

warunek  $F = 0$ ; możemy wtedy równania (1) także otrzymać, rugując współczynnik nieoznaczony  $\lambda$  z następujących trzech równań:

$$(3) \quad X + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

albowiem dwa równania (1) wyrażają warunki konieczne i dostateczne, aby te trzy równania jednocześnie zachodziły. Kładąc  $X_1 = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $Y_1 = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $Z_1 = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$ , widzimy, że równania (3) wyrażają warunki równowagi punktu uważanego, gdyby on był swobodny wrazie, jeżeli do niego, oprócz siły  $(X, Y, Z)$ , byłaby jeszcze przyłożona pewna siła  $(X_1, Y_1, Z_1)$ , normalna do powierzchni  $F = 0$ . Wielkość atoli tej ostatniej siły nie jest oznaczona, ponieważ  $\lambda$  ma wartość nieoznaczoną. Tę ostatnią siłę nazywamy oporem danej powierzchni, a ona właśnie znosi wypadkową sił przyłożonych. Okazuje się więc, że warunki równowagi punktu, pozostającego na danej powierzchni, dają się także wyznaczyć przez to, że punkt uważamy za swobodny, lecz do sił, rzeczywiście przyłożonych, dodajemy jeszcze opór powierzchni w kierunku normalnym. Wypadkowa sił, rzeczywiście przyłożonych, przedstawia wtedy ciśnienie, którego powierzchnia od tych sił doznaje. — W przypadku danej linii krzywej, określonej zapomocą równania  $F = 0$  i  $\varphi = 0$ , możemy podobnie otrzymać odpowiedni warunek równowagi, rugując dwa współczynniki nieoznaczone,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , z następujących równań:

$$(4) \quad \begin{cases} X + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ Y + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ Z + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Siły dodane, których rzuty przedstawiają się jako iloczyny odpowiedniego współczynnika i pochodnej cząstkowej danej funkcji, wyobrażają opory dwu powierzchni, przecinających się podług danej linii krzywej, a wypadkowa tych oporów wyobraża opór téjże linii krzywej. Wypadkowa sił przyłożonych przedstawia wtedy ciśnienie, które te siły wywierają na daną linię w punkcie uważanym.

**73. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH.** Nieskończenie małą drogę, po której opisanu punkt przenosi się z miejsca pewnego do nieskończenie bliskiego w przestrzeni, nazwaliśmy w art. 24-ym przesunięciem tego punktu. Jeżeli ruch punktu podlega pewnym warunkom, od sił niezależnym (art. 72), to takie przesunięcie punktu z danego miejsca, wskutek którego punkt zajmuje w przestrzeni miejsce nieskończenie bliskie, odpowiadające danym warunkom, nazywamy przesunięciem przygotowanym (albo niekiedy przysposobionym) tego punktu. Przymiotnik «przygotowany» odnosi się tylko do

warunków, które pewne przesunięcie czynią możebnym, bez względu na to, czy ono punktowi istotnie udzielone zostało. Jeżeli np. punkt ma pozostawać na powierzchni, to każde nieskończenie małe przesunięcie punktu z danego miejsca na tej powierzchni, zachodzące na płaszczyźnie stycznej do powierzchni, jest właśnie przesunięciem przygotowanym; jeżeli punkt ma pozostawać na pewnej linii krzywej, to przesunięcie przygotowane z danego punktu na tej krzywej ma kierunek stycznej do tej linii. Dla punktu swobodnego należy każde przesunięcie uważać za przygotowane.

Iloczyn wielkości siły, do punktu przyłożonej, i rzutu prostokątnego przesunięcia przygotowanego tego punktu na promień działania siły, nazywamy pracą przygotowaną, lub także momentem przygotowanym tej siły. Na oznaczenie przesunięcia przygotowanego używamy symbolu z rachunku wariacyjnego,  $\delta$ , aby wyraźnie zaznaczyć, że to przesunięcie należy odróżnić od rzeczywistego przesunięcia punktu, przy którym także czas ma być uwzględniony; do tego ostatniego stosujemy symbol z rachunku różniczkowego,  $d$ . Oznaczmy więc przez  $\delta s$  przesunięcie przygotowane punktu, do którego jest przyłożona siła  $P$ ; rzut  $\delta p$  tego przesunięcia na siłę będzie  $\delta p = \delta s \cdot \cos(P, \delta s)$ , a zatem  $P \cdot \delta p = P \cdot \delta s \cdot \cos(P, \delta s)$  będzie pracą przygotowaną tej siły. Z tego wyrażenia okazuje się, że pracę przygotowaną siły możemy także określić jako iloczyn przesunięcia przygotowanego punktu i rzutu prostokątnego siły na kierunek tego przesunięcia.

Rzut  $\delta p$  przesunięcia  $\delta s$  może mieć kierunek siły samój lub kierunek jej przedłużenia; w pierwszym przypadku uważamy rzut  $\delta p$  za dodatni, a zatem pracę przygotowaną za dodatnią; w drugim zaś przypadku uważamy rzut  $\delta p$  za ujemny, a zatem pracę przygotowaną za ujemną. Praca więc przygotowana siły jest dodatnia, jeżeli kierunek przesunięcia  $\delta s$  tworzy z kierunkiem siły  $P$  kąt ostry; ta praca jest ujemna, jeżeli te dwa kierunki tworzą z sobą kąt rozwarty. Praca przygotowana siły jest równa zero, jeżeli przesunięcie przygotowane punktu przyłożenia jest prostopadłe do siły.

