{ds}{\left(\int_s^{\sigma} P_t \cdot ds\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Kładąc

$$(3) \quad u = \int_0^s P_t \cdot ds, \quad \lambda = \int_0^{\sigma} P_t \cdot ds, \quad ds = \varphi(u) \cdot du,$$

otrzymamy $T = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\lambda} \frac{\varphi(u) \cdot du}{(\lambda - u)^{\frac{1}{2}}}$, a podstawiając $u = \lambda z$, gdzie z jest nową zmienną, mieć będziemy

$$(4) \quad T = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \frac{\varphi(\lambda z) V^{\frac{1}{2}} \lambda \cdot dz}{(z - z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \frac{\Phi(\lambda z) \cdot dz}{(z - z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

przy $\Phi(\lambda z) = \varphi(\lambda z) \cdot V^{\frac{1}{2}} \lambda$. Gdy tor jest tautochroną, wówczas T jest niezależne od λ , a zatem pochodna T względem λ jest równa zero. Różniczkując przeto równanie (4) względem λ , otrzymamy warunek dla tautochrony,

$$\int_0^1 \frac{\Phi'(\lambda z) z \cdot dz}{(z - z^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Powyższa całka, której krańce są stałe, może być równa zero tylko wtedy, kiedy $\Phi'(\lambda z) = 0$; w przeciwnym bowiem razie, rozwijając $\Phi'(\lambda z)$ na szereg, moglibyśmy zawsze dla λ obrać tak małą wartość, iżby ta funkcja miała stałe znak dodatni między powyższymi krańcami, a przeto każdy element całki byłby dodatni, wskutek czego całka nie mogłaby mieć wartości zero. Z warunku $\Phi'(\lambda z) = 0$ wynika $\Phi(\lambda z) = c$, gdzie c jest stałą dowolną, a zatem $\varphi(\lambda z) = \frac{c}{V^{\frac{1}{2}} \lambda z}$, czyli $\varphi(u) = \frac{c}{V^{\frac{1}{2}} u}$, $ds = \frac{c \cdot du}{V^{\frac{1}{2}} u}$, skąd $s = 2c V^{\frac{1}{2}} u$, ponieważ $u = 0$ dla $s = 0$. Z tego otrzymamy $u = s^2 : 4c^2$, a wstawiwszy tę wartość w (5), mieć będziemy

$$\frac{s^2}{4c^2} = \int_0^s P_t \cdot ds, \quad \text{stąd zaś} \quad \frac{s \cdot ds}{2c^2} = P_t \cdot ds,$$

a przeto

$$(5) \quad P_t = \frac{s}{2c^2}.$$

Mamy zatem twierdzenie główne o tautochronie: *siła styczna w każdym punkcie tautochrony jest proporcjonalna względem długości łuku, który punkt ma jeszcze opisać do końca swej drogi* (twierdzenie Newton'a). Ponieważ dla $s=0$, $P_t=0$, przeto widzimy, że w punkcie O siła przyłożona jest równa zeru lub normalna do toru, że zatem *punkt końcowy tautochrony jest miejscem równowagi punktu ze względu na siłę przyłożoną*.

Z równania (1), po wstawieniu wartości siły P_t , wynika

$$(6) \quad v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma^2 - s^2}{2c^2}, \quad \text{skąd}$$

$$(7) \quad T = -c\sqrt{2} \int_{\sigma}^0 \frac{ds}{(\sigma^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi c}{\sqrt{2}},$$

$$(8) \quad c = \frac{T\sqrt{2}}{\pi}, \quad \text{a więc} \quad P_t = \frac{\pi^2}{4T^2} \cdot s.$$

Jeżeli X, Y, Z oznaczają składowe prostokątne siły przyłożonej, to według (8) otrzymamy, jako równanie różniczkowe tautochrony,

$$(9) \quad X \cdot \frac{dx}{ds} + Y \cdot \frac{dy}{ds} + Z \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{\pi^2}{4T^2} \cdot s.$$

Gdyby ruch zaczynał się już z prędkością v_0 , to byłoby

$$(10) \quad T = -c\sqrt{2} \int_{\sigma}^0 \frac{ds}{\sqrt{2c^2v_0^2 + \sigma^2 - s^2}} = c\sqrt{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2c^2v_0^2}{\sigma^2}}} \right].$$

Na tautochronie jest T niezależne od σ , a zatem jest $\frac{2c^2v_0^2}{\sigma^2} = k$, gdzie k jest stałą, czyli $v_0 = \frac{k}{c\sqrt{2}} \cdot \sigma$. To znaczy, że *tor pozostaje tautochroną, jeżeli prędkość początkowa punktu jest proporcjonalna względem łuku, który ten punkt ma jeszcze opisać do końca toru*.

