

ROZDZIAŁ XIX.

KINETYKA CIECZY (HYDROKINETYKA).

201. RÓWNANIA RUCHU CIECZY DOSKONAŁEJ. Ruch ciągły cieczy możemy rozważać dwojakim sposobem. Obrawszy pewną cząstkę cieczy, możemy pytać się o tor, który ona opisuje, tudzież o jej prędkość i o ciśnienie, którego ona doznaje w każdym punkcie swego toru. W ten sposób kręślimy niejako historiją każdej cząstki cieczy zosobna. Możemy jednak obrać także pewien punkt w téj przestrzeni, w której ruch cieczy zachodzi, i badać prędkości, które rozmaite cząstki cieczy posiadają, gdy z biegiem czasu przez tenże punkt przechodzą, tudzież ciśnienia, których one doznają, gdy przybywają do tego punktu. W ten sposób rejestrujemy niejako zjawiska, zachodzące z biegiem czasu w pewnym miejscu w przestrzeni.

Zastosowanie piéwszój z tych metod wymaga ustanowienia pewnej cechy, któraby jedną cząstkę cieczy odróżniała od wszystkich innych. Jako ową cechę przyjmujemy zwykle wiadome spółrzedne prostokątne a, b, c tego miejsca, które cząstka zajmuje w pewnym czasie t_0 , np. w czasie $t_0 = 0$. Zachowując znakowanie, powszechnie używane, oznaczmy przez u, v, w składowe prostokątne prędkości cząstki; u, v, w należy uważać za funkcyje argumentów a, b, c i t ; podobnie będzie ciśnienie p funkcyją tych argumentów. Wyznaczywszy te funkcyje, znamy ruch cząstki cieczy.

Używając zaś drugieój z tych metod, t. j. odnosząc zjawiska do jednego tylko miejsca, inaczej pojmujemy prędkości u, v, w i ciśnienie p . Prędkości i ciśnienie zależą bowiem od miejsca, w którym je rozważamy, i od czasu, a więc u, v, w i p są funkcyjami argumentów x, y, z i t ; ponieważ zaś x, y, z są funkcyjami czasu, przeto u, v, w i p są funkcyjami czasu wyrażnymi i niewyrażnymi. Jeżeli w tych funkcyjach przyjmiemy dla x, y i z pewne wartości stałe, otrzymamy prędkość i ciśnienie, zachodzące w pewnym miejscu w przestrzeni z biegiem czasu, i w ten sposób osiągniemy właściwy cel takiej metody badania. Jeżeli u, v, w i p nie zawierają czasu wyraźnie, jeżeli zatym są

funkcjami czasu tylko o tyle, o ile zależą od x, y i z , to w każdym punkcie w przestrzeni zachodzić będzie nieustannie, t. j. bez względu na czas, tenże sam ruch i tożsamo ciśnienie cieczy, właściwe temu punktowi. Taki ruch cieczy nazywamy ruchem trwałym tej cieczy.

Jeżeli u, v, w odnoszą się do cząstki cieczy, znajdującej się w czasie t w punkcie (x, y, z) , natenczas cząstka opisze w czasie dt drogi $dx = u \cdot dt$, $dy = v \cdot dt$, $dz = w \cdot dt$ w kierunkach osi, a po upływie tego czasu jej prędkości będą odpowiednio $u + \frac{du}{dt} dt$, $v + \frac{dv}{dt} dt$, $w + \frac{dw}{dt} dt$, przyczem

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Ponieważ $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$, przeto

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

i podobnie $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ i $\frac{dp}{dt}$. Pochodne $\frac{\partial u}{\partial t}$ i t. p. powstają przez różniczkowanie względem czasu, zawartego wyrażnie w u , i t. p. Jeżeli $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ i $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, natenczas ruch cieczy jest trwały.

Miedzy pochodnymi prędkości u, v, w względem x, y, z zachodzi pewien związek, cechujący ciecz nieściśliwą. Otrzymamy go z równania (5) art. 177-go. Według znakowania obecnego przedstawiają $u \cdot dt$, $v \cdot dt$, $w \cdot dt$ przesunięcia punktu (x, y, z) ; wstawiwszy te przesunięcia w owo równanie zamiast u, v, w , otrzymamy — $\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt$ jako zmianę gęstości cieczy w tym punkcie. Ponieważ ta zmiana jest równa zeru dla cieczy nieściśliwej, przeto

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Możemy to ważne równanie także tak otrzymać. Rozważajmy nieskończenie mały element prostopadłościenny (fig. 65) $abcdefg$; w czasie dt wchodzi do niego przez ścianę mbc masa cieczy równa $\sigma u \cdot dy dz \cdot dt$, a przez ścianę przeciwną wychodzi masa cieczy $\sigma \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz dt$; przyrost więc masy cieczy wskutek ruchu w kierunku osi x jest — $\sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz \cdot dt$. Podobnie wzrasta masa o — $\sigma \cdot \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz \cdot dt$ wskutek ruchu w kierunku osi y , a o

— $\sigma \frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz \cdot dt$ wskutek ruchu w kierunku osi z . Całkowity więc przyrost masy cieczy wynosi

$$- \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz \cdot dt,$$

a ponieważ masa elementu cieczy nie może się zmieniać, przeto ta wielkość jest równa zeru, skąd wynika równanie (2). To równanie bywa nazywane równaniem ciągłości cieczy; trafniejszą byłaby nazwa: równanie stałości masy cieczy. Ono zachodzi dla każdej cząstki i w każdej chwili, bez względu na to, czy ciecz jest jednorodna, czy niejednorodna; możemy bowiem element obrać zawsze tak mały, że gęstość będzie też sama w każdym jego punkcie.

Jeżeli ciecz jest ograniczona pewną powierzchnią $F(x, y, z, t) = 0$, to z art. 180-go wiadomo, że tę powierzchnią wciąż tworzą też same cząstki cieczy, więc

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Dla powierzchni stałej będzie $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

Dla uproszczenia rachunku będziemy ciśnienie p uważali za wielkość dodatnią (w rozdz. XVIII było p ujemne); gdyby gdziekolwiek wypadło $p < 0$, natenczas ciągłość cieczy jest przerywana.

