

## ROZDZIAŁ VII.

### CIĄG DAJSZY DYNAMIKI PUNKTU.

(KINETYKA PUNKTU.)

---

**80.** ROZWIĄZANIA OGÓLNE RÓWNAŃ RUCHU. Otrzymawszy według podanych metod równania ruchu, należy się zająć ich całkowaniem. Jeżeli ruch punktu jest prostoliniowy,  $x$  oznacza odległość punktu od punktu stałego, obranego na prostej,  $m$  masę punktu, a  $X$  siłę działającą wzdłuż prostej, to

$$(1) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

jest jedynym równaniem różniczkowym tego ruchu, w którym  $X$  jest wogólności funkcją wielkości  $\frac{dx}{dt}$ ,  $x$  i  $t$ . To równanie możemy napisać ogólnie pod postacią

$$(2) \quad F\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x, t\right) = 0,$$

z której się okazuje, że rozwiązanie zagadnienia o ruchu prostoliniowym punktu sprowadza się do całkowania jednego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu 2-go między dwiema zmiennymi  $x$  i  $t$ . Kładąc  $x' = \frac{dx}{dt}$ , możemy powyższe równanie zastąpić przez układ równoważny dwu równań rzędu 1-go między trzema zmiennymi,

$$(3) \quad \frac{dx'}{dt} = \varphi(x', x, t), \quad \frac{dx}{dt} = x'.$$

Całka ogólna równania (1) lub (2), czyli tak zwana całka druga tego równania, którą możemy wyrazić w postaci

$$(4) \quad f(x, t, c_1, c_2) = 0,$$

jest wyrażeniem  $x$  w funkcji zmiennej niezależnej  $t$ , zawierającym dwie stałe dowolne  $c_1$  i  $c_2$ , które można tak wyznaczyć, iżby zmienna  $x$  i jej pochodna  $x'$  przybrały dane wartości dla pewnej wartości czasu  $t$ . Dla wyznaczenia tych stałych, a zatem dla rozwiązania podanego zagadnienia, musimy znać miejsce i prędkość punktu dla pewnego czasu. Zadanie o ruchu uważamy za rozwiązane, jeżeli wyznaczymy całkę ogólną i wartości stałych. Warunki, pozwalające wyznaczyć owe stałe, nazywamy wogólności warunkami początkowymi i ruchu, one wyrażają bowiem zwykle  $x$  i  $x'$  dla  $t = 0$ .

Używając układu równań (3), uważamy zadanie za rozwiązane, jeżeli wyznaczymy odpowiedni układ równań całkowych, czyli tak zwanych rozwiązań zupełnych, t. j. równań

$$(5) \quad f_1(x', x, t, C_1, C_2) = 0, \quad f_2(x', x, t, C_1, C_2) = 0,$$

w których  $C_1$  i  $C_2$  oznaczają stałe dowolne. Za rozwiązania zupełne uważamy także dwa równania

$$(6) \quad x = \psi_1(t, C_1, C_2), \quad x' = \psi_2(t, C_1, C_2),$$

wyrażające drogę i prędkość w funkcjach czasu, w których obliczono stałe stosownie do warunków początkowych. —

Równania różniczkowe ruchu krzywoliniowego punktu swobodnego są

$$(7) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

w których jako  $X, Y, Z$  należy wziąć rzuty prostokątne siły przyłożonej, będące wogólności funkcjami wielkości  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, x, y, z$  i  $t$ . Podstawiając zamiast pochodnych  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  odpowiednio nowe zmienne  $x', y', z'$ , możemy powyższy układ trzech równań różniczkowych rzędu 2-go zastąpić przez układ równoważny sześciu równań różniczkowych rzędu 1-go,

$$(8) \quad \begin{cases} m \frac{dx'}{dt} = X, & m \frac{dy'}{dt} = Y, & m \frac{dz'}{dt} = Z, \\ \frac{dx}{dt} = x', & \frac{dy}{dt} = y', & \frac{dz}{dt} = z'. \end{cases}$$

Przez całkowanie układu (7) lub (8) otrzymamy składowe prędkości punktu, tudzież współrzędne jego w funkcjach czasu. Rozwiązania zupełne tych równań będą zawierały sześć stałych dowolnych; należy zatem zagadnienie uważać za rozwiązane, jeżeli wartości tych stałych zostały wyznaczone. W celu wyznaczenia stałych potrzebujemy znać wartości współrzędnych i ich pochodnych dla pewnej wartości  $t$ , t. j. z warunków początkowych wyznaczymy współrzędne punktu i rzuty jego prędkości dla danego czasu.

**81. ZASADA PÓŁ.** Jeżeli równania ruchu (każde z osobna) nie są całkowne, natenczas, dla scałkowania układu

$$(1) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

tworzymy z tych równań przez pewne ich połączenia trzy inne równania, mogące je zastąpić, których lewe strony są pochodnymi zupełnymi pewnych funkcji wielkości  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $t$ , a których prawe strony są zerami. Jeżeli takie połączenia są możliwe, jeżeli zatem układ (1) możemy zastąpić przez układ następujący:

$$(2) \quad \frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\Phi_3}{dt} = 0,$$

to całkując te nowe równania, otrzymamy

$$(3) \quad \Phi_1 = C_1, \quad \Phi_2 = C_2, \quad \Phi_3 = C_3,$$

gdzie  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  oznaczają stałe. Równania (3) przedstawiają tak zwane całki pierwsze równań (1). Rozwiązując je względem  $x'$ ,  $y'$  i  $z'$ , otrzymamy rzuty prędkości punktu w funkcjach zmiennych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  i stałych  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ . Jeżeli z tych rozwiązań względem  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  można podobnie utworzyć trzy nowe równania, np.

$$(4) \quad \frac{d\Psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\Psi_3}{dt} = 0,$$

to przez całkowanie tego układu otrzymamy całki drugie równań ruchu

$$(5) \quad \Psi_1 = c_1, \quad \Psi_2 = c_2, \quad \Psi_3 = c_3,$$

w których  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  oznaczają nowe stałe. Rozwiązania (5) zawierają sześć stałych dowolnych, które z wartości początkowych na  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $x'$ ,  $y'$  i  $z'$  mogą być obliczone.

