

jako przesunięcia dowolnego punktu (x, y, z) pręta wyciąganego. Że te przesunięcia byłyby niemożliwe przy sztywności pręta, okazuje się z porównania powyższych wzorów z równaniami (1) art 24-go.

Niech pręt będzie wyciągany w kierunku pionowym i uwzględnijmy siłę ciężkości. Oznaczmy przez σ gęstość pręta, mamy $X = \sigma g$, $Y = 0$, $Z = 0$, a więc zamiast pierwszego równania (1) następujące równanie równowagi:

$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} + \sigma g = 0$; dwa inne równania zostają niezmiennymi, jak również warunki na powierzchni. Będzie więc $p_{11} = C - \sigma g x$, a ponieważ dla $x = L$, $p_{11} = p$, przeto $C = p + \sigma g L$, wskutek czego

$$(10) \quad p_{11} = p + \sigma g (L - x), \quad p_{22} = 0, \quad p_{33} = 0, \quad p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0, \quad p_{12} = 0.$$

Natężenie jest funkcją liniową x , a dla $x = 0$, czyli dla podstawy utwierdzonej, będzie największe $p_{11} = p + \sigma g L$. Cały przyrost natężenia od podstawy swobodnej B do utwierdzonej A równa się ciężarowi słupa, wyciętego z pręta, którego podstawa jest równa jednostce. Wydłużenie w kierunku osi x przestaje być stałym. Mamy prócz tego

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} [p + \sigma g (L - x)], \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\mu}{E} [p + \sigma g (L - x)], \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

skąd wynika przy uwzględnieniu warunków utwierdzenia:

$$(11) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[(p + \sigma g L) x - \frac{\sigma g x^2}{2} - \frac{\mu \sigma g}{2} (y^2 + z^2) \right], \\ v &= -\frac{\mu}{E} [p y + \sigma g (L - x) y], \quad w = -\frac{\mu}{E} [p z + \sigma g (L - x) z]. \end{aligned}$$

Jeżeli pręt jest ściskany w kierunku osi, to należy w powyższych wzorach brać $-p$ zamiast p .

189. SKRĘCENIE WALCA. Niech środki masy wszystkich przekrojów walca znajdują się na jego osi (art. 188) i nazwijmy te punkty, w których prosta, równoległa do osi walca, przecina dwa przekroje, prostopadłe do osi punktami odpowiednimi tychże przekrojów. Jeżeli przesunięcia punktów odpowiednich dwu przekrojów, rozważane na płaszczyznach tych przekrojów w kierunku prostopadłym do osi walca, różnią się od siebie tylko obrotem około tej osi, a kąt tego obrotu jest ten sam dla punktów tego samego przekroju, wtedy odkształcenie walca nazywamy skręceniem. Przesunięcia dwu punktów odpowiednich w kierunku osi walca mogą być przytym nierówne między sobą, a przekroje płaskie walca mogą się skrzywiać.

Obierzmy znowu oś walca za oś x , środek masy A przekroju utwierdzonego za początek, osi y i z na tym przekroju. Rozważajmy dwa przekroje w odległościach x i $x + dx$ od A, i niech ten drugi przekrój obraca się względem 1-go o nieskończenie mały kąt θdx około osi x w kierunku od y ku z ; wtedy punkt (y, z) na przekroju $x + dx$ przesunie się w kierunkach osi y i z

względem punktu odpowiedniego na przekroju x o — $\theta z \cdot dx$ i $\theta y \cdot dx$; mamy więc

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta z, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \theta y$$

jako równania cechujące skręcenie, w których θ jest bądźto funkcją x , bądź też wielkością stałą. Przyjmijmy, że do przekroju swobodnego B są przyłożone siły skręcające w jego płaszczyźnie, i że zresztą ani na masę, ani na powierzchnię boczną walca żadne siły zewnętrzne nie działają. Podzielmy przekrój A prostymi, równoległymi do osi y i do osi z , na prostokąty elementarne, i wystawmy na tych prostokątach prostopadłościany. One mieć będą krawędzie, równoległe do osi x ; będziemy je nazywali włóknami walca. Przyjmijmy, że te włókna nie doznają ani wciągania, ani żadnego działania boczno, wtedy w każdym punkcie walca $p_{11} = 0$, $p_{22} = 0$, $p_{33} = 0$, $p_{23} = 0$, a więc, każdy element równoległościenny doznaje tylko nateżeń stycznych p_{12} i p_{13} , równoległych do y i z i działających na płaszczyźnie przekroju. Nadto założmy, że rozkład nateżeń p_{12} i p_{13} jest ten sam we wszystkich przekrojach, że zatem $\frac{\partial p_{12}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p_{13}}{\partial x} = 0$. Rachunek okaże, czy powyższe założenia są możebne i pod jakimi warunkami zachodzić mogą.

