

# MECHANIKA CIAŁ NIESZTYWNYCH.

## ROZDZIAŁ XVII.

### TEORYJA SPRĘŻYSTOŚCI.

**175. POJĘCIA ZASADNICZE TEORII SPRĘŻYSTOŚCI.** Zajmowaliśmy się dotąd działaniem sił na ciała sztywne t. j. takie ciała, które wskutek działania sił przyłożonych żadnej zmiany w ustroju swym nie doznają. Zaznaczyliśmy już jednak, że pojęcie ciał sztywnych stanowi abstrakcją, albowiem każde ciało materjalne, pozostające pod działaniem sił, przyłożonych bądźto do jego masy, bądźtż do jego powierzchni, zmienia nie tylko miejsce swoje w przestrzeni, lecz doznaje zarazem zmiany w swym ustroju.

Zmiana ustroju ciała materjalnego objawia się przedewszystkiem przez tak zwane odkształcenie czyli deformację ciała, to znaczy przez odmiennie ułożenie jego cząstek na powierzchni. Ciało odkształcone nie zachowuje się biernie względem sił przyłożonych, lecz objawia dążność do odzyskania kształtu pierwotnego, a gdy siły zostaną usunięte, wraca do tego kształtu z mniejszą lub większą dokładnością. Tę własność ciała, polegającą na dążeniu do kształtu pierwotnego i na zdolności odzyskania tego kształtu po usunięciu sił przyłożonych, nazywamy sprężystością tego ciała.

Rodzaj i wielkość odkształcenia, tudzież stopień sprężystości ciała zależy od jego materji, od wielkości sił, a wreszcie od sposobu i trwania ich działania. Jeżeli odkształcenie ciała sprężystego jest dostatecznie małe, wówczas znika dokładnie po usunięciu sił, a wtedy uważamy ciało za doskonale sprężyste; jeżeli zaś odkształcenie ciała przybrało znaczne rozmiary, wówczas, jak uczy doświadczenie, po usunięciu sił nie wraca już ciało dokładnie do kształtu pierwotnego, lecz przybiera kształt nowy, który zachowuje. Z tego powodu dzielimy odkształcenia ciał materjalnych na odkształcenia sprężyste i na odkształcenia trwałe, zaliczając do pierwszych takie odkształcenia, które znikają dokładnie po usunięciu sił przyłożonych, do drugich zaś takie odkształcenia, które pozostają w ciele

po odjęciu sił. Przejście od odkształceń sprężystych do trwałych nie jest tak wyraźne, żeby z wszelką ścisłością wskazać się dało; przyjmując jednak ciągłość w zmianach ustroju ciała, dochodzimy do pojęcia pewnej granicy sprężystości, do której możemy odkształcenia ciała uważać za sprężyste, a zatym ciało odkształcone za doskonale sprężyste. Zastrzegając sobie na później dokładniejsze określenie tej granicy, dodajemy tutaj, że wogólności odkształcenia muszą być bardzo małe, żeby mogły być uważane za sprężyste, i że tylko takimi odkształceniami będziemy się zajmowali.

**176.** Zjawiska, polegające na sprężystości ciała, prowadzą nas do wniosku, że między cząsteczkami czyli molekułami ciała sprężystego należy przyjąć działanie pewnych sił, które są funkcjami odległości wzajemnej dwu cząsteczek. O tych siłach przypuszczamy, że one działają między dwiema cząsteczkami bądźto przyciągająco, bądźtóż odpychająco; w każdym jednak przypadku działanie ich zachodzi tylko wtenczas, kiedy odległość wzajemna dwu cząsteczek jest bardzo mała. Owe siły międzycząsteczkowe mogą być składane następującym sposobem. Obierzmy w ciele sprężystym punkt dowolny  $m$ , poprowadźmy przezeń płaszczyznę dowolną i obierzmy na niej nieskończenie małe pole  $d\omega$ , wewnątrz którego znajduje się punkt  $m$ . Owa płaszczyzna rozdziela ciało  $A$  na dwie części,  $A'$  i  $A''$ ; każda cząsteczka  $m'$ , znajdująca się w części  $A'$  w bardzo małej odległości od pola  $d\omega$ , doznawać będzie działania pewnej siły, pochodzącej od drugiej cząsteczki  $m''$ , która znajduje się również bardzo blisko tego pola, lecz w części  $A''$ , a promień działania tej siły będzie spotykał pole rozważane. Składając wszystkie podobne siły działania cząsteczek nieskończenie blizkich po jednej stronie owej płaszczyzny, które przecinają pole  $d\omega$ , otrzymamy pewną siłę wypadkową  $dP$ , która będzie nieskończenie małą tego samego rzędu, co owo pole. Tę siłę  $dP$  nazywamy siłą wewnętrzną w ciele sprężystym, odpowiednią nieskończenie małemu polu  $d\omega$ . Z prawa wzajemności działania (art. 66) wynika, że cząsteczki, leżące po dwu stronach płaszczyzny, doznają działań równych, lecz o kierunkach przeciwnych, a przeto dla dokładnego określenia siły wewnętrznej trzeba dodać, po której stronie pola uważamy ową siłę. Jeżeli siła  $+dP$  odpowiada jednej stronie tego pola, natenczas siła  $-dP$  odpowiadać będzie stronie przeciwniej. Gdy następnie przyjmujemy, że pole  $d\omega$  zdąża nieograniczenie do zera, wtedy punkt przyłożenia siły  $dP$  zdążać będzie do punktu  $m$ . Granicę, do jakiej wówczas zdąża stosunek  $dP:d\omega$ , nazywamy napięciem ciała sprężystego w punkcie  $m$  względem tej płaszczyzny, na której obrano pole  $d\omega$ . Oznaczając napięcie przez  $p$ , mamy z tego określenia  $p = \frac{dP}{d\omega}$ ,  $dP = p \cdot d\omega$ ; znając przeto napięcie, możemy obliczyć odpowiednią siłę wewnętrzną. Dwu przeciwnym stronom płaszczyzny, poprowadzonej przez punkt, odpowiadają napięcia  $+p$  i  $-p$ .