Takie postępowanie z łatwością prowadzi do celu, jeżeli funkcje  $\Phi_i$  i  $\Psi_i$  łatwo wyznaczone być mogą. Pewne grupy zagadnień o ruchu punktu mogą być rozwiązane na podstawie tej metody, która prowadzi do ważnych a ciekawych twierdzeń o ruchu, wynikających z rozważania powyższych całek. —

Możemy otrzymać jeden taki układ trzech równań (2), mnożąc ostatnie z równań (1) przez  $y$  i dodając do niego drugie, pomnożone przez  $-x$ , mnożąc następnie pierwsze przez  $z$  i dodając do niego trzecie, pomnożone przez  $-x$ , na koniec, mnożąc drugie równanie przez  $x$  i dodając pierwsze, pomnożone przez  $-y$ . Tym sposobem otrzymamy następujące trzy równania:

$$\begin{aligned} m \left( y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= Zy - Yz, \\ m \left( z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= Xz - Zx, \\ m \left( x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= Yx - Xy, \end{aligned}$$

które możemy tak symbolicznie przedstawić:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} m \left( y \cdot \frac{dz}{dt} - z \cdot \frac{dy}{dt} \right) = Zy - Yz, \\ \frac{d}{dt} m \left( z \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dz}{dt} \right) = Xz - Zx, \\ \frac{d}{dt} m \left( x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} \right) = Yx - Xy. \end{cases}$$

Prawe strony tych równań wyrażają odpowiednio momenty siły ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) względem osi współrzędnych (art. 71), a ich lewe strony są pochodnymi zupełnymi względem  $t$ . Jeżeli składowe siły zadość czynią warunkom

$$(7) \quad Zy - Yz = 0, \quad Xz - Zx = 0, \quad Yx - Xy = 0,$$

wtedy

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0; \end{cases}$$

otrzymamy zatem następujące całki pierwsze równań ruchu;

$$(9) \quad \begin{aligned} y \cdot \frac{dz}{dt} - z \cdot \frac{dy}{dt} &= C_1, \\ z \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dz}{dt} &= C_2, \\ x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} &= C_3. \end{aligned}$$

Równania (7), wyrażające warunki istnienia tych całek, są od siebie zależne; jeżeli bowiem którekolwiek dwa z tych warunków zachodzą, to trzeci będzie także spełniony. Według więc tego, czy tylko jeden, czy też wszystkie trzy warunki (7) są spełnione, otrzymamy tym sposobem albo jedną alboważ trzy całki pierwsze.

Każdy z osobna z warunków (7) wyraża, że moment siły względem jednej z osi układu współrzędnych jest równy zeru, że zatem siła przecina odpowiednią oś. Jeżeli siła, nie leżąca na płaszczyźnie współrzędnych, przecina dwie osi, to ona przechodzi przez początek układu, a zatem przecina także oś trzecią. Siłę, do punktu przyłożoną, której promień działania przechodzi stale przez pewien punkt, nazywamy siłą centralną, a to z tego powodu, że przyspieszenie punktu swobodnego, do którego taka siła jest przyłożona, przechodzi przez punkt stały, a zatem ruch punktu jest ruchem centralnym (art. 15). Dla ruchu przeto centralnego możemy bezpośrednio podać trzy całki pierwsze (9). Jeżeli siła stale przecina tylko jedną z osi układu współrzędnych, natenczas otrzymamy tylko jedną całkę pierwszą, odpowiadającą tej osi.

Niech  $m, (x, y, z)$ , i  $m', (x+dx, y+dy, z+dz)$ , będą dwoma nieskończenie bliskimi położeniami punktu; wtedy wielkości  $dF_x = \frac{1}{2}(ydz - zdy)$ ,  $dF_y = \frac{1}{2}(zdx - xdz)$ ,  $dF_z = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$  oznaczać będą odpowiednio rzuty prostokątne pola (wycinka)  $dF = Om'm'$ , którego wierzchołkiem jest początek osi  $O$ , na płaszczyzny  $yOz$ ,  $zOx$  i  $xOy$ . Pochodną  $\frac{dF}{dt}$  nazywamy, jak wiadomo, prędkością wycinkową ruchu punktu (art. 15). Rzucając punkt podczas ruchu na płaszczyzny współrzędnych, otrzymamy  $\frac{dF_x}{dt}$ ,  $\frac{dF_y}{dt}$ ,  $\frac{dF_z}{dt}$ , jako odpowiednie prędkości wycinkowe ruchu tych rzutów, przyczem

$$(10) \quad \frac{dF}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dF_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dF_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dF_z}{dt}\right)^2}.$$

Całki zatym pierwsze wyrażają, że prędkość wycinkowa ruchu odpowiedniego rzutu punktu jest stała; jeżeli wszystkie trzy całki istnieją, natenczas prędkość wycinkowa ruchu punktu będzie stała. I nawzajem, jeżeli prędkość wycinkowa punktu jest stała, to zachodzą powyższe trzy całki pierwsze. Całki zatym pierwsze wyrażają zasadniczą własność ruchu centralnego, którą okazaliśmy w kinematyce w art. 15-ym.

Twierdzenie, które przedstawiają równania (7) i (9), możemy tak wysłować: *jeżeli siła, przyłożona do punktu swobodnego, sadość czyni jednemu lub dwu z warunków  $Zy - Yz = 0$ ,  $Xz - Zx = 0$ ,  $Yx - Xy = 0$ , to można mieć odpowiednio jedną lub trzy całki pierwsze równań ruchu tego punktu.* Z powodu związków, zachodzących między tymi całkami a polami, które promień wodzący, wychodzący ze środka  $O$  opisuje podczas ruchu punktu, nazywamy to twierdzenie zasadą pól.

Lewe strony równań (6) mają znaczenie dynamiczne. Iloczyn  $m \cdot \frac{dx}{dt}$ ,  $m \cdot \frac{dy}{dt}$ ,  $m \cdot \frac{dz}{dt}$  wyrażają odpowiednio impulsy (czyli siły chwilowe, art. 69), jakieby na punkt o masie  $m$  wyrzucić należało w kierunkach osi, aby mu ze spoczynku udzielić tej prędkości, jaką on rzeczywiście posiada; wielkości zaś

$$m \cdot \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right), \quad m \cdot \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right), \quad m \cdot \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right)$$

wyrażają odpowiednio ich momenty względem osi współrzędnych. Z równań więc (6) okazuje się, że dla każdego ruchu moment siły przyłożonej względem którejkolwiek osi współrzędnych jest równy pochodnej względem czasu momentu impulsu względem tej osi. Jeżeli zatym moment siły przyłożonej względem jednej z osi współrzędnych jest równy zeru, natenczas moment impulsu względem tej osi jest wielkością stałą. Takie znaczenie ma każda z całek (9). Dla ruchu centralnego moment impulsu względem środka ruchu jest stały.

Mnożąc równania (9) odpowiednio przez  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i dodając iloczyny, otrzymamy

$$(11) \quad C_1x + C_2y + C_3z = 0$$

jako równanie płaszczyzny ruchu centralnego. Stałe  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  są odpowiednio proporcjonalne względem dostaw kątów, które prostopadła do téj płaszczyzny tworzy z osiami współrzędnych.