Niech do punktu będzie przyłożonych ilekolwiek sił  $P_i$ , a temu punktowi nadajmy przesunięcie przygotowane  $\delta s$ , którego rzut na siłę  $P_i$  niech będzie  $\delta p_i$ ; łatwo okazać, że *praca przygotowana siły wypadkowej jest równa sumie algebricznej odpowiednich prac przygotowanych sił składowych*. Oznaczmy bowiem przez  $P$  siłę wypadkową; wtedy  $P \cdot \cos(P, \delta s) = \sum P_i \cdot \cos(P_i, \delta s)$ ; po pomnożeniu tego równania przez  $\delta s$ , otrzymamy, kładąc  $\delta p = \delta s \cdot \cos(P, \delta s)$ , równanie

$$(1) \quad P \cdot \delta p = \sum P_i \cdot \delta p_i,$$

wyrażające właśnie powyższe twierdzenie.

Niech do punktu  $(x, y, z)$  będzie przyłożona siła  $(X, Y, Z)$ , a  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  niech będą rzutami przesunięcia przygotowanego  $\delta s$  tego punktu na osi współrzędnych, czyli przesunięciami przygotowanymi tego punktu w odpowiednich kierunkach osi współrzędnych; wtedy wielkość  $X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z$  wyraża, według powyższego twierdzenia, pracę przygotowaną tej siły. Jeżeli

$\Sigma X_i$ ,  $\Sigma Y_i$ ,  $\Sigma Z_i$  oznaczają odpowiednie sumy rzutów  $n$  sił  $P_i$ , przyłożonych do punktu, na kierunki osi współrzędnych, to  $\delta x \cdot \Sigma X_i + \delta y \cdot \Sigma Y_i + \delta z \cdot \Sigma Z_i$  jest sumą prac przygotowanych tych sił  $P_i$ .

**74.** Z pojęcia pracy przygotowanej można wyprowadzić ogólną metodę wyznaczenia warunków równowagi sił, przyłożonych bądźto do punktu swobodnego, bądźtéż do punktu nieswobodnego. Ta metoda polega na następującym twierdzeniu ogólnym: *aby ilekolewkie sił, do jednego punktu przyłożonych, było w równowadze, potrzeba i wystarcza, aby suma algebryczna prac przygotowanych tych sił była równa zeru dla każdego przesunięcia przygotowanego tego punktu.* To ważne twierdzenie wyraża tak zwaną zasadę prac przygotowanych, albo zasadę momentów przygotowanych dla jednego punktu.

Aby okazać prawdziwość téj zasady, przypuśćmy, że do punktu  $(x, y, z)$  jest przyłożonych ilekolewkie sił  $P_i$ , których wypadkowa jest  $P$ ; wtedy

$$(1) \quad P \cdot \delta p = \Sigma P_i \cdot \delta p_i = \delta x \cdot \Sigma X_i + \delta y \cdot \Sigma Y_i + \delta z \cdot \Sigma Z_i$$

będzie sumą prac przygotowanych tych sił dla pewnego przesunięcia przygotowanego tego punktu.

Jeżeli ten punkt jest swobodny, wówczas do równowagi tych sił potrzeba i wystarcza, aby było  $P = 0$ , czyli, według (1), aby suma prac przygotowanych tych sił była równa zeru, jakiegokolwiek przesunięcie temu punktowi nadamy. Ponieważ w tym przypadku przesunięcia  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  są dowolne, przeto ostatnie wyrażenie w równaniu (1) będzie równe zeru, jeżeli  $\Sigma X_i = 0$ ,  $\Sigma Y_i = 0$ ,  $\Sigma Z_i = 0$ , a te warunki, jak wiadomo z art. 70-go, są konieczne i wystarczające dla równowagi.

Niech punkt pozostaje na pewnej powierzchni; wtedy każde przesunięcie punktu na płaszczyźnie stycznej jest przygotowane. Ponieważ zaś dla równowagi ma być wypadkowa  $P$  normalna do powierzchni, przeto będzie  $\delta p = 0$  dla każdego przesunięcia przygotowanego, a zatem w przypadku równowagi będzie  $\Sigma P_i \cdot \delta p_i = 0$ . I nawzajem, jeżeli ten warunek zachodzi dla każdego przesunięcia przygotowanego, to  $\delta p = 0$ , a zatem wypadkowa  $P$  będzie normalna do powierzchni, co zapewnia równowagę. — Podobnie można okazać prawdziwość podanej zasady dla punktu, pozostającego na pewnej linii krzywej. —

W zastosowaniu téj zasady należy w każdym przypadku szczególnym wyznaczyć związki między przesunięciami przygotowanymi punktu, zależne wyłącznie tylko od warunków jego ruchu, a niezależne od sił. Te związki otrzymamy, różniczkując równania warunkowe przy pomocy symbolu  $\delta$  i opuszczając nieskończenie małe rzędów 2-go i wyższych. Zapomocą tych związków należy następnie wyrugować z równania (1) tyle przesunięć przygotowanych, ile jest tych związków; otrzymamy tym sposobem pewne równanie, w którym przesunięcia pozostałe są dowolne. Przyrównyując do zera czynnik każdego z tych ostatnich przesunięć, otrzymujemy żądane warunki równowagi.

Jeżeli np. zachodzi jeden warunek  $F(x, y, z) = 0$ , to dla położenia przygotowanego  $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$  punktu  $(x, y, z)$  mamy warunek

$$F(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = F + \delta F = F + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0.$$

A ponieważ  $F = 0$ , przeto szukany związek między przesunięciami przygotowanymi jest

$$(2) \quad \delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0.$$

Jeżeli  $X, Y, Z$  są rzutami wypadkowej sił, przyłożonych do punktu, to zasada prac przygotowanych wyraża się zapomocą równania  $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$ . Wyrugujmy  $\delta z$  z tego równania i z warunku (2); otrzymamy

$$(3) \quad \left( X \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - Z \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta x + \left( Y \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - Z \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y = 0.$$

Ponieważ  $\delta x$  i  $\delta y$  są teraz dowolne, przeto wyrażeniem równowagi są następujące dwa warunki:

$$(4) \quad X \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - Z \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad Y \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - Z \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

które otrzymaliśmy innym sposobem w art. 72-im.