Niech na punkt masy m działa tylko siła ciężkości; wtedy punkt O jest punktem najniższym tautochrony, która do stycznej w tym punkcie będzie zwrócona stroną wypukłą. Obierzmy tę styczną za oś x , pion w O w górę za oś y ; wówczas $P = -g$ jest siłą przyłożoną, której składowa styczna wynosi $P_t = g \cdot \frac{dy}{ds}$; będzie więc, według (8),

$$g \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{\pi^2}{4T^2} \cdot s, \quad g \cdot dy = \frac{\pi^2}{4T^2} \cdot s \cdot ds, \quad \text{a zatem}$$

$$(11) \quad s^2 = \frac{8gT^2}{\pi^2} \cdot y.$$

Ten związek między łukiem a rzędną y cechuje cykloidę zwykłą, a zatem *tautochroną punktu masyjnego, spadającego w próżni, jest zwykła cykloida odwrócona*. Promień koła, tworzącego tę cykloidę, wynosi $r = \frac{gT^2}{\pi^2}$.

95. BRACHISTOCHRONY. Brachistochroną między dwoma danymi punktami nazywamy taką linią krzywą, po której punkt przy danych warunkach ma się poruszać, aby z jednego punktu do drugiego przybył w czasie najkrótszym. Wyznamy brachistochronę dla punktu masyjnego, który z danego punktu a bez prędkości początkowej spada do danego punktu b , leżącego poniżej a , lecz nie na tymże samym pionie. Poprowadźmy płaszczyznę pionową P przez obadwa punkty, obierzmy a jako początek osi x , skierowanej pionowo nadół, prostą poziomą, przechodzącą przez punkt a na płaszczyźnie P , jako oś y ; współrzędnymi punktu b niech będą x_1 i y_1 . Według art. 92-go czas dt spadku na łuku ds linii krzywej wyraża się wzorem

$$dt \cdot \sqrt{2g} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} \cdot dx, \quad \text{gdzie } y' = \frac{dy}{dx},$$

a stąd czas t , potrzebny do opisanego łuku ab ,

$$(1) \quad t \sqrt{2g} = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} dx = \int_0^{x_1} V \cdot dx, \quad \text{gdzie } V = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}.$$

Poprowadźmy od punktu a do b na płaszczyźnie P inną linią krzywą, nieskończenie bliską tej linii, której odpowiada czas t , i niech $t + \delta t$ oznacza czas spadku po tej linii; wtedy

$$\delta t \cdot \sqrt{2g} = \int_0^{x_1} \delta V \cdot dx = \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'^2 + \dots \right) dx;$$

a ponieważ

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1+y'^2)^3}},$$

przeto

$$(2) \quad \delta t \cdot \sqrt{2g} = \int_0^{x_1} \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \delta y' \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{x(1+y'^2)^3}} \delta y'^2 \cdot dx + \dots$$

Jeżeli czas t odnosi się do brachistochrony, to wtedy dla każdej innej krzywej, nieskończenie bliskiej, jest $\delta t > 0$, bez względu na znak wariacji $\delta y'$.

Ponieważ znak wariacji δt zależy od znaków dwu pierwszych wyrazów szeregu (2), przeto dla brachistochrony jest

$$(3) \quad \int_0^{x_1} \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \delta y' \cdot dx = 0 \quad \text{ i } \quad \int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{x(1+y'^2)^3}} \delta y'^2 \cdot dx > 0.$$

Całkując pierwsze wyrażenie przez części, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \delta y' \cdot dx &= \int_0^{x_1} \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} d\delta y = \left[\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \delta y - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{x_1} \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \delta y \right], \end{aligned}$$

a że $\delta y = 0$ dla punktów a i b , a więc dla $x = 0$ i $x = x_1$, przeto

$$\int_0^{x_1} \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \delta y' \cdot dx = - \int_0^{x_1} \frac{d}{dx} \cdot \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \delta y.$$

Ponieważ δy jest dowolne, przeto pierwszemu warunkowi (3) stanie się zadość, jeżeli

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = \frac{1}{a},$$

gdzie a oznacza stałą dowolną. Z ostatniego równania wynika równanie różniczkowe brachistochrony

$$(5) \quad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a-x}{x}},$$

z którego widzimy, że linią szukaną jest cyklojda zwyczajna, której podstawą jest oś y , a punktem zwrotu początek a ; cyklojda ta jest ku osi y zwrócona stroną wklęsłą. Całkując równanie (5) i uwzględniając warunek, że brachistochrona ma być poprowadzona przez punkty a i b , można wyznaczyć promień koła tworzącego cyklojdę.