Siłę  $dP$  możemy rozłożyć na dwie siły, mianowicie na siłę  $dP_n$ , normalną do elementu  $d\omega$ , i na siłę  $dP_t$ , styczną do tego elementu. Granicę

stosunku  $dP_n : d\omega$  nazywamy nateżeniem normalnym, granicę zaś stosunku  $dP_t : d\omega$  nazywamy nateżeniem stycznym w punkcie  $m$  względem płaszczyzny rozważanej. Siła normalna  $dP_n$  może po rozważanej stronie płaszczyzny mieć kierunek albo od płaszczyzny nazewnątrz albo też ku płaszczyźnie; w pierwszym przypadku zowiemy odpowiednie nateżenie normalne ciągnieniem, w drugim zaś ciśnieniem.

Stanem naturalnym ciała sprężystego nazywamy ten stan jego, w którym nateżenie jest równe zeru w każdym punkcie tego ciała. Przyłożmy do ciała, w stanie naturalnym będącego, pewne siły, wówczas nastąpi odkształcenie tego ciała, a siły międzycząsteczkowe, pojawiające się wskutek tego odkształcenia, wytworzą pewne nateżenie w każdym punkcie ciała i względem każdej płaszczyzny, przez tenże punkt poprowadzonej. Jeżeli wskutek odkształcenia znajdzie równowaga sił przyłożonych, wtedy ciało przyjmie stan nowy, nie przestając być sprężystym. Owóż zadanie nasze polega przede wszystkim na tym, aby wyznaczyć warunki téj równowagi i rozpoznać owe wielkości, które cechują stan ciała sprężystego po odkształceniu. W tym celu wypada zbadać odkształcenie każdego elementu ciała, co stanowi zadanie kinematyki ciał sprężystych; następnie rozpoznać rozmieszczenie nateżeń w ciele sprężystym na zasadzie ciągłości, a na koniec podać związki między odkształceniami a nateżeniami, co stanowi zadanie kinetyki ciał sprężystych.

**177. ODKSZTAŁCENIE ELEMENTU CIAŁA.** Odkształcenie każdego elementu ciała sprężystego jest skutkiem ruchu względnego oddzielnych punktów tego elementu. Niech  $x, y, z$  oznaczają współrzędne prostokątne punktu  $m$  ciała przed odkształceniem; wskutek działania sił przesunie się ten punkt w kierunkach osi współrzędnych odpowiednio o długości  $u, v, w$  i zajmie miejsce  $m' (x + u, y + v, z + w)$ . Te przesunięcia są funkcjami ciągłymi współrzędnych i czasu, nie wyrażają się jednak przez wzory, podane w kinematyce ciał sztywnych (art. 24). Obierzmy punkt nieskończenie blizki  $n (x + dx, y + dy, z + dz)$ ; przesunięcia tego punktu będą  $u + du, v + dv, w + dw$ . Rozwińmy funkcje  $du, dv, dw$  na szeregi, zatrzymując tylko wyrazy nieskończenie małe tegoż samego rzędu, co odległość wzajemna punktów  $m$  i  $n$ ; otrzymamy

$$(1) \quad \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{cases}$$

Wielkości  $u, v, w$  określają ruch bezwzględny punktu  $(x, y, z)$ , a ruchy dwu nieskończenie blizkich punktów ciała względem siebie zależą od pochodnych tychże wielkości względem współrzędnych. Jeżeli ciało sprężyste ma skończone wymiary liniowe, natenczas pozostaje w granicy sprężystości tylko pod tym warunkiem, że przesunięcia bezwzględne jego punktów są bardzo małe w porównaniu z jego wymiarami. Dla takich więc ciał należy funkcjom

$u, v, w$  przypisywać bardzo małe wartości. Takie zaś ciała, jak błony lub pręty sprężyste, których jeden lub dwa wymiary są bardzo małe w porównaniu z pozostałymi wymiarami, okazują sprężystość doskonałą nawet wtedy, gdy ich punkty doznają znacznych przesunięć bezwzględnych, gdy zatym  $u, v, w$  nie mają wartości bardzo małych. W każdym jednak przypadku pochodne owych przesunięć winny posiadać wartości bardzo małe, żeby odkształcenie było sprężyste, i z tego powodu możemy w toku rachunku pomijać kwadraty i iloczyny tych pochodnych. Ograniczymy się do przypadków, w których przesunięcia same są wielkościami bardzo małymi.

Gdy przyjmiemy punkt  $m$  za początek układu współrzędnych, równoległych do tych, względem których brano  $x, y, z$ , to  $dx, dy, dz$  przedstawiają współrzędne punktu  $n$  względem  $m$  przed odkształceniem. Jeżeli po odkształceniu punkt  $n$  zajął miejsce  $n' (x + dx + u + du, y + dy + v + dv, z + dz + w + dw)$ , to  $dx + du, dy + dv, dz + dw$  będą oznaczały współrzędne punktu  $n'$  względem  $m'$  po odkształceniu. Z równań (1) okazuje się, że zmiany  $du, dv, dw$  współrzędnych  $dx, dy, dz$  są funkcjami liniowymi i jednorodnymi pierwotnych wartości tych współrzędnych. Rozwiązawszy równania (1) względem  $dx, dy, dz$ , wyrazimy te wielkości jako funkcje jednorodne i liniowe różniczek  $du, dv, dw$ , albowiem wyznacznik układu (1), będący wyznacznikiem funkcyjnym przesunięć  $u, v, w$  względem  $x, y, z$ , nie jest tożsamościowo równy zeru, gdyż przesunięcia są niezależnymi od siebie funkcjami współrzędnych.