202. Rozważajmy element prostopadłościenny (fig. 65) cieczy; oznaczmy przez X, Y, Z składowe siły zewnętrznej dla jednostki masy, przez p ciśnienie w punkcie (x, y, z) . Ściana mbc doznaje ciśnienia $p \cdot dy dz$, ściana zaś przeciwległa ciśnienia — $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz$ w kierunku x ; suma tych ciśnień jest — $\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$. Przyłożywszy do elementu jeszcze siłę zewnętrzną $\sigma X dx dy dz$, możemy go uważać za swobodny względem ruchu w kierunku x . Ponieważ $\sigma \cdot \frac{du}{dt} dx dy dz$ jest wyrażeniem analitycznym siły, która temu elementowi udziela przyspieszenia w kierunku x , przeto równanie ruchu w tym kierunku jest

$$\sigma \cdot \frac{du}{dt} dx dy dz = \left(\sigma X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz, \text{ czyli } \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Wstawiając wartość przyspieszenia i postępując podobnie dla osi y i z , mieć będziemy

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Ten układ równań ruchu, odpowiadający metodzie odnoszenia zjawisk do pewnego miejsca, zwiemy układem równań Euler'a. Jeżeli z nim połączymy wiadome równanie ciągłości (art. 201), możemy wyznaczyć 4 nieznane u, v, w i p , a zatem rozwiązać dane zagadnienie.

Aby otrzymać równania ruchu cząstki oddzielnej cieczy, oznaczmy przez a, b, c (art. 201) współrzędne tej cząstki dla $t=0$. Rozważając x, y, z jako funkcje a, b, c i t , określamy ruch cząstki; rugując bowiem czas, otrzymamy równanie jej toru, a różniczkując współrzędne względem czasu, otrzymujemy prędkość i przyspieszenie. Równania ruchu cząstki będą

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - X + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - Y + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - Z + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Te równania dodajmy do siebie, pomnożywszy je odpowiednio naprzód przez $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$, następnie przez $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$, na koniec przez $\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$; otrzymamy w ten sposób

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial a} = 0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) \frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial b} = 0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) \frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) \frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial c} = 0. \end{cases}$$

Ten układ nazywamy układem równań Lagrange'a, chociaż także Euler podał go pierwszy. Widocznie te równania nadają się do rozwiązania zagadnień hydrokinetycznych na podstawie metody rozważania ruchu cząstki oddzielnej cieczy.

Podamy jeszcze odpowiednie równanie ciągłości. W tym celu uważajmy element prostopadłościenny, którego wierzchołek m znajduje się w czasie $t=0$ w punkcie (a, b, c) , a którego krawędzi mają odpowiednio długości da, db, dc w kierunkach osi. Po upływie czasu t punkt (a, b, c) przybędzie do (x, y, z) , i prostopadłościan stanie się pochyłym równoległościanem. Wierzchołki elementu, których współrzędne w czasie $t=0$ były odpowiednio: $(a+da, b, c)$, $(a, b+db, c)$, $(a, b, c+dc)$, przybędą w czasie t do punktów $\left(x + \frac{\partial x}{\partial a} da, y + \frac{\partial y}{\partial a} da, z + \frac{\partial z}{\partial a} da\right)$, $\left(x + \frac{\partial x}{\partial b} db, y + \frac{\partial y}{\partial b} db, z + \frac{\partial z}{\partial b} db\right)$, $\left(x + \frac{\partial x}{\partial c} dc, y + \frac{\partial y}{\partial c} dc, z + \frac{\partial z}{\partial c} dc\right)$; objętość elementu, która pierwotnie była $da db dc$,

będzie teraz, jak wiadomo z geometrii *),

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} da db dc = \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} da db dc,$$

gdzie $\frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)}$ oznacza wyznacznik funkcyj x, y, z względem a, b, c .

Masa więc elementu cieczy po upływie czasu t będzie $\sigma \cdot \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} da db dc$. Ponieważ ani masa ani gęstość cieczy nieściśliwej nie zmienia się, przeto

$$\sigma \cdot \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} da db dc = \sigma da db dc,$$

skąd wynika równanie ciągłości

$$(4) \quad \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} = 1.$$

203. RUCHY W ELEMENTIE CIECZY. Przed całkowaniem równań hydrokinetycznych w tych niewielu przypadkach, w których ono jest możebne, zastanówmy się nad ruchami względnymi cząstek, zawartych w elemencie cieczy, przyjmując, że warunek ciągłości zachodzi. Tym sposobem dojdziemy do pewnych praw, stanowiących kinematykę cieczy doskonałej.

Do zamierzonego celu prowadzi ta sama metoda, jakiej używaliśmy w art. 176—180 dla ciał sprężystych z tą jedyną odmianą, że w rozważaniu przesunięć oddzielnych cząstek elementu należy ograniczyć się do nieskończenie małego przedziału czasu. Jakoż, jeżeli u, v, w oznaczają chwilowe prędkości cząstki, zajmującej miejsce punktu m , (x, y, z) , to $u \cdot dt, v \cdot dt, w \cdot dt$ są przesunięciami tej cząstki w elemencie czasu dt , które zadość czynią warunkowi ciągłości i są wielkościami nieskończenie małymi, również jak ich pochodne przy stałej wielkości przedziału dt czasu. Jeżeli więc zamiast przesunięć u, v, w , rozważanych w pomienionych artykułach, podstawimy teraz $u \cdot dt, v \cdot dt, w \cdot dt$, to będziemy mogli wyznaczyć wszystkie wielkości, cechujące ruch spólny cząstek tego elementu, tudzież ruch własny każdej cząstki z osobna.

Zatoczmy około punktu m dowolną powierzchnią zamkniętą, wydzielającą z cieczy nieskończenie mały element; wówczas dla punktu n , znajdującego się wewnątrz lub na tej powierzchni, którego współrzędne względem m są dx, dy, dz , będzie

*) Ob. „*Geometrię analityczną*” prof. Wł. Zajączkowskiego. str. 289.

$$(1) \quad \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz, \end{cases}$$

a $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ będą składowymi prędkości tego punktu na początku elementu czasu dt .