Żeby zachodził drugi warunek (3), potrzeba, aby dla cyklojdy iloraz $1 : \sqrt{x(1+y'^2)^3} > 0$. Ponieważ ciągle $x > 0$, przeto pierwiastek jest rzeczywisty, a biorąc go, jak czyniliśmy powyżej, ze znakiem więcej, dopełnimy warunku żądanego. A zatem cyklojda czyni zadość wszelkim warunkom dla brachistochrony w powyższym zagadnieniu.

Gdyby nie zachodził warunek, że brachistochrona ma być poprowadzona przez punkt b , wówczas pierwszemu warunkowi (3) stałoby się zadość tylko wtedy, gdy

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = 0,$$

a zatem gdy $y = 0$, ponieważ linija szukana ma przechodzić przez początek a . Brachistochroną byłaby w tym przypadku oś x .

Niech φ oznacza kąt, który styczna do brachistochrony tworzy z kierunkiem siły ciężkości; wówczas, według (5)

$$\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\frac{x}{a-x}}, \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{x}{a}},$$

a stąd

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sin \varphi}{v} = \frac{1}{\sqrt{2ga}} = \text{stałej},$$

a więc prędkość punktu, spadającego po brachistochronie, jest proporcjonalna względem wstawy kąta, który kierunek ruchu tworzy z kierunkiem siły ciężkości.

96. RUCH WZGLĘDNY. — 1. POZORY RUCH WAHADŁA PRZY UWZGLĘDNIENIU OBROTU ZIEMI. Niech wahadło waha się na półkuli północnej, a punkt zawieszenia A obrany będzie jako początek prostokątnego układu współrzędnych, którego osią Ax niech będzie styczna do południka punktu A , skierowana na północ, osią zaś Ay styczna do równoleżnika, skierowana na wschód, osią na koniec Az pionowa ku środkowi ziemi. Jeżeli r jest długością wahadła, to punkt wahający się czyni zadość warunkowi, zachodzącemu niezależnie od sił, $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$; siły zatem połączeń będą odpowiednio μx , μy , μz , gdzie μ jest współczynnikiem nieoznaczonym. Jeżeli λ jest szerokością geograficzną punktu A , ω prędkością kątową obrotu dziennego ziemi, odciętą na jej osi od środka ku biegunowi północnemu, to $\omega \cos \lambda$, 0 , $-\omega \sin \lambda$ są odpowiednio składowymi prędkościami ω w kierunkach osi x , y , z . Ponieważ g przedstawia wypadkową przyciągania ziemi na punkt wahający się i siły odśrodkowej, jeżeli masa punktu jest równa jednostce, przeto równania ruchu pozornego czyli względnego wahadła będą (art. 88)

$$(1) \quad \begin{cases} x'' = \mu x - 2\omega y' \sin \lambda, \\ y'' = \mu y + 2\omega(x' \sin \lambda + z' \cos \lambda), \\ z'' = g + \mu z - 2\omega y' \cos \lambda. \end{cases}$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez $2x'$, $2y'$, $2z'$, dodając iloczyny i następnie całkując, otrzymamy

$$(2) \quad v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0),$$

jako równanie energii, w którym v_0 oznacza prędkość początkową.

Zastosujmy te równania do bardzo małych wahań wahadła. Przy takim założeniu możemy zamiast z przyjąć r , a zatem odrzucić wyrazy, zawierające z' . Ponieważ zaś ω jest bardzo małe, przeto możemy iloraz $\frac{\omega}{r}$ także

opuścić, zwłaszcza dla dostatecznie długiego wahadła. Kładąc przeto w ostatnim równaniu $z'' = 0$, otrzymamy $\mu = -\frac{g}{r}$; będzie więc

$$(3) \quad \begin{cases} x'' = -\frac{gx}{r} - 2\omega y' \sin \lambda, \\ y'' = -\frac{gy}{r} + 2\omega x' \sin \lambda. \end{cases}$$