Do uskutecznienia rugowania może także posłużyć metoda współczynników nieoznaczonych. Niech np. zachodzą dwa równania warunkowe,  $F = 0$  i  $\varphi = 0$ ; wtedy przesunięcia  $\delta x, \delta y, \delta z$  czynią zadość dwu warunkom,  $\delta F = 0$  i  $\delta \varphi = 0$ . Aby z tych równań i z równania  $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$  wyrugować dwa przesunięcia, dodajmy do lewej strony ostatniego równania wyrazy  $\lambda_1 \cdot \delta F$  i  $\lambda_2 \cdot \delta \varphi$ , w których  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są współczynnikami nieoznaczonymi. Otrzymamy wtedy  $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \lambda_1 \cdot \delta F + \lambda_2 \cdot \delta \varphi = 0$ , czyli, po rozwinięciu,

$$(5) \quad \left( X + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \delta x + \left( Y + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \delta y + \\ + \left( Z + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \delta z = 0,$$

a w tym równaniu należy teraz przesunięcia uważać za dowolne. Równania zatem równowagi będą

$$(6) \quad X + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Jeżeli z tych równań wyrugujemy  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , to otrzymamy jeden związek między siłami i współrzędnymi punktu, który wyraża, że wypadkowa sił jest normalna do linii krzywój  $F = 0, \varphi = 0$ .

Gdyby równania warunkowe zawierały czas wyraźnie, to wtedy należałoby przesunięcia przygotowane obliczać przy stałej wartości na czas  $t$ , a zatem różniczkować przy pomocy symbolu  $\delta$  przy stałym argumentie  $t$ .

**75. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU. ZASADA D'ALEMBERT'A.** Jeżeli siły, do punktu przyłożone, nie są w równowadze, natenczas ruch punktu będzie skutkiem działania tych sił. Założmy naprzód, że punkt przyłożenia sił jest swobodny. Aby przy tym założeniu wyznaczyć ruch punktu, obierzmy w przestrzeni nieruchomy prostokątny układ współrzędnych, rzucmy każdą siłę przyłożoną na kierunki osi tego układu i oznaczmy przez  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  odpowiednie sumy rzutów sił na te osi. Rozłóżmy podobnie przyspieszenie punktu  $(x, y, z)$  na trzy składowe w kierunkach tychże osi. Wtedy z dwu pierwszych praw dynamiki wynika, że każda z sił  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  nada temu punktowi przyspieszenie w swoim kierunku, które będzie równe ilorazowi z podzielenia wielkości téj siły przez masę tego punktu. Jeżeli zatym przez  $m$  oznaczmy masę punktu, to otrzymamy następujące trzy równania:

$$(1) \quad X = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2},$$

które nazywamy *równaniami różniczkowymi ruchu punktu swobodnego*. Gdyby punkt poruszał się na płaszczyźnie  $xy$ , to dwa pierwsze równania wystarczyłyby do określenia jego ruchu; gdyby punkt poruszał się po linii prostej, obranej jako oś  $x$ , to pierwsze równanie wystarczyłoby do określenia ruchu.

Niech punkt przyłożenia sił nie będzie swobodny, lecz niech między jego współrzędnymi zachodzą związki, którym ruch punktu czyni zadość bez względu na siły. W tym przypadku przyspieszenie punktu nie będzie miało kierunku wypadkowej  $P$  sił przyłożonych, a wielkość tego przyspieszenia nie będzie równa ilorazowi téj siły przez masę punktu. Jeżeli  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dt^2}$  są przyspieszeniami składowymi przyspieszenia punktu, to punkt porusza się tak, jakgdyby był swobodny wraze, jeżeli do niego w kierunkach osi układu współrzędnych przyłożono siły odpowiednio  $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$ . Oznaczmy przez  $Q$  wypadkową tych trzech sił, i rozłóżmy siłę przyłożoną  $P$  na dwie składowe, z których jedna niech będzie  $Q$ ; wówczas druga składowa  $Q'$  będzie dokładnie określona. Ponieważ przyspieszenie punktu pochodzi tylko od składowej  $Q$ , jakgdyby ten punkt był swobodny, przeto składowa  $Q'$  nie wpływa wcale na ruch punktu. Gdyby zatym siła  $Q'$  została sama przyłożona do tego punktu, to zachodziłaby równowaga wskutek danych warunków.

Z tego więc rozumowania wynika następująca prosta zasada wyznaczenia ruchu punktu nieswobodnego: *rozłóżmy siłę, przyłożoną do punktu nieswobodnego, na takie dwie składowe, iżby dla jednej z nich zachodziła równowaga punktu przy danych warunkach; natenczas ruch punktu będzie taki, jakgdyby on był swobodny, a druga składowa była doń przyłożona*. To twierdzenie wyraża tak zwaną *zasadę d'Alembert'a dla jednego punktu*.

Gdy  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  są rzutami siły  $Q'$  na osi układu współrzędnych, to z rozkładu siły  $P$  na siły  $Q$  i  $Q'$  mamy

$$(2) \quad X' = X - m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y' = Y - m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z' = Z - m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Jeżeli więc  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  są przesunięciami przygotowanymi punktu  $(x, y, z)$ , to dla równowagi tego punktu przy działaniu siły  $Q'$  otrzymamy związek

$$(3) \quad \left(X - m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z = 0,$$

który wyraża analitycznie zasadę d'Alembert'a. —

Siłę  $Q'$ , której odpowiednie rzuty na osi układu współrzędnych wyznaczają równania (2), nazywamy siłą straconą dla ruchu punktu nieswobodnego. Jeżeli siłę  $P$  przyłożymy do punktu swobodnego, to cała siła wywrze działanie na punkt i sprawi jego ruch; jeżeli zaś przyłożymy ją do punktu nieswobodnego, to tylko jedna składowa  $Q$  tej siły sprawi ruch punktu, a druga składowa  $Q'$  będzie stracona z powodu nieswobody tego punktu.