Równania równowagi elementu przy założeniach $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, odnoszące się do osi y i z stają się tożsamościami, równanie zaś, odnoszące się do osi x , jest warunkiem

$$(2) \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} = 0.$$

W każdym punkcie na powierzchni bocznej walca, a zatem na obwodzie jego przekroju, jest $a = 0$, więc warunkami krańcowymi są $bp_{21} + cp_{31} = 0$, $bp_{22} + cp_{32} = 0$, $bp_{23} + cp_{33} = 0$. Ostatnim dwu warunkom tożsamościowo staje się zadość. Niech $f(y, z) = 0$ będzie wiadomym równaniem obwodu przekroju; wtedy b i c oznaczają dostawy kierunkowe normalnej do tego obwodu względem osi y i z , a zatem $b:c = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$; pozostaje więc jedyny warunek, który ma zachodzić w każdym punkcie na obwodzie przekroju, mianowicie:

$$(3) \quad p_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + p_{13} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Z przyjętych wartości nateżeń wynika, że $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\varphi_1 = 0$, a więc

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Trzem ostatnim warunkom, tudzież równaniom (1) uczynimy zadość, przyjmując

$$(5) \quad v = -\theta zx, \quad w = \theta yx$$

bez stałych, gdyż z utwierdzenia przekroju A wynika, że dla $x=0$, $y=0$, $z=0$ jest $v=0$, $w=0$. Prócz tego mamy

$$(6) \quad \varphi_2 = \theta y + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial u}{\partial y} - \theta z,$$

$$(7) \quad p_{12} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right), \quad p_{13} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\theta y + \frac{\partial u}{\partial z} \right);$$

wstawivszy te wartości w (2), zważywszy, że $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$ i $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0$, mieć będziemy

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Założeniom $\frac{\partial p_{12}}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial p_{13}}{\partial x} = 0$ stanie się zadość, jeżeli będzie

$$(9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0;$$

te warunki są już zawarte w pierwszym równaniu (4). Po wstawieniu wartości (7) w (3), na obwodzie przekroju będzie

$$(10) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\theta y + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ponieważ nie dajemy prawa rozkładu sił skręcających (zewnątrznych) na przekroju swobodnym, przeto nie możemy szukać warunków krańcowych dla każdego elementu tego przekroju. Zważmy jednak, że każda, jakkolwiek ograniczona, część walca jest w równowadze, a zatem także jest w równowadze nieskończenie cienka warstwa, ograniczona przekrojem swobodnym i przekrojem sąsiednim walca. Na element $d\omega$ przekroju B, obrany w punkcie (y, z) ,

przypadają siły wewnętrzne $p_{12} d\omega$ i $p_{13} d\omega$. Całki zatem $\int p_{12} d\omega$ i $\int p_{13} d\omega$, rozciągnięte na cały przekrój, przedstawiają sumy tych sił, z których każda jest równa odpowiedniej sumie składowych sił zewnętrznych. Z tego wynika, że każda z tych sum jest równa zeru, inaczéj bowiem przekrój swobodny, a za nim wszystkie inne, przesuwałyby się na swojej płaszczyźnie, co by się sprzeciwiało założeniu, że walec doznaje samego tylko skręcenia. Jest więc w każdym przekroju $\int p_{12} d\omega = 0$, $\int p_{13} d\omega = 0$, czyli według (7),

$$(11) \quad \int \frac{\partial u}{\partial y} d\omega = 0, \quad \int \frac{\partial u}{\partial z} d\omega = 0,$$

ponieważ z założenia $\int z d\omega = 0$, $\int y d\omega = 0$. Widzimy więc, że walec dozna-

je samego tylko skręcenia, jeżeli siły zewnętrzne są równoważne z parą sił, której płaszczyzna jest prostopadła do osi walca. Suma momentów sił wewnętrznych względem osi x wynosi $\int (p_{13}y - p_{12}z) d\omega$; jeżeli więc M jest momentem pary sił skręcających, to jest $M = \int (p_{13}y - p_{12}z) d\omega$, czyli po wstawieniu wartości

$$(12) \quad M = \frac{E}{2(1+\mu)} \int \left[\left(\theta y + \frac{\partial u}{\partial z} \right) y - \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) z \right] d\omega,$$

gdzie M jest wiadome. Nazywamy M momentem skręcenia walca.

Zastosujmy podane wzory do walca eliptycznego, którego osi 2β , 2γ niech będą osiami y i z . Wtedy będzie $f(y, z) \equiv \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$, skąd wynika warunek na obwodzie elipsy

$$\gamma^2 y \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) + \beta^2 z \left(\theta y + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0.$$

Całą tego równania jest funkcja algebraiczna

$$(13) \quad u = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \theta y z,$$

a łatwo się przekonać, że ta funkcja zadość czyni rzeczywiście wszystkim warunkom (4), (8) i (11), tudzież warunkom utwierdzenia przekroju A. Otrzymamy więc

$$(14) \quad \varphi_2 = \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + \beta^2} \theta y, \quad \varphi_3 = -\frac{2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \theta z;$$

$$(15) \quad p_{12} = -\frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \theta z, \quad p_{13} = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \beta^2} \theta y;$$

$$(16) \quad M = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\gamma^2 I_z + \beta^2 I_y}{\gamma^2 + \beta^2} \cdot \theta,$$

gdzie $I_z = \int y^2 d\omega$, $I_y = \int z^2 d\omega$ oznaczają momenty bezwładności elipsy względem osi z i osi y . Ponieważ

$$I_z = \frac{\pi \beta^3 \gamma}{4}, \quad I_y = \frac{\pi \beta \gamma^3}{4}, \quad \text{przeto kładąc } G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \text{ mamy}$$

$$(17) \quad M = \pi \cdot G \cdot \theta \cdot \frac{\beta^3 \gamma^3}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \theta = \frac{M}{\pi G} \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^3 \gamma^3}.$$

Wielkość θ oznacza kąt, o jaki obróciły się względem siebie dwa przekroje, których wzajemna odległość jest równa jednostce. Ponieważ ten kąt jest stały, przeto przekrój swobodny obrócił się względem przekroju utwierdzonego

o kąt $\Theta = \theta L$, jeżeli L jest długością walca. Kąt Θ zwiemy kątem skręcenia walca.