Te równania określają z dostatecznym przybliżeniem ruch rzutu wahadła na płaszczyźnie poziomej (stycznej do ziemi), przechodzącej przez punkt zawieszenia, albo, co na jedno wychodzi, przechodzącej przez punkt, w którym pionowa punktu A spotyka powierzchnię ziemi. Dla scałkowania tych równań wystawmy w punkcie A na poziomie nowy układ współrzędnych, $A\xi\eta$, obracających się około pionu Az jednostajnie z prędkością kątową $\omega \sin \lambda$ w kierunku przeciwnym składowej $-\omega \sin \lambda$ obrotu dziennego ziemi, wziętej względem tego pionu i niech przy $t=0$ oś $A\xi$ razem się schodzi z osią Ax , a oś $A\eta$ z osią Ay . Dla uskutecznienia zmiany współrzędnych mamy następujące wzory, kładąc $n = \omega \sin \lambda$,

$$x = \xi \cos nt - \eta \sin nt; \quad y = \xi \sin nt + \eta \cos nt.$$

Podstawiając te wartości w (3) i opuszczając kwadrat prędkości kątowej ω , otrzymamy

$$\begin{aligned} \xi'' \cos nt - \eta'' \sin nt &= -\frac{g\xi}{r} \cos nt + \frac{g\eta}{r} \sin nt, \\ \xi'' \sin nt + \eta'' \cos nt &= -\frac{g\xi}{r} \sin nt - \frac{g\eta}{r} \cos nt, \end{aligned}$$

czyli

$$(4) \quad \xi'' + \frac{g\xi}{r} = 0, \quad \eta'' + \frac{g\eta}{r} = 0$$

jako równania zmienione, z których każde z osobna jest całkowalne. Mamy przeto

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 \cos t \sqrt{\frac{g}{r}} + C_2 \sin t \sqrt{\frac{g}{r}}, \\ \eta &= c_1 \cos t \sqrt{\frac{g}{r}} + c_2 \sin t \sqrt{\frac{g}{r}}. \end{aligned}$$

Wyprowadźmy wahadło ze spoczynku w płaszczyźnie południka o bardzo mały kąt α , i przyjmijmy $a = r \sin \alpha$, to dla $t=0$ mieć będziemy $\xi = a$, $\eta = 0$, $\xi' = 0$, $\eta' = an$. Wskutek tego $C_1 = a$, $C_2 = a$, $c_1 = 0$, $c_2 = an \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Będzie zatem

$$(5) \quad \xi = a \cos t \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad \eta = an \sqrt{\frac{r}{g}} \sin t \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Rugując czas, otrzymamy

$$(6) \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\frac{r}{g} \cdot a^2 n^2} = 1,$$

jako równanie pozornego toru, jaki rzut punktu wahającego się opisuje na płaszczyźnie poziomej. Rzut poziomy toru wahadła jest przeto elipsą, której jedna oś a jest styczną do południka, a druga oś $an \sqrt{\frac{r}{g}}$ jest styczną do równoleżnika; ta elipsa jest bardzo wydłużona, albowiem stosunek długości jej osi wynosi $n \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} = \omega \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \sin \lambda$, jest zatem wielkością tegoż samego rzędu, co prędkość kątowna ω . Rzut poziomy wahadła opisuje ową elipsę pozornie w kierunku obrotu dziennego ziemi, podczas gdy elipsa zdaje się obracać około pionu w kierunku przeciwnym z prędkością kątowną $\omega \sin \lambda$, proporcjonalną względem wstawy szerokości geograficznej. Czas potrzebny do opisanie elipsy wynosi $2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Pręt, na którym punkt wahający się jest zawieszony, opisuje powierzchnię stożka eliptycznego, którego wierzchołkiem jest punkt zawieszenia, a którego podstawą jest elipsa (6). Jeżeli θ oznacza kąt, który pręt tworzy z pionem, to największa wartość kąta θ wynosi α ; jeżeli zaś β oznacza jego wartość najmniejszą, to mamy $r \cdot \sin \beta = an \sqrt{\frac{r}{g}}$, skąd $\beta = \alpha \omega \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} \sin \lambda$, gdzie z powodu małych kątów bierzemy łuki zamiast wstaw. Pozorne zatem wahnięcia wahadła na ziemi są stożkowe, a pozorny obrót płaszczyzny wahanja stanowi jeden z największych przekonujących dowodów, że ziemia obraca się około swej osi. Wiadomo, że fizyk francuski, L. Foucault, sprawdził powyższą teorię doświadczeniami, wykonanymi w Panteonie paryskim w r. 1851.