Zasada d'Alembert'a pozwala otrzymać równania różniczkowe ruchu punktu nieswobodnego zapomocą postępowania podobnego do tego, które służyło do rozpoznania równowagi takiego punktu (art. 74). Z danych warunków, wiążących współrzędne punktu, wyznaczamy związki między  $\delta x$ ,  $\delta y$  i  $\delta z$ , które następnie służą do rugowania pewnej ilości tych przesunięć z równania (3), poczym pozostają w tym równaniu przesunięcia dowolne. Jeżeli czynnik każdego przesunięcia dowolnego przyrównamy do zera, to otrzymamy żądane równania ruchu punktu.

**76. RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWE LAGRANGE'A.** Załóżmy, że ruch punktu poddany jest jednemu warunkowi  $F(x, y, z) = 0$ . Wtedy z zasady d'Alembert'a, używając metody współczynników nieoznaczonych (art. 74), otrzymamy następujące równanie:

$$(1) \quad \left(X - m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z + \lambda \cdot \delta F = 0,$$

albo, po wprowadzeniu wyrażenia dla  $\delta F$ ,

$$(2) \quad \left(X + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z = 0,$$

gdzie przesunięcia są dowolne, ponieważ warunek  $F = 0$  został uwzględniony. Przyrównując więc każdy czynnik do zera, otrzymamy następujące równania różniczkowe:

$$(3) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}, \end{cases}$$



określające ruch punktu na danej powierzchni  $F=0$ . Z tych równań okazuje się, że ruch punktu na powierzchni może być badany w przypuszczeniu, że punkt jest swobodny, jeżeli do siły przyłożonej dodamy jeszcze siłę, normalną do powierzchni, o nieoznaczonej wielkości, a wyobrażającą opór tej powierzchni (art. 72). Ten opór zastępuje właśnie warunek  $F=0$ . Rugując z równań (3) współczynniki  $\lambda$ , otrzymamy dwa równania różniczkowe rzędu 2-go między  $x, y, z$  i  $t$ , których całki ogólne pozwalają rozpoznać ruch punktu na powierzchni. Obliczywszy na koniec współczynniki  $\lambda$ , otrzymamy ciśnienie, którego powierzchnia w każdym punkcie doznaje.

Postępując podobnym sposobem w przypadku, gdy dany jest tor ( $m$ ) punktu, a zatem gdy zachodzą dwa warunki,  $F=0$  i  $\varphi=0$ , otrzymamy równania

$$(4) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

które, po wyrugowaniu współczynników nieoznaczonych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , dają jedno równanie różniczkowe między  $x, y, z$  i  $t$ . W tym przypadku zastępujemy dane warunki oporem linii krzywej ( $m$ ), normalnym do niej w każdym punkcie, którego wielkość obliczyć możemy z wartości współczynników  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

Równania (3) i (4), pozwalające zbadać ruch punktu zapomocą współczynników nieoznaczonych, podał pierwszy Lagrange; dlatego nazywamy je równaniami różniczkowymi Lagrange'a.

Ruch punktu, dla którego dane są warunki, niezależnie od sił zachodząc mające, nazywamy ruchem nieswobodnym tego punktu. Wtedy punkt albo pozostaje ciągle na pewnej powierzchni, albowtż tylko na pewnej linii krzywej poruszać się może. W każdym razie może być swoboda tylko tym sposobem ograniczona, że punkt jest połączony materyjalnie z innymi punktami, stałymi lub ruchomymi. Według powyższej metody zastępujemy te ograniczenia swobody pewnymi, niezupełnie oznaczonymi siłami, które służą pośrednio do ustawienia równań różniczkowych ruchu; po scałkowaniu zaś tych równań, możemy owe siły dokładnie obliczyć. Ponieważ te siły uwidaczniają w toku rachunku połączenia, wskutek których zachodzi właśnie ograniczenie swobody, przeto nazywamy je często siłami połączeń. Te siły należy uważać za przyłożone do punktu, a stosownie do zachodzących połączeń, można tym siłom dawać rozmaite nazwy szczególne. Jeżeli np. punkt znajduje się na końcu nici nierozciągliwej i wskutek tego połączenia opisuje pewną linią krzywą, to siłę połączeń przedstawia napięcie nici. Jeżeli w innym przypadku pręt sztywny sprawia, iż punkt pozostaje na powierzchni pewnej kuli, to napięcie tego pręta przedstawia siłę połączeń. Według trzeciego prawa dynamiki, zachodzi nie tylko działanie połączeń na punkt, lecz także

oddziaływanie punktu na te połączenia, równe i wprost przeciwne odpowiedniej sile połączeń. Wyznaczwszy przeto siły połączeń, otrzymujemy tym samym siły, które materialne połączenia punktu wytrzymują, a znajomość tych sił w wielu razach jest potrzebna.

Do utworzenia równań ruchu można także użyć rozkładu siły na siły styczną i normalną, posługując się wiadomymi (art. 70) wzorami,

$$(5) \quad P_t = m \cdot \frac{dv}{dt}, \quad P_n = m \cdot \frac{v^2}{\rho},$$

i wyrażając w nich prędkość jako pochodną  $\frac{ds}{dt}$ . Atoli powyższe równania nie nadają się do rachunku, zwłaszcza dla punktu swobodnego, ponieważ kierunki sił  $P_t$  i  $P_n$  zależą od elementów toru, które właśnie wyznaczone być mają; stosowniejszy użytek można z tych równań zrobić w przypadku ruchu na danej krzywej. W niektórych zadaniach, np. przy ruchu centralnym, można użyć także współrzędnych biegunowych, aby za ich pośrednictwem otrzymać równania ruchu.