**82. ZASADA PRACY.** Otrzymamy inne połączenie równań ruchu, prowadzące także przy pewnych warunkach do całki pierwszej, mnożąc te równania odpowiednio przez  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  i dodając iloczyny. Tym sposobem otrzymamy równanie

$$m \cdot \left( \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \right) = X \cdot \frac{dx}{dt} + Y \cdot \frac{dy}{dt} + Z \cdot \frac{dz}{dt}.$$

A ponieważ

$$v^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2,$$

gdzie  $v$  jest prędkością punktu, przeto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Będzie więc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (mv^2) = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt},$$

a zatem także

$$(1) \quad d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz.$$

Jeżeli  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  są składowymi siły  $P$ , do punktu przyłożonej, której dostawy kierunkowe są  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , a punkt wskutek działania téj siły w elemencie czasu  $dt$  przejdzie z położenia  $m$ ,  $(x, y, z)$ , do położenia nieskończenie bliskiego  $m'$ ,  $(x+dx, y+dy, z+dz)$ , opisując drogę  $ds$ , której dostawy kierunkowe są  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , natenczas

$$(2) \quad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = (a\alpha + b\beta + c\gamma) P \cdot ds = P \cdot ds \cdot \cos(P, ds),$$

gdzie  $(P, ds)$  oznacza kąt, który siła tworzy z kierunkiem ruchu punktu. Iloczyn wielkości siły i prostokątnego rzutu nieskończenie małego przesunięcia jęj punktu przyłożenia na kierunek siły, nazywamy pracą elementarną siły téj. Oznaczając pracę elementarną siły  $P$  przez  $d\Pi$ , mamy

$$(3) \quad d\Pi = P \cdot ds \cdot \cos(P, ds) = P \cdot \cos(P, ds) \cdot ds,$$

a zatem, według (2),

$$(4) \quad d\Pi = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz.$$

Rozważaliśmy w art. 73-im tak zwaną pracę przygotowaną siły; jeżeli w tam-

tym określeniu zamiast przesunięcia przygotowanego podstawimy nieskończenie małe przesunięcie rzeczywiste tego punktu, to otrzymamy pracę elementarną siły. Twierdzenia o pracy przygotowanej stosują się także do pracy elementarnej. Praca elementarna siły równa się także iloczynowi elementu drogi punktu i rzutu siły na kierunek tej drogi. Znak pracy elementarnej otrzymujemy według takiejże samej reguły, jaka służy dla pracy przygotowanej. *Praca elementarna siły jest równa sumie jednoczesnych prac elementarnych jej sił składowych.*

Jeżeli siłę  $P$  rozłożymy na siłę styczną  $P_t$  i na siłę normalną  $P_n$ , to  $P_t = P \cos(P, ds)$ , a zatem  $d\Pi = P_t \cdot ds$ . Praca zatem elementarna siły równa się także pracy jej składowej stycznej do toru punktu przyłożenia.

Jeżeli  $m_1$  i  $m_2$  oznaczają dwa dowolne położenia punktu na torze ( $m$ ), których odległości od dowolnego początku, na torze obranego, są odpowiednio  $s_1$  i  $s_2$ , to całkując równanie (3) między krańcami  $s_1$  i  $s_2$ , otrzymamy

$$(5) \quad \Pi = \int_{s_1}^{s_2} P \cdot ds \cdot \cos(P, ds).$$

Wielkość  $\Pi$ , tym sposobem wyznaczoną, t. j. całkę prac elementarnych siły, wziętą między krańcami, odpowiadającymi dwu danym położeniom jej punktu przyłożenia, nazywamy pracą siły, albo także pracą mechaniczną siły, wykonaną podczas ruchu na torze ( $m$ ) od punktu  $m_1$  do punktu  $m_2$ . Ponieważ wartość tej całki zależy od wartości funkcji  $P \cdot \cos(P, ds)$  między krańcami całkowania i od tych krańców, a wartości owej funkcji zależą od siły i od drogi opisaną, przeto praca siły zależy od prawa jej działania, od drogi jej punktu przyłożenia i od położenia obudwu punktów, wyznaczających krańce całkowania. Według (4) będzie także

$$(6) \quad \Pi = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

gdzie całkę należy wziąć między odpowiednimi krańcami. Znając równania toru  $x=f(z)$ ,  $y=\varphi(z)$ , otrzymamy  $dx=f'(z) \cdot dz$ ,  $dy=\varphi'(z) \cdot dz$ ; jest więc

$$(7) \quad \Pi = \int_{z_1}^{z_2} [X \cdot f'(z) + Y \cdot \varphi'(z) + Z] dz.$$

Z tego wyrażenia pracy, w którym zamiast  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  należy podstawić ich wartości, okazuje się zależność pracy od drogi punktu między krańcami całkowania. Wyrażamy tę zależność, mówiąc, że całkujemy wzdłuż toru punktu między danymi krańcami, aby obliczyć pracę siły. Jeżeli siła jest stała co do kierunku i co do wielkości, wtenczas

$$(8) \quad \Pi = P \cdot \int_{s_1}^{s_2} ds \cdot \cos(P, ds).$$

Ponieważ ta całka wyobraża rzut prostokątny drogi punktu między danymi krańcami na kierunku siły, przeto w tym przypadku praca siły jest iloczynem jej wielkości i rzutu drogi punktu na siłę. Rzut drogi na siłę zależy tylko od położenia punktów krańcowych,  $m_1$  i  $m_2$ , i od kierunku siły, a nie jest zależny od kształtu ani od długości toru ( $m$ ); praca więc siły nie zależy w tym przypadku od linii, po której punkt porusza się od  $m_1$  do  $m_2$ . Ten przypadek zachodzi np. dla siły ciężkości. Praca siły ciężkości jest iloczynem tej siły i rzutu pionowego drogi opisaną; jeżeli punkt spada, praca siły ciężkości jest dodatnia, a jeżeli punkt podnosi się, natenczas praca tej siły jest ujemna.

Jeżeli ruch punktu jest prostoliniowy, a siła niezmienna działa w kierunku ruchu, to jej praca jest iloczynem siły i drogi, przez punkt opisaną.

Na podstawie podanych określeń, wynika z równania (1), że *praca elementarna siły jest równa różnicy energii kinetycznej jej punktu przyłożenia*. Całkując to równanie między dwoma krańcami, dla których  $v_1$  i  $v_2$  są prędkościami punktu, otrzymamy

$$(9) \quad \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

co przedstawia twierdzenie: *praca siły jest równa różnicy energii kinetycznej punktu między dwoma odpowiednimi jego położeniami*. To twierdzenie wyraża tak zwaną zasadę pracy. Jeżeli praca siły jest dodatnia, natenczas wzrasta energija punktu, a zatem i prędkość jego; jeżeli praca siły jest ujemna, zmniejsza się energija i prędkość punktu. Jeżeli  $v_1 = 0$ , a zatem siła została przyłożona do punktu spoczywającego, to energija nabyta przez punkt, jest równa pracy siły.