2. RUCH PUNKTU NA OBRACAJĄCEJ SIĘ PŁASZCZYŹNIE. Zastosujemy równania Lagrange'a (art. 78) do następującego zagadnienia: wyznaczyć ruch punktu masyjnego na płaszczyźnie pochyłej, obracającej się jednostajnie około osi pionowej. Obierzmy ślad osi obrotu na płaszczyźnie jako początek O układu współrzędnych względnych x, y, z ; oś obrotu pionowo w górę jako oś z -ów; prostą, według której płaszczyzna pozioma, przez O przechodząca, przecina płaszczyznę ruchu, jako oś x -ów, a oś y -ów prostopadłe do obu dwu poprzednich osi. Ślad obracającej się płaszczyzny na yOz obierzmy jako oś $O\eta$, a oś Ox jako oś $O\xi$. Miejsce punktu na płaszczyźnie wyznaczają współrzędne (ξ, η) , odniesione do układu $O\xi\eta$, tudzież współrzędne x, y, z , odniesione do układu $Oxyz$; obadwa układy współrzędnych obracają się razem z płaszczyzną, która z poziomem Oxy tworzy kąt wiadomy ϑ . Mamy tu $x = \xi$, $y = \eta \cos \vartheta$, $z = \eta \sin \vartheta$; $x' = \xi'$, $y' = \eta' \cos \vartheta$, $z' = \eta' \sin \vartheta$; $T = \frac{m}{2} (\xi'^2 + \eta'^2)$;

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = m\xi', \quad \frac{\partial T}{\partial \eta'} = m\eta', \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0.$$

Składowe siły ciężkości w kierunkach osi x , y , z są odpowiednio 0 , 0 , $-mg$; jeżeli ω jest prędkością kątową obrotu około osi z , to składowe siły odśrodkowej są odpowiednio $m\omega^2\xi$, $m\omega^2\eta \cos \vartheta$, 0 ; a składowe siły odśrodkowej złożonej (art. 88) będą $2m\omega\eta' \cos \vartheta$, $-2m\omega\xi'$, 0 . Mamy przeto siły

$$X = m(\omega^2\xi + 2\omega\eta' \cos \vartheta); \quad Y = m(\omega^2\eta \cos \vartheta - 2\omega\xi'); \quad Z = -mg.$$

Mamy więc tu

$$Q_\xi = X \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} = m(\omega^2\xi + 2\omega\eta' \cos \vartheta),$$

$$Q_\eta = X \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} = m(\omega^2\eta \cos^2 \vartheta - 2\omega\xi' \cos \vartheta - g \sin \vartheta).$$

Podług wzorów Lagrange'a jest

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta} = Q_\eta;$$

otrzymamy przeto równania ruchu względnego

$$(7) \quad \begin{cases} \xi'' = \omega^2\xi + 2\omega\eta' \cos \vartheta, \\ \eta'' = \omega^2\eta \cos^2 \vartheta - 2\omega\xi' \cos \vartheta - g \sin \vartheta. \end{cases}$$

Pomnożmy te równania odpowiednio przez ξ' i η' , dodajmy do siebie iloczyny, całkujemy tak powstałe równanie i oznaczmy przez v prędkość względną punktu; otrzymamy równanie

$$(8) \quad v^2 = \xi'^2 + \eta'^2 = \omega^2(\xi^2 + \eta^2 \cos^2 \vartheta) - 2g\eta \sin \vartheta + c,$$

które wyraża zasadę energii. Z tego widzimy, że równanie

$$(9) \quad \omega^2(\xi^2 + \eta^2 \cos^2 \vartheta) - 2g\eta \sin \vartheta - \lambda = 0,$$

gdzie λ jest stałą dowolną, przedstawia linie potencyalne na płaszczyźnie ruchu punktu. Ponieważ wyróżnik $\omega^4 \cos^2 \vartheta$ tego równania jest dodatny, przeto linie potencyalne są elipsami; punkt przybiiera tę samą prędkość względną, ilekroć tor jego na płaszczyźnie przecina tę samą elipsę. Spółrzędne ξ , η , wspólnego środka S tych elips są $\xi_s = 0$, $\eta_s = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta}$, a ich osi główne są równoległe do osi $O\xi$ i $O\eta$. Obierzmy środek S za nowy początek współrzędnych ξ_1 , η_1 , odpowiednio równoległych do ξ i η ; wówczas równanie takiej elipsy będzie

$$(10) \quad \omega^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 \cos^2 \vartheta) - \frac{g^2}{\omega^2} \tan^2 \vartheta - \lambda = 0.$$

