

Kładąc w równaniu d'Alembert'a  $u = \tan \varphi$ , i  $A = \frac{M(l+r)^2 + \frac{ml^2}{3}}{M(l+r) + \frac{ml}{2}}$ , otrzymamy

$$(11) \quad \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 u^4 - \frac{2g\lambda}{\omega^2} u^3 + \left[\lambda^2 - A^2 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2\right] u^2 - \frac{2g\lambda}{\omega^2} u + \lambda^2 = 0.$$

Jedyny pierwiastek rzeczywisty i dodatni tego równania wyznacza kąt  $\varphi$  dla wiadomego  $\omega$ .

**163. RUCH KULI NA PŁASZCZYŹNIE.** Kula o masie  $M$  i o promieniu  $R$  zostaje wprowadzona w ruch na chropowatej płaszczyźnie poziomej, i następnie jest sobie samej zostawiona; mamy wyznaczyć ruch tej kuli. Obierzmy na płaszczyźnie poziomej osi prostokątne  $Ox$  i  $Oy$ , a oś  $Oz$  pionowo w górę, a w środku kuli wystawmy układ osi równoległych, które poruszają się równolegle do siebie, tak iż względem nich kula się obraca. Osi drugiego układu są w każdej chwili osiami głównymi kuli. Niech  $u_0, v_0, w_0$  oznaczają prędkości początkowe środka kuli w kierunkach osi; z założenia  $w_0 = 0$ ;  $p_0, q_0, r_0$  niech będą początkowymi prędkościami kątowymi obrotu kuli około osi drugiego układu. Jeżeli  $u, v, w; p, q, r$  oznaczają powyższe prędkości po upływie czasu  $t$ ; a  $U, V, W$  są prędkościami punktu styczności  $(0, 0, -R)$ , to

$$(1) \quad U = u - qR, \quad V = v + pR, \quad W = 0,$$

a prędkość  $C$  ślizgania się, t. j. prędkość punktu styczności, będzie

$$(2) \quad C = \sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{(u - qR)^2 + (v + pR)^2}.$$

Ciśnienie kuli na płaszczyznę wynosi  $Mg$ , tarcie przy ślizganiu się będzie zatem  $fMg$ , a ponieważ kierunek tego tarcia jest przeciwny kierunkowi ślizgania się, przeto składowe  $X_1, Y_1, Z_1$  tarcia będą

$$X_1 = -\frac{fMgU}{C}, \quad Y_1 = -\frac{fMgV}{C}, \quad Z_1 = 0,$$

a momenty tarcia, przyłożonego do punktu  $(0, 0, -R)$ , względem osi drugiego układu, wynoszą

$$L_1 = -fMg \frac{VR}{C}, \quad M_1 = fMg \frac{UR}{C}, \quad N_1 = 0.$$

Na kulę działa ciężar własny  $-Mg$ , reakcja normalna  $Mg$  i tarcie. Momenty bezwładności kuli względem osi drugiego układu są sobie równe i wynoszą  $\frac{2}{5}MR^2$ ; z równania ruchu środka i równań Euler'a wynika po skróceniu przez  $M$ ,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -fg \frac{U}{C}, & \frac{dv}{dt} = -fg \frac{V}{C}, & \frac{dw}{dt} = 0, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{5}{2} \frac{fg}{R} \frac{V}{C}, & \frac{dq}{dt} = \frac{5}{2} \frac{fg}{R} \frac{U}{C}, & \frac{dr}{dt} = 0. \end{cases}$$

Z tego widzimy, że  $W=0$ ,  $r=r_0$ ; że zatem obrót kuli około pionu środka nie zmienia się podczas dalszego ruchu. Dzieliąc pierwsze dwa równania przez siebie, stronami odpowiednimi, otrzymamy

$$\frac{du}{dv} = \frac{U}{V} = \frac{u - qR}{v + pR}, \quad \frac{du}{u - qR} = \frac{dv}{v + pR},$$

a dzieląc pierwsze równanie przez czwarte, tudzież drugie przez piąte,

$$\frac{du}{dp} = \frac{2}{5} R \frac{U}{V} = \frac{2}{5} R \frac{du}{dv}, \quad dp = \frac{5}{2R} dv,$$

$$\frac{dv}{dq} = -\frac{2}{5} R \frac{V}{U} = -\frac{2}{5} R \frac{dv}{du}, \quad dq = -\frac{5}{2R} du;$$

całkując zaś je, otrzymamy

$$(4) \quad p = p_0 + \frac{5}{2R} (v - v_0), \quad q = q_0 - \frac{5}{2R} (u - u_0), \text{ a stąd:}$$

$$u - qR = \frac{7}{2} u - \alpha_0, \quad v + pR = \frac{7}{2} v + \beta_0, \text{ gdzie}$$

$$\alpha_0 = q_0 R + \frac{5}{2} u_0, \quad \beta_0 = p_0 R - \frac{5}{2} v_0, \text{ więc}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{7}{2} u - \alpha_0}{\frac{7}{2} v + \beta_0} = \frac{d(\frac{7}{2} u - \alpha_0)}{d(\frac{7}{2} v + \beta_0)} = \frac{dU}{dV} = \frac{U}{V}.$$

Iloraz zatem  $\frac{U}{V}$  jest stały. *Kierunek ślizgania się, a więc kierunek tarcia nie zmienia się podczas ruchu*; a ponieważ wielkość tarcia jest stała, przeto środek kuli porusza się wskutek działania siły stałej i równoległej do płaszczyzny. Z tego wynika (jak przy wyrzuceniu ukośnym), że *środek kuli opisuje parabolę*. Gdy odbierzemy oś  $Oy$  równoległą do kierunku początkowego ślizgania się, to dla  $t=0$  będzie  $U=0$  a  $V=C_0$ , jeżeli  $C_0$  jest prędkością początkową ślizgania się; będzie więc ciągle  $U=0$ ,  $V=C=v+pR$ ,  $u-qR=0$ . Jako równania (3) otrzymamy tu

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = -fg, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{5}{2} \frac{fg}{R}, \quad \frac{dq}{dt} = 0; \text{ a więc}$$

$$(5) \quad u = u_0, \quad v = v_0 - fgt, \quad p = p_0 - \frac{5}{2} \frac{fgt}{R}, \quad q = q_0 = \frac{u_0}{R}.$$

Oznaczmy przez  $\xi$ ,  $\eta$  współrzędne punktu, w którym kula jest styczna do płaszczyzny; one przedstawiają zarazem współrzędne rzutu środka kuli na płaszczyznę; niech  $c$  będzie prędkością początkową środka,  $\lambda$  kątem, który  $c$  tworzy z osią  $x$ ; wtedy  $u_0 = c \cos \lambda$ ,  $v_0 = c \sin \lambda$ . Biorąc więc  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  dla  $t = 0$ , mamy

$$u = \frac{d\xi}{dt} = c \cos \lambda, \quad v = \frac{d\eta}{dt} = c \sin \lambda - fgt,$$

$$\xi = ct \cos \lambda, \quad \eta = ct \sin \lambda - \frac{fgt^2}{2}, \text{ a rugując } t,$$

$$(6) \quad \eta = \xi \operatorname{tang} \lambda - \frac{fg}{2} \cdot \frac{\xi^2}{c^2 \cos^2 \lambda},$$

co przedstawia równanie paraboli, którą opisuje środek kuli. Prędkość zaś ślizgania się jest

$$(7) \quad C = v + pR = v_0 + p_0 R - \frac{7}{2} fgt = C_0 - \frac{7}{2} fgt, \text{ gdzie} \\ C_0 = c \sin \lambda + p_0 R.$$