Wprowadźmy

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \lambda_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \lambda_3 = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varphi_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \varphi_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ 2\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, 2\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, 2\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \end{cases}$$

równanie ciągłości będzie

$$(3) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

z czego się okazuje, że trzy funkcje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nie mogą być ani jednocześnie dodatnie ani jednocześnie ujemne. W elemencie dt czasu, punkt n oddali się od m lub zbliży się ku temu punktowi, tak, iż, jeżeli ds było pierwotną odległością obudwu punktów, zaś $(1 + \lambda) ds$ jest ich odległością po upływie elementu dt czasu, będzie, według art. 178-go,

$$(4) \quad \lambda = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2 + \varphi_1 \cdot bc + \varphi_2 \cdot ca + \varphi_3 \cdot ab,$$

gdzie (a, b, c) oznaczają dostawy kierunkowe elementu liniowego ds na początku tego elementu czasu. Postępując, jak w art. 178-ym, będziemy mieli powierzchnię rzędu 2-go

$$(5) \quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \varphi_1 \cdot yz + \varphi_2 \cdot zx + \varphi_3 \cdot xy = \pm 1,$$

której środkiem jest punkt m , a której promienie są odwrotnie proporcjonalne względem kwadratów funkcji λ , odpowiednich tym promieniom. Z równania (3) wynika, że ta powierzchnia składa się z dwu hiperbolojd sprzężonych, rozgraniczonych wspólnym stożkiem asymptotycznym. Jeżeli cząstki cieczy, znajdujące się nieskończenie blisko punktu m wewnątrz tego stożka, oddalają się od tego punktu, to cząstki zewnątrz stożka zbliżają się ku temu punktowi, lub odwrotnie; cząstki zaś na stożku asymptotycznym zostają w pierwotnej odległości od tego punktu po upływie czasu dt . Kierunki osi głównych powyższych hiperbolojd nazwiemy kierunkami głównymi w punkcie m . Każdy element liniowy ds przyjmie po upływie czasu dt wogólnieści odmienny od pierwotnego kierunek. Elementy liniowe, do siebie prostopadłe, a mające kierunki główne na początku tego przedziału czasu, zmieniają także kierunki, lecz pozostaną do siebie prostopadłymi, podczas gdy jakiegokolwiek dwa inne elementy liniowe, do siebie prostopadłe, przestaną tworzyć kąt prosty.

Punkt m zajmie po upływie czasu dt miejsce $(x + u \cdot dt, y + v \cdot dt, z + w \cdot dt)$, a punkt n zajmie miejsce $(x + dx + u \cdot dt + du \cdot dt, y + dy + v \cdot dt + dv \cdot dt, z + dz + w \cdot dt + dw \cdot dt)$, z czego wynika, że punkt n posunie się w tym czasie względem m w kierunkach osi współrzędnych odpowiednio o drogi $du \cdot dt, dv \cdot dt, dw \cdot dt$, przyczem według (1) i (2) będzie, podobnie jak w art. 180-ym,

$$(6) \quad \begin{cases} du = \lambda_1 \cdot dx + \frac{1}{2} (\varphi_3 - 2\omega_3) dy + \frac{1}{2} (\varphi_2 + 2\omega_2) dz, \\ dv = \frac{1}{2} (\varphi_3 + 2\omega_3) dx + \lambda_2 \cdot dy + \frac{1}{2} (\varphi_1 - 2\omega_1) dz, \\ dw = \frac{1}{2} (\varphi_2 - 2\omega_2) dx + \frac{1}{2} (\varphi_1 + 2\omega_1) dy + \lambda_3 \cdot dz. \end{cases}$$

Jeżeli te równania pomnożymy przez dt i dodamy do nich odpowiednio $u \cdot dt, v \cdot dt, w \cdot dt$, to otrzymamy cały ruch cząstki n , znajdującą się w uważanym elemencie cieczy. Oznaczmy więc przez $\delta_n x, \delta_n y, \delta_n z$ przesunięcia całkowite cząstki n w kierunkach osi współrzędnych; mieć będziemy

$$(7) \quad \begin{cases} \delta_n x = \delta_m x + \left[\lambda_1 dx + \frac{1}{2} (\varphi_3 - 2\omega_3) dy + \frac{1}{2} (\varphi_2 + 2\omega_2) dz \right] dt, \\ \delta_n y = \delta_m y + \left[\lambda_2 dy + \frac{1}{2} (\varphi_1 - 2\omega_1) dz + \frac{1}{2} (\varphi_3 + 2\omega_3) dx \right] dt, \\ \delta_n z = \delta_m z + \left[\lambda_3 dz + \frac{1}{2} (\varphi_2 - 2\omega_2) dx + \frac{1}{2} (\varphi_1 + 2\omega_1) dy \right] dt, \end{cases}$$

gdzie $\delta_m x = u \cdot dt, \delta_m y = v \cdot dt, \delta_m z = w \cdot dt$ oznaczają przesunięcia punktu m .

Możemy zawsze w punkcie m wziąć jeden układ osi prostokątnych, dla których będzie

$$(8) \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Te proste mają właśnie kierunki główne, a sposób ich wyznaczenia podaliśmy w art. 180-ym. W kierunkach tych prostych będą zatem całkowite przesunięcia punktu n w czasie dt

$$(9) \quad \begin{cases} \delta_n x = \delta_m x + (\lambda_1 dx - \omega_3 dy + \omega_2 dz) dt, \\ \delta_n y = \delta_m y + (\lambda_2 dy - \omega_1 dz + \omega_3 dx) dt, \\ \delta_n z = \delta_m z + (\lambda_3 dz - \omega_2 dx + \omega_1 dy) dt. \end{cases}$$

204. Z tych równań okazuje się, że ruch elementu cieczy, zawierającego w sobie punkt m , składa się z trzech części, mianowicie: popierwsze z ruchu postępowego, spólnego wszystkim cząstkom tego elementu; powtórne z ruchu obrotowego około pewnej osi, przez punkt m przechodzącej, w którym biorą udział wszystkie cząstki, jak gdyby element był sztywny; potrzenie z pewnego ruchu, każdej cząstce właściwego, wskutek którego ta cząstka posuwa się względem punktu m w kierunkach głównych odpowiednio o $\lambda_1 dx dt, \lambda_2 dy dt, \lambda_3 dz dt$. Pierwsze dwa ruchy dają skręt chwilowy elementu, nie zmieniający wzajemnego położenia jego cząstek; wskutek ostatniego ruchu posuwają się

cząstki względem siebie, a kształt elementu zmienia się. Wielkości $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ są prędkościami kątowymi obrotu elementu, a dostawy kierunkowe osi obrotu są proporcjonalne względem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Każdy element cieczy obraca się chwilowo około pewnej, jemu właściwej osi, która jest coraz inną prostą dla coraz innych elementów.