**77. ZASADA HAMILTON'A. POTENCJAL SIŁY.** Równania różniczkowe ruchu można także wyprowadzić z innej zasady, którą podał W. R. Hamilton. Zważmy, że wielkości  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  przedstawiają nieskończenie małe przyrosty współrzędnych punktu, zadość czyniące warunkom jego ruchu, a które zresztą są najzupełniej dowolne. Możemy więc te przyrosty uważać ogólnie za wariacje współrzędnych, będące funkcjami czasu  $t$ , i obliczać je tak, jak postępujemy w rachunku wariacyjnym, t. j. uważać je za nieskończenie małe funkcje argumentu  $t$ , który sam żadnej zmiany nie doznaje. Ta uwaga pozwala przekształcić równanie d'Alembert'a (art. 75) i wyprowadzić nową zasadę dla ruchu.

Równanie d'Alembert'a możemy tak napisać:

$$(1) \quad m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z;$$

kładając

$$(2) \quad X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = U^{(1)},$$

gdzie  $U^{(1)}$  przedstawia pracę przygotowaną siły ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), mieć będziemy

$$(3) \quad m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) = U^{(1)}.$$

Wprowadzając oznaczenia  $x' = \frac{dx}{dt}$ ,  $y' = \frac{dy}{dt}$ ,  $z' = \frac{dz}{dt}$ , możemy ostatnie równanie napisać w postaci

$$(4) \quad m \left( \frac{dx'}{dt} \delta x + \frac{dy'}{dt} \delta y + \frac{dz'}{dt} \delta z \right) = U^{(1)}.$$



Mamy tu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x'\delta x) &= \frac{dx'}{dt}\delta x + x' \cdot \frac{d\delta x}{dt} = \frac{dx'}{dt}\delta x + x'\delta \frac{dx}{dt}, \text{ albo} \\ \frac{d}{dt}(x'\delta x) &= \frac{dx'}{dt}\delta x + x' \cdot \delta x', \text{ skąd} \\ (5) \quad \frac{dx'}{dt}\delta x &= \frac{d}{dt}(x'\delta x) - x' \cdot \delta x', \end{aligned}$$

i podobnie dla  $\frac{dy'}{dt}\delta y$  i  $\frac{dz'}{dt}\delta z$ . Podstawiając te wyrażenia w (4), otrzymamy

$$(6) \quad \frac{d}{dt}m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') = U^{(1)}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(7) \quad T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{mv^2}{2},$$

gdzie  $v$  oznacza prędkość punktu. Tę połowę iloczynu masy punktu i kwadratu jego prędkości nazywamy energią kinetyczną, albo także siłą żywą tego punktu. Energija kinetyczna punktu jest zawsze wielkością dodatnią i ma wartość równą zeru dla punktu w spoczynku. Waryjacyjną energii kinetycznej punktu jest

$$(8) \quad \delta T = m(x' \cdot \delta x' + y' \cdot \delta y' + z' \cdot \delta z'),$$

co podstawiając w (6), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(x' \cdot \delta x + y' \cdot \delta y + z' \cdot \delta z) - \delta T &= U^{(1)}, \text{ czyli} \\ (9) \quad \delta T + U^{(1)} &= \frac{d}{dt}m(x' \cdot \delta x + y' \cdot \delta y + z' \cdot \delta z). \end{aligned}$$

To równanie zachodzi w każdej chwili podczas ruchu, jeżeli tylko  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  zostały wyznaczone według danych warunków. Mnożąc to równanie przez  $dt$  i całkując je następnie między dowolnymi lecz stałymi krańcami  $t_1$  i  $t_2$ , otrzymamy dla każdego ruchu:

$$(10) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + U^{(1)}) dt = \int_{t_1}^{t_2} m(x' \cdot \delta x + y' \cdot \delta y + z' \cdot \delta z),$$

gdzie symbol podstawienia oznacza, jak wiadomo, że po prawej stronie mamy podstawić naprzód  $t = t_2$ , następnie zaś  $t = t_1$ , i od wartości tego wyrażenia dla  $t_2$  odjąć jego wartość dla  $t_1$ . Załóżmy teraz, że waryjacyj  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  dla  $t_1$  i  $t_2$  niema, t. j., że dla  $t = t_1$  i dla  $t = t_2$  dane są położenia punktu; wtedy prawa strona równania będzie równa zeru i otrzymamy przy tych założeniach dla każdego ruchu

$$(11) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + U^{(1)}) dt = 0.$$

To równanie wyraża analitycznie tak zwaną zasadę Hamilton'a. Wysłowienie tej zasady na podstawie powyższego równania byłoby tylko opisaniem tego równania i dlatego możemy je pominąć.

Znaczenie powyższego równania staje się zrozumialszym, gdy wyraz  $\delta T + U^{(1)}$  pod znakiem całkowania jest waryjacją pewnej funkcji współrzędnych punktu, otrzymaną wskutek nieskończenie małego przyrostu tych współrzędnych przy niezmiennym argumencie  $t$ . Ten przypadek zajdzie widocznie wtedy, kiedy wielkość  $U^{(1)}$ , t. j. praca przygotowana sił przyłożonych, jest waryjacją pewnej funkcji  $U = F(x, y, z)$ , która także czas wyraźnie zawierać może. Kiedy zatem

$$(12) \quad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z.$$

Ponieważ to równanie ma zachodzić przy jakichkolwiek wartościach nieskończenie małych, nadanych waryjacyjom  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , od siebie niezależnym, przeto

$$(13) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Wziąwszy pochodne obu stron pierwszego z tych równań względem  $y$ , a drugiego względem  $x$  i odejmując je od siebie stronami odpowiednimi, otrzymamy

$$(14) \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0; \quad \text{taksamo} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

Ponieważ te równania wyrażają związki, które niezależnie od funkcji  $U$  zachodzą między pochodnymi cząstkowymi sił  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  wrazie, gdy mają miejsce równania (13), przeto one przedstawiają zarazem warunki konieczne i wystarczające, aby  $U^{(1)} = \delta U$ .