Ślizganie się ustanie, skoro będzie  $C = 0$ , a zatem po upływie czasu

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{C_0}{fg} = \frac{2}{7} \frac{c \sin \lambda + p_0 R}{fg},$$

a kula będzie wówczas styczna do płaszczyzny w punkcie  $(\xi_1, \eta_1)$ ,

$$(8) \quad \xi_1 = \frac{2}{7} \frac{c \cos \lambda}{fg} (c \sin \lambda + p_0 R), \quad \eta_1 = \frac{2}{7} \cdot \frac{c \sin \lambda + p_0 R}{7 fg} (6 c \sin \lambda - p_0 R).$$

Parabola (6) wyznacza ślad kuli na płaszczyźnie. Jeżeli kierunek początkowy ruchu środka jest zarazem kierunkiem ślizgania się, a zatem  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , to  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = c$ , więc  $\xi = 0$ ,  $\eta = ct - fg \frac{t^2}{2}$ ; kula opisuje wtedy ruchem jednostajnie opóźnionym linią prostą w pierwotnym kierunku, a prędkość ślizgania się będzie  $C = c + p_0 R - \frac{7}{2} fgt$ , gdzie  $C_0 = c + p_0 R$ . Gdyby początkowo nie było ślizgania się, a zatem  $C_0 = 0$ , to ono niemogłoby powstać, a kula rozpoczęłaby ruch, tocząc się na płaszczyźnie; wtedy więc byłoby  $t_1 = 0$ .

Po upływie czasu  $t_1$  prędkości przybiorą następujące wartości

$$u_1 = c \cos \lambda, \quad v_1 = \frac{1}{7} (5 c \sin \lambda - 2 p_0 R), \quad w_1 = 0, \\ p_1 = \frac{1}{7 R} (2 p_0 R - 5 c \sin \lambda), \quad q_1 = \frac{c}{R} \cos \lambda, \quad r_1 = r_0,$$

a prędkości  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  punktu  $(x, y, z)$  kuli będą w tej chwili

$$x' = u_1 + q_1 z - r_1 y = c \cos \lambda + \frac{c z}{R} \cos \lambda - r_0 y, \\ y' = v_1 + r_1 x - p_1 z = r_0 x + \frac{1}{7 R} (5 c \sin \lambda - 2 p_0 R) (R + z), \\ z' = w_1 + p_1 y - q_1 x = \frac{1}{7 R} (2 p_0 R - 5 c \sin \lambda) y - \frac{c x}{R} \cos \lambda.$$

Założenia  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$  wyznaczają prostą

$$(9) \quad \frac{x}{\frac{1}{7} (2 p_0 R - 5 c \sin \lambda)} = \frac{y}{c \cos \lambda} = \frac{z + R}{r_0 R},$$

której każdy punkt ma prędkość równą zeru, a zatem jestto oś chwilowa obrotu kuli, przechodząca przez punkt  $(\xi, \eta)$ , w którym kula jest styczna do płasz-

czyzny. Podczas ślizgania się ruch chwilowy kuli jest skretem, a w chwili, gdy ślizganie się ustaje, skręt staje się samym tylko obrotem około prostej (9). Równanie rzutu osi chwilowej na płaszczyznę ruchu jest:

$$(10) \quad 7cx \cos \lambda - (2p_0 R - 5c \sin \lambda)y = 0.$$

Niech kierunek ruchu środka kuli w chwili  $t_1$  tworzy z osią  $x$  kąt  $\lambda_1$ ; wówczas będzie

$$(11) \quad \tan \lambda_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{5c \sin \lambda - 2p_0 R}{7c \cos \lambda}.$$

Gdy oznaczymy przez  $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_1$ , wartość pochodnej  $\frac{d\eta}{d\xi}$  dla  $t = t_1$ , to z równania (6) wynika:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_1 = \frac{5c \sin \lambda - 2p_0 R}{7c \cos \lambda} = \tan \lambda_1,$$

to znaczy: w chwili kiedy ustaje ślizganie się, środek kuli opuszcza parabolę i porusza się odtąd prostoliniowo w kierunku stycznej do tej krzywej w punkcie  $(\xi_1, \eta_1)$ . Porównyując równania (10) i (11), otrzymujemy ciekawe twierdzenie, że w chwili, kiedy ustaje ślizganie się, rzut osi chwilowej na płaszczyznę ruchu jest prostopadły do kierunku ruchu środka, a zatem do kierunku toczenia się.

**164. RUCH WALCA NA PŁASZCZYŹNIE.** Jednorodny walec kołowy prosty, obracający się około swój osi z prędkością kątową  $\omega_0$ , zostaje rzucony na płaszczyźnie chropowatej w kierunku prostopadłym do osi z prędkością  $v_0$ ; mamy wyznaczyć jego ruch. Niech płaszczyzna tworzy z poziomem kąt  $\alpha$ , a walec, obracający się pierwotnie w tym kierunku, który odpowiada toczeniu się na dół, niech zostaje rzucony pod górę. Ruch walca pod górę będzie posuwisty, równoległy do płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez prostą największego spadku, a strzałka 1 (fig. 63) oznacza kierunek pierwotnego obrotu. Przyjmując oś  $Ax$  w kierunku ruchu, rozłożmy ciężar walca  $Mg$  na  $Mg \sin \alpha$  i  $Mg \cos \alpha$ ; tarcie  $F$ , działające ku  $A$ , będzie  $F = -Mg f \cos \alpha$ . Oznaczmy przez  $\varphi$  kąt obrotu około osi, przez  $R$  promień walca; wtedy  $\frac{MR^2}{2}$  będzie jego momentem bezwładności, a według art. 157-go równania ruchu, biorąc momenty względem osi walca, będą

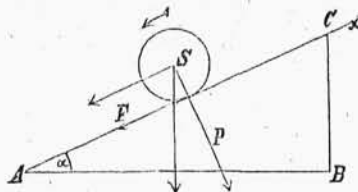


Fig. 63.

$$(1) \quad M \frac{d^2 x}{dt^2} = -Mg (\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mg f R \cos \alpha.$$

Całkując je przy warunkach, że dla  $t = 0$  jest  $\frac{dx}{dt} = v_0$  i  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$ , otrzymamy

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = v_0 - gt(\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{2fg}{R} t \cos \alpha,$$

z czego widzimy, że obie prędkości zmniejszają się proporcjonalnie względem czasu. Gdy  $c$  oznacza prędkość ślizgania się, t. j. prędkość punktu styczności