**83. ZASADA ENERGII I ZASADA ZACHOWANIA ENERGII.** Równanie (1) art. 82-go daje się scałkować, jeżeli znamy drogę punktu; nie możemy zatem otrzymać z niego całki równań ruchu, jeżeli prawa strona tego równania zależy od wartości funkcji między krańcami całkowania, t. j. jeżeli  $X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz$  nie jest różniczką zupełną pewnej funkcji współrzędnych, bez względu na związki, między tymi współrzędnymi zachodzące. Jeżeli zaś  $X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz$  jest różniczką zupełną, niezależnie od związków, zachodzących między współrzędnymi, a zatem jeżeli

$$(1) \quad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = dU,$$

gdzie  $U$  jest funkcją współrzędnych, nie zawierającą czasu wyraźnie, wtedy otrzymamy równanie

$$(2) \quad d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = dU,$$

z którego wynika, po scałkowaniu,

$$(3) \quad \frac{1}{2} m v^2 = U + H,$$



gdzie  $H$  jest stałą dowolną. To zatem równanie przedstawia całkę równań różniczkowych ruchu. Równanie (1) zachodzi wyłącznie wtedy, kiedy siła  $(X, Y, Z)$  posiada potencjał (art. 77), nie zawierający czasu wyraźnie, a  $U$  jest właśnie potencjałem siły. W tym przypadku różniczka potencjału siły jest równa pracy elementarnej tej siły. Przy tym założeniu, mamy (art. 77)

$$(1) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

równania zaś różniczkowe ruchu są

$$(5) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

a równanie (3) przedstawia ich całkę pierwszą. Mamy zatem następujące twierdzenie: *jeżeli siła posiada potencjał, nie zawierający czasu wyraźnie, wówczas  $\frac{1}{2}mv^2 = U + H$  jest całką pierwszą równań ruchu.* Możemy to twierdzenie także tak wysłowić: *jeżeli siła posiada potencjał, nie zawierający czasu wyraźnie, wówczas energia kinetyczna punktu różni się od potencjału siły o wielkość stałą.* W tej postaci to twierdzenie przedstawia tak zwaną zasadę energii.

Stosując równanie (3) do dwu położań punktu, w których  $v_1$  i  $v_2$  oznaczają jego prędkości, a  $U_1$  i  $U_2$  odpowiednie wartości potencjału siły, otrzymamy

$$(6) \quad \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = U_2 - U_1$$

bez względu na drogę punktu, między tymi położeniami opisaną. *Różnica energii punktu między dwoma jego położeniami jest równa odpowiedniej różnicy wartości potencjału siły. Przyrost energii punktu między dwoma jego położeniami zależy tylko od tych położań, a nie zależy od drogi, między nimi opisaną. Praca siły jest równa różnicy wartości jej potencjału między dwoma położeniami punktu.*

Ponieważ potencjał siły  $U$  jest funkcją współrzędnych jej punktu przyłożenia, przeto miejscem geometrycznym takich punktów, w których potencjał siły posiada tę samą wartość  $C$ , jest powierzchnia, której równanie jest  $U - C = 0$ , gdzie  $C$  jest stałą. Taką powierzchnią nazywamy powierzchnią potencyjalną, albo także powierzchnią poziomą. Ta ostatnia nazwa powstała przez wzgląd na zastosowanie tych powierzchni w mechanice cieczy. Jeżeli potencjał jest funkcją doskonałą współrzędnych, natenczas w każdym punkcie może posiadać tylko jedną wartość, z czego wynika, że dwie powierzchnie potencyjne nie przecinają się. W równaniu powierzchni potencyjальной stała  $C$  może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste od  $-\infty$  do  $+\infty$ , a równanie różniczkowe każdej takiej powierzchni jest:

$$(7) \quad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0,$$

z czego wnosimy, że siła w każdym punkcie jest normalna do odpowiedniej powierzchni potencyalnej; przyspieszenie więc punktu jest także normalne do tej powierzchni. Lewa strona tego równania jest pracą elementarną siły, a zatem jeżeli punkt porusza się na powierzchni potencyalnej, to praca siły jest równa zeru. Z tego wynika, że ruch punktu na powierzchni potencyalnej jest jednostajny, że zatem punkt pozostaje w równowadze w każdym miejscu na tej powierzchni. Dlatego powierzchnią potencyalną nazywamy także powierzchnią równowagi punktu.

Obierzmy na powierzchni potencyalnej punkt dowolny  $(x, y, z)$  i poprowadźmy przezeń prostą o dostawach kierunkowych  $a, b, c$ . Wówczas  $aX + bY + cZ = a \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial U}{\partial z}$  będzie rzutem siły na tę prostą. Jeżeli na tej prostej obierzmy punkt nieskończenie bliski  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  i gdy  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ , to  $a = \frac{dx}{ds}$ ,  $b = \frac{dy}{ds}$ ,  $c = \frac{dz}{ds}$ ; a zatem składowa siły, wzięta w kierunku elementu  $ds$ , jest

$$(8) \quad \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{dU}{ds}.$$

Otrzymujemy więc rzut siły na dowolny kierunek podobnym sposobem z pochodnej potencyalu, jak rzuty tej siły na osi spółrzędnych.

Niech powyższy element  $ds$  ma kierunek normalnej do odpowiedniej powierzchni potencyalnej, a  $dn$  niech będzie długością tego elementu normalnej; według (8) wielkość siły w punkcie  $(x, y, z)$  wyrazi się przez pochodną  $\frac{dU}{dn}$ . Ponieważ  $dn$  jest grubością warstwy, ograniczonej dwiema nieskończenie bliskimi powierzchniami potencyalnymi, przeto siła jest odwrotnie proporcjonalna względem grubości tej warstwy. Jeżeliby się zatem dwie powierzchnie potencyalne przecinały, to w każdym punkcie przecięcia byłoby  $dn = 0$ , siła zatem przybierałaby w takim punkcie wartość nieskończenie wielką.

Niech punkt przy działaniu siły, potencjał posiadając, po upływie jakiegokolwiek czasu i po opisanu jakiejkolwiek drogi wraca do swego położenia pierwotnego, lub niech przybywa do punktu, leżącego na powierzchni potencyalnej, temu położeniu odpowiedniej, wtedy w równaniu (6)  $U_2 - U_1 = 0$ , a zatem energija tego punktu odzyska pierwotną wielkość, czyli, jak mówimy, zostanie zachowana. Mamy więc twierdzenie: jeżeli siła, do punktu przyłożona, ma potencjał, nie zawierający czasu wyraźnie, natenczas energija kinetyczna tego punktu zostaje zachowana, ilekroć punkt przechodzi podczas ruchu przez tę samą powierzchnią potencyalną. To twierdzenie wyraża tak zwaną zasadę zachowania energii.

Ponieważ ta zasada stosuje się tylko do sił, mających potencjał, przeto takie siły nazywamy częstokroć siłami zachowującymi. Siły, nie mające potencjału, zowiemy siłami rozpraszającymi. Przy działaniu siły roz-

praszającej punkt nie przybywa do miejsca pierwotnego z pierwotną energiją, lecz energija jego zmienia się, stosownie do pracy siły, która zależy od drogi, po jakiej punkt powrócił do położenia pierwotnego. Jeżeli całkę, wyrażającą pracę siły, obliczymy dla krzywej zamkniętej, natenczas wartość tej całki jest równa zeru dla siły zachowującej; zaś dla siły rozpraszającej ta całka nie będzie równa zeru, lecz zależy od przebiegu całkowania, czyli od opisanej drogi.