Niech między  $dx, dy, dz$  zachodzi jakikolwiek związek liniowy  $A \cdot dx + B \cdot dy + C \cdot dz + D = 0$ ; wówczas wstawivszy w ten związek zamiast  $dx, dy, dz$  ich wartości, wyrażone przez  $du, dv, dw$ , otrzymamy związek odpowiedni  $A_1 \cdot du + B_1 \cdot dv + C_1 \cdot dw + D = 0$ , z czego wynika, że punkty, znajdujące się przed odkształceniem nieskończenie blisko na jednej płaszczyźnie, po odkształceniu będą się znajdowały także na jednej płaszczyźnie, która jednak inne zajmuje położenie. Obierzmy inny punkt  $m_1$  na płaszczyźnie nieskończenie blizkiej i równoległej do poprzedniej; wtedy łatwo się przekonamy, że otrzymamy związek odpowiedni między  $du, dv, dw$  o tychżesamych współczynnikach  $A_1, B_1$  i  $C_1$ . Z tego wynika, że nieskończenie blizkie elementy dwu płaszczyzn równoległych pozostają równoległymi po odkształceniu. Z powyższych dwu twierdzeń wynika jeszcze, że elementy dwu nieskończenie blizkich prostych równoległych pozostają równoległymi po odkształceniu.

Wydzielmy z ciała sprężystego nieskończenie mały równoległoscian prostokątny  $abcdefg$  (Fig. 65), którego krawędzi  $ma = dx, mb = dy, mc = dz$  są równoległe do osi współrzędnych, a którego wierzchołkiem, najbliższym początku  $O$  układu współrzędnych, jest punkt  $m$ . Ten równoległoscian będziemy uważali za element ciała. Z powyższych twierdzeń wynika, że ów element zamieni się wskutek odkształcenia na równoległoscian pochyły, którego krawędzi przestaną być równoległymi do osi współrzędnych. Wierzchołki  $a (x + dx, y, z), b (x, y + dy, z), c (x, y, z + dz)$ , zajmą odpowiednio miejsca  $a' \left( x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, z + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right), b' \left( x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$

$y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ ,  $z + w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$ ),  $c' \left( x + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, y + v + \frac{\partial v}{\partial z} dz, z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)$ , a krawędzi  $ma$ ,  $mb$  i  $mc$  przybiorą długości odpowiednio  $m'a' = (1 + \lambda_1) dx$ ,  $m'b' = (1 + \lambda_2) dy$ ,  $m'c' = (1 + \lambda_3) dz$ . Liczba  $\lambda_1 = (m'a' - ma) : ma$  przedstawia widocznie stosunek wydłużenia krawędzi  $ma$  do jej

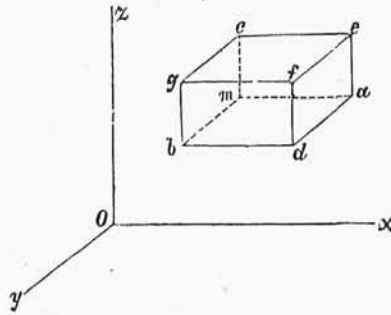


Fig. 65.

długości pierwotnej; nazywamy ją wydłużeniem ciała sprężystego w punkcie  $m$  w kierunku tej krawędzi czyli osi  $x$ . Podobnie oznaczają  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  wydłużenia w punkcie  $m$  w kierunkach osi  $y$  i osi  $z$ . Jeżeli  $m'a' > ma$ , wtedy  $\lambda_1 > 0$ ; gdy zaś  $m'a' < ma$ , wtedy  $\lambda_1 < 0$ , a  $\lambda_1$  przedstawia skrócenie, które uważamy za wydłużenie ujemne. W granicy sprężystości wydłużenie jest liczbą bardzo małą.

Ponieważ

$$(1 + \lambda_1)^2 dx^2 = \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2, \text{ przeto}$$

$$(1 + \lambda_1)^2 = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Podnieśmy do kwadratu i pominijmy kwadrat wydłużenia, tudzież kwadraty pochodnych funkcji  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ; otrzymamy

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \text{ podobnie będzie } \lambda_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Te równania pozwalają wydłużenia wyrazić przez pochodne cząstkowe przesunięć punktu względem jego współrzędnych.

Ponieważ prostopadłościan przejdzie na równoległościan pochyły, przeto kąty  $b'm'c'$ ,  $c'm'a'$ ,  $a'm'b'$  przybiorą odpowiednio wartości  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ ,  $\frac{\pi}{2} - \varphi_2$ ,  $\frac{\pi}{2} - \varphi_3$ , przyczem bardzo małe liczby  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  mogą być dodatne lub ujem-

ne. Obierzmy na krawędzi  $mc$  punkt  $m_1$  w bardzo małej odległości od  $m$ , i poprowadźmy przez  $m_1$  prostą  $m_1b_1$ , równoległą do  $mb$ . Po odkształceniu pozostanie odcinek  $m_1b_1$  równoległym do  $mb$ , a jeżeli punkt  $m_1$  zajmie miejsce  $m_1'$ , to kąt  $m_1'mb$  będzie równy  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ . Otrzymamy więc  $m_1m_1':mm_1 = \tan \varphi_1$ , a ponieważ  $\varphi_1$  jest miarą bardzo małego kąta, przeto możemy przyjąć  $m_1m_1':mm_1 = \varphi_1$ . Odcinek  $m_1b_1$  posunął się względem nieskończenie bliskiego i równoległego odcinka  $mb$  o długość  $m_1m_1'$ , a z ostatniego równania okazuje się, że  $\varphi_1$  wyraża stosunek wielkości tego posunięcia się do pierwotnej odległości obudwu odcinków. Łatwo się przekonać, że, gdybyśmy na ścianie  $bmc$  obrali podobnie dwa nieskończenie bliskie odcinki, lecz równoległe do osi  $z$ , czyli do krawędzi  $mc$ , to liczba  $\varphi_1$  wyrażałaby także stosunek wielkości ich posunięcia się do ich pierwotnej odległości. Z tego powodu nazywamy liczbę  $\varphi_1$  posunięciem się w punkcie  $m$  w kierunku osi  $y$  lub osi  $z$ . Podobnie nazywamy  $\varphi_2$  posunięciem się w punkcie  $m$  w kierunku osi  $z$  lub osi  $x$ , a  $\varphi_3$  posunięciem się w kierunku osi  $x$  lub osi  $y$ .