P, to  $c = \frac{dx}{dt} + R \frac{d\varphi}{dt}$ , lub według (2),

$$(3) \quad c = c_0 - gt(\sin \alpha + 3f \cos \alpha),$$

gdzie  $c_0 = v_0 + R\omega_0$  jest prędkością ślizgania się dla  $t = 0$ . Ślizganie się ustanie po upływie czasu  $t_1$ , dla którego  $c = 0$ , a więc w czasie:

$$(4) \quad t_1 = \frac{c_0}{g(\sin \alpha + 3f \cos \alpha)}.$$

Kładąc  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ , otrzymamy czasy  $t'$  i  $t''$ , po upływie których prędkości (2) będą równe zeru. Tym sposobem otrzymamy

$$t' = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}, \quad t'' = \frac{\omega_0 R}{2fg \cos \alpha}, \quad \text{więc}$$

$$(5) \quad t_1 - t' = \frac{\mu}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)(\sin \alpha + 3f \cos \alpha)}, \quad t_1 - t'' = \frac{-\mu}{2fg(\sin \alpha + 3f \cos \alpha) \cos \alpha},$$

gdzie  $\mu = \omega_0 R(\sin \alpha + f \cos \alpha) - 2v_0 f \cos \alpha$ . Dla  $\mu = 0$  będzie  $t_1 = t' = t''$ ; dla  $\mu > 0$  będzie  $t_1 > t'$ ,  $t_1 < t''$ ; dla  $\mu < 0$  będzie  $t_1 < t'$ ,  $t_1 > t''$ . W pierwszym przypadku staną się obie prędkości jednocześnie równe zeru, więc walec, przybywszy do punktu najwyższego, zacznie spadać bez prędkości początkowej. W drugim przypadku ruch postępowy środka masy ustanie wcześniej, niż obrót walca w kierunku 1; walec więc wznosi się na płaszczyźnie przez czas  $t'$ , a następnie zaczyna spadać, obracając się w tym kierunku, który odpowiada toczeniu się na dół, będzie się przeto tym śpieszniej staczał. W trzecim przypadku ustaje obrót pierwotny wcześniej, niż ruch postępowy w górę; po upływie czasu  $t''$  zaczyna się więc walec obracać w kierunku przeciwnym, podnosząc się jeszcze do czasu  $t'$ ; odtąd zaczyna spadać, obracając się w kierunku, odpowiednim toczeniu się pod górę. W każdym przypadku trwa ruch pod górę przez czas  $t'$ , a powyższe trzy przypadki zależą od tego, czy  $tga$  jest równe, większe lub mniejsze od

$$(6) \quad f \left( \frac{2v_0}{\omega_0 R} - 1 \right).$$

Przypuśćmy, że ma miejsce trzeci przypadek. Po upływie czasu  $t''$ , kiedy ustaje obrót w kierunku pierwotnym, prędkość ruchu postępowego wynosi jeszcze  $v_0 - \frac{\omega_0 R}{2f}(f + \tan \alpha)$ . Odtąd tarcie sprawia obrót przeciwny; jako

więc równanie ruchu obrotowego, licząc  $\varphi$  w nowym kierunku, będziemy mieli  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2fg}{R} \cos\alpha$ ; a całkując je przy warunku, że  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  dla  $t = t'$ , otrzymamy  $\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_0 + \frac{2fgt}{R} \cos\alpha$ . Gdy ruch pod górę ustaje dla  $t = t'$ , będzie  $\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_0 + \frac{2fv_0}{R(f + \tan\alpha)}$ . Liczymy teraz oś  $x$  od najwyższego punktu, dokąd walec doszedł, ku punktowi A; wtedy równania dla spadku będą

$$(7) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha), \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{fg}{R} \cos\alpha,$$

których dalsza analiza nie przedstawia trudności. Polecamy czytelnikowi dochodzenie dwu pozostałych przypadków.

**165. RUCH BĄKA.** Niech P (fig. 64) będzie wierzchołkiem bąka, posuwającym się na płaszczyźnie poziomej bez tarcia; S niech oznacza środek masy na osi geometrycznej, a  $l = PS$  liczymy w kierunku dodatnim od P ku S. Na płaszczyźnie poziomej obierzmy osi  $Ox$ ,  $Oy$ , a oś  $Oz$  pionowo w górę.

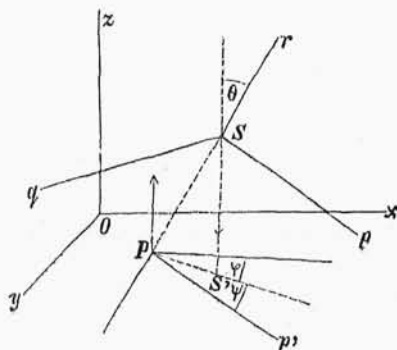


Fig. 64.

Przez oś geometryczną  $Sr$  i pion w punkcie S prowadzimy płaszczyznę, na niej bierzemy oś prostopadłą  $Sp$  do  $Sr$ , a oś  $Sq$  prostopadłą do  $Sp$  i  $Sr$ . Płaszczyzna, poprowadzona przez P równoległa do  $Spq$ , przecina płaszczyznę  $Oxy$  podług prostej, która z osią  $Ox$  tworzy kąt  $\varphi$ ; prosta  $Pp'$ , równoległa do  $Sp$ , tworzy z tym śladem kąt  $\psi$ , a  $Sr$  tworzy z pionem kąt  $\theta$ . Jeżeli  $Mg$  jest ciężarem bąka,  $R$  pionową reakcją płaszczyzny w P;  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  oznaczają współrzędne punktu S względem układu  $Oxyz$ , to równania ruchu środka masy będą

$$(1) \quad M \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2\zeta}{dt^2} = R - Mg,$$

skąd wynika, że rzut poziomy  $S'$  środka masy porusza się prostoliniowo i jednostajnie. Rzuty reakcji na osi główne układu  $Spqr$  są odpowiednio  $R \sin \theta \sin \phi$ ,  $R \sin \theta \cos \phi$  i  $R \cos \theta$ ; a ponieważ współrzędne punktu  $P$  względem tych osi są  $o$ ,  $o$ ,  $-l$ , przeto momenty reakcji będą  $Rl \sin \theta \cos \phi$ ,  $-Rl \sin \theta \sin \phi$ ,  $o$ . Elipsojda centralna jest obrotowa; jeżeli  $A$  jest momentem bezwładności bąka względem osi  $Sp$  i  $Sq$ , a  $C$  momentem względem osi geometrycznej  $Sr$ , to otrzymamy równania Eulera:

$$(2) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (A - C) qr &= Rl \sin \theta \cos \phi, \quad A \frac{dq}{dt} - (C - A) rp = -Rl \sin \theta \sin \phi, \\ C \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnie równanie pokazuje, że *obrot bąka około osi geometrycznej trwa ciągle z pierwotną prędkością*, że przeto  $r = r_0$ , jeżeli  $r_0$  jest prędkością początkową, z jaką bąk w ruch wprowadzono. Otrzymamy całki równań (2), stosując zasadę energii i zasadę pól do płaszczyzny  $Oxy$ .

Energiją kinetyczną  $T$  otrzymamy z równania  $2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + A(p^2 + q^2) + Cr_0^2$ ; praca siły  $-Mg$  wynosi  $-Mgl \cos \theta$ ; zważywszy, że  $\xi'$  i  $\eta'$  mają wartości stałe i że  $\zeta = l \cos \theta$ , otrzymamy następującą całkę z zasady energii, oznaczając wskaźnikiem  $o$  stan początkowy ( $t = 0$ ),

$$Ml^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + A(p^2 + q^2) + 2Mgl \cos \theta = Ml^2 \sin^2 \theta_0 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_0^2 + A(p_0^2 + q_0^2) + 2Mgl \cos \theta_0.$$

Mamy  $p^2 + q^2 = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = p \cos \phi - q \sin \phi$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} \sin \theta = p \sin \phi + q \cos \phi$ . Przyjmijmy, że na początku obraca się bąk tylko około swjej osi geometrycznej, wówczas  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$ , więc  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  i  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  dla  $t = 0$ ; otrzymamy zatem

$$(3) \quad A \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta + (A + Ml^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2Mgl (\cos \theta - \cos \theta_0) = 0.$$