**84. PRZYKŁADY SIŁ ZACHOWUJĄCYCH.** Zagadnienia o siłach, mających potencjał, należą do najważniejszych zagadnień kinetyki; dla tego podamy niektóre rodzaje takich sił. Siły zachowujące zależą tylko od miejsca, jakie punkt podczas ruchu zajmuje w przestrzeni, a są niezależne od czasu. Wszystkie zatem siły, zależne od prędkości punktu, jak np. opór powietrza lub innego środka, w którym ruch zachodzi, należą do sił rozpraszających. Jeżeli więc podczas ruchu uwzględniamy opór środka, natenczas nie istnieje całka, wynikająca z zasady energii.

a) Zasada energii zachodzi dla siły, niezmiennej co do wielkości i co do kierunku. Jakoż, mając taką siłę  $P$ , obierzmy oś  $z$ -ów równoległą do tej siły; jako jej składowe otrzymamy  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = P$ ; a więc

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = P \cdot dz = d(Pz),$$

z czego okazuje się, że  $U = Pz + \text{stała}$  jest potencjałem tej siły. Z zasady więc energii wynika całka równań ruchu

$$\frac{mv^2}{2} = Pz + H,$$

która pozwala obliczyć prędkość  $v$  bez poprzedniej znajomości toru punktu, skoro tylko stała  $H$  wyznaczoną zostanie.

Jeżeli w małych odległościach od ziemi uważamy siłę ciężkości za stałą, to dla niej zachodzi powyższa zasada. Dla punktu o masie  $m$  będzie  $mg$  siłą ciężkości, a zatem  $U = mgz + c$  będzie potencjałem tej siły, gdzie  $z$  oznacza pionową odległość punktu od dowolnej płaszczyzny poziomej i stałej. Ta odległość jest dodatnia, jeżeli punkt znajduje się pod tą płaszczyzną, zaś ujemna, jeżeli punkt znajduje się nad tą płaszczyzną. Ruch punktu przy wyłącznym działaniu siły ciężkości zwiemy wogólności spadkiem; mamy zatem dla spadku następującą całkę równań ruchu:

$$(1) \quad \frac{mv^2}{2} = mgz + H.$$

Biorąc zaś prędkości  $v_1$  i  $v_2$  w dwu punktach, których pionowe odległości od płaszczyzny  $xy$  są odpowiednio  $z_1$  i  $z_2$ , otrzymamy

$$\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = mg(z_2 - z_1),$$

a stąd, kładąc  $h = z_2 - z_1$ ,

$$(2) \quad v_2^2 = v_1^2 + 2g(z_2 - z_1) = v_1^2 + 2gh.$$

Znając więc prędkość początkową  $v_1$  i wysokość spadku  $h$ , możemy obliczyć prędkość końcową  $v_2$ , nie znając krzywój, po której punkt spada. Równanie powierzchni potencyjalnój dla siły ciężkości jest  $mgz = C$ , czyli  $z = \lambda$ , gdzie  $\lambda$  jest stałą dowolną, z czego się okazuje, że tą powierzchnią jest płaszczyzna pozioma. Układ zatem płaszczyzn poziomych przedstawia układ powierzchni potencyjnych. *Jeżeli punkt spadający przybywa do tej samej płaszczyzny poziomej, natenczas energija a zatem i prędkość jego jest zachowana.*

b) Zasada energii zachodzi dla każdój siły centralnój, którój wielkość jest funkcją długości promienia wodzącego, nie zależy zaś ani od kierunku tego promienia, anitéż od czasu. Jeżeli siła centralna ma kierunek ku środkowi ruchu, to nazywamy ją pospolicie przyciąganiem (siłą przyciągającą), a jeżeli ona ma kierunek od środka ku punktowi, nazywamy ją odpychaniem (siłą odpychającą).

Niech środek ruchu będzie początkiem spółrzędnych,  $P$  siłą centralną,  $r$  promieniem wodzącym, którego kierunek dodatny liczymy od środka ku punktowi, i niech  $P = f(r)$ . Jeżeli  $x, y, z$  są spółrzędnymi punktu,  $X, Y, Z$  składowymi siły centralnój, to

$$(3) \quad X = \pm \frac{x \cdot f(r)}{r}, \quad Y = \pm \frac{y \cdot f(r)}{r}, \quad Z = \pm \frac{z \cdot f(r)}{r},$$

gdzie znaki więcej stosują się do odpychania, a znaki mniej do przyciągania. Mamy zatem

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \pm \frac{f(r)}{r} (x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz).$$

A ponieważ  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , więc  $r \cdot dr = x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz$ , wskutek czego

$$(4) \quad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \pm f(r) \cdot dr.$$

Wprowadzając przeto następujące oznaczenie całki nieokreślonej:

$$(5) \quad \int f(r) \cdot dr = \Phi(r),$$

mieć będziemy

$$(6) \quad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \pm d\Phi(r).$$

z czego wynika, że  $\pm \Phi(r) + \text{stała}$  jest potencjałem siły centralnój, a równanie powierzchni potencyjalnój jest  $\Phi(r) = \text{stała}$ .

**85. ZASADA ENERGII DLA RUCHU NIESWOBODNEGO.** Zasada energii, którą rozważaliśmy dotąd dla ruchu swobodnego, zachodzi także pod pewnymi warunkami dla ruchu nieswobodnego. Aby to okazać, załóżmy, że punkt przy działaniu siły  $(X, Y, Z)$  opisuje daną linią krzywą, którój równania  $F(x, y, z) = 0$  i  $\varphi(x, y, z) = 0$  nie zawierają czasu wyraźnie. Równania ruchu będą wtedy (art. 76)

$$(1) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  i dodając, otrzymamy

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (mv^2) = X \cdot \frac{dx}{dt} + Y \cdot \frac{dy}{dt} + Z \cdot \frac{dz}{dt} + \lambda_1 \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right) + \lambda_2 \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right),$$

co możemy tak napisać:

$$\frac{1}{2} d(mv^2) = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz + \lambda_1 \cdot dF + \lambda_2 \cdot d\varphi.$$

Ponieważ dla ruchu punktu mamy wskutek danych warunków ciągle  $dF = 0$ ,  $d\varphi = 0$ , przeto

$$(2) \quad d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz.$$

Otrzymujemy zatem także samo równanie różniczkowe, jak dla ruchu swobodnego, a z niego wynika jedna całka równań ruchu, jeżeli siła ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) posiada potencjał. Mamy zatem ważne twierdzenie: *zasada energii zachodzi dla ruchu punktu nieswobodnego, jeżeli równania warunkowe nie zawierają czasu wyrażnie, i jeżeli siła przyłożona posiada potencjał, od czasu wyrażnie niezależny.*

Otrzymaliśmy równania ruchu punktu nieswobodnego z równań ruchu punktu swobodnego, biorąc, prócz siły przyłożonej, jeszcze siły połączeń, wynikające z danych warunków. Okazaliśmy w art. 76-ym, że siły połączeń są zawsze normalne do tej powierzchni lub do tej linii, po której punkt się porusza, z czego wynika, że praca elementarna każdej z tych sił jest równa zeru. Okazuje się więc, że siły, przez warunki ruchu określone, nie pojawiają się wcale w równaniu, wyrażającym związek między energiją a pracą; a zatem: *jeżeli zasada energii zachodzi dla siły przyłożonej przy ruchu swobodnym, to ona zachodzić będzie także dla ruchu nieswobodnego, jeżeli tylko warunki ruchu są niezależne od czasu.*