Linie więc potencyalne stanowią układ elips współśrodkowych, podobnych i podobnie leżących; stosunek osi tych elips jest stały, mianowicie równy sto-

sunkowi $\cos \vartheta : 1$. Niech dla $t = 0$ będzie $\xi_1 = \xi_{10}$, $\eta_1 = \eta_{10}$, $v = v_0$; możemy wtedy stałą c obliczyć i otrzymamy prędkość względną punktu ze wzoru

$$(11) \quad v^2 = v_0^2 + \omega^2(\xi_1^2 - \xi_{10}^2) + \omega^2 \cos^2 \vartheta \cdot (\eta_1^2 - \eta_{10}^2).$$

Przekształcając podobnie równania (7), mieć będziemy

$$(12) \quad \xi_1'' = \omega^2 \xi_1 + 2\omega \eta_1' \cos \vartheta, \quad \eta_1'' = \omega^2 \eta_1 \cos^2 \vartheta - 2\omega \xi_1' \cos \vartheta,$$

jako zmienione równania ruchu. Rugując η_1 i jego pochodne, otrzymamy

$$(13) \quad \xi_1^{IV} - \omega^2(1 - 3 \cos^2 \vartheta) \xi_1'' + \omega^4 \cos^2 \vartheta \cdot \xi_1 = 0.$$

Kładąc $\xi_1 = e^{\mu t}$, mieć będziemy dla wyznaczenia μ równanie

$$\mu^4 - \omega^2(1 - 3 \cos^2 \vartheta) \mu^2 + \omega^4 \cos^2 \vartheta = 0,$$

którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste, jeżeli $\cos^2 \vartheta < \frac{1}{9}$. Niech α i β oznaczają pierwiastki dodatnie tego równania; wtedy

$$(14) \quad \xi_1 = A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} + B_1 e^{\beta t} + B_2 e^{-\beta t}.$$

Podstawiając to wyrażenie w pierwszym równaniu (12), otrzymamy

$$(15) \quad \eta_1 = \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha\omega \cdot \cos \vartheta} (A_1 e^{\alpha t} - A_2 e^{-\alpha t}) + \frac{\beta^2 - \omega^2}{2\beta\omega \cdot \cos \vartheta} (B_1 e^{\beta t} - B_2 e^{-\beta t}).$$

Stałe A_1 , A_2 , B_1 i B_2 zależą od warunków początkowych. Z (14) i (15) widzimy, że ξ_1 i η_1 wzrastają z czasem, dążąc do nieskończoności, że przeto w ogólności punkt wciąż oddala się od punktu S. Jeżeli $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, to dla $t = \infty$ jest $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$; w tym więc przypadku dążą punkt asymptotycznie do punktu S, którego jednak w czasie skończonym osiągnąć nie może. Z danych warunków początkowych łatwo wyznaczyć związki między ξ_{10} , η_{10} , tudzież między wielkością i kierunkiem prędkości v_0 , takie, aby powyższy przypadek nastąpił, co pozostawiamy czytelnikowi. Założymy, że $\xi_{10} = 0$, $\eta_{10} = 0$, $v_0 = 0$; wtedy $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, a więc $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$; jeżeli przeto punkt znajdował się na początku w spoczynku w punkcie S, natenczas w tym miejscu ciągle pozostawać będzie. Punkt S przeto jest miejscem równowagi względnej punktu na płaszczyźnie.

Jeżeli $\cos^2 \vartheta > \frac{1}{9}$, wtedy całki równań ruchu będą zawierały funkcje peryjodyczne czasu, z których łatwo można okazać, że tor punktu dąży do przybrania kształtu linii spiralnej. Punkt S może być w pewnych przypadkach granicą, do której punkt dąży asymptotycznie.

Czytelnik przerobi zadanie w przypadku, gdy $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{9}$, tudzież przy założeniu, że $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, t. j., że ruch punktu zachodzi na obracającej się płaszczyźnie pionowej.

Ć W I C Z E N I A.