Niech  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  oznaczają dostawy kierunkowe osi  $Sp$  względem układu  $Oxyz$ ; z zasady pól wynika

$$A(p a_1 + q b_1) + Cr_0 \cos \theta = \text{stała};$$

a wstawiając  $a_1 = \sin \theta \sin \phi$ ,  $b_1 = \sin \theta \cos \phi$  (art. 49), tudzież wyrażenia  $p$  i  $q$  w funkcjach kątów  $\theta$  i  $\varphi$ , i uwzględniwszy warunki początkowe, mieć będziemy z téj zasady

$$(4) \quad A \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \theta + Cr_0 (\cos \theta - \cos \theta_0) = 0.$$

Z tego równania wynika

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cr_0}{A} \cdot \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

a wstawivszy te wyrażenie w (3), otrzymamy

$$(6) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cdot \frac{2MglA \sin^2 \theta - C^2 r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{A(A + Ml^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta},$$

Pierwsze dwa wyrazy równania (3) są dodatnie, ostatni wyraz jest przeto ujemny, a zatem  $\cos \theta_0 > \cos \theta$ , więc  $\theta > \theta_0$ . *Nachylenie osi geometrycznej względem pionu podczas ruchu bąka jest ciągle większe od nachylenia początkowego, lub przynajmniej równe temu nachyleniu.* Pochodna  $\frac{d\theta}{dt}$  jest miarą nutacyi czyli kołysania się osi względem pionu. Z równania (5) okazuje się, że  $\frac{d\varphi}{dt}$  ma ciągle ten sam znak, co prędkość  $r_0$  obrotu początkowego około osi geometrycznej, a ponieważ ta pochodna jest miarą precesyi śladu płaszczyzny równika na poziomie, lub, co na jedno wychodzi, linii węzłów równika, przeto widzimy, że *prędkość precesyi ma ciągle ten sam znak, co prędkość obrotu około osi geometrycznej.* Kierunek więc precesyi zależy od kierunku obrotu około osi geometrycznej w chwili puszczenia bąka w ruch. Przyjmijmy

$$(7) \quad \Delta = 2Mgl - C^2 r_0^2 \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{2MglA(1 - \cos^2 \theta) - C^2 r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{A \sin^2 \theta};$$

wówczas

$$(8) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (\cos \theta_0 - \cos \theta) \frac{\Delta}{A + Ml^2 \sin^2 \theta}, \text{ a stąd}$$

$$(9) \quad dt = \pm \frac{d\theta \sqrt{A + Ml^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\Delta (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}.$$

Pierwiastki równania stopnia trzeciego  $\Delta (\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0$  wyznaczają te wartości kąta  $\theta$ , dla których  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ . Mamy naprzód pierwiastek  $\theta = \theta_0$ , a następnie należy rozwiązać równanie  $\Delta = 0$ . Dla  $\theta = \theta_0$  mamy  $\Delta > 0$ , zaś dla  $\theta = \pi$ ,  $\Delta < 0$ ; jeden pierwiastek  $\theta_1$  równania  $\Delta = 0$  znajduje się więc między  $\theta_0$  i  $\pi$ ; 2-gi pierwiastek jest większy niż  $\pi$  i nie ma żadnego znaczenia dla naszego zadania. Kąt  $\theta$  przypada zatem ciągle między  $\theta_0$  i  $\theta_1 > \theta_0$ ; dla  $\theta = \theta_0$  mamy  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ , a ponieważ odtąd rośnie  $\theta$ , przeto w równaniu (9) należy brać znak + dotąd, dopóki  $\theta$  nie przybierze wartości  $\theta_1$ , dla której znowu  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ . Ponieważ pochodna  $\frac{d\theta}{dt}$  jest funkcją ciągłą kąta, przeto zaczyna  $\theta$  maleć, należy więc odtąd brać w (9) znak — dotąd, dopóki  $\theta$  znowu nie przybierze wartości pierwotnej  $\theta_0$ . *Os geometryczna bąka kołysze się względem pionu między dwoma stałymi kranćami wewnątrz stożka o stałym kącie przy wierzchołku, to oddalając się od pionu, to zbliżając się ku niemu.* Jeżeli  $T$  oznacza okres kołysania się, to mamy, według (9),

$$(10) \quad T = 2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta \sqrt{A + Ml^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\Delta (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}.$$



Ten okres można obliczyć przez całkę eliptyczną. Prędkość precesji jest równa zero dla  $\theta = \theta_0$ ; odtąd ona rośnie aż do wartości największej dla  $\theta = \theta_1$ ; następnie zmniejsza do zera według tego samego prawa, aż do wartości odpowiadającej  $\theta = \theta_0$ ; a zatem *okres precesji równa się okresowi kołysania się*. Z równania (3) wynika

$$(11) \quad p^2 + q^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{A} \left[ 2Mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta) - Ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta \right],$$

a to równanie pozwala obliczyć prędkość kątową  $\omega$  obrotu bąka według wzoru  $\omega^2 = p^2 + q^2 + r_0^2$ . Dla  $\theta = \theta_0$  mamy  $p^2 + q^2 = 0$ , więc  $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $\omega = r_0$ ; wtedy zatem obraca się bąk tylko około swój osi z najmniejszą prędkością  $r_0$ .

Dla  $\theta = \theta_1$  otrzymamy największe  $\omega$ , mianowicie:  $\omega^2 = \frac{2Mgl}{A} (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) + r_0^2$ .

Aby rozpoznać ruch wierzchołka P na płaszczyźnie, szukajmy toru tego punktu względem rzutu S' środka masy, poruszającego się prostoliniowo i jednocześnie na podstawie. Kładąc S'P =  $\rho$ , możemy tor względny wierzchołka określić przez współrzędne biegunowe  $\rho$  i  $\varphi$ . Mamy  $\rho = l \sin \theta$ , a zatem maximum  $\rho = l \sin \theta_1$ , minimum  $\rho = l \sin \theta_0$ , z czego wnosimy, że tor względny jest ograniczony dwoma kołami, zakreślonymi ze środka S' promieniami  $l \sin \theta_0$  i  $l \sin \theta_1$ . Mamy

$$(12) \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{l \sqrt{A}}{Cr_0} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} \sqrt{\frac{2MglA \sin^2 \theta - C^2 r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{A + Ml^2 \sin^2 \theta}}.$$

Dla  $\theta = \theta_1$  będzie  $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$ , a dla  $\theta = \theta_0$  otrzymamy  $\frac{d\rho}{d\varphi} = \infty$ , z czego wynika, że tor względny punktu P dotyka się koła zewnętrznego, zakreślonego promieniem  $l \sin \theta_1$ , a przecina pod kątem prostym koło wewnętrzne, zakreślone promieniem  $l \sin \theta_0$ . Gdybyśmy przez środek masy S poprowadzili płaszczyznę poziomą, i rzucili na tę płaszczyznę w każdej chwili punkt P, otrzymalibyśmy powyższy tor względny, mający kształt rozety.