Z równania (13) okazuje się, że każdy przekrój płaski walca eliptycznego skrzywia się i przybiera po skręceniu kształt parabolojdy hiperbolicznej, której wierzchołkiem jest środek elipsy, a osią oś walca. Podzielmy każdą elipsę osiami głównymi na 4 równe pola; w punktach dwu pól przeciwnych względem środka, dla których y i z są jednocześnie albo dodatnie albo ujemne, będzie $u > 0$, zaś dla pozostałych dwu pól będzie $u < 0$; na pierwszych utworzy się więc wypukłość, na drugich wklęsłość. Z (15) widzimy, że natężenie styczne p_s w punkcie (y, z) na elipsie wynosi

$$p_s = \sqrt{p_{12}^2 + p_{13}^2} = \frac{E}{1+\mu} \theta \cdot \frac{\sqrt{\beta^4 z^2 + \gamma^4 y^2}}{\beta^2 + \gamma^2}$$

i że to natężenie ma wartość największą, mianowicie równą się $\frac{2M}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta \gamma^2}$ w punktach końcowych mniejszej osi elipsy, dla której $\beta > \gamma$.

Jeżeli przekrój walca jest kołem o promieniu r , to będzie $\gamma = \beta = r$, więc $u = 0$; przekroje walca obrotowego zostają płaskimi po skręceniu. Wtedy otrzymamy

$$(18) \quad M = \frac{\pi G}{2} \theta r^4, \quad \theta = \frac{2}{\pi G} \cdot \frac{M}{r^4};$$

natężenie styyczne w punkcie (y, z) będzie $G \theta \sqrt{y^2 + z^2}$, a największe natężenie $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{M}{r^3}$ mieć będzie miejsce na obwodzie przekroju.

Gdy wstawimy współczynnik G w równania (12) art. 186-go, będziemy mieli dla ciała równokierunkowego

$$(19) \quad p_{23} = G \varphi_1, \quad p_{31} = G \varphi_2, \quad p_{12} = G \varphi_3;$$

otrzymamy zatem między natężeniem styčnym a odpowiednim posunięciem się podobny związek, jak między natężeniem normalnym p_n a wydłużeniem λ_n . Wielkość G nazywamy współczynnikiem sprężystości odpowiadającym skręceniu, ponieważ ten współczynnik wyraża związek między natężeniem a odkształceniem w przypadku skręcenia. Między G , E i μ mamy związek $E = 2G(1 + \mu)$, a ponieważ $\frac{1}{2} > \mu > 0$, przeto $\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$.

190. RÓWNOWAGA WALCA PUSTEGO (RURY). Przy dochodzeniu odkształceń ciała obrotowego można użyć współrzędnych tak zwanych cylindrycznych, albo półbiegunowych. Aby określić miejsce punktu m , weźmy oś ciała za oś x , biorąc na niej dowolny początek O ; spuśćmy z m prostopadłą r do osi, i przesunijmy południk przez m ; odległość x spodka prostopadłej od O , promień r i kąt φ , jaki płaszczyzna południka tworzy ze stałą płaszczyzną, przez oś przechodzącą, wyznaczają miejsce punktu, jeżeli tylko określimy dokładnie znaki współrzędnych. Siły i przesunięcia rozłożmy w kierunkach osi x , promienia r i styčnym do równoleżnika, a u , v , w niech oznaczają przesunięcia punktu

(x, r, φ) w tych kierunkach. Dodatnie v liczymy w kierunku promienia r od osi na zewnątrz, dodatnie w w tym kierunku, w którym rośnie kąt φ . Popro-

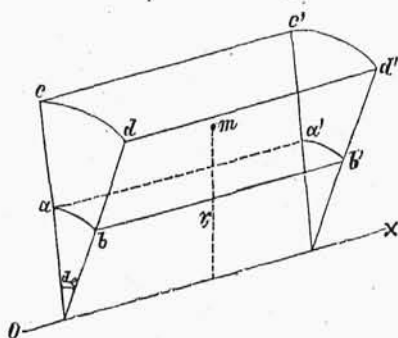


Fig. 66.

Równania równowagi elementu ze względu na ruch postępowy można otrzymać następującym sposobem, nieco odmiennym od sposobu dotąd używanego. Niech $abcd a'b'c'd'$ (fig. 66) przedstawia element ciała, w środku którego przyjmujemy punkt $m(x, r, \varphi)$; wyrażmy np. warunek, że suma rzutów sił w kierunku promienia r jest równa zeru. Rzuty sił w tym kierunku są:

$$\begin{aligned} \text{na ścianę } a b c d \text{ siła} & - \left(p_{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{12}}{\partial x} dx \right) r dr d\varphi, \\ \text{,, ,, } a' b' c' d' \text{ ,,} & \left(p_{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{12}}{\partial x} dx \right) r dr d\varphi, \\ \text{,, ,, } a b a' b' \text{ ,,} & - \left(p_{22} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{22}}{\partial r} dr \right) r dx d\varphi, \\ \text{,, ,, } c d c' d' \text{ ,,} & \left(p_{22} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{22}}{\partial r} dr \right) (r + dr) dx d\varphi, \\ \text{,, ,, } b d b' d' \text{ ,,} & - \left(p_{32} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{32}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr dx \cos \frac{d\varphi}{2} \text{ i} \\ \text{,, ,, } \text{ ,, } \text{ ,,} & - \left(p_{33} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{33}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr dx \sin \frac{d\varphi}{2}, \\ \text{,, ,, } a c a' c' \text{ ,,} & \left(p_{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{32}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr dx \cos \frac{d\varphi}{2} \text{ i} \\ \text{,, ,, } \text{ ,, } \text{ ,,} & - \left(p_{33} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{33}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr dx \sin \frac{d\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Niech na jednostkę objętości w punkcie m działają odpowiednio siły zewnętrzne X, R, Φ w pomienionych kierunkach; wtedy na element przypadnie w kierunku promienia r siła $R r dr dx d\varphi$, gdyż $r dr dx d\varphi$ jest jego objętością. Dodając powyższe siły i zatrzymując tylko wyrazy rzędu 3-go, otrzymamy następujące równanie równowagi:

$$\frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{32}}{\partial \varphi} + \frac{p_{22} - p_{33}}{r} + R = 0,$$

$$\text{czyli } \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r p_{22}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{32}}{\partial \varphi} - \frac{p_{33}}{r} + R = 0.$$