Jeżeli siła, do punktu przyłożona, ma tę własność, że jej rzuty prostopadłe na trzy osi układu współrzędnych są odpowiednio równe pochodnym cząstkowym pewnej funkcji współrzędnych tego punktu, wziętym względem tych współrzędnych, natenczas tę funkcję nazywamy funkcją siły lub także potencjałem siły. Potencjał  $U$  jest funkcją współrzędnych punktu; jego wyrażenie może także czas  $t$  zawierać wyraźnie; nie zależy on atoli od pochodnych tych współrzędnych względem czasu. Z równań (12) widzimy, że, *gdy istnieje potencjał siły, praca przygotowana tej siły jest równa waryjacji tego potencjału*, jeżeli przy obliczaniu tej waryjacji nie zmieniamy czasu.

Wrazie więc, kiedy istnieje potencjał siły, jest

$$\delta T + U^{(1)} = \delta T + \delta U = \delta(T + U),$$

z równania (11) zaś otrzymamy nowe równanie,

$$(15) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + U) \cdot dt = 0,$$

wyrażające zasadę Hamilton'a w przypadku istnienia potencjału siły. Między

dwoma danymi położeniami punktu jest nieskończenie wiele ruchów wogólności możebnych; atoli jeden tylko ruch tego punktu rzeczywiście zachodzi. Jeżeli dla rzeczywiście zachodzącego ruchu punktu wyznaczymy wartość całki

$$\int_{t_1}^{t_2} (T + U) \cdot dt \text{ między danymi krańcami, to waryjacja téj całki będzie ró-}$$

wna zeru, jeżeli z tego ruchu przejdziemy do jakiegokolwiek innego, między tymiż samymi krańcami możebnego ruchu, który różni się nieskończenie mało od tego ruchu rzeczywistego. Wiadomo, że równanie (15) wyraża warunek konieczny, aby powyższa całka posiadała wartość najmniejszą lub największą; zasada więc Hamilton'a to wyraża, iż dla rzeczywistego ruchu punktu między

dwoma danymi krańcami całka  $\int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt$  ma wogólności wartość najmniejszą lub największą, jeżeli siła przyłożona posiada potencyjał.

W celu okazania, że zasada Hamilton'a prowadzi istotnie do równań ruchu, podstawmy w równaniu (11) wartości dla  $\delta T$  i  $U^{(0)}$ ; wówczas

$$(16) \quad \int_{t_1}^{t_2} [m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') + (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)] dt = 0;$$

a ponieważ

$$x'\delta x' = \frac{d}{dt}(x'\delta x) - \frac{dx'}{dt}\delta x = \frac{d}{dt}(x'\delta x) - \frac{d^2x}{dt^2}\delta x,$$

i podobnie dla  $y$  i  $z$ , przeto, według równania (16),

$$(17) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( X - m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] dt = 0,$$

gdyż waryjacje spółrzędnych są równe zeru na krańcach całkowania. Możemy widocznie waryjacje zawsze tak obrać, żeby wyraz w nawiasach pod znakiem całkowania stawał się równym zeru dla każdego, z wyjątkiem jednego, elementu czasu od  $t_1$  do  $t_2$ . Aby więc powyższa całka była równa zeru, potrzeba, iżby

$$\left( X - m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z = 0,$$

co wyraża właśnie zasadę d'Alembert'a, dającą bezpośrednio równania ruchu, jakieśmy powyżej okazali. Zasady d'Alembert'a i Hamilton'a są przeto równoważne, a obiedwie prowadzą do ogólnych równań różniczkowych Lagrange'a.

**78. INNA POSTAĆ RÓWNAŃ LAGRANGE'A.** Zasada Hamilton'a nadaje się bardzo korzystnie do przekształcenia równań różniczkowych ruchu, jeżeli zamiast spółrzędnych prostokątnych  $x, y, z$  chcemy użyć innych zmiennych, mających określić położenie punktu w przestrzeni. Niech punkt będzie swo-

bodny, zamiast zaś współrzędnych  $x, y, z$  użyjemy innych trzech zmiennych  $q_1, q_2, q_3$ , które, uważane za funkcje czasu, mają służyć do określenia miejsca, a zatem i ruchu punktu. Wyrażając  $x, y, z$  przez  $q_1, q_2, q_3$ , mieć będziemy

$$(1) \quad x' = \frac{dx}{dt} = \sum \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} = \sum \frac{\partial x}{\partial q_i} q_i', \quad \delta x = \sum \frac{\partial x}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (i=1, 2, 3)$$

i podobnie  $y', z'$  i  $\delta y, \delta z$ . Podstawiając te wartości w T, otrzymamy na T funkcję kwadratową i jednorodną pochodnych  $q_i'$ , których współczynniki będą funkcjami zmiennych  $q_i$ . Będzie zatem

$$(2) \quad \delta T = \sum \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \right).$$

Następnie otrzymamy

$$(3) \quad U^{(1)} = X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z = \sum \left( X \cdot \frac{\partial x}{\partial q_i} \delta q_i + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} \delta q_i + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial q_i} \delta q_i \right),$$

a kładąc

$$(4) \quad Q_i = \sum \left( X \cdot \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial q_i} \right), \quad \text{mieć będziemy}$$

$$(5) \quad U^{(1)} = \sum Q_i \delta q_i,$$

gdzie sumowanie odnosi się do wskaźników  $i$ . Podstawiając wartości z równań (2) i (5) w równanie

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + U^{(1)}) dt = 0,$$

otrzymamy

$$(6) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \right] dt = 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \cdot dt &= \int \frac{\partial T}{\partial q_i'} \cdot \delta \frac{dq_i}{dt} \cdot dt = \int \frac{\partial T}{\partial q_i'} \cdot \frac{d\delta q_i}{dt} dt = \\ &= \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i - \int \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i \cdot dt, \end{aligned}$$

przeto, gdy weźmiemy krańce  $t_1$  i  $t_2$ , dla których waryjacje  $\delta q_i$  są równe zeru według założenia, to

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \cdot dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i \cdot dt.$$