**166. KRĘCENIE SIĘ CIAŁA OBROTOWEGO.** Niech ciało obrotowe, na które działa tylko siła ciężkości, kręci się około punktu stałego P, leżącego na osi geometrycznej. Niech ten punkt będzie początkiem układu współrzędnych; użyjmy tu tego samego znakowania, co w artykule poprzedzającym. Zasada energii łącznie z zasadą pól prowadzi do następujących dwu równań ruchu obrotowego:

$$(1) \quad A \left[ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta \right] = 2Mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

$$A \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \theta = Cr_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

z których otrzymamy

$$(2) \quad \Delta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{C^2 r_0^2}{\Delta} \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = 2Mgl (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Kładąc

$$(3) \quad \Delta = 2Mgl - \frac{C^2 r_0^2}{\Delta} \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

mieć będziemy

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\Delta (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}{\sqrt{\Delta}}, \quad dt = \pm \frac{\sqrt{\Delta} d\theta}{\sqrt{\Delta (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}.$$

Prędkość pierwotna  $r_0$  obrotu około osi geometrycznej nie zmienia się podczas ruchu. Założmy, że ciało zostało wprowadzone w ruch z bardzo wielką prędkością  $r_0$  i że iloraz  $2Mgl\Delta : C^2 r_0^2$  jest bardzo mały, że więc moment bezwładności  $C$  jest dostatecznie wielki w porównaniu z  $\Delta$ ; natenczas z równania  $\Delta = 0$ , z którego

$$\cos \theta_0 - \cos \theta = \frac{2Mgl\Delta}{C^2 r_0^2} \sin^2 \theta,$$

okazuje się, że kąt  $\theta_1$ , będący największą wartością kąta  $\theta$ , będzie się bardzo mało różnił od kąta  $\theta_0$ , że przeto oś geometryczna będzie się kołysała około pionu wewnątrz stożka o bardzo małym kącie przy wierzchołku. W tym przypadku możemy przyjąć  $\theta = \theta_0 + \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest małym łukiem, którego kwadrat możemy pominąć. Mamy więc z dostateczną dokładnością

$$\cos \theta_0 - \cos \theta = \alpha \sin \theta_0, \quad \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\alpha}{\sin \theta_0},$$

a jeżeli przyjmiemy

$$(5) \quad \alpha_1 = \frac{Mgl\Delta}{C^2 r_0^2} \sin \theta_0, \quad \lambda = \frac{Cr_0}{\Delta},$$

to z równania (4) otrzymamy

$$(6) \quad dt = \pm \frac{1}{\lambda} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha} \sqrt{2\alpha_1 - \alpha}},$$

a całkując,

$$(7) \quad \lambda t = \pm \arccos \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1} \text{ czyli } \theta = \Theta - \alpha_1 \cos \lambda t,$$

gdzie  $\Theta = \theta_0 + \alpha_1$ . Weźmy  $\alpha = \alpha_1 (1 - \cos \lambda t)$  w drugim równaniu (1); otrzymamy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\lambda \alpha_1}{\sin \theta_0} (1 - \cos \lambda t),$$

całkując zaś, kładąc  $\sin \theta_0 = \sin (\Theta - \alpha_1) = \sin \Theta - \alpha_1 \cos \Theta$  i opuszczając  $\alpha_1^2$ , mieć będziemy

$$(8) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{\alpha_1}{\sin \Theta} (\lambda t - \sin \lambda t) = \Phi - \frac{\alpha_1}{\sin \Theta} \sin \lambda t.$$

Z równania  $r_0 = \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta$  wynika  $\frac{d\phi}{dt} = r_0 - \lambda \alpha_1 \cotg \Theta (1 - \cos \lambda t)$ ,  
a zatem

$$(9) \quad \phi = \phi_0 + r_0 t - \alpha_1 \cotg \Theta (1 - \sin \lambda t).$$

Równania (7), (8), (9) pozwalają wyrazić kąty  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\phi$  w funkcjach czasu, i tym samym rozpoznać ruch ciała przy uczynionych założeniach.

Położenie osi geometrycznej określają w każdej chwili kąty  $\theta$  i  $\varphi$ . Wystawmy w punkcie P prostą, której kierunek jest określony przez kąty  $\Theta$  i  $\Phi$ ; ta prosta opisuje około osi  $z$  stożek obrotowy ruchem jednostajnym, albowiem kąt  $\Theta$  i prędkość  $\frac{d\Phi}{dt}$  są stałe. Nazwijmy tę prostą osią średnią obrotu ciała. Oś geometryczna ciała porusza się względem osi średniej, a ponieważ, jak z (7) i (8) wynika, kąty  $\Theta - \theta$  i  $\Phi - \varphi$  są funkcjami okresowymi czasu, przeto ten ruch jest okresowy. Wystawmy kulę o środku P i o promieniu równym jednostce, i nazwijmy ślad  $N_s$  osi średniej na tej kuli biegunem średnim, a ślad N osi geometrycznej biegunem prawdziwym ruchu. Ponieważ obadwa bieguny są ciągle blisko siebie, przeto możemy przyjąć, że N leży na płaszczyźnie stycznej do kuli, przechodzącej przez biegun  $N_s$ . Poprowadźmy w  $N_s$  dwie osi współrzędnych: oś  $\xi$  styczną do południka, skierowaną ku dodatniej osi  $z$ , i oś  $\eta$ , styczną do równoleżnika, w kierunku przeciwnym obrotowi punktu  $N_s$  około osi  $z$ . Łatwo spostrzeżemy, że współrzędne  $\xi$ ,  $\eta$  bieguna N względem tych osi są:  $\xi = \alpha_1 \cos \lambda t$ ,  $\eta = \alpha_1 \sin \lambda t$ , że zatem  $\xi^2 + \eta^2 = \alpha_1^2$ , a nadto  $\frac{d\xi}{dt} = -\lambda \alpha_1 \sin \lambda t$ ,  $\frac{d\eta}{dt} = \lambda \alpha_1 \cos \lambda t$ , z czego wynika, że *biegun prawdziwy opisuje około bieguna średniego małe koło o promieniu  $\alpha_1$ , a kierunek tego obrotu jednostajnego jest bądź zgodny z kierunkiem obrotu bieguna średniego około pionu, bądź też przeciwny temu obrotowi, według tego czy  $\lambda \geq 0$ , a zatem czy  $r_0 \geq 0$ . Prędkość bowiem tego obrotu wynosi*

$$\lambda \alpha_1 = \frac{Mgl}{Cr_0} \sin \theta_0,$$

a ponieważ  $l \sin \theta_0 > 0$ , przeto znak tej prędkości zależy tylko od znaku prędkości  $r_0$ . Ruch osi geometrycznej względem osi średniej przedstawia kołysania się względem osi średniej. Kąt  $\Theta - \theta$  zmienia się między  $+\alpha_1$  i  $-\alpha_1$ , obszerność kołysania się wynosi przeto  $2\alpha_1$ , a okres tego ruchu wynosi  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi A}{Cr_0}$ , jest przeto tym mniejszy, im prędzej ciało obraca się około osi geometrycznej.

Powyższe zagadnienie może być także rozwiązane na podstawie równań Bour'a (art. 156), jak to wynika z następującego przykładu. Ciało materjalne, którego środek masy jest ustalony, a którego elipsojda centralna jest obrotowa, obraca się z bardzo znaczną prędkością około osi geometrycznej, a na tę oś wywieramy stałe ciśnienie; mamy wyznaczyć wpływ tego ciśnienia na ruch ciała. Używając figury i znakowania art. 156-go, oznaczmy jeszcze

przez  $l$  odległość od środka masy punktu na osi, w którym wywieramy ciśnienie, przez  $X, Y, Z$  rzuty ciśnienia na osi  $S\xi, S\eta, S\zeta$ , a przez  $\omega$  prędkość kątową obrotu około osi geometrycznej przed przyłożeniem tej siły (dla  $t=0$ ). Z pierwszego równania (3) art. 156-go wynika

$$\Omega + \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta = \omega,$$

a zatem prędkość obrotu około osi geometrycznej nie zmienia się. Z dwu zaś ostatnich równań (3) wynika

$$(10) \quad \begin{cases} A \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left( C\omega - A \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta \right) \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta = -Zl, \\ A \frac{d^2\varphi}{dt^2} \sin \theta + 2A \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta - C\omega \frac{d\theta}{dt} = Yl. \end{cases}$$