Z tego twierdzenia otrzymujemy ważny wynik dla siły ciężkości. Jeżeli punkt wałki (ciężki) przy wyłącznym działaniu siły ciężkości spada z punktu  $A$  z prędkością początkową  $v_0$ , to, bez względu na to, czy on spada swobodnie w kierunku pionowej  $AB$ , czytż on spada nieswobodnie po jakiegokolwiek linii krzywej  $Am_1$ ,  $Am_2$ , ..., to do każdego punktu, leżącego z punktem  $B$  na tym samym poziomie, punkt wałki przybędzie z tą samą prędkością (twierdzenie Galileusza). Niech  $h = AB$  wyobraża wysokość spadku; wówczas, bez



względem na drogę opisaną, prędkość  $v$  w punktach  $m_1, B, m_2, \dots$ , według wzoru (2) art. 84-go, będzie

$$(5) \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh};$$

jeżeli punkt spada ze spoczynku, to  $v_0 = 0$ , a więc

$$(6) \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Ostatnie równanie okazuje, że spadek punktu ze spoczynku z danej wysokości wytwarza pewną, tylko od tej wysokości zależną, prędkość końcową, tudzież, że aby punkt ważki nabył pewnej prędkości określonej, powinien po jakiejkolwiek krzywej spadać z pewnej dokładnie oznaczonej wysokości. Z powodu tego ścisłego związku między  $v$  i  $h$  nazywamy prędkość  $v$ , według wzoru (6) obliczoną, prędkością odpowiadającą wysokości  $h$ , zaś wysokość  $h = \frac{v^2}{2g}$  nazywamy wysokością odpowiadającą prędkości  $v$ .

**86. ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA.** Dla takich ruchów punktu swobodnego lub punktu wciąż pozostającego na danej powierzchni, do których stosuje się zasada energii, zachodzi jeszcze inna zasada, nie prowadząca wprawdzie do całki równań ruchu, pozwalająca jednak, podobnie jak zasada Hamilton'a, wyprowadzić owe równania.

Jeżeli  $v$  jest prędkością punktu o masie  $m$ , a  $ds$  elementem jego drogi, to całkę  $A = \int m v \cdot ds = m \int v \cdot ds$ , wziętą względem  $s$  między dwoma stałymi krańcami, nazywamy działaniem siły, odpowiednim tym krańcom. Jeżeli zachodzi zasada energii, to równanie  $\frac{mv^2}{2} = U + H$  pozwala wyrazić prędkość przez współrzędne punktu bez pomocy czasu; owóż przy obliczaniu działania ma być prędkość wyrażona tym sposobem, a całka ma być brana wzdłuż toru, jaki punkt opisuje między uwazanymi krańcami.

Przez równania ruchu, przez położenie początkowe punktu i przez jego prędkość początkową tor punktu jest dokładnie określony. Całki równań ruchu pozwalają jednak wyrugować prędkość początkową i określić ruch przez dwa położenia punktu, z których jedno uważamy za początkowe, a drugie za końcowe. Między tymi dwoma położeniami punktu tylko jeden tor rzeczywiście opisany zostanie, chociaż między tymi położeniami można poprowadzić jeszcze inne nieskończenie bliskie linie, które zadość czynią warunkowi, niezależnie od sił i od czasu zachodzić mającemu. Obliczmy wariację działania, jeżeli z toru rzeczywiście opisanego między danymi krańcami, przejdziemy do innej linii, nieskończenie bliskiej, której każdy punkt czyni zadość także danemu warunkowi. Gdy np. punkt porusza się na pewnej powierzchni między punktami  $a$  i  $b$ , obliczmy  $\delta A$  dla krzywej, różniącej się nieskończenie mało od toru punktu  $a$ , poprowadzonej także na powierzchni między tymi punktami. Z powodu stałych krańców otrzymamy wtedy

$$\delta A = m \cdot \delta \int v \cdot ds = m \int \delta(v \cdot ds),$$

a ponieważ  $\delta(v \cdot ds) = \delta v \cdot ds + v \cdot \delta ds$ , przeto

$$(1) \quad \delta A = m \int \delta v \cdot ds + m \int v \cdot \delta ds.$$

Ponieważ

$$m \int \delta v \cdot ds = m \int v \cdot \delta v \cdot dt = \int \delta \left( \frac{mv^2}{2} \right) dt,$$

a nadto  $\frac{mv^2}{2} = U + H$ , zatem

$$m \int \delta v \cdot ds = \int \delta U \cdot dt = \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right) dt.$$

Z zasady energii wynika jednak tak dla ruchu swobodnego, jak i dla ruchu na powierzchni:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right),$$

gdzie  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  oznaczają przesunięcia przygotowane; będzie więc

$$(2) \quad \int \delta v \cdot \delta s = \int \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) dt.$$

Mamy dalej

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

a zatem

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz,$$

skąd

$$v \cdot \delta ds = \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z, \quad \text{więc}$$

$$(3) \quad \int v \cdot \delta ds = \int \left( \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z \right).$$

Całkując częściowo, otrzymamy

$$\int \frac{dx}{dt} d\delta x = \frac{dx}{dt} \delta x - \int \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x \cdot dt;$$

podobnie dla  $y$  i  $z$ ; wstawiając zaś te wartości w (3), mieć będziemy

$$(4) \quad \int v \cdot \delta ds = \frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z - \int \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) dt.$$

Kładąc wartości z (2) i (4) w (1), otrzymamy ostatecznie

$$(5) \quad \delta A = m \left( \frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right),$$

przyczym wyrażenie po prawej stronie ma być wzięte między danymi krańcami. Ponieważ te krańce są z założenia stałe, przeto dla każdego z nich jest  $\delta x = 0$ ,  $\delta y = 0$ ,  $\delta z = 0$ ; otrzymamy zatem

$$(6) \quad \delta A = \delta \int m v \cdot ds = 0.$$

*Jeżeli punkt porusza się swobodnie lub na danej powierzchni, a zasada energii zachodzi, i jeżeli z toru punktu, opisanego między dwoma stałymi punktami, przejdziemy do krzywej nieskończenie bliskiej, którą między tymi punktami, stosownie do danego warunku, można poprowadzić, natenczas waryjacja całki, wyrażającej działanie siły, jest równa zeru.*

Z tego twierdzenia wynika, że całka  $\int v \cdot ds$  jest najmniejsza lub największa, jeżeli ją obliczymy dla toru, jaki punkt między stałymi krańcami rzeczywiście opisuje. Jeżeli punkt jest swobodny, natenczas równanie  $\delta A = 0$  może wskazywać tylko na najmniejszą wartość całki; skoro bowiem tylko dwa punkty skrajne są dane, a tor zresztą dowolny, to całka powyższa może rósć bez granic, a zatem wartość największa jest niemożliwa. Jeżeli punkt porusza się na danej powierzchni, to równanie  $\delta A = 0$  wskazuje wogółności także na minimum działania, atoli wiadomo z rachunku waryjacyjnego, że w takim przypadku minimum zależy także od oddalenia krańców i że poza pewnymi krańcami minimum całki miejsca mieć nie będzie.