Postępując podobnie z rzutami w dwu pozostałych kierunkach, otrzymamy następujące równania równowagi elementu:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r p_{21}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{31}}{\partial \varphi} + X = 0, \\ \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r p_{22}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{32}}{\partial \varphi} - \frac{p_{33}}{r} + R = 0, \\ \frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r p_{23}) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{33}}{\partial \varphi} + \frac{p_{32}}{r} + \Phi = 0. \end{cases}$$

Przyjmijmy, że ciało nie przestaje być obrotowym wskutek odkształcenia; wtedy punkty posuwają się tylko w kierunku osi x i w kierunku promienia r ; będzie zatem $w = 0$. Wydłużenia $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ w kierunkach współrzędnych będą wtedy

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \lambda_3 = \frac{v}{r}.$$

Wstawiając te wartości w równaniu (12) art. 186-go, otrzymamy p_{11}, p_{22}, p_{33} .

Zastosujmy te równania do walca obrotowego pustego (rury), którego końce są otwarte, a który doznaje ciśnień normalnych na powierzchni zewnętrznej i na powierzchni wewnętrznej. Warstwy elementarne walca, ograniczone powierzchniami walcowymi, doznają rozciągań lub ściskań tylko w kierunku promieni; będzie więc $u = 0, w = 0$, a wszystkie nateżenia będą równe zeru oprócz nateżeń p_{22} i p_{33} , mających kierunki promieni i kierunki stycznych do równoleżników. Jeżeli przyjmujemy $X = 0, R = 0, \Phi = 0$, to pierwsze równanie (1) będzie tożsamością, a z trzeciego wypadnie $\frac{\partial p_{33}}{\partial \varphi} = 0$, to znaczy, że nateżenie obwodowe jest stałe na tym samym równoleżniku; z drugiego równania wynika $\frac{\partial}{\partial r} (r p_{22}) - p_{33} = 0$, gdzie należy wziąć symbol pochodnej zupełnej zamiast cząstkowej. Nateżenia będą

$$(3) \quad \begin{aligned} p_{22} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \left[(1-\mu) \frac{dv}{dr} + \mu \frac{v}{r} \right], \\ p_{33} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \left[(1-\mu) \frac{v}{r} + \mu \frac{dv}{dr} \right]; \end{aligned}$$

wstawiając ich wartości w poprzednie równanie, mieć będziemy

$$(4) \quad \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dv}{dr} \right) = \frac{v}{r} \quad \text{czyli} \quad r \cdot \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = 0.$$

Całkując raz, otrzymamy $\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = a$, a całkując powtórnie

$$v = \frac{ar}{2} + \frac{b}{r},$$

gdzie a i b są dwiema stałymi. Ponieważ $\frac{dv}{dr} = \frac{a}{2} - \frac{b}{r^2}$, przeto będzie

$$p_{22} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \left[\frac{a}{2} - (1-2\mu) \frac{b}{r^2} \right],$$

$$p_{33} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \left[\frac{a}{2} + (1-2\mu) \frac{b}{r^2} \right].$$

Niech p_1 oznacza wiadome ciśnienie na jednostkę powierzchni zewnętrznej walca, której promień jest r_1 ; a p_2 i r_2 niech stosują się do powierzchni wewnętrznej. Wtedy dla $r=r_1$ mamy $p_{22} = -p_1$, dla $r=r_2$ zaś $p_{22} = -p_2$, z czego wynikają wartości stałych

$$a = \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad b = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

więc

$$(5) \quad v = \frac{1+\mu}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1-2\mu)(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)r + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r} \right],$$

$$(6) \quad \begin{cases} p_{22} = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2 - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2} \right], \\ p_{33} = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2 + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2} \right]. \end{cases}$$

Gdy $p_2 = 0$, otrzymamy

$$p_{22} = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right), \quad p_{33} = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right);$$

a dla $p_1 = 0$ będzie

$$p_{22} = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right), \quad p_{33} = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right),$$

a zatem w obu przypadkach bezwzględnie $p_{33} > p_{22}$; napięcie na obwodzie jest większe od napięcia w kierunku promienia. W obu przypadkach największe napięcie zachodzi na powierzchni wewnętrznej rury, t. j. dla $r=r_1$.

W pierwszym przypadku dla $r=r_1$ będzie max. $p_{33} = p_1 \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$; w drugim

dla $r=r_1$ będzie max. $p_{33} = -\frac{2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$, a znak ujemny okazuje, że wewnętrzna powierzchnia rury jest najwięcej ściskana.