Uwzględniając współrzędne punktów  $m'$ ,  $b'$  i  $c'$ , otrzymamy

$$(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial w}{\partial y},$$

a jeżeli wstawimy  $\varphi_1$  zamiast  $\sin \varphi_1$  i opuścimy wielkości bardzo małe rzędu drugiego i wyższych, będziemy mieli

$$(3) \quad \varphi_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \text{ podobnie téż } \varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pierwotna objętość elementu ciała wynosiła  $dx dy dz$ ; ponieważ kąty  $\varphi_i$  są bardzo małe, przeto objętość tego elementu po odkształceniu możemy przyjąć równą iloczynowi  $(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) dx dy dz$ . Stosunek zmiany objętości owego elementu do jego objętości pierwotnej w punkcie  $m$  nazywamy *rozszerzeniem sześciennym* ciała w tymże punkcie. Oznaczwszy je przez  $\Delta$ , otrzymamy  $\Delta = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) - 1$ , a jeżeli wstawimy wartości z (1), mieć będziemy ze ścisłością przyjętą w naszym rachunku

$$(4) \quad \Delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Niech  $\sigma$  oznacza gęstość ciała w punkcie  $m$  przed odkształceniem, zaś  $\sigma'$  gęstość po odkształceniu; z powodu, że masa elementu nie zmienia się, mamy równanie  $\sigma = \sigma' (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)$ , z którego wynika

$$\sigma' = \sigma : (1 + \Delta) = \sigma (1 - \Delta),$$

a przeto zmiana gęstości wynosi

$$(5) \quad \sigma' - \sigma = -\sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

**178. WYDŁUŻENIA GŁÓWNE.** Rozważając znowu punkty  $m$  i  $n$  art. poprzedzającego, oznaczmy przez  $ds$  długość elementu  $mn$ , a przez  $a, b, c$  jego



dostawy kierunkowe; wtedy  $dx = a \cdot ds$ ,  $dy = b \cdot ds$ ,  $dz = c \cdot ds$ . Dla punktu  $n'$  otrzymamy

$$(1) \quad \begin{aligned} du &= \left( a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) ds, \quad dv = \left( a \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) ds, \\ dw &= \left( a \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) ds, \end{aligned}$$

skąd wynikają spółrzędne  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  punktu  $n'$  względem osi, poprowadzonych przez punkt  $m'$ ,

$$(2) \quad \begin{cases} \delta x = dx + du = \left[ a \cdot \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] ds, \\ \delta y = dy + dv = \left[ a \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + b \cdot \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right] ds, \\ \delta z = dz + dw = \left[ a \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + c \cdot \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] ds. \end{cases}$$

Oznaczmy przez  $\lambda$  wydłużenie w punkcie  $m$  w kierunku  $(a, b, c)$ ; długość elementu  $ds$  po odkształceniu będzie  $(1 + \lambda) ds$ ; wstawivszy spółrzędne  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  punktu  $n'$ , otrzymamy

$$(3) \quad (1 + \lambda)^2 \cdot ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2.$$

Jeżeli podniesiemy do kwadratu i w otrzymanych wyrażeniach opuścimy kwadraty tudzież iloczyny pochodnych  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , to otrzymamy

$$(4) \quad \lambda = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2 + \varphi_1 \cdot bc + \varphi_2 \cdot ca + \varphi_3 \cdot ab.$$

Według tego wzoru można obliczyć wydłużenie w kierunku danym, znając wydłużenia i posunięcia się w kierunkach osi spółrzędnych. Wydłużenie  $\lambda$  jest funkcją jednorodną i liniową sześciu wielkości  $\lambda_i$  i  $\varphi_i$ , a funkcją jednorodną i stopnia 2-go dostaw kierunkowych.

Rozważmy drugi punkt  $n_1$ , nieskończenie blizki punktu  $m$ , i niech  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  oznaczają dostawy kierunkowe elementu  $mn_1$ . Obliczywszy według (2) spółrzędne miejsca  $n_1'$ , które  $n_1$  zajmie po odkształceniu, możemy wyznaczyć kąt  $(m'n', m'n_1')$ , który tworzyć będą elementy  $m'n'$  i  $m'n_1'$ , albowiem

$$\begin{aligned} \cos(m'n', m'n_1') &= a a' \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + b b' \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + c c' \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &+ (b c' + b' c) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \\ &+ (c a' + c' a) \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \\ &+ (a b' + a' b) \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Przyjmijmy teraz, że proste  $mn$  i  $mn_1$  są do siebie prostopadłe; wtedy  $(m'n', m'n'_1) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , gdzie  $\varphi$  oznacza posunięcie się (art. 177) w kierunku każdej z tych dwu prostych. Kładąc zatem  $aa' + bb' + cc' = 0$  i uwzględniając równania (2) i (3) art. poprzedzającego, otrzymamy

$$(5) \quad \varphi = 2\lambda_1 \cdot aa' + 2\lambda_2 \cdot bb' + 2\lambda_3 \cdot cc' + \varphi_1 \cdot (bc' + b'c) + \varphi_2 \cdot (ca' + c'a) + \varphi_3 \cdot (ab' + a'b).$$

**179.** Odetnijmy na prostej  $(a, b, c)$  po obu stronach punktu  $m$  długość proporcjonalną względem  $\sqrt{1 \pm \lambda}$ , biorąc pod znakiem pierwiastka znak  $+$  lub  $-$  według tego, czy  $\lambda > 0$ , czy też  $\lambda < 0$ . Jeżeli  $x, y, z$  oznaczają współrzędne krańców tych odcinków, wzięte względem osi, wystawionych w punkcie  $m$ , to miejscem geometrycznym tych krańców będzie powierzchnia, której równanie według (4) art. 178-go jest

$$(1) \quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \varphi_1 \cdot yz + \varphi_2 \cdot zx + \varphi_3 \cdot xy = \pm 1.$$