Między pochodnymi prędkości kątowych zachodzi związek, wynikający z równań (2) art. poprzedzającego, mianowicie:

$$(1) \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0.$$

Wyobraźmy sobie, że rozważany element cieczy staje się nagle sztywnym; wtedy możemy wyznaczyć jego ruch bezpośrednio po zeszywnieniu. Z zasady bowiem zachowania ruchu środka masy wynika, że środek masy elementu będzie się poruszał po zeszywnieniu z tą samą prędkością, co przedtem. Poprowadźmy przez środek masy tego elementu, którego prędkości niech będą u, v, w , osi bezwładności, i obierzmy je za osi współrzędnych; A, B, C niech oznaczają odpowiednio momenty główne elementu względem tych osi, a $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ prędkości kątowe jego obrotu około tych osi po zeszywnieniu. Cząstka elementu, której współrzędne są dx, dy, dz , niech posiada masę dm , a du, dv, dw niech oznaczają składowe jej prędkości względem środka masy, wyrażone przez równania (1) art. poprzedzającego. Z wiadomych zasad kinetyki otrzymamy następujące równania (art. 149), określające kręcenie się elementu około środka masy:

$$(2) \quad \begin{cases} A \Omega_1 = \int (dy dw - dz dv) dm, \\ B \Omega_2 = \int (dz du - dx dw) dm, \\ C \Omega_3 = \int (dx dv - dy du) dm, \end{cases}$$

gdzie całkowania rozciągają się na objętość elementu. Wstawiwszy wartości du, dv, dw , przyczem wartości pochodnych cząstkowych prędkości u, v, w względem współrzędnych mają być wzięte w środku masy, a zatem w punkcie $x=0, y=0, z=0$, otrzymamy ze względu na własności głównych osi bezwładności następujące równanie:

$$\begin{aligned} \int (dy dw - dz dv) dm &= \frac{\partial w}{\partial y} \int dy^2 dm - \frac{\partial v}{\partial z} \int dz^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \int (dy^2 + dz^2) dm + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left[\int (dx^2 + dy^2) dm - \right. \\ &\quad \left. - \int (dx^2 + dz^2) dm \right] = A \omega_1 + (C - B) \frac{\varphi_1}{2}, \end{aligned}$$

a zatem, według (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1 + \varphi_1 \cdot \frac{C-B}{2A}, \text{ i podobnie} \\ \Omega_2 = \omega_2 + \varphi_2 \cdot \frac{A-C}{2B}, \\ \Omega_3 = \omega_3 + \varphi_3 \cdot \frac{B-A}{2C}. \end{cases}$$

Z tych równań okazuje się, że niezależnie od kształtu elementu otrzymamy $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$, $\Omega_3 = \omega_3$, jeżeli $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, i że te ostatnie warunki wystarczają, aby prędkości kątowne obrotu były też same dla elementu ciekłego i dla elementu sztywnego. Ponieważ ostatnie warunki wyrażają, że kierunki główne elementu ciekłego mają być osiami głównymi bezwładności elementu sztywnego, przeto mamy następujące ciekawe twierdzenie: *jeżeli w pewnej chwili wyznaczymy dla danego punktu w cieczy kierunki główne, i wydzielimy element cieczy, którego środkiem masy jest ten punkt, a którego osiami bezwładności są owe kierunki główne, i uczynimy następnie ten element sztywnym, to skręt chwilowy elementu sztywnego będzie ten sam, co skręt chwilowy elementu ciekłego* (tw. Beltrami'ego).

205. RUCH WIROWY I RUCH NIEWIROWY. Jeżeli w pewnym punkcie cieczy i w pewnej chwili prędkości kątowne ω_1 , ω_2 , ω_3 nie są wszystkie równe zeru, wtedy mówimy, iż w tym punkcie i w tej chwili zachodzi w cieczy ruch wirowy; jeżeli zaś wszystkie trzy powyższe prędkości są równe zeru, natenczas ruch elementu cieczy nazywamy ruchem niewirowym. W pierwszym przypadku nieskończenie mały element cieczy, którego środkiem masy jest punkt rozważany, obraca się chwilowo około pewnej osi, przez ten punkt przechodzącej a ω_1 , ω_2 , ω_3 przedstawiają rzuty prędkości kątownej tego obrotu na osi współrzędnych, a oprócz tego posuwa się ten element w przestrzeni i odkształca się; w przypadku ruchu niewirowego niema obrotu, a pozostaje tylko ruch postępowy elementu i jego odkształcenie.

Ruch wirowy może w pewnej chwili zachodzić w skończonej części cieczy. W tym przypadku każdy element tej części obraca się chwilowo około pewnej osi, przez jego środek masy przechodzącej, a oś tego obrotu jest coraz inna dla coraz innych elementów cieczy w tej części. Taki ruch jest niemożliwy w układzie sztywnym, albowiem wszystkie punkty takiego układu mogą się tylko obracać około wspólnej osi, i z tego powodu należy ruch wirowy dokładnie odróżnić od ruchu obrotowego. Nadto zważyć należy, że prędkość kątowna obrotu elementu cieczy zależy w pewien sposób od jego prędkości postępowej (art. 203), podczas gdy w ciele sztywnym obadwa rodzaje prędkości są od siebie niezależne.

Warunki konieczne i dostateczne ruchu niewirowego są według równań (2) art. 203-go,

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Te związki między pochodnymi cząstkowymi składowych prędkości u , v , w względem spółrzędnych wyrażają widocznie, że wielkość $u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji spółrzędnych, która także czas wyraźnie zawierać może (art. 77) i nawzajem, jeżeli powyższa wielkość jest różniczką zupełną, natenczas równania (1) zachodzić będą. Wielkości dx , dy , dz oznaczają przytym różniczki spółrzędnych punktu, jeżeli w danej chwili z tego punktu przechodzimy do punktu nieskończenie bliskiego, nie oznaczają zaś dróg, które punkt (x, y, z) w elemencie czasu opisuje w przestrzeni.

Jeżeli wielkość $u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz$ jest różniczką zupełną, natenczas funkcją, której ona jest różniczką, nazywamy potencjałem prędkości. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby zachodził ruch niewirowy cieczy, jest istnienie potencyjału prędkości; gdzie taki potencyjał nie zachodzi, tam ruch cieczy jest wirowy.* Oznaczmy przez φ potencyjał prędkości; wówczas

$$(2) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

składowe więc prędkości wyrażają się podobnie, jak składowe siły zachowujące. Z tych związków wynika równanie ciągłości dla ruchu niewirowego

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Z tego równania okazuje się, że nie każda funkcja może być potencjałem prędkości dla ruchu niewirowego; drugie pochodne téj funkcji muszą bowiem zadość czynić powyższemu warunkowi, mającemu ten sam kształt, co równanie Laplace'a dla potencyjału sił przyciągania według prawa Newton'a, jeżeli różniczkujemy względem spółrzędnych punktu, znajdującego się zewnątrz ciała przyciągającego (art. 126).