191. PRZEWODZENIE DRGAŃ. Jeżeli w środku równokierunkowym o sprężystości stałej punkt A pobudzony został do drgań, to ruch jego rozchodzi się jednostajnie we wszystkich kierunkach, a punkty, posiadające jednocześnie ten sam stan ruchu, czyli tę samą fazę, znajdują się na powierzchni kuli, której środkiem jest środek pobudzenia. Powierzchnią tej kuli nazywamy powierzchnią falową. Rozważając punkt drgający m w znacznej odległości od punktu pobudzenia, możemy małą część powierzchni kulistej

falowej, na której punkt m się znajduje, zastąpić przez odpowiednie pole na płaszczyźnie stycznej do kuli, i otrzymamy tym sposobem tak zwaną płaską powierzchnią falową. Obierzmy prostopadłą do tej powierzchni za oś x , a osi y i z równoległe do tej powierzchni; przesunięcia punktów drgających, zawartych w fali płaskiej, powyższą powierzchnią ograniczoną, nie zależą od y i z , lecz są tylko funkcjami x i t . Gdy rozważać będziemy drgania około położenia równowagi, to według twierdzenia art. 186-go należy w równaniach ruchu opuścić siły zewnętrzne. Z założenia mamy $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, skąd $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$, a więc równania ruchu będą według art. 186-go:

$$\sigma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \sigma \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\sigma \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Ponieważ współczynniki tych równań mają zawsze wartości dodatnie, przeto możemy przyjąć

$$(1) \quad a^2 = \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad \alpha^2 = \frac{E}{2\sigma(1+\mu)},$$

i otrzymamy dla każdego punktu drgającego następujące równania ruchu:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Pierwsze równanie określa drganie w kierunku przewodzenia fali, dwa ostatnie równania wyrażają drgania w kierunkach, prostopadłych do kierunku przewodzenia. Drganie, określone przez pierwsze równanie, nazywamy drganiem podłużnym, a drgania, określone przez dwa ostatnie równania, zowiemy drganiami poprzecznymi. Obadwa rodzaje drgań zachodzą jednocześnie i niezależnie od siebie.

Rozważajmy drgania podłużne, przyjmując, że środek sprężysty nie jest ograniczony, że przeto nie zachodzą warunki krańcowe. Wiadomo, że w tym przypadku funkcja u jest zupełnie określona, jeżeli dla pewnej wartości t znamy dwie funkcje argumentu x , którym mają się równać funkcja u i jej pochodna względem t . Niech zatem będzie dane, że dla $t=0$ ma być $u=f(x)$ i $\frac{\partial u}{\partial t}=F(x)$, gdzie f i F oznaczają funkcje wiadome, to znaczy, iż przyjmujemy, że znamy odchylenie i prędkość drgania każdego punktu w chwili, od której czas liczyć zaczynamy. Całką ogólną pierwszego równania (2) będzie wtedy funkcja:

$$(3) \quad u = \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2} f(x-at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi,$$

o czym bezpośrednio przekonać się można, zważając na to, że

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi = a [F(x+at) + F(x-at)],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi = F(x+at) - F(x-at).$$

Niech pobudzenie pierwotne zachodzi we wszystkich punktach, dla których $x_2 > x > x_1$, gdzie $x_1 < x_2$ oznaczają dwie wiadome wartości x . Wtedy jednocześnie $f(x) = 0$ i $F(x) = 0$ dla $x_2 < x < x_1$, a między punktami x_1 i x_2 powyższe funkcje będą różne od zera. Dla punktu więc $x > x_2$ będzie $f(x+at) = 0$, a całka w równaniu (3) przybierze także wartość równą zeru; otrzymamy więc $u = \frac{1}{2} f(x-at)$, co tylko wtedy nie będzie równe zeru, kiedy $x_1 < x-at < x_2$. Z tego wynika, że pobudzenie przybędzie do tego punktu w czasie $t_1 = \frac{x-x_2}{a}$, a ustanie w czasie $t_2 = \frac{x-x_1}{a}$, że przeto trwać będzie przez czas $t_2 - t_1 = \frac{x_2-x_1}{a}$. Warstwę środka o szerokości $x_2 - x_1$ nazywamy falą płaską, której długość wynosi $x_2 - x_1$. Spółczynnik a przedstawia prędkość, z którą pobudzenie rozchodzi się w rozważanym kierunku, i z tego powodu nazywamy go prędkością przewodnictwa fali w środku sprężystym. Należy ją dokładnie odróżnić od prędkości drgania $\frac{\partial u}{\partial t}$, określającej ruch każdego punktu z osobna. Prędkość przewodnictwa można także określić, rozważając ruchy tych punktów, dla których $x < x_1$. Z równania (1) wynika dla prędkości przewodnictwa wartość

$$(4) \quad a = \sqrt{\frac{E}{\sigma} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}},$$

zależna od współczynników sprężystości i zwięzienia, tudzież od gęstości środka przewodzącego.

Dwa ostatnie równania (2) wyrażają drgania poprzeczne, a można podobnym sposobem okazać, że współczynnik

$$(5) \quad a = \sqrt{\frac{E}{2\sigma(1+\mu)}}$$

jest odpowiednią prędkością przewodnictwa, różniącą się od prędkości a . Ponieważ Δ zależy tylko od u , przeto okazuje się, że *tylko drgania podłużne wywołują rozrzedzenie się i zgęszczenie środka*, a przy drganiach poprzecznych takie zmiany gęstości środka nie zachodzą.