(1). Punkt rozpoczyna ruch po prostej z danej odległości od środka przyciągania, znajdującego się na tejże prostej, a przyciąganie jest odwrotnie proporcjonalne względem sześcienu odległości: wyznaczyć czas dojścia punktu do tego środka.

(2). Punkt, przyciągany przez dwa punkty w stosunku odwrotnym kwadratów odległości, rozpoczyna ruch z danego punktu między środkami przyciągającymi: wyznaczyć tak prędkość początkową, żeby punkt przyszedł do spoczynku w środku między tymi punktami.

(3). Jeżeli punkt, wychodzący ze spoczynku, od danego środka doznaje przyciągania, odwrotnie proporcjonalnego względem kwadratu odległości, i w czasie t_1 opisuje pierwszą, a w t_2 drugą połowę drogi do środka, okazać, że $t_1 : t_2 = (\pi + 2) : (\pi - 2)$.

(4). Dwa punkty, będące pierwotnie w spoczynku, przyciągają się wzajemnie proporcjonalnie względem odległości: wyznaczyć ich położenia po upływie danego czasu.

(5). Wyznaczyć prawa ruchu punktu masyjnego, wznoszącego się pionowo i doznającego oporu, proporcjonalnego względem sześcienu prędkości. Obliczyć wysokość, do której punkt wzniesie się może przy danej prędkości początkowej.

(6). Punkt, przyciągany od danego środka siłą niezmienną, porusza się ku niemu prostoliniowo ze spoczynku, doznając oporu, proporcjonalnego względem kwadratu prędkości, a odwrotnie proporcjonalnego względem odległości od środka: wyznaczyć odległość punktu od środka, gdy prędkość ruchu przybiera wartość największą.

(7). Punkt swobodny, wyrzucony z pewną prędkością, doznaje odpychania od płaszczyzny, prostopadłego do niej i proporcjonalnego względem odległości od tej płaszczyzny: wyznaczyć tor punktu i podać warunki, żeby torem punktu była linia łańcuchowa.

(8). Wyznaczyć elewację pocisku, wyrzuconego z daną prędkością, aby pocisk z danego punktu przybył w najkrótszym czasie do danej płaszczyzny, nie przechodząc przez ten punkt.

(9). Wyznaczyć prawa ruchu centralnego, przyjmując przyciąganie proporcjonalne względem odległości od środka.

(10). Punkt zostaje wyrzucony w danym kierunku z jednego końca prostej, której każdy punkt przyciąga go proporcjonalnie względem odległości: okazać, że punkt przejdzie przez drugi koniec prostej.

(11). Przyjmując, że tor środka ziemi około słońca jest kołem i że kometa opisuje parabolę około słońca na płaszczyźnie tego koła, okazać, że kometa nie może wewnątrz toru ziemi pozostawać dłużej, jak $\left(\frac{2}{3\pi}\right)$ -tą część roku.

(12). Punkty spadają ze spoczynku ze szczytu koła wzdłuż jego cięciw, a od okręgu koła poruszają się swobodnie: okazać, że miejscem geometrycznym ognisk ich torów jest koło, którego promień jest równy połowie promienia danego koła.

(13). Punkt, wyrzucony z daną prędkością i doznający przyciągania, odwrotnie proporcjonalnego względem sześciannu odległości od danego punktu, opisuje krzywą, którą nazywamy spiralną Cotes'a. Podać równanie tej spiralnej i rozważyć jej rozmaite kształty, zależne od warunków początkowych.

(14). Jeżeli dwa pociski wyrzucimy z tego samego punktu z prędkościami a i a_1 pod elewacjami α i α_1 , to ich parabole rzutu przetną się jeszcze w drugim punkcie: wyznaczyć czas między przejściem jednego i drugiego pocisku przez ten punkt.

(15). Pod wpływem jak wielkiego przyciągania punkt opisuje lemniskatę Jakuba Bernoulli'ego $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$?

(16). Okazać, że jeżeli prędkość punktu, przyciąganego przez stały środek, jest odwrotnie proporcjonalna względem jego odległości od środka, natenczas torem punktu jest spiralna logarytmiczna.

(17). Okazać, że czas spadku planety ze spoczynku do środka słońca jest równy czasowi, w którymby planeta opisała połowę toru eliptycznego, o osi głównej, równej wysokości spadku (twierdzenie Santini'ego).