To równanie przedstawia powierzchnię stopnia 2-go, której środkiem jest punkt  $m$ , nie znajdujący się na tej powierzchni. Obierzmy osi główne tej powierzchni za osi współrzędnych, i niech  $\lambda_i, \varphi_i$  odnoszą się do kierunków tychże osi; wtedy równanie tej powierzchni będzie

$$(2) \quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = \pm 1,$$

a nadto  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$ , więc  $\lambda = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2, \varphi = 2\lambda_1 \cdot aa' + 2\lambda_2 \cdot bb' + 2\lambda_3 \cdot cc'$ . Jeżeli wszystkie 3 współczynniki  $\lambda_i$  są czyto dodatne, czy też ujemne, wtedy powyższa powierzchnia jest elipsojdą; w przypadku, gdy te współczynniki są znaków różnych, otrzymamy dwie hiperbolojdy sprzężone, z których jedna jest jednopowłokowa, druga dwupowłokowa, a są one rozdzielone wspólnym stożkiem asymptotycznym. Długości promieni tych powierzchni są odwrotnie proporcjonalne względem pierwiastków wydłużeń w ich kierunkach, one przedstawiają zatem geometrycznie zależność wydłużenia elementu liniowego, wychodzącego z punktu  $m$ , od kierunku tego elementu. W przypadku elipsojdy wszystkie proste, wychodzące z tego punktu, doznają w tym punkcie wydłużeń lub skróceń; w przypadku zaś hiperbolojd sprzężonych każda prosta, przecinająca jedną hiperbolojdę, wydłuża się, a każda prosta, przecinająca drugą hiperbolojdę, skraca się; proste zaś, tworzące stożek asymptotyczny, nie doznają zmiany długości, a raczej mówiąc dokładniej, ich wydłużenia są nieskończenie małe w porównaniu z wydłużeniami tych elementów liniowych, które nie znajdują się na powierzchni stożka.

Ponieważ przez każdy punkt ciała sprężystego można poprowadzić takie powierzchnie, których osi główne mają tę własność osobliwą, że posunięcia się  $\varphi_i$  w ich kierunkach są równe zeru, przeto otrzymujemy następujące twierdzenie: *przez każdy punkt ciała sprężystego można poprowadzić trzy do siebie prostopadłe proste, w których kierunkach ciało nie doznaje żadnego posunięcia się, które przeto pozostają do siebie prostopadłymi po odkształceniu.* Odpowiadające tym trzem kierunkom wydłużenia nazywamy wydłużeniami głównymi



mi w tym punkcie; jedno z nich jest bezwzględnie największe, jedno zaś najmniejsze ze wszystkich wydłużeń, w tym punkcie zachodzących. Znając wydłużenia główne w pewnym punkcie, możemy obliczyć wydłużenie i posunięcie się w kierunku każdej prostej, przez ten punkt poprowadzonej, a tym samym zbadać odkształcenia rozmaitych elementów ciała, w których ten punkt się znajduje.

**180. RUCH ELEMENTU ODKSZTAŁCONEGO.** Kierunek osi głównych powierzchni (1) art. poprzedzającego wyznaczają pierwiastki równania następującego:

$$(1) \quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} 2(\lambda_1 - \lambda), & \varphi_3, & \varphi_2 \\ \varphi_3, & 2(\lambda_2 - \lambda), & \varphi_1 \\ \varphi_2, & \varphi_1, & 2(\lambda_3 - \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

a mianowicie, jeżeli przez  $\Lambda_{ik}$  oznaczymy współczynnik w tym wyznaczniku elementu  $i$ -go wiersza i  $k$ -ej kolumny, tak iż

$$(2) \quad 2(\lambda_1 - \lambda) \Lambda_{11} + \varphi_3 \cdot \Lambda_{12} + \varphi_2 \cdot \Lambda_{13} = \varphi_3 \cdot \Lambda_{21} + 2(\lambda_2 - \lambda) \Lambda_{22} + \varphi_1 \cdot \Lambda_{23} = \\ = \varphi_2 \cdot \Lambda_{31} + \varphi_1 \cdot \Lambda_{32} + 2(\lambda_3 - \lambda) \Lambda_{33} = 0,$$

natenczas dostawy kierunkowe  $a, b, c$  tych osi otrzymujemy z któregośkolwiek z następujących układów równań:

$$(3) \quad \frac{a}{\Lambda_{11}} = \frac{b}{\Lambda_{12}} = \frac{c}{\Lambda_{13}} = \rho_1, \quad \frac{a}{\Lambda_{21}} = \frac{b}{\Lambda_{22}} = \frac{c}{\Lambda_{23}} = \rho_2, \quad \frac{a}{\Lambda_{31}} = \frac{b}{\Lambda_{32}} = \frac{c}{\Lambda_{33}} = \rho_3,$$

podstawiając za  $\lambda$  kolejno pierwiastki równania (1). Te pierwiastki są właśnie wydłużeniami głównymi.