192. DRGANIA BEONY WYPRĘŻONEJ. Teoryja ogólna odkształceń błon sprężystych lub strun t. j. ciał takich, których jeden lub dwa wymiary mo-

żna uważać za nieskończenie małe, nie wchodzi w zakres tego dzieła. Okażemy tylko prawa drgań poprzecznych błony sprężystej, dostatecznie naprężonej, które z równań ogólnych wyprowadzić można. Uważajmy błonę za walec lub graniastosłup o niezmiernie małej wysokości, którego podstawami są dwie powierzchnie równoległe błony. W połowie wysokości przesunijmy płaszczyznę yz , a oś x wystawmy do niej prostopadłe w dowolnym punkcie tego przecięcia średniego. Błonę wypreżamy z siłą, działającą wszędzie normalnie do jej brzegu, a więc prostopadłe do osi x ; niech p będzie wiadomym naprężeniem jednostki powierzchni bocznej błony. Rozważajmy na przód równowagę błony, przyjmując, że oprócz p żadna siła nie działa na nią. Według art. 188-go możemy dla punktu (x, y, z) przyjąć

$$(1) \quad u = -mx, \quad v = ny, \quad w = nz,$$

gdzie m i n oznaczają stałe, które mamy wyznaczyć. Będzie więc $\lambda_1 = -m$, $\lambda_2 = \lambda_3 = n$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, a zatem, według (12) art. 185-go,

$$(2) \quad p_{11} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [\mu(m + 2n) - m],$$

$$p_{22} = p_{33} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} (n - \mu m), \quad p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0, \quad p_{12} = 0.$$

Dla podstaw walca (powierzchni błony) mamy w każdym punkcie $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $p = 0$; wstawiając te wartości tudzież stałe wartości natężeń (2) w wiadome równania krańcowe, otrzymamy $p_{11} = 0$, a więc $\mu(m + 2n) = m$, skąd $m = \frac{2n\mu}{1 - \mu}$. Na brzegach mamy wszędzie $a = 0$ natężenie p , więc $p_{22} = p_{33} = p$, a zatem

$$p = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} (n - \mu m).$$

Z tego równania i z poprzedniego wyniku $m = \frac{2p\mu}{E}$, $n = \frac{p(1 - \mu)}{E}$, a więc

$$(2) \quad u = -\frac{2p\mu}{E} x, \quad v = \frac{p(1 - \mu)}{E} y, \quad w = \frac{p(1 - \mu)}{E} z.$$

Niech następnie błona, wypreżona przez siłę p , zostanie pobudzona do małych drgań; punkt $(0, y, z)$, leżący na jej przecięciu średnim, przesunie się o u, v, w , atoli te przesunięcia nie będą miały wartości (2), obliczonych dla równowagi. Punkt $(0, y + dy, z + dz)$ posiadać będzie współrzędne $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$, $y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$, $z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$. Rzuty elementu liniowego, łączącego te dwa punkty po przesunięciu, na osi współrzędnych, będą odpowiednio

$$\text{na oś } x\text{-ów } du = \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad \text{na oś } y\text{-ów } dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$

$$\text{na oś } z\text{-ów } dz + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz,$$

a ponieważ pochodne przesunięć podłużnych v i w są małe w porównaniu z pochodnymi przesunięcia poprzecznego u , przeto możemy zamiast tych wartości brać du , dy , dz jako rzuty uważanego elementu liniowego na osi. Normalna zewnętrzna (a, b, c) do powierzchni błony jest prostopadła do tego elementu, więc $a du + b dy + c dz = 0$, czyli, kładąc wartość du , otrzymamy

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial y} + b\right) dy + \left(a \frac{\partial u}{\partial z} + c\right) dz = 0.$$

Ponieważ dy i dz są dowolne, przeto każdy wyraz jest równy zeru, skąd

$$b = -a \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad c = -a \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{czyli}$$

$$(3) \quad a : b : c = 1 : -\frac{\partial u}{\partial y} : -\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Stosując więc wiadome twierdzenie o drganiach około położenia równowagi, (art. 187) otrzymamy następujące warunki na brzegu błony:

$$(4) \quad p_{11} - \frac{\partial u}{\partial y} p_{21} - \frac{\partial u}{\partial z} p_{31} = 0; \quad p_{12} - \frac{\partial u}{\partial y} p_{22} - \frac{\partial u}{\partial z} p_{32} = 0;$$

$$p_{13} - \frac{\partial u}{\partial y} p_{23} - \frac{\partial u}{\partial z} p_{33} = 0.$$

Załóżmy, że napężenie p jest tak znaczne, iż siły międzycząsteczkowe, występujące podczas drgania, różnią się bardzo mało od tych sił w stanie równowagi. Możemy wtedy przyjąć podczas ruchu $p_{11} = 0$, $p_{22} = p_{33} = p$, a wtedy otrzymamy z równań (4)

$$(5) \quad p_{12} = p \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad p_{13} = p \cdot \frac{\partial u}{\partial z};$$

pozostałe siły będą równe zeru. Wstawiając te wartości w pierwsze równanie (5) art. 182-go, otrzymamy następujące równanie drgań poprzecznych błony:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{p}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Niech błona będzie prostokątem o bokach a i b ; jeden z wierzchołków obierzmy za początek współrzędnych, a osiom y i z nadajmy kierunki boków a i b . Wtedy $u=0$ dla $y=0$ i dla $y=a$, tudzież dla $z=0$ i dla $z=b$, a dla każdego punktu wewnątrz błony mamy $a > y > 0$, $b > z > 0$. Żeby funkcja u była określona przez równanie (6), potrzeba wiedzieć warunki początkowe, wyrażające, że dla $t=0$ mamy $u=f(y, z)$ i $\frac{\partial u}{\partial t} = F(y, z)$, czyli potrzeba znać kształt błony i prędkość każdego punktu dla $t=0$.