Z równania zatym (6) mamy

$$(7) \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \left[ \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \cdot dt = 0;$$

ponieważ waryjacje  $\delta q_i$  są dowolne, przeto współczynnik każdej osobna waryjacji jest równy zeru i otrzymamy równania różniczkowe ruchu w postaci następującej:

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, 2, 3.$$

Jeżeli zachodzi potencjał  $U$ , który wyrażamy także zapomocą nowych zmiennych  $q_i$ , to zamiast  $U^{(1)}$  należy wziąć  $\delta U$ , gdzie

$$\delta U = \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = \Sigma Q_i \delta q_i.$$

będzie więc  $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$ , a zamiast równań (8) otrzymamy w tym przypadku następujące równania ruchu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

czyli

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Równania różniczkowe ruchu w postaci (8), a odpowiednio (9) Lagrange pierwszy podał. Równania Lagrange'a pozwalają ruch punktu określić za pośrednictwem jakichkolwiek wielkości, które ogólnie za współrzędne tego punktu uważać możemy, a których szczególnym przypadkiem jest układ współrzędnych prostokątnych. Aby zapomocą takich współrzędnych o znaczeniu ogólniejszym wyrazić ruch punktu, należy przekształcić wyrażenie energii kinetycznej punktu, tudzież wyrażenie potencjału siły, i podstawić je w równanie (9), aby tym sposobem otrzymać równania ruchu. Jeżeli potencjał nie zachodzi, natenczas trzeba pracę przygotowaną siły wyrazić przez dane współrzędne, aby według (8) otrzymać równania ruchu.

Jeżeli punkt nie jest swobodny, lecz między jego współrzędnymi zachodzi jedno równanie,  $F = 0$ , które także czas zawierać może, to najkorzystniej wprowadzić takie dwie nowe zmienne  $q_1$  i  $q_2$ , od siebie niezależne, aby, po wyrażeniu współrzędnych prostokątnych przez  $q_1$  i  $q_2$  i wstawieniu tych ich wyrażań w równanie warunkowe, otrzymać tożsamość. Niech np. punkt porusza się na powierzchni kuli  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ; wprowadzając takie dwie nowe zmienne,  $q_1$  i  $q_2$ , żeby  $x = r \cos q_1$ ,  $y = r \sin q_1 \cos q_2$ ,  $z = r \sin q_1 \sin q_2$ , przywieziemy dany warunek do tożsamości. Używając takich zmiennych dla przekształcenia równania Hamilton'a, otrzymamy zamiast równania (7) równanie

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ \frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) \right] \delta q_1 + \left[ \frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2 - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) \right] \delta q_2 \right\} dt = 0,$$

z którego wynikają dwa równania różniczkowe ruchu,

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$$

o możliwie najmniejszej ilości zmiennych. W przypadku zaś istnienia potencjału  $U$ , otrzymamy

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_2}.$$

Podobnym sposobem można otrzymać jedyne równanie ruchu, jeżeli punkt porusza się po danej linii krzywej. W tym przypadku możemy współrzędne punktu  $x, y, z$  wyrazić w funkcjach jednego parametru  $q$ , który wystarcza do określenia ruchu tego punktu.

Chcąc np. otrzymać równania różniczkowe ruchu punktu swobodnego we współrzędnych biegunowych  $r, \theta, \varphi$ , wprowadzonych w art. 10-ym, mamy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi, \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 &= r^2 \cdot \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dr}{dt} \right)^2, \\ (12) \quad T &= \frac{m}{2} [r^2 \varphi'^2 + r^2 \sin^2 \varphi \cdot \theta'^2 + r'^2], \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= m r^2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi \cdot \theta'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r (\varphi'^2 + \sin^2 \varphi \cdot \theta'^2), \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi'} &= m r^2 \varphi', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta'} = m r^2 \sin^2 \varphi \cdot \theta', \quad \frac{\partial T}{\partial r'} = m r', \\ Q_\varphi &= X \frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + Z \frac{\partial z}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

podobne wyrażenia otrzymamy dla  $Q_\theta$  i  $Q_r$ . Podstawiając wartości pochodnych współrzędnych  $x, y, z$  względem  $\varphi, \theta, r$ , mieć będziemy

$$(13) \quad \begin{cases} Q_\varphi = r(X \cos \varphi \cos \theta - Y \sin \varphi \sin \theta - Z \sin \varphi), \\ Q_\theta = r(-X \sin \varphi \sin \theta + Y \cos \varphi \cos \theta), \\ Q_r = X \sin \varphi \cos \theta + Y \cos \varphi \sin \theta + Z \cos \varphi, \end{cases}$$

gdzie  $X, Y, Z$  oznaczają siły, działające na punkt w kierunkach osi współrzędnych. Według (8) zatem szukane równania ruchu dla punktu swobodnego są

$$(14) \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d}{dt} \left( r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) - m r^2 \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = Q_\varphi, \\ m \cdot \frac{d}{dt} \left( r^2 \sin^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} \right) = Q_\theta, \\ m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} - m r \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sin^2 \varphi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = Q_r. \end{cases}$$



**79. RÓWNANIA RUCHU HAMILTON'A (RÓWNANIA KANONICZNE).** Niech  $x = F_x(q_1, q_2)$ ,  $y = F_y(q_1, q_2)$ ,  $z = F_z(q_1, q_2)$  będą równaniami powierzchni, na której się punkt porusza, a  $(X, Y, Z)$  niech będzie siłą przyłożoną. Wyraziwszy rzuty prędkości  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  punktu  $(x, y, z)$  linijowo zapomocą pochodnych  $q_1'$  i  $q_2'$  i podstawivszy te wartości w wyrażenie energii  $T$ , otrzymamy

$$(1) \quad T = \bar{T}_{11} \cdot q_1'^2 + 2 \bar{T}_{12} \cdot q_1' q_2' + \bar{T}_{22} \cdot q_2'^2,$$

gdzie  $\bar{T}_{11}$ ,  $\bar{T}_{12}$ ,  $\bar{T}_{22}$  są funkcjami zmiennych  $q_1$  i  $q_2$ . Różniczkując  $T$  cząstkowo względem  $q_1'$  i  $q_2'$ , otrzymamy