Kładąc

$$(4) \quad 2\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

z tych równań, tudzież z równań (2) i (3) art. 177-go, otrzymamy

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_1, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}(\varphi_3 - 2\omega_3), & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}(\varphi_2 + 2\omega_2), \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}(\varphi_3 + 2\omega_3), & \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda_2, & \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}(\varphi_1 - 2\omega_1), \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}(\varphi_2 - 2\omega_2), & \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + 2\omega_1), & \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda_3. \end{cases}$$

Obierzmy punkt  $n$  nieskończenie blisko  $m$ , obliczmy według art. 178-go jego współrzędne  $\delta x, \delta y, \delta z$  po odkształceniu i uwzględnijmy równania (5); otrzymamy

$$(6) \quad \begin{cases} \delta x = (1 + \lambda_1) dx + \frac{1}{2}(\varphi_3 - 2\omega_3) dy + \frac{1}{2}(\varphi_2 + 2\omega_2) dz, \\ \delta y = \frac{1}{2}(\varphi_3 + 2\omega_3) dx + (1 + \lambda_2) dy + \frac{1}{2}(\varphi_1 - 2\omega_1) dz, \\ \delta z = \frac{1}{2}(\varphi_2 - 2\omega_2) dx + \frac{1}{2}(\varphi_1 + 2\omega_1) dy + (1 + \lambda_3) dz. \end{cases}$$

Niech ten punkt znajduje się na jednej z osi głównych powyższej powierzchni w odległości  $ds$  od  $m$ ; wtedy  $dx = a \cdot ds$ ,  $dy = b \cdot ds$ ,  $dz = c \cdot ds$ , gdzie zamiast  $a, b, c$  podstawić należy wartości, wynikające z (3). Dla takiego więc punktu będzie według (6),

$$\begin{cases} 2 \cdot \delta x = [2(1 + \lambda_1) \Lambda_{11} + (\varphi_3 - 2\omega_3) \Lambda_{12} + (\varphi_2 + 2\omega_2) \Lambda_{13}] \rho_1 ds, \\ 2 \cdot \delta y = [(\varphi_3 + 2\omega_3) \Lambda_{21} + 2(1 + \lambda_2) \Lambda_{22} + (\varphi_1 - 2\omega_1) \Lambda_{23}] \rho_2 ds, \\ 2 \cdot \delta z = [(\varphi_2 - 2\omega_2) \Lambda_{31} + (\varphi_1 + 2\omega_1) \Lambda_{32} + 2(1 + \lambda_3) \Lambda_{33}] \rho_3 ds, \end{cases}$$

a ponieważ według (2),

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \Lambda_{11} + \varphi_3 \Lambda_{12} + \varphi_2 \Lambda_{13} &= 2\lambda \Lambda_{11}, & \varphi_3 \Lambda_{21} + 2\lambda_2 \Lambda_{22} + \varphi_1 \Lambda_{23} &= 2\lambda \Lambda_{22}, \\ \varphi_2 \Lambda_{31} + \varphi_1 \Lambda_{32} + 2\lambda_3 \Lambda_{33} &= 2\lambda \Lambda_{33}, \end{aligned}$$

przeto także

$$\begin{cases} \delta x = [(1 + \lambda) \Lambda_{11} - \omega_3 \Lambda_{12} + \omega_2 \Lambda_{13}] \rho_1 ds, \\ \delta y = [\omega_3 \Lambda_{21} + (1 + \lambda) \Lambda_{22} - \omega_1 \Lambda_{23}] \rho_2 ds, \\ \delta z = [-\omega_2 \Lambda_{31} + \omega_1 \Lambda_{32} + (1 + \lambda) \Lambda_{33}] \rho_3 ds. \end{cases}$$

Jeżeli na nowo wprowadzimy  $dx, dy, dz$ , to mieć będziemy ostatecznie:

$$(7) \quad \begin{cases} \delta x = (1 + \lambda) dx - \omega_3 dy + \omega_2 dz, \\ \delta y = \omega_3 dx + (1 + \lambda) dy - \omega_1 dz, \\ \delta z = -\omega_2 dx + \omega_1 dy + (1 + \lambda) dz. \end{cases}$$

Rozumiejąc przez  $\lambda$  kolejno pierwiastki równania  $\Lambda = 0$ , otrzymamy spólrzędne miejsc, które punkty, znajdujące się nieskończenie blisko  $m$  na kierunkach wydłużeń głównych, zajmą wskutek odkształcenia ciała. Porównyując równania (7) z równaniami (1) art. 24-go, widzimy, że punkt, znajdujący się na kierunku wydłużenia głównego, obrócił się około osi spólrzędnych, przez  $m$  poprowadzonych, odpowiednio o bardzo małe kąty  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , i posunął się w kierunku tego wydłużenia o  $\lambda \cdot ds$ . Ruchy obrotowe są te same dla punktów na każdej z osi głównych, ruchy zaś postępowe są proporcjonalne względem odpowiednich wydłużeń głównych.

Możemy teraz podać obraz ruchu i odkształcenia elementu ciała, zawierającego punkt  $m$ . Uważając ten element za sztywny, przesunimy go tak, żeby punkt  $m$  razem się zeszedł z punktem  $m'$ ; obróćmy go następnie około osi spólrzędnych, poprowadzonych przez  $m'$ , odpowiednio o kąty  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ; wtedy owe trzy proste, do siebie prostopadłe, które mają kierunki wydłużeń głównych, które zatym pozostaną do siebie prostopadłymi, znajdują się w tym właśnie położeniu, które zająć mają. Gdy na koniec uczynimy element sprężystym i udzielimy mu wydłużeń głównych, to element przybierze kształt żądany. Dla określenia ruchu i odkształcenia elementu ciała musimy znać dziewięć wielkości  $\lambda_i, \varphi_i, \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), czyli, co na jedno wychodzi, dziewięć pochodnych przesunięć  $u, v, w$  względem  $x, y, z$ . W przypadku szczególnym, gdy  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ , czyli

$$(8) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

ruch elementu ciała będzie zachodził bez obrotu. —

Około punktu  $m$  zatoczmy kulę o promieniu  $ds$ , której równanie jest  $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ . Po odkształceniu utworzą osi  $x, y, z$  w ogólności układ ukośnokątny, a jeżeli  $\delta x, \delta y, \delta z$  oznaczają współrzędne punktu  $(dx, dy, dz)$  względem tych osi po odkształceniu, to  $\delta x = (1 + \lambda_1) dx$ ,  $\delta y = (1 + \lambda_2) dy$ ,  $\delta z = (1 + \lambda_3) dz$ , a zatem

$$(9) \quad \left( \frac{\delta x}{(1 + \lambda_1) ds} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{(1 + \lambda_2) ds} \right)^2 + \left( \frac{\delta z}{(1 + \lambda_3) ds} \right)^2 = 1.$$

Stąd okazuje się, że punkty, które przed odkształceniem znajdowały się na powierzchni kuli nieskończenie małej, znajdować się będą po odkształceniu na powierzchni elipsoidy nieskończenie małej, której środkiem jest punkt  $m$ . Nazywamy ją elipsoidą odkształcenia w tym punkcie. Trzy proste, prostopadłe do siebie w punkcie  $m$ , przyjmują po odkształceniu kierunki średnic sprzężonych tej elipsoidy, a kierunki wydłużeń głównych są kierunkami osi głównych tej powierzchni.