Przy tych założeniach otrzymamy następującą całkę ogólną powyższego równania *)

$$(7) \quad u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sin \frac{i\pi y}{a} \cdot \sin \frac{k\pi z}{b} \left\{ A_{ik} \cos c\pi t \sqrt{\frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + B_{ik} \sin c\pi t \sqrt{\frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} \right\},$$

gdzie $c^2 = \frac{p}{\sigma}$; i, k oznaczają liczby całkowite, a współczynniki wyrażają się przez następujące całki, zależne od stanu początkowego:

$$(8) \quad A_{ik} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(\eta, \zeta) \sin \frac{i\pi\eta}{a} \cdot \sin \frac{k\pi\zeta}{b} \cdot d\eta d\zeta,$$

$$(9) \quad B_{ik} = \frac{4}{\pi abc \sqrt{\frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}} \int_0^a \int_0^b F(\eta, \zeta) \sin \frac{i\pi\eta}{a} \sin \frac{k\pi\zeta}{b} d\eta d\zeta.$$

Czytelnik może łatwo okazać, że funkcja (7) czyni istotnie zadość równaniu i danym warunkom.

Każdy wyraz powyższego szeregu (7) zosobna wskazuje, iż drganie punktu (y, z) jest proste, z czego się okazuje, że ruch tego punktu można uważać w ogólności za wynik nieskończenie wielu drgań prostych, niezależnie od siebie istniejących. Ruch błony będzie zatem wynikiem superpozycji drgań, jednocześnie zachodzących, których obszerności zależą od warunków początkowych.

Niech błona będzie kwadratową; wtedy $a = b$. Założmy jeszcze, dla uproszczenia, że ruch zaczyna się ze spoczynku, że więc $F(y, z) = 0$ dla każdego punktu, wskutek czego $B_{ik} = 0$; otrzymamy więc

$$(10) \quad u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_{ik} \sin \frac{i\pi y}{a} \sin \frac{k\pi z}{a} \cos \frac{c\pi t}{a} \sqrt{i^2 + k^2},$$

$$A_{ik} = \frac{4}{a^2} \int_0^a \int_0^a f(\eta, \zeta) \sin \frac{i\pi\eta}{a} \sin \frac{k\pi\zeta}{a} d\eta d\zeta.$$

Ponieważ $\cos \frac{c\pi t}{a} \sqrt{i^2 + k^2} = \cos \frac{c\pi}{a} \sqrt{i^2 + k^2} \left(t + m \cdot c \sqrt{i^2 + k^2} \right)$, gdzie m jest liczbą całkowitą, przeto każde drganie proste, odpowiednie liczbom i, k , jest ruchem peryjodycznym, a peryjod tego ruchu wynosi $T = \frac{2a}{c\sqrt{i^2 + k^2}}$.

*) Co do całkowania równania (6) tudzież równania (2) art. 191-go ob. *Wykład nauki o równaniach różniczkowych* przez Wł. Zajączkowskiego, Paryż 1877, Rozdz. XXVIII i XXIX (Str. 779—852).

Szereg (10) może się składać z jednego tylko wyrazu. Aby to okazać, przypuśćmy że warunek początkowy jest $f(y, z) = C \cdot \sin \frac{i' \pi y}{a} \sin \frac{k' \pi z}{a}$, gdzie i', k' oznaczają dwie liczby całkowite, a C jest stałą. Wtedy

$$A_{ik} = \frac{4C}{a^2} \int_0^a \sin \frac{k \pi \zeta}{a} \sin \frac{k' \pi \zeta}{a} d\zeta \int_0^a \sin \frac{i \pi \eta}{a} \sin \frac{i' \pi \eta}{a} d\eta.$$

Wiadomo że

$$J = \int_0^a \sin \frac{i \pi \eta}{a} \sin \frac{i' \pi \eta}{a} d\eta = \frac{1}{2} \int_0^a \cos \frac{\pi \eta}{a} (i - i') d\eta - \frac{1}{2} \int_0^a \cos \frac{\pi \eta}{a} (i + i') d\eta,$$

a każda z tych całek jest równa zeru, jeżeli $i \neq i'$; zaś dla $i = i'$ będzie $J = \frac{a}{2}$.

Podobnie będzie całka względem ζ równa zeru dla $k \neq k'$, a równa $\frac{a}{2}$ dla $k = k'$. Otrzymamy więc $A_{i'k'} = C$; wszystkie inne współczynniki będą równe zeru i u zredukuje się do jednego wyrazu. Ruch każdego punktu zredukuje się więc w tym przypadku do jednego drgania prostego.

Przypuśćmy taki warunek początkowy, żeby szereg składał się z dwu wyrazów, np. ($i = 1, k = 2$), ($i = 2, k = 1$), wtedy:

$$(11) \quad u = \left(A_{12} \sin \frac{\pi y}{a} \sin \frac{2 \pi z}{a} + A_{21} \sin \frac{2 \pi y}{a} \sin \frac{\pi z}{a} \right) \cos \frac{c \pi \sqrt{5}}{a} t.$$

Punkty, dla których bez względu na czas jest $u = 0$, wyznaczają na błonie tak zwane linie węzłów; każdy punkt na takiej linii jest ciągle w spoczynku. W powyższym przypadku linie węzłów są wyznaczone przez równanie

$$A_{12} \sin \frac{\pi y}{a} \sin \frac{2 \pi z}{a} + A_{21} \sin \frac{2 \pi y}{a} \sin \frac{\pi z}{a} = 0,$$

które możemy napisać także w postaci

$$(12) \quad 2 \sin \frac{\pi y}{a} \sin \frac{\pi z}{a} \left(A_{12} \cos \frac{\pi z}{a} + A_{21} \cos \frac{\pi y}{a} \right) = 0.$$