Zasadę, powyższym twierdzeniem wyrażoną, nazywamy zasadą najmniejszego działania, jakkolwiek ta nazwa nie odpowiada dokładnie treści tego twierdzenia. Czy równanie (6) wskazuje rzeczywiście na działanie najmniejsze, o tym rozstrzyga, jak wiadomo, znak drugiej waryjacji całki, a gdyby ta waryjacja była równa zeru, natenczas rozstrzygają znaki waryjacji rzędów wyższych.

ZałóŜmy, że na punkt podczas ruchu nie działa żadna siła, lub że nań działa siła normalna do powierzchni; wtedy prędkość  $v$  jest stała (art. 85); będzie zatem  $\int ds = 0$ , a więc  $s$  będzie wogółności minimum. Punkt przeto opisze między dwoma punktami linią najkrótszą na powierzchni.

Z zasady najmniejszego działania możemy otrzymać równania ruchu, a zatem okazać, że linia, dla której waryjacja działania jest równa zeru i która przechodzi przez dane punkty, jest istotnie torem punktu. Jakoż, z powodu stałych krańców mamy

$$\int v \cdot \delta ds = - \int \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) dt;$$

a z równania  $\frac{m v^2}{2} = U + H$  wynika



$$\int \delta v \cdot ds = \frac{1}{m} \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right) dt;$$

będzie więc

$$\begin{aligned} m \cdot \delta \int v \cdot ds &= m \int \delta v \cdot ds + m \int v \cdot \delta ds = \\ &= \int \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} - m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left( \frac{\partial U}{\partial y} - m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left( \frac{\partial U}{\partial z} - m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Przyrównując wyraz pod znakiem całkowania do zera, otrzymujemy równanie, wyrażające zasadę d'Alembert'a w przypadku istnienia zasady energii, które, jak wiadomo, prowadzi do równań ruchu.

**87. RUCH PUNKTU NA TORZE DANYM.** Okazaliśmy w art. 76-ym, że ruch punktu na torze danym może być uważany za ruch swobodny, jeżeli tylko do siły przyłożonej dodamy jeszcze tak zwaną siłę połączeń, przedstawiającą warunek, aby ten punkt opisywał pewną daną linią. Żeby dokładniej zrozumieć znaczenie tego warunku, przyjmijmy, że (*m*) (fig. 35) jest danym

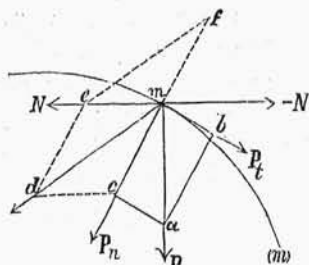


Fig. 35.

torcem punktu o masie *m*, do którego jest przyłożona siła *P*, i że ten punkt w miejscu *m* posiada prędkość *v*. Poprowadźmy płaszczyznę przez kierunek siły *P* i przez kierunek prędkości, i rozłóżmy siłę *P* na dwie składowe prostokątne, z których jedna *P*<sub>1</sub> ma kierunek styczny do toru, a druga *P*<sub>2</sub> kierunek odpowiedniej normalnej do tegoż toru. Jeżeli przyjmiemy, że punkt nie doznaje żadnego oporu w kierunku ruchu, to siła *P*<sub>1</sub> udzieli punktowi przyspieszenia sty-

cznego, jakgdyby ów punkt był swobodny, i otrzymamy równanie

$$(1) \quad P_1 = m \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Gdy  $\rho$  jest wiadomym promieniem krzywizny toru w punkcie *m*, to punktowi należy udzielić przyspieszenia dośrodkowego  $\frac{v^2}{\rho}$  w kierunku normalnej głównej do toru, aby on ten tor opisywał; do tego zaś potrzeba siły dośrodkowej  $\frac{mv^2}{\rho}$ . Składowa normalna *P*<sub>2</sub> siły *P* nie może punktowi udzielić tego przyspieszenia, bo ona nie posiada wogólności ani kierunku, ani wielkości, potrzebnej sile dośrodkowej; widzimy zatem, że oprócz siły *P*<sub>2</sub> konieczne działa na punkt jeszcze inna siła, która razem z *P*<sub>2</sub> wywołuje przyspieszenie dośrodkowe. Ta druga siła jest właśnie ową siłą połączeń, która zastępuje dany warunek ruchu. Aby ją wyznaczyć, odetnijmy wielkość siły dośrodkowej na normalnej

główniej do toru od punktu  $m$  do  $d$ , i rozłożmy tę siłę na takie dwie składowe, żeby  $P_2$  była jedną z nich; wówczas drugą składową  $N$  będzie przedstawiał odcinek  $me$ , mający kierunek normalny do danego toru. Ta druga składowa  $N$  wyobraża ową siłę połączeń. Z tego postępowania okazuje się, że jej kierunek jest normalny do danego toru, chociaż nie ma kierunku normalnej głównej. Biorąc siłę  $P_2$  w kierunku przeciwnym, otrzymamy równoległobok, którego przekątna jest  $me$ , z czego wynika, że siła połączeń jest wypadkową siły dośrodkowej i składowej normalnej  $P_2$  siły przyłożonej, wziętej w kierunku przeciwnym.

Z prawa wzajemności działania wynika, że skoro połączenia fizyczne, sprawiające, iż punkt opisuje tor dany, wywierają na ten punkt działanie  $N$ , to siła —  $N$  przedstawia oddziaływanie punktu na te połączenia. To oddziaływanie jest więc wypadkową siły  $-\frac{mv^2}{\rho}$ , równej lecz wprost przeciwniej sile

dośrodkowej, i składowej normalnej  $P_2$  siły przyłożonej. Siłę  $-\frac{mv^2}{\rho}$ , równą lecz wprost przeciwną sile dośrodkowej, nazywamy siłą odśrodkową. A zatem *oddziaływanie punktu na połączenia jest wypadkową siły odśrodkowej i składowej normalnej siły, do tego punktu przyłożonej*. Ponieważ siła odśrodkowa występuje wskutek połączeń, przeto w zadaniach o ruchu swobodnym nie okazuje się potrzeba utworzenia pojęcia tej siły.

Jeżeli składowa normalna  $P_2$  siły  $P$  równa się sile dośrodkowej, wtedy znika siła połączeń, a ruch punktu staje się swobodnym; w takim miejscu na torze nie doznają połączenia fizyczne żadnego działania od poruszającego się punktu. —

Jeżeli siła przyłożona ma potencyjał, natenczas z równania  $\frac{mv^2}{2} = U + H$  możemy także obliczyć prędkość punktu. Kładąc  $v = \frac{ds}{dt}$ , otrzymamy

$$(2) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m} (U + H), \quad dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{U + H}}.$$