Jeżeli punkt  $m$  nie znajdował się na powierzchni ciała, to nie zajmie nigdy miejsca na tej powierzchni. Jakoż, kula nieskończenie mała, o środku w tym punkcie, przybierać będzie ciągle kształt elipsoidy, co by było niemożliwym, gdyby ten punkt dostał się kiedykolwiek na powierzchnię ciała. Czyli innymi słowy: *powierzchnią ciała sprężystego tworzą ciągle tęsame punkty*. Jeżeli więc  $F(x, y, z, t) = 0$  jest równaniem tej powierzchni w jakimkolwiek czasie, to  $F = 0$ , gdy  $t$  wzrośnie o  $dt$ , a zatem

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

**181. NATĘŻENIA ELEMENTU CIAŁA.** Rozważajmy, jak dotąd, nieskończenie mały prostopadłościan  $mabcdefg$  (fig 65) jako element ciała. Każdą z trzech ścian jego, schodzących się w punkcie  $m$ , odpowiada pewne natężenie w tym punkcie, które uważać możemy za siłę wewnętrzną na jednostkę powierzchni ściany. Rozłóżmy natężenie, przypadające na ścianę  $mbc$ , prostopadłą do osi  $x$ , na trzy natężenia, równoległe do osi współrzędnych, które to natężenia składowe oznaczmy odpowiednio przez  $p_{11}, p_{12}, p_{13}$ ; natężenie ściany  $mca$ , prostopadłej do osi  $y$ , rozłóżmy podobnie na  $p_{21}, p_{22}, p_{23}$ ; natężenie zaś ściany  $mab$ , prostopadłej do osi  $z$ , rozłóżmy na  $p_{31}, p_{32}, p_{33}$ . Znakowanie  $p_{ik}$  polega na tym, że pierwszy wskaźnik oznacza oś, do której ściana jest prostopadła, drugi zaś oznacza oś, do której natężenie jest równoległe, a wskaźniki 1, 2, 3 odnoszą się odpowiednio do osi  $x, y, z$ . Każde z tych natężeń jest funkcją ciągłą współrzędnych i czasu; mnożąc natężenie przez powierzchnię ściany, otrzymamy odpowiednią składową siłę wewnętrzną, do tej ściany przyłożoną. Oprócz tych sił działają na masę elementu wiadome siły zewnętrzne, bądźto rzeczywiście przyłożone, jak np. siła ciężkości, bądź też zastępujące pewne warunki i połączenia, a będące wielkościami tego samego rzędu, co objętość elementu. Składowe całkowitej siły zewnętrznej oznaczmy przez  $X \cdot dV, Y \cdot dV, Z \cdot dV$ , gdzie  $dV = dx dy dz$ ;  $X, Y, Z$  możemy rozumieć jako

siły, przypadające na jednostkę objętości. Przyłożywszy do elementu wszystkie siły, możemy go uważać za swobodny. Po odkształceniu zachodzi równowaga, a ponieważ wiadomo (art. 104), że warunki równowagi elementu sztywnego zachodzą także dla elementu sprężystego, przeto suma momentów sił, wziętych względem trzech prostych  $S_x, S_y, S_z$ , poprowadzonych przez środek masy  $S$  elementu równoległe do krawędzi, jest równa zeru dla każdej z tych prostych.

Granicą wspólną punktów przyłożenia sił  $X dV, Y dV, Z dV$  jest punkt  $S$ , moment każdej z tych sił względem powyższych prostych jest zatem równy zeru. Siły wewnętrzne, jednostajnie na ścianach rozmieszczone, możemy przyłożyć do środków ścian odpowiednich, z czego się okazuje, że momenty sił normalnych  $p_{11} dy dz, p_{22} dz dx, p_{33} dx dy$ , tudzież sił normalnych, działających na ściany przeciwległe, są także równe zeru. Jeżeli na ścianę  $mbcg$  działa siła styczna  $p_{12} dy dz$ , równoległa do osi  $y$ , to na ścianę przeciwległą  $adef$ , której wierzchołek  $a$  ma współrzędne  $(x + dx, y, z)$ , przypadnie w kierunku osi  $y$  siła  $-\left(p_{12} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x} dx\right) dy dz$ ; momenty tych sił względem  $S_z$  wynoszą odpowiednio  $-p_{12} dy dz \cdot \frac{dx}{2}$  i  $-\left(p_{12} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x} dx\right) dy dz \cdot \frac{dx}{2}$ . Na ścianę  $mace$  działa w kierunku osi  $x$  siła  $p_{21} dz dx$ , a na ścianę przeciwległą  $bdfg$  siła  $-\left(p_{21} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} dy\right) dz dx$ ; momenty tych sił względem  $S_z$  są  $p_{21} dz dx \cdot \frac{dy}{2}$  i  $\left(p_{21} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} dy\right) dz dx \cdot \frac{dy}{2}$ . Pozostałe siły wewnętrzne nie dają momentów względem  $S_z$ , one są bowiem bądź równoległe do  $S_z$ , bądź też przecinają tę prostą. Równanie zatem momentów względem  $S_z$  będzie  $p_{12} dx dy dz + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{12}}{\partial x} dx \cdot dx dy dz - p_{21} dx dy dz - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_{21}}{\partial y} dy \cdot dx dy dz = 0$ . Jeżeli skrócimy przez  $dx dy dz$  i zatrzymamy tylko wielkości skończone, to mieć będziemy  $p_{12} = p_{21}$ . Podobnie otrzymamy dwa inne równania  $p_{23} = p_{32}, p_{31} = p_{13}$ , biorąc momenty względem  $S_x$  i  $S_y$ . *Natężenia styczne dwu ścian prostopadłych, wzięte w kierunkach prostopadłych do tychże ścian, są między sobą równe.* Pośród więc dziewięciu natężeń w punkcie  $m$  jest tylko sześć różnych od siebie  $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{12}, p_{23}, p_{31}$ .