Poraz  $C\omega : A$  jest z założenia bardzo wielki; przypuśćmy nadto, że pochodne kątów  $\theta$  i  $\varphi$  względem czasu nie mogą przybrać wartości bardzo wielkich. W tym przypadku możemy w powyższych równaniach pominąć iloczyny pochodnych, tudzież 2-gie pochodne tych kątów, i zredukować równania do następujących postaci przybliżonych:

$$(11) \quad \begin{aligned} C\omega \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta &= -Zl, \quad -C\omega \frac{d\theta}{dt} = Yl, \text{ z których wynika} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{Zl}{C\omega \sin \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{Yl}{C\omega}. \end{aligned}$$

Dla  $Y=0$  będzie  $\frac{d\theta}{dt}=0$ ; wskutek więc ciśnienia  $Z$  oś geometryczna będzie opisywała stożek obrotowy około pionu. Dla  $Z=0$  będzie  $\frac{d\varphi}{dt}=0$ ; ciśnienie ma w tym przypadku kierunek linii węzłów (przy  $X=0$ ), a oś posuwa się na płaszczyźnie, przechodzącej przez pion prostopadle do kierunku ciśnienia. Ponieważ nie ma precesyi, przeto oś geometryczna pozostaje stale na tej płaszczyźnie, kołysząc się na niej względem pionu. Gdyby ciśnienie  $Y$  działało na ciało w spoczynku, wywołałoby obrót około osi  $S\zeta$ ; działając zaś na ciało, obracające się szybko, nie wywołuje tego ruchu, lecz sprawia nachylenie się osi geometrycznej ku prostej  $S\zeta$ . Wyrażamy to zjawisko mówiąc, że oś obrotu dąży do kierunku równoległego, t. j. do zajęcia kierunku tej osi, około której rozpocząłby się obrót ciała, gdyby ono było pierwotnie w spoczynku. Żeby oś geometryczna opisywała stożek, na to trzeba siły

$$Z = -\frac{C\omega}{l} \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta.$$

Ta siła jest znaczna z powodu wielkiego  $\omega$ , i prostopadła do kierunku zбочenia osi.

**167. RUCH WZGLĘDNY. GIROSKOP.** Niech środek masy  $S$  ciała obrotowego będzie ustalony względem ziemi, a ciało po nadaniu mu szybkiego

obrotu około osi geometrycznej niech będzie pozostawione samemu sobie; mamy wyznaczyć dalszy ruch ciała względem ziemi, uwzględniając jej obrót dzienny. Obierzmy prostokątny układ osi  $Sxyz$ , stale z ziemią połączony, tudzież drugi układ prostokątny  $Spqr$ , połączony stale z ciałem i poprowadźmy przez  $S$  prostą  $SN$ , równoległą do osi ziemi i skierowaną ku jej biegunowi północnemu  $N$ . Prosta  $Sr$  niech przedstawia oś geometryczną ciała, która z prostą  $SN$  tworzy kąt  $\alpha$ . Oznaczmy przez  $p, q, r$  prędkości katowe obrotu ciała względem ziemi, a przez  $p_1, q_1, r_1$  prędkości katowe ruchu unoszenia (obrotu dziennego), biorąc te prędkości względem osi  $Spqr$ ; wtedy  $p+p_1, q+q_1$  i  $r+r_1$  będą prędkościami katowymi obrotu bezwzględnego ciała względem tych osi. Niech  $C$  oznacza moment bezwładności ciała względem  $Sr$ ,  $A$  względem  $Sp$  i  $Sq$ ;  $\omega$  prędkość katową obrotu ziemi około  $SN$ , która ma być odcięta na tej prostej ku biegunowi południowemu. (Ob. zad. 2-gie w rozdziale III-im). W każdym punkcie ciała mamy wziąć pod uwagę przyciąganie ziemi i siłę odśrodkową, odpowiednią obrotowi dziennemu; wypadkowa tych sił przechodzi przez  $S$ , ma przeto moment równy zeru względem  $Sr$ ; otrzymamy więc  $C \frac{d}{dt} (r+r_1) = 0$ , z czego wynika, że suma  $r+r_1$  jest stałą. Jeżeli  $r_0$  jest prędkością obrotu początkowego (dla  $t=0$ ), to z uwagi, że  $r_1 = -\omega \cos \alpha$ , wynika

$$(1) \quad r - \omega \cos \alpha = r_0 - \omega \cos \alpha_0, \quad r = r_0 + \omega (\cos \alpha - \cos \alpha_0),$$

gdzie  $\alpha = \alpha_0$  dla  $t=0$ . Praca sił przyłożonych i sił pozornych jest równa zeru, energija zatem kinetyczna będzie stałą, co prowadzi do równania  $A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(p_0^2 + q_0^2) + Cr_0^2$ , gdzie  $p = p_0, q = q_0$  dla  $t=0$ . Ponieważ  $p^2 + q^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta$ , gdzie  $\theta$  i  $\varphi$  mają wiadome znaczenie (art. 49), przeto otrzymamy po wstawieniu wartości, pomijając wyraz tego rzędu co  $\omega^2$ , jako bardzo mały,

$$(2) \quad A \left[ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta \right] + 2C\omega r_0 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = A(p_0^2 + q_0^2).$$

Suma momentów sił względem  $SN$  jest równa zeru, moment więc ilości ruchu bezwzględnego względem tej prostej, mającej kierunek niezmienny, jest stały (art. 142), z czego wynika, iż  $Aa(p+p_1) + Ab(q+q_1) + Cc(r+r_1) = \text{stała}$ , przyczem  $a, b, c$  oznaczają dostawy kierunkowe prostej  $SN$  względem układu  $Spqr$ . Obierzmy ślad płaszczyzny, przechodzącej przez  $Sr$  i  $SN$ , na płaszczyźnie równika ciała, za oś  $Sp$ ; wtedy  $a = \sin \alpha, b = 0, c = \cos \alpha, p_1 = -\omega \sin \alpha, q_1 = 0, r_1 = -\omega \cos \alpha$ . Podstawiając te wartości, otrzymamy z ostatniego równania

$$(3) \quad A(p \sin \alpha - p_0 \sin \alpha_0) = (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) [C(r_0 - \omega \cos \alpha_0) - A\omega (\cos \alpha + \cos \alpha_0)].$$

Gdy ciało udzielimy na początku tylko obrotu około prostej  $Sr$ , to  $p_0 = 0, q_0 = 0$ . Gdy zaś obierzmy prostą  $SN$  za oś  $z$ , to  $\alpha = \theta$ , a z wzajemnego



położenia obudwu układów osi spólrzędnych wynika  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , a więc  $p = \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta$ . Podstawivszy te wartości w (2) i (3), mieć będziemy

$$(4) \quad \begin{aligned} A \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta \right] &= 2 C \omega r_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta), \\ A \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \theta &= C r_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Te równania określają ruch ciała względem ziemi. Są to téż same równania, które mieliśmy w art. 166-tym oznaczone przez (1) dla ruchu bezwzględnego; dla zupełnej tożsamości należy przyjąć  $Mgl = C\omega r_0$ . Ciało więc, którego środek masy jest ustalony, porusza się względem ziemi tak, jak ciało obrotowe o masie  $M$ , którego środek masy jest oddalony o  $l$  od punktu stałego na osi, kręci się w przestrzeni około tego punktu. Kładąc według art. 166-go

$$(5) \quad \alpha_1 = \frac{A \omega}{C r_0} \sin \theta_0, \quad \lambda = \frac{C r_0}{A},$$

otrzymamy

$$(6) \quad \theta = \theta_0 + \frac{A \omega}{C r_0} (1 - \cos \lambda t) \sin \theta_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega (1 - \cos \lambda t).$$

Pierwsze równanie wyznacza nachylenie osi geometrycznej ciała względem osi ziemi; drugie równanie wyznacza prędkość precesyi około prostej, równoległej do osi ziemi i przechodzącej przez środek masy ciała. Ponieważ  $A\omega : Cr_0$  jest z założenia bardzo małe, przeto widzimy, że *kołysanie się osi jest tym mniejsze, im większa jest prędkość  $r_0$ , a przy bardzo szybkim obrocie początkowym daje się kołysanie zaledwie dostrzegać*. Z 2-go równania wynika, że *prędkość precesyi osi średniej (art. 166) jest równa prędkości obrotu dziennego ziemi, lecz kierunku przeciwnego*, że zatem oś średnia wskazuje podczas ruchu nieustannie na ten sam punkt na niebie.