**88. RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU WZGLĘDNEGO.** Podaliśmy w rozdziale V sposoby, według których można wyznaczyć przyspieszenie względne punktu, znając jego ruch bezwzględny i ruch układu odniesienia. Jeżeli równania (6) i (7) art. 62-go pomnożymy przez masę  $m$  tego punktu, to otrzymamy bezpośrednio równania kinetyczne ruchu względnego, gdy ruch bezwzględny tego punktu jest swobodny. Oznaczając więc przez  $X_1, Y_1, Z_1$  odpowiednie rzuty siły przyłożonej na osi ruchome układu  $M\xi\eta\zeta$  i używając takiego, jak w rozdziale V, znakowania, otrzymamy następujące równania różniczkowe ruchu względnego:

$$(1) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = X_1 - m\gamma_{u\xi} - 2m \left( q \cdot \frac{d\zeta}{dt} - r \cdot \frac{d\eta}{dt} \right), \\ m \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} = Y_1 - m\gamma_{u\eta} - 2m \left( r \cdot \frac{d\xi}{dt} - p \cdot \frac{d\zeta}{dt} \right), \\ m \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z_1 - m\gamma_{u\zeta} - 2m \left( p \cdot \frac{d\eta}{dt} - q \cdot \frac{d\xi}{dt} \right). \end{cases}$$

Iloczyn masy punktu i jego przyspieszenia unoszenia (art. 61) nazywamy odpowiednio siłą unoszenia tego punktu; iloczyn zaś masy punktu i jego przyspieszenia odśrodkowego złożonego (art. 62) nazywamy siłą odśrodkową złożoną tego punktu. Jeżeli układ odniesienia obraca się jednostajnie około osi stałej, natenczas trzeba wyznaczyć tak zwane przyspieszenie odśrodkowe punktu (art. 62), aby obliczyć jego przyspieszenie względne. W tym przypadku iloczyn masy punktu i jego przyspieszenia odśrodkowego nazywamy siłą odśrodkową tego punktu; ta siła jest prostopadła do osi obrotu układu odniesienia i ma kierunek od tej osi ku punktowi rozważanemu. Czytelnik z łatwością wyrazi wszystkie twierdzenia kinetyczne, wynikające odpowiednio z twierdzeń kinematycznych art. 62-go. Siłę unoszenia, siłę odśrodkową i siłę odśrodkową złożoną nazywamy siłami pozornymi ruchu względnego; one bowiem służą do tego, aby zagadnienia o tym ruchu sprowadzić do zagadnień o ruchu bezwzględnym.

Jeżeli układ odniesienia obraca się jednostajnie z prędkością kątową  $\omega$  około osi stałej, to obierzmy tę oś jako oś  $\zeta$ ; wtedy  $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $r = \omega$ , a składowe przyspieszenia odśrodkowego punktu ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) będą odpowiednio  $\omega^2\xi$ ,  $\omega^2\eta$  i 0, składowe więc siły odśrodkowej będą  $m\omega^2\xi$ ,  $m\omega^2\eta$  i 0, a wielkość tej siły wyrazi się wzorem  $m\omega^2\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = m\omega^2\rho$ , gdzie  $\rho$  oznacza odległość tego punktu od osi obrotu. Równania różniczkowe ruchu względnego będą wtedy, według (1),

$$(2) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = X_1 + m\omega^2\xi + 2m\omega \cdot \frac{d\eta}{dt}, \\ m \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} = Y_1 + m\omega^2\eta - 2m\omega \cdot \frac{d\xi}{dt}, \\ m \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z_1. \end{cases}$$

Jeżeli ruch układu odniesienia jest postępowy, wtedy równania różniczkowe ruchu względnego będą

$$(3) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = X_1 - m\gamma_{u\xi}, \\ m \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} = Y_1 - m\gamma_{u\eta}, \\ m \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z_1 - m\gamma_{u\zeta}; \end{cases}$$

jeżeli na koniec układ odniesienia ma ruch postępowy, jednostajny i prostoliniowy, wtedy będzie  $\gamma_{u\xi} = 0$ ,  $\gamma_{u\eta} = 0$ ,  $\gamma_{u\zeta} = 0$ , i równania ruchu względnego punktu  $(\xi, \eta, \zeta)$  będą także same, jak równania ruchu bezwzględnego. Z ostatniego więc wyniku okazuje się, że, jeżeli teoria ruchu bezwzględnego, w której układ odniesienia przyjmujemy w spoczynku, ma być stosowana do ruchów w przyrodzie, to natenczas należy przyjąć, że układ odniesienia posiada ruch postępowy, prostoliniowy i jednostajny.

Gdyby punkt nie był swobodny, t. j. gdyby zachodziły warunki między jego współrzędnymi względnymi  $\xi, \eta, \zeta$ , natenczas należy po prawych stronach powyższych równań dodać odpowiednio siły połączeń, zastępujące dane warunki, —

Pomnóżmy równania (1) odpowiednio przez  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$  i  $\frac{d\zeta}{dt}$ , dodajmy otrzymane iloczyny i oznaczmy przez  $v_w$  prędkość względną punktu; otrzymamy równanie

$$(4) \quad d\left(\frac{mv_w^2}{2}\right) = X_1 d\xi + Y_1 d\eta + Z_1 d\zeta - m(\gamma_{u\xi} \cdot d\xi + \gamma_{u\eta} \cdot d\eta + \gamma_{u\zeta} \cdot d\zeta).$$

Wyraz pod znakiem różniczkowania po stronie lewej przedstawia względną energiją kinetyczną punktu, t. j. energiją, odpowiednią jego prędkości względnej; trójmian  $X_1 d\xi + Y_1 d\eta + Z_1 d\zeta$  przedstawia pracę elementarną siły przyłożonej, a trójmian  $m(\gamma_{u\xi} \cdot d\xi + \gamma_{u\eta} \cdot d\eta + \gamma_{u\zeta} \cdot d\zeta)$  wyraża pracę elementarną siły unoszenia. Praca elementarna siły odśrodkowej złożonej jest równa zeru, ponieważ ta siła jest prostopadła do prędkości względnej. Całka równania (4) jest

$$(5) \quad \frac{mv_w^2}{2} = \int [(X_1 - m\gamma_{u\xi}) d\xi + (Y_1 - m\gamma_{u\eta}) d\eta + (Z_1 - m\gamma_{u\zeta}) d\zeta] + \text{stałej};$$

pozwała ona wyznaczyć energiją względną punktu. Ostatnie dwa równania wyrażają zasadę pracy dla ruchu względnego.

W przypadku, gdy układ odniesienia obraca się jednostajnie około osi stałej, otrzymamy z równań (2)

$$d\left(\frac{mv_w^2}{2}\right) = X_1 d\xi + Y_1 d\eta + Z_1 d\zeta + m\omega^2(\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta),$$

czyli

$$(6) \quad d\left(\frac{mv_w^2}{2}\right) = X_1 d\xi + Y_1 d\eta + Z_1 d\zeta + d\left[\frac{m\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)\right].$$

Przypuśćmy teraz, że siła przyłożona posiada potencjał  $U_1$ , będący funkcją współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$  i nie zawierający czasu wyraźnie; kładąc

$$(7) \quad U = U_1 + \frac{m\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2),$$

z równania (6) otrzymamy przez całkowanie

$$(8) \quad \frac{m v_w^2}{2} = U + H,$$

co wyraża zasadę energii dla ruchu względnego. Wielkość  $U$  jest sumą potencjałów siły przyłożonej i siły odśrodkowej. Siła odśrodkowa ma zawsze potencjał, który wyraża się wzorem  $-\frac{m\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ .

---