Poprowadźmy płaszczyznę przez punkty  $a, b$  i  $c$ ; ona oddzieli od prostopadłościanu nieskończenie mały czworościan o wierzchołkach  $m, a, b, c$ , który jest także w równowadze. Siły zewnętrzne, działające na ten czworościan, są nieskończenie małymi rzędu trzeciego, a siły wewnętrzne, do jego ścian przyłożone, są nieskończenie małymi rzędu drugiego; możemy zatem przy rozważaniu równowagi pominąć siły zewnętrzne, badając równowagę samych sił wewnętrznych. Z równowagi sił wewnętrznych wynika, że siła wewnętrzna, przyłożona do ściany  $abc$ , jest równa i wprost przeciwna wypadkowej sił wewnętrznych, odpowiednich ścianom, schodzącym się w punkcie  $m$ . Ponieważ każda ściana  $ma, mb, mc$  jest rzutem prostokątnym ściany  $abc$ , a natężenia po dwu

stronach elementu płaskiego są równe i mają kierunki przeciwne (art. 176), przeto widzimy, że siła, odpowiednia stronie zewnętrznej ściany  $abc$ , jest wypadkową sił, działających na strony zewnętrzne jej rzutów prostokątnych, schodzących się w punkcie  $m$ . Ten związek widocznie utrzymałby się, w razie gdybyśmy rozważali rzuty ukośne ściany  $abc$ . Przyjmując następnie, że wymiary czworoscianu dążą nieograniczenie do zera, wniesiemy, że ściany przechodząc będą przez ten sam punkt  $m$ , i otrzymamy następujące twierdzenie: *siła wewnętrzna w punkcie względem danego elementu płaskiego jest wypadkową sił wewnętrznych, odpowiednich rzutom tego elementu na trzy płaszczyzny, przez tenże punkt przechodzące* (tw. Cauchy'ego). To twierdzenie stosuje się także do ciał sprężystych, w których zachodzi ruch wewnętrzny; albowiem siły stracone, wprowadzone przez zasadę d'Alembert'a, są nieskończenie małe rzędu trzeciego, pominięte więc być mogą w obec sił wewnętrznych.

**182. NATEŻENIA GŁÓWNE.** Rozważajmy element płaski  $d\omega$ , zawierający punkt  $m$ ;  $a, b, c$  niech oznaczają dostawy kierunkowe normalnej do tego elementu;  $\alpha, \beta, \gamma$  dostawy kierunkowe nateżenia  $p$  tego elementu w punkcie  $m$ . Wystawiając w  $m$  układ prostokątny osi, rzucmy  $d\omega$  na jego płaszczyzny, to  $ad\omega, bd\omega, cd\omega$  będą odpowiednio rzutami w kierunkach osi. Z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że  $\alpha p \cdot d\omega = \alpha p_{11} \cdot d\omega + b p_{21} \cdot d\omega + c p_{31} \cdot d\omega$ , albo, po skróceniu przez  $d\omega$ ,

$$(1) \quad \alpha p = \alpha p_{11} + b p_{21} + c p_{31}, \text{ i podobnie } \beta p = \alpha p_{12} + b p_{22} + c p_{32}, \\ \gamma p = \alpha p_{13} + b p_{23} + c p_{33},$$

gdzie  $p_{ik}$  oznaczają składowe nateżeń rzutów elementu, wzięte w kierunkach osi, jak w art. 181-ym. Oznaczmy przez  $p_1, p_2, p_3$  nateżenia, odpowiednie tym rzutom, a przez  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , gdzie  $i=1, 2, 3$ , ich dostawy kierunków; otrzymamy

$$(2) \quad p_{11} = \alpha_1 p_1, p_{12} = \beta_1 p_1, p_{13} = \gamma_1 p_1; p_{21} = \alpha_2 p_2, p_{22} = \beta_2 p_2, \\ p_{23} = \gamma_2 p_2; p_{31} = \alpha_3 p_3, p_{32} = \beta_3 p_3, p_{33} = \gamma_3 p_3.$$

Podstawmy te wartości w równania (1) i obliczmy sumę kwadratów odpowiednich stron tych równań, otrzymamy

$$p^2 = p_1^2 \alpha^2 + p_2^2 \beta^2 + p_3^2 \gamma^2 + 2(\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3) p_2 p_3 \cdot bc + 2(\alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1) p_3 p_1 \cdot ca + 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) p_1 p_2 \cdot ab.$$

Jeżeli przyjmiemy dla krótkości

$$(3) \quad \begin{cases} A = (\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3) p_2 p_3 = p_2 p_3 \cos(p_2, p_3), B = p_3 p_1 \cos(p_3, p_1). \\ C = p_1 p_2 \cos(p_1, p_2), \end{cases} \text{ to mieć będziemy}$$

$$(4) \quad p^2 = p_1^2 \alpha^2 + p_2^2 \beta^2 + p_3^2 \gamma^2 + 2 A \cdot bc + 2 B \cdot ca + 2 C \cdot ab.$$

Z tego wzoru okazuje się, że dość znać wielkości i kierunki nateżeń trzech elementów płaskich, przecinających się w danym punkcie pod kątami prostymi, aby obliczyć wielkość nateżenia dowolnego elementu, przez tenże punkt przechodzącego. Odetnijmy na kierunku nateżenia  $p$  od punktu  $m$