Powyższe zjawiska można sprawdzić zapomocą giroskopu Foucault, składającego się z metalowego pierścienia kołowego P, którego oś geometryczna jest średnicą drugiego pierścienia płaskiego Q, obracającego się swobodnie około trzeciego pierścienia płaskiego R. Osi wszystkich trzech pierścieni przecinają się w ich spólnym środku, około którego pierścień kołowy P z wszelką swobodą kręcić się może. Nadawszy osi pierścienia kołowego szybki obrót zapomocą kół zębatych, i zostawivszy przyrząd samemu sobie, spostrzegamy wyraźnie precesyję w kierunku przeciwnym obrotowi dziennemu, podczas gdy oś pierścienia P opisuje stożek obrotowy około prostej, równoległej do osi ziemi, kołysząc się nieznacznie względem téj prostej.

Przez odpowiednie ustalenie pierścienia Q można wywołać taki ruch giroskopu, że oś pierścienia kołowego posuwa się na danej płaszczyźnie. W celu rozpoznania tego ruchu obierzmy płaszczyznę daną za płaszczyznę  $Sxy$ ,

a rzut prostej  $SN$  na tę płaszczyznę niech będzie osią  $Sx$ . Oś geometryczna  $Sr$ , znajdująca się na płaszczyźnie  $Sxy$ , tworzy z prostą  $SN$  kąt  $\alpha$ ; niech  $\beta$  będzie stałym kątem między  $SN$  a  $Sx$ , a  $\gamma$  kątem zmiennym, który  $Sr$  tworzy z  $Sx$ . Wtedy  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$ ,  $\varphi = \gamma + \frac{\pi}{2}$ ,  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$ ; z równania (2) przeto wynika

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = 2 \cdot \frac{C\omega r_0}{A} (\cos \gamma_0 - \cos \gamma) \cos \beta.$$

Kładąc  $\gamma' = \pi - \gamma$ , ostatnie równanie możemy napisać

$$(7) \quad \left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)^2 = 2 \cdot \frac{C\omega r_0}{A} (\cos \gamma' - \cos \gamma'_0) \cos \beta.$$

Porównyując je z równaniem (14) art. 92-go widzimy, że oś pierścienia kołowego odbywa na płaszczyźnie  $Sxy$  ruch wahadłowy. Jeżeli  $r_0 > 0$ , to oś waha się około prostej  $Sx'$ , będącej przedłużeniem prostej  $Sx$ , a zatem około rzutu osi ziemi, wziętej ku biegunowi południowemu; dla  $r_0 < 0$  wahanie się zachodzi około prostej  $Sx$ , przedstawiającej rzut osi ziemi, wziętej ku biegunowi północnemu. Długość zredukowana wahadła wynosi  $\frac{Ag}{C\omega r_0 \cos \beta}$ , a czas jednej

oscylacji jest  $\pi \sqrt{\frac{A}{C\omega r_0 \cos \beta}}$ . Jeżeli oś porusza się na poziomie, odpowiednim pewnemu miejscu na ziemi, to  $\beta$  jest szerokością geograficzną tego miejsca; jeżeli więc zmuszamy oś do wahanja się na płaszczyźnie południka, to  $\beta = 0$ , a oś pierścienia waha się około osi ziemi.

Zjawiska, jakie okazuje giroskop Foucault, stanowią dosadniejsze dowody obrotu ziemi, niż pozorne zboczenie płaszczyzny wahanja, lub zboczenie pocisków, spadających na ziemię. Oprócz tego przyrządu znamy jeszcze wiele innych, do tego samego użytku służących, jak np. wahadło giroskopowe i politrop, które obmyślił Sire, tudzież w najnowszych czasach przez F. Gilbert'a podany barogiroskop.

## Ć W I C Z E N I A.

(1). Z działa o masie  $M$ , spoczywającego na chropowatej podstawie poziomej, wyrzucono pocisk o masie  $m$ : okazać, że działą cofnie się o długość  $\frac{1}{2fy} \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v^2$ , gdzie  $v$  jest prędkością pocisku. Jak długo trwa cofanie się działą?

(2). Wyznaczyć oś wahanja na płaszczyźnie elipsy, około której czas trwania jednej oscylacji pola tej elipsy jest najmniejszy.

(3). Regulujemy zegar wahadłowy bez zatrzymania tym sposobem, że na płytkę, przytwierdzoną do wahadła, kładziemy (lub z niej zdejmujemy) mały ciężarek. Okazać, że ciężarek do uskutecznienia żądanej zmiany będzie najmniejszy,

jeżeli odległość płytki od punktu zawieszenia równa się połowie długości zredukowanej wahadła.

(4). Wewnątrz wahadła fizycznego znajduje się w dowolnym miejscu wydrążenie kuliste, wypełnione wodą: wyznaczyć ruch wahadła.

\* (5). Wahadło balistyczne służy do mierzenia prędkości pocisków broni palnej. Dwie metody bywają stosowane: a) Broń palna łączy się z wahadłem, które cofa się w chwili wystrzału o pewien kąt, dający się wymierzyć. b) Pociskiem strzela się do masy wahadła, której odchylenie się wyznacza. Podać wzory, według których w obu przypadkach można obliczyć prędkość pocisku, znając wymiary i masy wahadła i pocisku.

(6). Pręt obraca się około jednego końca na płaszczyźnie poziomej bez działania sił i doznaje w każdym punkcie oporu powietrza, proporcjonalnego względem kwadratu prędkości: wyznaczyć prędkość kątową w funkcji czasu.

(7). Kula materyjalna jednorodna toczy się bez ślizgania się na równi pochyłej: podać prawa jej ruchu i okazać, że jeżeli  $\alpha$  jest kątem nachylenia równi do poziomu, a  $f$  współczynnikiem tarcia, to  $f = \frac{2}{7} \tan \alpha$ , aby zachodziło toczenie się kuli bez ślizgania się.

(8). Przyjmując  $f < \frac{2}{7} \tan \alpha$ , podać prawa ruchu kuli na równi pochyłej.

(9). Kula materyjalna jednorodna toczy się na walcu o poziomej osi: podać prawa jej ruchu, uwzględniając tarcie.

(10). Dwa pręty AB i BC równej długości obracają się na zawiasie około B, a A obraca się około stałej osi poziomej. Nić sprężysta AC, której długość naturalna równa się AB, łączy punkty A i C; układowi zaś nadajemy pewną prędkość kątową  $\Omega$  około punktu A. Wyznaczyć największą długość nici podczas ruchu, prędkości kątowe prętów w chwili, gdy są do siebie prostopadłe, i najmniejszą z wartości  $\Omega$ , przy której te pręty są do siebie prostopadłe.