Jeżeli potencyjał prędkości nie zawiera czasu wyraźnie, wtedy ruch niewirowy będzie ruchem trwałym, a wówczas $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

206. ZACHOWANIE RUCHU WIROWEGO. Przyjmując, że siły zewnętrzne mają potencyjał U , obliczmy zmiany, jakich przy ruchu wirowym doznają prędkości kątowe elementu w przedziale dt czasu, w którym jego środek masy opisał drogi $u \cdot dt$, $v \cdot dt$, $w \cdot dt$. Do tego celu służą równania ruchu, które napiszmy w postaci następującej:

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt}, \quad \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt}, \quad \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt},$$

przyczem $X dx + Y dy + Z dz = dU$. Różniczkując pierwsze równanie względem y , drugie względem x i odejmując je następnie od siebie, otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Y - \frac{dv}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(X - \frac{du}{dt} \right) = 0.$$

Ponieważ z założenia $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$, przeto:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \right) = 0,$$

czyli po podstawieniu wartości

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0.$$

Wykonawszy różniczkowania, otrzymamy po uporządkowaniu,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Uwzględniając równanie ciągłości, dodając i odejmując iloczyn $\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$, porządkując i wstawiając $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \omega_3}{\partial z} - \omega_1 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_2 \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_3 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Jeżeli podobnie postąpimy z pozostałymi równaniami ruchu i uwzględnimy, że

$$(3) \quad \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial z}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

otrzymamy następujące trzy ważne równania, wyznaczające pochodne zupełne prędkości kątowych:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} = \omega_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_3 \cdot \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2 \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3 \cdot \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Te równania przedstawiają rozwiązanie naszego zagadnienia. Z nich widzimy, że pochodna zupełna każdej prędkości kątowej ω_i względem czasu, czyli pochodna, wzięta ze względu na dwa położenia sąsiednie tegoż samego elementu cieczy, jest funkcją liniową i jednorodną wszystkich trzech prędkości kątowych. Jeżeli na początku przedziału dt czasu było $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0$, to będzie przy końcu tego przedziału $\frac{d\omega_1}{dt} = 0, \frac{d\omega_2}{dt} = 0, \frac{d\omega_3}{dt} = 0$, a więc także $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0$. Dalej widzimy, że skoro nie wszystkie ω_i są równe zeru na początku pewnego elementu czasu, to nie będą nimi wogółności także przy końcu tego elementu. Rozciągając te wyniki do skończonego przedziału czasu, otrzymujemy ważne twierdzenie: *jeżeli na ciecz działają siły zachowujące, natenczas element cieczy, niemający w którejkolwiek*

chwili ruchu wirowego, nigdy tego ruchu nie nabędzie, a element wirujący cieczy nigdy ruchu wirowego nie utraci. Możemy to twierdzenie, wyrażające zasadę zachowania ruchu wirowego, także tak wyrazić: jeżeli na ciecz działają siły zachowujące, i dla pewnej części cieczy istnieje potencjał prędkości w jakiegokolwiek chwili, to ta część cieczy będzie miała zawsze potencjał prędkości, gdziekolwiek znajdować się będzie podczas ruchu; a jeżeli kiedykolwiek nie istniał potencjał, to go nigdy nie będzie dla tej części cieczy, dopóki te same siły działają. Potencjał więc prędkości nie jest właściwością przestrzeni, w której ruch zachodzi, lecz cieczy samej, poruszającej się przy działaniu sił zachowujących.

207. LINIJE WIROWE I WIRY ELEMENTARNE. Liniją, poprowadzoną w cieczy wirującej, której styczna w każdym punkcie ma kierunek chwilowej osi obrotu dla tego punktu, nazywamy według H. Helmholtz'a liniją wirową. Przez dany punkt tylko jedna linija wirowa poprowadzić się daje. Obierając w cieczy nieskończenie małe pole zamknięte i prowadząc przez każdy punkt jego obwodu liniją wirową, wydzielimy z cieczy nieskończenie cienką strugę, którą nazywamy według W. Thomson'a wirem elementarnym albo krótko wirem. Pole nieskończenie małe zowiemy przekrojem wiru; a linija krzywa, będąca obwodem przekroju, lub jakakolwiek inna linija zamknięta i nieskończenie mała, przecinająca każdą liniją wirową na powierzchni wiru, nazywa się kierownicą wiru.

Z podanego określenia wynika, że

$$(1) \quad \frac{dx}{\omega_1} = \frac{dy}{\omega_2} = \frac{dz}{\omega_3}$$

są równaniami różniczkowymi linii wirowej. Przyjmując, że siły zewnętrzne mają potencjał, poprowadźmy taką liniją przez punkt $m(x, y, z)$ i obierzmy na niej nieskończenie blizki punkt $n(x + dx, y + dy, z + dz)$. Po upływie czasu dt przybędzie punkt m do m' , a punkt n do n' , przyczem współrzędne punktu m' będą $x + \delta_m x, y + \delta_m y, z + \delta_m z$, współrzędne zaś punktu n' będą $x + dx + \delta_n x, y + dy + \delta_n y, z + dz + \delta_n z$. Jeżeli przyjmiemy

$$(2) \quad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

to ω będzie prędkością kątową obrotu elementu cieczy, otaczającego punkt m , około stycznej mn do linii wirowej; a jeżeli ds oznacza długość elementu mn , to mamy z założenia

$$(3) \quad dx = \frac{\omega_1}{\omega} ds, \quad dy = \frac{\omega_2}{\omega} ds, \quad dz = \frac{\omega_3}{\omega} ds.$$

Oznaczmy przez δs długość elementu $m'n'$; kierunek jego wyznaczają równania następujące:

$$(4) \quad \frac{\cos(\delta s, x)}{dx + \delta_n x - \delta_m x} = \frac{\cos(\delta s, y)}{dy + \delta_n y - \delta_m y} = \frac{\cos(\delta s, z)}{dz + \delta_n z - \delta_m z}.$$

Wstawiając w wyrażenia $\delta_n x$, $\delta_n y$, $\delta_n z$, podane w (7) art. 203-go, wartości (3), otrzymamy

$$(5) \quad \begin{cases} \delta_n x - \delta_m x = \frac{2\lambda_1 \omega_1 + \varphi_3 \omega_2 + \varphi_2 \omega_3}{2\omega} ds \cdot dt, \\ \delta_n y - \delta_m y = \frac{2\lambda_2 \omega_2 + \varphi_1 \omega_3 + \varphi_3 \omega_1}{2\omega} ds \cdot dt, \\ \delta_n z - \delta_m z = \frac{2\lambda_3 \omega_3 + \varphi_2 \omega_1 + \varphi_1 \omega_2}{2\omega} ds \cdot dt. \end{cases}$$