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial q_1'} = 2(\bar{T}_{11} \cdot q_1' + \bar{T}_{12} \cdot q_2'), \\ \frac{\partial T}{\partial q_2'} = 2(\bar{T}_{12} \cdot q_1' + \bar{T}_{22} \cdot q_2'), \end{cases}$$

a kładąc

$$(3) \quad p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'},$$

możemy, według (2), wyrazić  $p_1$  i  $p_2$  linijowo zapomocą  $q_1'$  i  $q_2'$ , przyczem współczynniki tych wyrażeń będą funkcjami zmiennych  $q_1$  i  $q_2$ . Podstawivszy wyrażenia (3) w (2), możemy nawzajem  $q_1'$  i  $q_2'$  wyrazić linijowo zapomocą  $p_1$  i  $p_2$ , przyczem współczynniki tych wyrażeń będą także funkcjami zmiennych  $q_1$  i  $q_2$ . Tym sposobem możemy  $p_1$  i  $p_2$  uważać za nowe zmienne zamiast  $q_1'$  i  $q_2'$ . Podstawivjąc wyrażenia  $q_1'$  i  $q_2'$  zapomocą  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  i  $q_2$  w wyrażenie energii  $T$ , a ujmując dla odróżnienia w nawiasy pochodne cząstkowe tak przekształconego wyrażenia energii  $T$ , mieć będziemy

$$(4) \quad dT = \left( \frac{\partial T}{\partial p_1} \right) dp_1 + \left( \frac{\partial T}{\partial p_2} \right) dp_2 + \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) dq_1 + \left( \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) dq_2.$$

Wziąwszy jednak pierwotne wyrażenie (1) energii  $T$ , mamy

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} \cdot q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} \cdot q_2',$$

czyli

$$(5) \quad T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' - T.$$

Różniczkujemy to równanie względem wszystkich zmiennych  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_1'$  i  $q_2'$ ; otrzymamy

$$dT = \frac{\partial T}{\partial q_1'} dq_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} dq_2' + q_1' \cdot d \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \cdot d \frac{\partial T}{\partial q_2'} - \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial T}{\partial q_1'} dq_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} dq_2' \right),$$

czyli, po uwzględnieniu równań (3),

$$(6) \quad dT = q_1' \cdot dp_1 + q_2' \cdot dp_2 - \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2.$$

Z porównania wyrażeń (4) i (6) wynika

$$(7) \quad \begin{cases} q_1' = \left( \frac{\partial T}{\partial p_1} \right), & q_2' = \left( \frac{\partial T}{\partial p_2} \right), \\ -\frac{\partial T}{\partial q_1} = \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \right), & -\frac{\partial T}{\partial q_2} = \left( \frac{\partial T}{\partial q_2} \right). \end{cases}$$

Podstawmy te wyrażenia w równaniach ruchu (10) artykułu poprzedzającego, wyrażając wszystkie wielkości zapomocą nowych zmiennych  $p_1, p_2, q_1$  i  $q_2$ ; natenczas nawiasy będą zbędne i otrzymamy równania ruchu w nowych postaciach, a mianowicie:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1; & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2. \end{cases}$$

Tym sposobem przedstawiamy ruch punktu na danej powierzchni zapomocą czterech równań różniczkowych rzędu 1-go między pięcioma zmiennymi  $p_1, p_2, q_1, q_2$  i  $t$ . Te równania nazywamy równaniami Hamilton'a, albo równaniami kanonicznymi ruchu. Możemy je bowiem uważać za równania typowe, nadające się do wszelkich badań ruchu na powierzchni.

Jeżeli siła  $(X, Y, Z)$  posiada potencyjał  $U$ , który zależy od  $x, y, z$  (zawierając lub nie zawierając  $t$ ), a zatem zależy tylko od  $q_1$  i  $q_2$ , i nie zawiera pochodnych  $q_1'$  i  $q_2'$ , a więc jest niezależny od  $p_1$  i  $p_2$ , to będzie, jak wiadomo (art. 78),

$$Q_1 = \left( \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \left( \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_2};$$

dwa ostatnie przeto z równań (8) będą

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial q_2}.$$

Kładąc

$$(9) \quad H = T - U,$$

i zważając, że  $\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2}$ , otrzymamy, w przypadku istnienia potencyjału siły, następujące równania kanoniczne ruchu na powierzchni:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}. \end{cases}$$

Podobnym sposobem można także otrzymać dwa równania kanoniczne ruchu punktu po danej linii krzywej.

Dla punktu, poruszającego się na kuli, będzie (art. 78)

$$x = r \cdot \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \cdot \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \varphi,$$

gdzie  $r$  jest wielkością stałą. Jest więc

$$T = \frac{mr^2}{2} \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sin^2 \varphi \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right].$$

Kładąc zatem

$$\theta_1 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = mr^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mr^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

i uważając  $\theta_1$  i  $\varphi_1$  za nowe zmienne  $p_1$  i  $q_1$ , będziemy mieli

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\theta_1}{mr^2 \sin^2 \varphi}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi_1}{mr^2}, \\ T &= \frac{1}{2mr^2} \left( \varphi_1^2 + \frac{\theta_1^2}{\sin^2 \varphi} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= \frac{\theta_1}{mr^2 \sin^2 \varphi}, & \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= \frac{\varphi_1}{mr^2}. \end{aligned}$$

Równania zatem kanoniczne ruchu punktu na kuli są

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\theta_1}{mr^2 \sin^2 \varphi}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi_1}{mr^2}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= Q_1, & \frac{d\varphi_1}{dt} &= -mr^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi + Q_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$Q_1 = X \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad Q_2 = X \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + Z \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$