Ponieważ $y = 0$ i $z = 0$, tudzież $y = a$ i $z = a$ są pierwiastkami tego równania, przeto brzegi są liniami węzłów. Dalsze linie węzłów wynikają z równania $A_{12} \cos \frac{\pi z}{a} + A_{21} \cos \frac{\pi y}{a} = 0$. Jeżeli $A_{21} = 0$, to linią węzłów

będzie prosta $z = \frac{a}{2}$; jeżeli $A_{12} = 0$, to będzie nią prosta $y = \frac{a}{2}$; w przypadku $A_{12} = A_{21}$ otrzymamy węzły na prostej $z = y - a$; w przypadku $A_{12} = -A_{21}$ będzie prosta $z = y$ linią węzłów. Szukanymi liniami są więc proste, łączące środki przeciwległych boków kwadratu lub jego przekątne.

Doświadczenia stwierdzają powyższe wyniki. Podobnie można otrzymać linie węzłów w każdym innym przypadku, skoro warunki początkowe są wiadome,

Ć W I C Z E N I A.

(1). Okazać, że posunięcie się dwu prostych, przecinających się pod kątem prostym, jest równe różnicy wydłużeń ich dwusiecznych.

(2). Podać równanie elipsoidy odkształcenia, odpowiedniej superpozycji dwu odkształceń elementu ciała sprężystego.

(3). Obliczyć zmianę, której wskutek odkształcenia sprężystego doznaje moment bezwładności elementu ciała względem prostej, przechodzącej przez środek tego elementu.

(4). Pręt jest wyciągany pionowo w kierunku osi i uwzględniamy wpływ jego ciężaru: wyznaczyć prawo, według którego mają się tak zmieniać pola przekrojów pręta, żeby natężenie w kierunku osi było stałe.

(5). Zbadać bezpośrednio skręcenie walca obrotowego, na którego powierzchnię boczną nie działa żadna siła, i podać równanie włókna dowolnego po skręceniu.

(6). Wyznaczyć związki między odkształceniami λ i φ a przesunięciami u , v w, używając współrzędnych cylindrycznych.

(7). Podać równania równowagi i natężenia kuli pełnej, na której powierzchnię działa ciśnienie stałe we wszystkich punktach.

(8). Wyznaczyć linie węzłów błony kwadratowej w przypadku, gdy $i = 2$, $k = 2$, tudzież, gdy $i = 3$, $k = 1$; $i = 1$, $k = 3$.

(9). Podać równanie różniczkowe drgań błony okrągłej w współrzędnych biegunowych, przyjmując biegun w środku błony.

(10). Podać równania drgań podłużnych i poprzecznych struny wyprężonej.

Literatura (Rozdz. XVII).

L. NAVIER: *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques* (*Mémoires de l'Institut*, t. VII, Paris, 1824); *Résumé des leçons données à l'école des Ponts et Chaussées* (wydanie 1-sze, 1826; 2-gie, 1833; trzecie wydanie znacznie powiększone przez BARRÉ DE SAINT-VENANT, w dwu częściach, Paris, 1864). — A. CAUCHY w bardzo wielu artykułach swoich *Exercices de Mathématiques*, a mianowicie w latach 1827, 1828 i 1829. — S. D. POISSON, *Mémoire sur les équations*

tions générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et fluides (Journ. de l'ec. pol., t. XIII, Paris, 1831). — G. GREEN, Mathematical Papers (London, 1871) mianowicie artykuł: On the laws of the reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media. — G. LAMÉ; Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides (Paris, 1852); Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications (Paris, 1859, Lekcyja XI do XX). — B. DE SAINT-VENANT: Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général (Mém. présentés par divers savants à l'Acad. des Sciences, t. XIV, Paris, 1856); Mémoire sur la flexion des prismes (Jour. des math. 2-e sér., t. I, Paris, 1856); Théorie générale de l'élasticité, obejmująca lekcyję 21-szą i 22-gą w MOIGNO: Leçons de mécanique analytique, (Paris, 1868); liczne dodatki w 3-cim wyd. NAVIER'GO. — G. KIRCHHOFF: Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes (Journ. v. CRELLE, t. LVI, Berlin, 1859); Vorlesungen über mathematische Physik (Berlin, 1876 Lekcyje: 10, 11, 27 — 30). — A. CLEBSCH, Theorie der Elasticität fester Körper (Leipzig, 1862). — B. RIEMANN, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen (Braunschweig, 1869, rozdz. V). — WL. GOSIEWSKI: O sprężystości ciał stałych jednorodnych (Pam. tow. n. śc., t. I, Paryż, 1872); Wykład mechaniki cząsteczkowej, zeszyt I (jedyny; Paryż, 1873). — A. CASTIGLIANO, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications (Turin, 1879). — L. POCHHAMMER, Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes (Kiel, 1879). — H. RESAL, Physique mathématique (Paris, 1884, rozdz. VIII). — J. WEYRAUCH, Theorie elastischer Körper (Leipzig, 1884). — BOUSSINESQ, Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques (Paris, 1885). — F. NEUMANN, Vorlesungen über die Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers, (Leipzig, 1885). — J. TODHUNTER & K. PEARSON, A history of the theory of elasticity and of the strength of materials (Cambridge, 1886). — W. J. IBBERTSON, An elementary treatise of the mathematical theory of perfectly elastic solids (London, 1887). —