Kładąc w pierwszym równaniu wartości λ_i , ω_i , otrzymamy

$$2\lambda_1 \omega_1 + \varphi_3 \omega_2 + \varphi_2 \omega_3 = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

albo, dodając i odejmując $\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$,

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \omega_1 + \varphi_3 \omega_2 + \varphi_2 \omega_3 &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \left(\omega_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 2 \frac{d\omega_1}{dt}; \end{aligned}$$

będzie więc według (5)

$$\delta_n x - \delta_m x = \frac{ds}{\omega} d\omega_1, \text{ i podobnie } \delta_n y - \delta_m y = \frac{ds}{\omega} d\omega_2, \delta_n z - \delta_m z = \frac{ds}{\omega} d\omega_3,$$

a zatem

$$\begin{aligned} dx + \delta_n x - \delta_m x &= \frac{ds}{\omega} (\omega_1 + d\omega_1), \quad dy + \delta_n y - \delta_m y = \\ &= \frac{ds}{\omega} (\omega_2 + d\omega_2), \quad dz + \delta_n z - \delta_m z = \frac{ds}{\omega} (\omega_3 + d\omega_3). \end{aligned}$$

Wstawiając te wartości w (4), mieć będziemy ostatecznie

$$(6) \quad \frac{\cos(\delta s, x)}{\omega_1 + d\omega_1} = \frac{\cos(\delta s, y)}{\omega_2 + d\omega_2} = \frac{\cos(\delta s, z)}{\omega_3 + d\omega_3}.$$

Liczniki tych ułamków są dostawami kątów, które styczna do krzywej, będącej na początku elementu czasu dt linią wirową, tworzy z osiami współrzędnych przy końcu tego elementu czasu, a ich mianowniki są rzutami prędkości kątowej obrotu chwilowego w punkcie m , gdy ten punkt po upływie czasu dt przybył do m' . Z powyższych zatem równań wynika, że, skoro mn było elementem linii wirowej na początku czasu dt , to tenże sam element, który przy końcu tego czasu przeniósł się do $m'n'$, będzie także leżał na linii wirowej. Stosując równania (6) do każdego punktu takiej linii i do skończonego przedziału czasu, widzimy, że *cząstki cieczy, które w pewnej chwili znajdują się na linii wirowej, ciągle na téjże saméj linii znajdować się będą, że zatem linia wirowa porusza się w cieczy, nieprzestając być linią wirową.* Z te-

go więc twierdzenia okazuje się, że linie wirowe mają nie tylko znaczenie geometryczne, lecz także znaczenie fizyczne, jakichkolwiek zmian kształtu i położenia doznają podczas ruchu.

Ponieważ

$$ds^2 = (dx + \delta_n x - \delta_m x)^2 + (dy + \delta_n y - \delta_m y)^2 + (dz + \delta_n z - \delta_m z)^2, \text{ czyli}$$

$$\delta s^2 = \frac{ds^2}{\omega^2} [(\omega_1 + d\omega_1)^2 + (\omega_2 + d\omega_2)^2 + (\omega_3 + d\omega_3)^2],$$

lub gdy przyjmiemy dla krótkości $\omega_1' = \omega_1 + d\omega_1$, $\omega_2' = \omega_2 + d\omega_2$, $\omega_3' = \omega_3 + d\omega_3$, $\omega'^2 = \omega_1'^2 + \omega_2'^2 + \omega_3'^2$, wtedy

$$(7) \quad \frac{\delta s}{ds} = \frac{\omega'}{\omega}, \quad \frac{\delta s - ds}{ds} = \frac{\omega' - \omega}{\omega}.$$

To znaczy: *długość elementu linii wirowej jest w każdej chwili proporcjonalna względem odpowiedniej prędkości kątowej obrotu około stycznnej do tego elementu, a zatem zmienia się proporcjonalnie względem zmiany tej prędkości.* Ponieważ ta prędkość nie może stać się równą zero, jeżeli raz zerem nie była, przeto linia wirowa nie może się zredukować do punktu.

208. Wydzielmy z cieczy dowolną część, ograniczoną powierzchnią zamkniętą, oznaczmy przez dV objętość nieskończenie małego elementu tej części, przez df element powierzchni ograniczającej w punkcie (x, y, z) , a przez a, b, c dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej N do tego elementu powierzchni; według równań (2) art. 197-go otrzymamy

$$(1) \quad \begin{aligned} \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} dV &= - \int a \omega_1 \cdot df, & \int \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dV &= - \int b \omega_2 \cdot df, \\ \int \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dV &= - \int c \omega_3 \cdot df. \end{aligned}$$

Całkowania po lewych stronach tych równań rozciągają się na objętość uważanej części cieczy, całkowania zaś po prawych stronach na jej powierzchnię zamkniętą. Powyższe równania polegają na założeniu, że $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ są funkcjami ciągłymi i jednowartościowymi w całej objętości i na powierzchni uważanej części cieczy. Dodawszy te równania, otrzymamy ze względu na równanie (1) art. 204-go

$$(2) \quad \int (a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3) df = \int \omega \cdot \cos(N, \omega) \cdot df = 0,$$

rozciągając całkowanie na całą powierzchnię, która może być także utworzona częściowo lub całkowicie przez powierzchnię cieczy.

Zastosujmy to równanie do elementu wiru. Poprowadziwszy linię wirową (m) przez punkt m , weźmy w tym punkcie płaszczyznę normalną do linii wirowej, obierzmy na niej nieskończenie małe pole df_m , którego środkiem masy jest punkt m , i poprowadźmy linie wirowe przez punkty na obwodzie tego pola; otrzymamy wir, którego ośią nazwiemy linią (m) . W nieskończenie

bliskim punkcie n na linii wirowej poprowadźmy także płaszczyznę, normalną do niej, która w wirze wyznaczy przekrój df_n , i oznaczmy przez ω_m i ω_n prędkości kątowe, odpowiednie tym punktom. Stosując równanie (2) do elementu wiru między przekrojami df_m i df_n , widzimy, że w każdym punkcie na powierzchni bocznej tego elementu będzie $\cos(N, \omega) = 0$, a jeżeli ω ma kierunek mn , to dla punktu m będzie $\cos(N, \omega) = +1$, zaś dla n będzie $\cos(N, \omega) = -1$. Otrzymamy więc według (2)

$$(3) \quad \omega_m df_m - \omega_n df_n = 0, \text{ czyli ogólnie } \omega \cdot df = \text{stałej.}$$

Płoczyn prędkości kątowej obrotu i pola przekroju wiru jest stały dla każdego wiru. Płoczyn prędkości kątowej obrotu i pola przekroju wiru nazywamy natężeniem wiru, możemy więc powyższe twierdzenie także tak wyrazić: *natężenie wiru nie zmienia się podczas jego ruchu w cieczy.* Uważajmy wir jako strugę nieskończenie cienką, w której porusza się ciecz z prędkością ω w kierunku prostopadłym do przekroju; możemy powyższe twierdzenie wyrazić, mówiąc: przez każdy przekrój tej strugi przechodzi w jednostce czasu ta sama objętość cieczy $\omega \cdot df$. To twierdzenie zatym wyraża warunek ciągłości ruchu cieczy w tej strudze.