(18). Punkt opisuje spiralną logarytmiczną, której biegun przyciąga go z siłą, odwrotnie proporcjonalną względem kwadratu odległości: wyznaczyć czas dojścia punktu z danej odległości ze spoczynku do bieguna spiralnej.

(19). Wyznaczyć linią, po której punkt materialny ma tak spadać, aby jego rzut na linią pionową poruszał się jednostajnie. Ta linia, zwana podług Leibniz'a izochroną, jest parabolą półkubiczną.

(20). Wyznaczyć taką linią, iżby punkt, spadający wzdłuż niej ze spoczynku z położenia M do A, opisał łuk MA w tym samym czasie, co cięciwę MA. — Krzywa jest lemniskatą J. Bernoulli'ego (twierdzenie Saladini'ego).

(21). Z danego punktu M wykreślamy układ cyklojd zwykłych odwróconych, o poziomej podstawie, których spólnym punktem zwrotu jest punkt M: wyznaczyć synchroną tych cyklojd, to znaczy linią, do której punkt, spadający z M ze spoczynku, przybywa w tym samym czasie, po którejkolwiek spada cyklojdzie. (Synchrona przecina każdą cyklojdę pod kątem prostym).

(22). Okazać, że epicykloida jest brachistochroną punktu, przyciąganego od środka siłą, proporcjonalną względem odległości.

(23). Punkt, opisujący elipsę, doznaje od jej ognisk przyciągań, odwrotnie proporcjonalnych względem kwadratu odległości, podczas gdy środek elipsy przyciąga go proporcjonalnie względem odległości: okazać, że ciśnienie na elipsę jest odwrotnie proporcjonalne względem promienia krzywizny, i wyznaczyć tę prędkość początkową, dla której to ciśnienie byłoby równe zeru.

(24). Wyznaczyć linią stałego ciśnienia na płaszczyźnie pionowej, to znaczy taką linią, któraby od punktu, spadającego po niej, doznawała w każdym miejscu tego samego ciśnienia.

(25). Wyznaczyć brachistochroną punktu, poruszającego się na danej powierzchni. Stosując wyniki do powierzchni obrotowych, okazać, że początkowy element brachistochrony jest styczny do odpowiedniego południka.

(26). Wyznaczyć równanie różniczkowe tautochrony punktu, przyciąganego przez dany środek siłą, proporcjonalną względem odległości.

(27). Punkt spada po cykloidzie zwykłej nieodwróconej, doznając oporu, wprost proporcjonalnego względem kwadratu prędkości i odwrotnie proporcjonalnego względem odległości od wierzchołka: wyznaczyć czas dojścia punktu do podstawy cykloidy.

(28). Wyznaczyć ruch punktu, spadającego w rurze prostej, której jeden koniec obraca się jednostajnie na płaszczyźnie poziomej, a drugi koniec jest nieruchomy.

(29). Okazać, że zwykła cyklopedia odwrócona jest tautochroną w środku, którego opór jest proporcjonalny względem prędkości (twierdzenie Newton'a).

(30). Okazać, że linia łańcuchowa jest tautochroną względem swego wierzchołka, jeżeli siła jest równoległa i proporcjonalna względem rzędnych, liczonych od kierownicy, i działa ku tej kierownicy.

Literatura dynamiki punktu (Rozdz. VI—VIII).

C. G. I. JACOBI, De motu puncti singularis (Journ. v. Crelle, t. XXIV, 1842).—V. PUISEUX, Note sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère (Journ. des math., t. VII, 1842); Sur les courbes tautochrones (tamże, t. IX, 1844).—P. A. HANSEN, Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde (Danzig, 1853).—DUMAS, Ueber die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde (J. v. Crelle, t. L, 1855).—LINDELÖF, Leçons sur le calcul des variations (Paris, 1861).—P. SERRET, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure (Paris, 1860).—C. OHRTMANN, Das Problem der Tautochronen (Berlin, 1872).—M. MAJEWSKI, Traité de Balistique extérieure (Paris, 1872).—H. RESAL, Solution élémentaire du problème général de la brachistochrone (Nouv. Ann. des math., t. XV, Paris, 1877).—P. G. TAIT AND J. STEELE, A treatise on the dynamics of a particle (London, 1878).—DE SPARRE, Sur le mouvement du pendule conique à la surface de la terre (Paris, 1882).—F. ASMODOEO, Monografia delle curve tantocrone (Avellino, 1883).—L. B. CARLL, A treatise on the calculus of variations (London, 1885).