\* (11). Dwie kule A i B znajdują się na płaszczyźnie poziomej i są do siebie styczne: wyznaczyć kierunek, w jakim trzecia kula C ma uderzyć kulę A, aby kula B poruszyła się w danym kierunku. Rozwiązać to zadanie przy nieuwzględnieniu tarcia i przy jego uwzględnieniu.

\* (12). Wyprowadzić prawa uderzenia się kul sprężystych i kul niesprężystych, bez uwzględnienia tarcia i z uwzględnieniem tarcia.

(13). Obliczyć siłę potrzebną, aby wóz o  $n$  parach kół poruszał się jednostajnie na torze poziomym.

\* (14). Pręt jednorodny jest podparty w środku, a kula doskonale sprężysta spada na jeden koniec pręta z danej wysokości: wyznaczyć ruch pręta i kuli.

(15). Wyznaczyć ruch jednorodnego pręta materyjalnego, którego końce posuwają się bez tarcia po dwu przecinających się prostych, poziomej i pionowej.

(16). Ciało obraca się jednostajnie około jakiegokolwiek osi bez działania sił zewnętrznych: podać warunki, aby ciśnienia na oś dały się zredukować do jednej wypadkowej, wyznaczyć tę wypadkową, tudzież równania jej promienia działania.



(17). Podać ruch ciała masy, którego każdy element doznaje od pewnego punktu przyciągania, proporcjonalnego względem masy i względem odległości od tego punktu.

(18). Wyznaczyć ruchy dwu punktów masy, przyciągających się wzajemnie w stosunku ich odległości, przyczem jeden punkt porusza się bez tarcia po prostej pionowej, a drugi na danej płaszczyźnie pochyłej.

(19). Pręt o długości  $L$  i masie  $M$ , zawieszony na nitce o długości  $l$ , ma ruch dowolny: oznaczywszy przez  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$  dostawy kierunkowe nitki i pręta względem prostokątnego układu osi, którego początkiem jest stały punkt zawieszenia nitki, okazać, że wyrażenie  $ML^2 \left( a_1 \frac{db_1}{dt} - b_1 \frac{da_1}{dt} \right) + \frac{ML^2}{3} \left( a_2 \frac{db_2}{dt} - b_2 \frac{da_2}{dt} \right) + M \frac{Ll}{2} \left( a_2 \frac{db_1}{dt} - b_1 \frac{da_2}{dt} + a_1 \frac{db_2}{dt} - b_2 \frac{da_1}{dt} \right)$  przedstawia moment ilości ruchu pręta względem osi  $Oz$ .

(20). Środek masy ciała masy obrotowego jest ustalony, a oś opisuje stożek obrotowy, stały względem ziemi. Okazać, że oś ciała waha się około rzutu osi obrotu ziemi na powierzchni stożka, i że  $\pi \sqrt{\frac{\Lambda \sin \alpha}{Cp r_0 \sin \beta}}$  jest czasem trwania wahnięcia, przyczem  $\alpha$  oznacza połowę kąta przy wierzchołku stożka, a  $\beta$  nachylenie jego osi względem osi ziemi, zaś pozostałe litery mają znaczenie wiadome.

(21). Zbadać toczenie się kuli jednorodnej na płaszczyźnie pochyłej na podstawie równań Lagrange'a.

(22). Wyznaczyć ruch kuli na płaszczyźnie chropowatej, obracającej się jednostajnie około osi pionowej, znajdującą się na tej płaszczyźnie.

(23). Na ciało, w spoczynku będące, działa siła pędowa, której składowe względem osi głównych są  $X, Y, Z$ , a  $x, y, z$  oznaczają spóbrzędne punktu przyłożenia. Okazać, że równanie  $\Lambda(B-C)xYZ + B(C-\Lambda)yZX + C(\Lambda-B)zXY = 0$  wyraża warunek konieczny, aby ruch ciała był obrotowy.

(24). Ciało, którego jeden punkt  $O$  jest stały, obraca się około pewnej osi, przechodzącej przez ten punkt, z wiadomą prędkością kątową i nagle zostaje zmuszone obracać się około innej prostej, przechodzącej także przez  $O$ ; wyznaczyć prędkość kątową tego obrotu nowego.

#### L i t e r a t u r a (Rozdz. XIV i XV).

L. N. M. CARNOT, Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement (Paris, 1803). — DUHAMEL, Sur les vibrations d'un système quelconque des points matériels (J. de l'ec. polyt. t. XIV, Paris, 1834), — G. CORIOLIS, Théorie mathématique des effets du jeu de billard (Paris, 1835). — S. D. POISSON: Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air (Paris, 1839); Second mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air. — L. POINCARÉ: Théorie nouvelle de la rotation des corps (pierwsze wyd. w Paryżu, 1834, drugie w J. des math., t. XVI, 1851); Théorie des cônes

circulaires roulants (Paris, 1853); Questions dynamiques (Paris, 1857 — 1859). — C. G. J. JACOBI, Sur la rotation d'un corps (J. des math., t. XIV, 1849; także J. v. CRELLE, t. XXXIX, 1850). — V. PUISEUX: Du mouvement d'un solide de révolution, posé sur un plan horizontal (J. des math., t. XIII, 1848); De l'équilibre et du mouvement des corps pesants en ayant égard aux variations de direction et d'intensité de la pesanteur (Ann. de l'école norm. sup. 2-e série, t. I, Paris, 1872). — J. RICHELLOT, Ueber das Problem der Rotation eines festen Körpers, auf welchen beliebige Kräfte wirken (Berlin, 1851). — C. LOTTNER, Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Rotationskörpers, auf die elliptischen Transcendenten (J. v. CRELLE, t. L, 1855). — MAC-CULLAGH, On the rotation of a solid body round a fixed point (Transactions of the Royal Ac. of Ireland, t. XXII, Dublin, 1855); także Mac-Cullagh's Collected works, Dublin, 1880). — M. MAJEWSKI, Traité de Balistique extérieure (Paris 1872). — J. H. JELLETT, A treatise on the theory of friction (Dublin and London, 1872). — E. J. ROUTH, A treatise on the stability of a given state of motion (London, 1877); An elementary treatise on the dynamics of rigid bodies (London, 1882); The advanced part of a treatise on the dynamics of rigid bodies (London, 1884). — PH. GILBERT, Etude historique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (Bruxelles, 1878); Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif (Mém. de la société scientif. de Bruxelles, 1882 i 1883). — W. HESS, Ueber das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene (München 1880). — G. DARBOUX, Etude géométrique sur les percussions et le choc des corps (Paris, 1880). — J. N. FRANKE, Ueber die Abhängigkeit der gleitenden Reibung von der Geschwindigkeit (Civilingenieur, t. XXVIII, Leipzig, 1882). — DE SPARRE, Sur le pendule de Foucault (Mém. de la soc. sc. de Bruxelles, 1883); Sur l'herpolodie de Poinsoť (Comptes rendus t. IC, Paris, 1884). — MANNHEIM, Sur la polhodie et l'herpolodie (Comptes r. t. C, 1885). — DE SAINT-GERMAIN, Sur l'herpolodie (Comptes r. t. C, 1885). — J. N. FRANKE, Sur la courbure de l'herpolodie, (Comptes r. t. C. Paris, 1885); O kręceniu się ciała stałego około punktu (Pam. wyd. mat.-przyr. ak. um. t. XII Kraków, 1886).

---