Podobnie możemy rozumieć równanie (2). Wyobraźmy sobie w cieczy powierzchnię zamkniętą, podzielmy ją na elementy df i przyjmijmy, że przez każdy element tej powierzchni przechodzi ciecz w kierunku normalnym do powierzchni z prędkością $\omega \cdot \cos(N, \omega)$; powyższe równanie wyraża, że w przestrzeni, tą powierzchnią ograniczonej, nie zmienia się ilość cieczy. Z tego wynika, że każdy wir, który wchodzi do przestrzeni, tą powierzchnią ograniczonej, koniecznie z niej wyjść musi, że przeto wir przecina każdą powierzchnię zamkniętą, obroną wewnątrz cieczy, w parzystej ilości punktów. Czyli inaczej: *każdy wir jest wewnątrz cieczy zamknięty lub zaczyna i kończy się na jej powierzchni, nie może się więc ani zaczynać, ani kończyć wewnątrz cieczy.*

209. PRĄD I KRAŻENIE CIECZY. Podane twierdzenia mają miejsce także wtedy, kiedy $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ nie są funkcjami ciągłymi współrzędnych, jeżeli tylko u, v, w nie zrywają ciągłości. Aby się o tym przekonać, poprowadźmy w cieczy między dwoma punktami dowolną linią krzywą, i wartość całki

$\int (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz)$, rozciągniętej na tę krzywą, nazwijmy prądem cieczy po tej krzywej. Prąd ma podobne znaczenie, co praca siły, jest bowiem całką iloczynu prędkości cieczy w punkcie krzywej i rzutu elementu tej krzywej na tę prędkość. Jeżeli linia krzywa jest zamknięta, natenczas wartość tej całki, rozciągniętej na cały obwód krzywej, nazywamy krążeniem cieczy po tej krzywej. Aby obliczyć prąd i krążenie, należy zawsze określić kierunek, w którym punkt (x, y, z) obiega krzywą.

Obliczmy krążenie po krzywej nieskończenie małej, otaczającej punkt $m(x, y, z)$, i znajdującej się na płaszczyźnie, przez ten punkt przechodzącej. Wystawmy w m układ prostokątny osi, oznaczmy przez (ξ, η, ζ) nieskończenie małe współrzędne punktu n na tej krzywej, przez u, v, w prędkości składowe

w punkcie m , a przez u', v', w' prędkości w punkcie n . Według (6) art. 203-go będzie

$$\begin{aligned} u' &= u + \lambda_1 \xi + \frac{1}{2} (\varphi_3 - 2\omega_3) \eta + \frac{1}{2} (\varphi_2 + 2\omega_2) \zeta, \\ v' &= v + \lambda_2 \eta + \frac{1}{2} (\varphi_1 - 2\omega_1) \zeta + \frac{1}{2} (\varphi_3 + 2\omega_3) \xi, \\ w' &= w + \lambda_3 \zeta + \frac{1}{2} (\varphi_2 - 2\omega_2) \xi + \frac{1}{2} (\varphi_1 + 2\omega_1) \eta; \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} (1) \quad u' d\xi + v' d\eta + w' d\zeta &= u d\xi + v d\eta + w d\zeta + \lambda_1 \xi d\xi + \lambda_2 \eta d\eta + \lambda_3 \zeta d\zeta + \\ &+ \frac{\varphi_1}{2} (\eta \cdot d\zeta + \zeta \cdot d\eta) + \frac{\varphi_2}{2} (\zeta \cdot d\xi + \xi \cdot d\zeta) + \frac{\varphi_3}{2} (\xi \cdot d\eta + \eta \cdot d\xi) + \\ &+ \omega_1 (\eta \cdot d\zeta - \zeta \cdot d\eta) + \omega_2 (\zeta \cdot d\xi - \xi \cdot d\zeta) + \omega_3 (\xi \cdot d\eta - \eta \cdot d\xi) = d(u\xi + \\ &+ v\eta + w\zeta) + \frac{1}{2} d[\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \varphi_1 \eta \cdot \zeta + \varphi_2 \zeta \cdot \xi + \varphi_3 \xi \cdot \eta] + \\ &+ \omega_1 (\eta \cdot d\zeta - \zeta \cdot d\eta) + \omega_2 (\zeta \cdot d\xi - \xi \cdot d\zeta) + \omega_3 (\xi \cdot d\eta - \eta \cdot d\xi), \end{aligned}$$

gdzie różniczkowanie odnosi się do dwu sąsiednich punktów krzywej rozważanej, a wielkości $u, v, w, \lambda_i, \varphi_i, \omega_i$ odnoszą się do punktu m .

Krażenie po tej krzywej wyraża całka $\int (u' \cdot d\xi + v' \cdot d\eta + w' \cdot d\zeta)$. Ponieważ pierwsze dwa wyrazy po prawej stronie równania (1) są różniczkami zupełnymi funkcji jednowartościowych, przeto ich całki są równe zeru dla krzywej zamkniętej; otrzymamy więc:

$$\begin{aligned} (2) \quad \int (u' \cdot d\xi + v' \cdot d\eta + w' \cdot d\zeta) &= \omega_1 \int (\eta \cdot d\zeta - \zeta \cdot d\eta) + \\ &+ \omega_2 \int (\zeta \cdot d\xi - \xi \cdot d\zeta) + \omega_3 \int (\xi \cdot d\eta - \eta \cdot d\xi). \end{aligned}$$

Prowadząc z punktu m promienie do obwodu krzywej, pole jej df podzielimy tym sposobem na nieskończenie małe wycinki. Wyrazy pod znakami całkowania po prawych stronach przedstawiają właśnie podwójne wielkości rzutów takiego wycinka na płaszczyzny yz, zx, xy , przyczem bierzemy pole wycinka ze znakiem więcej, jeżeli punkt obiega ten wycinek z punktu m w takim kierunku, iżby wycinek znajdował się po lewej stronie punktu obiegającego. Jeżeli zatem wystawimy w punkcie m normalną do tego pola w takim kierunku, iżbyśmy, patrząc z dowolnego punktu tej normalnej na pole, widzieli obieg krzywej w kierunku obiegu wskazówki na zegarze, i oznaczmy przez (a, b, c) dostawy kierunkowe tej normalnej, mieć będziemy

$$(3) \quad \int (u' \cdot d\xi + v' \cdot d\eta + w' \cdot d\zeta) = 2(a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3) df;$$

krążenie więc będzie równe podwójnemu iloczynowi powierzchni pola i rzutu prędkości kątowej na normalną do jego powierzchni.

Wykręśmy w cieczy dowolną powierzchnią ciągłą i niezamkniętą, której brzeg zamknięty niech stanowi jedna krzywa ciągła. Dzielać tę powierz-

chnią dwoma układami krzywych na nieskończenie małe pola, możemy według (3) obliczyć krążenie po obwodzie każdego pola. Jeżeli krążenia dla wszystkich elementów tej powierzchni dodamy do siebie, to suma będzie krążeniem po brzegu powierzchni; każdy bowiem element liniowy na powierzchni ogranicza dwa przyległe pola elementarne, będzie więc opisywany w dwu kierunkach przeciwnych, wskutek czego odpowiednie jemu wyrazy w sumie zniosą się wzajemnie. Wyrażając to twierdzenie według (3) i kładąc wartości $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, otrzymamy następujące równanie:

$$(4) \quad \int \left\{ a \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + b \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} df = \\ = \int (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz),$$

w którym całkowanie po lewej stronie rozciąga się na daną powierzchnię, a całkowanie po prawej stronie na brzeg tej powierzchni. Prędkości $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ nie potrzebują być funkcjami ciągłymi na powierzchni, byle tylko u, v, w nie zrywały nigdzie ciągłości. Gdy powierzchnia ma kilka brzegów ciągłych i zamkniętych, równanie powyższe do niej stosować się będzie, jeżeli po prawej stronie przyjmiemy sumę krążeń po brzegach oddzielnych. Gdy bowiem powierzchnia ma dwa brzegi, i poprowadzimy na niej krzywą, łączącą dowolny punkt jednego brzegu z dowolnym punktem drugiego brzegu, to otrzymamy teraz jedną krzywą, całkowicie zamkniętą. Krzywa łącząca będzie przy obliczaniu krążenia dwukrotnie opisywana w przeciwnych kierunkach, a zatem odpowiednie jej całki będą równe zeru i pozostaną tylko całki dla właściwych brzegów, których obieg określa podane poprzednio prawidło.

Równanie (4) wyraża następujące twierdzenie: *krążenie cieczy po linii krzywej równa się podwójnej sumie natężeń wszystkich wirów, objętych przez dowolną powierzchnią, całkowicie w cieczy leżącą, której brzegiem jest ta krzywa.*

Stosujemy powyższe twierdzenia do wiru. Uważajmy dowolną część wiru (fig. 68), ograniczoną dwiema kierownicami $ABCA$ i $A'B'C'A'$ jako brzegami tej części, i oznaczmy przez $K(ABCA)$ krążenie po brzegu $ABCA$. Ponieważ w każdym punkcie na powierzchni wiru $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 = 0$, przeto według (4) krążenie po krzywej $ABCAA'C'B'A'A$ jest równe zeru. Krążenie ma być brane w kierunkach strzałek, aby, stosownie do podanego prawidła, powierzchnia znajdowała się zawsze po lewej stronie punktu krążącego. Jeżeli przez $P(AA')$ oznaczmy prąd po krzywej AA' , to będzie

$$K(ABCA) + P(AA') + K(A'C'B'A') + P(A'A) = 0,$$

a ponieważ $P(AA') = -P(A'A)$, przeto

$$(5) \quad K(ABCA) = -K(A'C'B'A') = K(A'B'C'A'),$$

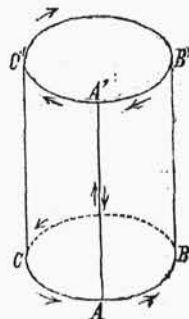


Fig. 68.

co oznacza, że *krążenie po każdej kierownicy wiru w tym samym kierunku jest toż samo*. Ponieważ kierownica jest krzywą nieskończenie małą, przeto, obierając ją na płaszczyźnie normalnej do osi wiru, i stosując do niej równanie (3), widzimy, że iloczyn przekroju wiru i prędkości kątowej ω jest wielkością stałą dla każdego przekroju. To jest właśnie twierdzenie (3) art. poprzedzającego, a z podanego dowodzenia wynika, że ono ma miejsce, chociażby prędkość kątowa nie była funkcją ciągłą współrzędnych, byle tylko u, v, w nie zrywały ciągłości. W takim przypadku oś wiru będzie miała punkt osobliwy, jak np. punkt zwrotu, a mimo to związki okazane zachodzić będą.

210. RÓWNIANIA RUCHU NIEWIROWEGO. Zwróćmy się teraz do ruchu niewirowego. Jeżeli oznaczymy potencjał prędkości przez Φ i przyjmiemy dla krótkości

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

to równania Euler'a będą dla ruchu niewirowego

$$(1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z};$$

jeżeli siły zewnętrzne mają potencjał U , to otrzymamy

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (U - \Phi) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y} (U - \Phi) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} (U - \Phi) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Pomnożmy te równania odpowiednio przez dx, dy, dz , przyczym te wielkości oznaczają przyrostki współrzędnych, jeżeli w pewnej chwili z punktu (x, y, z) w cieczy niewirującej przechodzimy do punktu sąsiedniego, i dodajmy iloczyny; mieć będziemy

$$d\Phi = dU - \frac{dp}{\sigma}.$$

Całkując to równanie przy stałym t w obrębie przestrzeni, zajętej przez ciecz niewirującą, i wstawiając wartość Φ , otrzymamy

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = U - \frac{p}{\sigma} + F(t).$$

Ponieważ stała całkowania może być funkcją czasu, przeto oznaczyliśmy ją przez $F(t)$. To równanie określa ruch niewirowy; biorąc bowiem jego pochodne cząstkowe względem x, y, z , otrzymujemy równania ruchu (2).

Dla ruchu trwałego przy działaniu sił zachowujących, których potencjał nie zawiera czasu wyraźnie, będzie $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, a stała całkowania będzie niezależna od czasu; otrzymamy więc

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = U - \frac{p}{\sigma} + C.$$