

## ROZDZIAŁ XII.

### TEORYJA PRZYCIĄGANIA.

---

**120. OKRĘŚLENIA OGÓLNE.** W teoryi przyciągania zajmujemy się następującym głównym zagadnieniem: dany jest punkt o masie  $\mu$  i układ  $n$  punktów o masach  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); każdy z punktów  $m_i$  działa na punkt  $\mu$  z siłą, która ma kierunek od  $\mu$  ku  $m_i$  lub od  $m_i$  ku  $\mu$ , a której wielkość jest funkcją odległości punktu  $\mu$  od punktu  $m_i$ ; wyznaczyć wypadkową tych sił. Jeżeli siła  $P_i$ , przedstawiająca działanie punktu  $m_i$  na  $\mu$ , ma kierunek od  $\mu$  ku  $m_i$ , to mówimy, że punkt  $m_i$  przyciąga punkt  $\mu$  z siłą  $P_i$ ; jeżeli zaś siła  $P_i$  ma kierunek od  $m_i$  ku  $\mu$ , mówimy, że punkt  $m_i$  odpycha punkt  $\mu$ . Przyjmujemy, że punkt  $\mu$  doznaje bądź przyciągania bądź też odpychania od wszystkich punktów danego układu, a prawo tego działania wyrażamy analitycznie zapomocą funkcyi, określającej wielkość siły, jeżeli wiadoma jest odległość punktu przyciąganego (odpychanego) od przyciągającego (odpychającego). Ponieważ odpychanie możemy uważać za przyciąganie ujemne, przeto wystarcza ograniczyć badania nasze do przypadku samych przyciągań. Wypadkową przyciągań, jakich punkt  $\mu$  doznaje od wszystkich punktów danego układu, nazywamy przyciąganiem tego punktu przez dany układ. Punkt przyciągany jest punktem przyłożenia sił  $P_i$ , a przeto szukane przyciąganie jest pewną siłą, dokładnie oznaczoną, która przybiera wartość zero, jeżeli siły  $P_i$  znoszą się wzajemnie.

Jeżeli punkty przyciągające stanowią ciało materjalne, natenczas masa każdego z tych punktów jest nieskończenie małym elementem masy ciała, a wypadkowa przyciągań tych punktów przedstawia przyciąganie, jakiego punkt  $\mu$  od tego ciała doznaje. Punkt przyciągany może być także częścią składową układu punktów, lub krańcem elementu ciała fizycznego; wtedy możemy dokonywać składu przyciągań, jakich elementy tego ciała doznają od innego ciała. Wogólności otrzymamy skrętnik, jako wynik takiego składu; a w przypadku, gdy przyciągania stanowią układ sił 1-go rodzaju, otrzymamy

przyciąganie wypadkowe, przedstawiające całkowite działanie ciała przyciągającego na ciało przyciągane. Najważniejsze z praw przyciągania jest tak zwane prawo Newton'a, według którego masa  $m$  przyciąga masę  $\mu$  z siłą, proporcjonalną względem każdej z tych mas i odwrotnie proporcjonalną względem kwadratu odległości punktów, w których te masy są skupione. Wyrażamy to prawo wzorem

$$(1) \quad P = \frac{k m \mu}{r^2},$$

w którym  $P$  oznacza przyciąganie,  $r$  odległość obu mas  $m$  i  $\mu$ , a  $k$  wiadomy współczynnik, pozwalający wyrazić wielkość siły  $P$  w odpowiednich jednostkach. Ponieważ  $P = k$  dla  $m = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $r = 1$ , przeto  $k$  wyraża wielkość przyciągania, jakiego jednostka masy doznaje od jednostki masy w jednostce odległości. Jeżeli  $P$  wyraża przyciąganie dla  $k > 0$ , to dla  $k < 0$  będzie  $P$  wyrażało odpychanie według prawa Newton'a. Zajmiemy się w tym rozdziale głównie przyciąganiem według prawa Newton'a. Aby zaś ujednolicić znakowanie, oznaczać nadal będziemy przez  $\mu$  masę punktu przyciąganego, a przez  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  jego współrzędne prostokątne.

**121. PRZYCIĄGANIE PUNKTU WEWNĘTRZNEGO.** Jeżeli punkt przyciągany znajduje się w skończonej odległości od każdego punktu ciała przyciągającego, wówczas żadna z sił elementarnych przyciągania, to znaczy siła, z jaką według prawa Newton'a działa element ciała na ten punkt, nie przybiera wartości nieskończenie wielkiej, skoro tylko gęstość ciała przyciągającego jest wszędzie skończona. Jeżeli zaś punkt  $\mu$  znajduje się wewnątrz ciała lub na powierzchni jego, wtedy odległości jego od punktów sąsiednich ciała zdążają do granicy zero, zdawałoby się przeto, że przyciągania elementarne tych punktów zdążają do granicy nieskończenie wielkiej, że zatem taki punkt doznaje przyciągania nieskończenie wielkiego. Można jednak okazać, że tak nie jest. Opiszmy około punktu  $\mu$  nieskończenie małą powierzchnią ciągłą i zamkniętą, która samą siebie nie przecina. Odległość  $\varepsilon$  dowolnego punktu na tej powierzchni od  $\mu$  jest nieskończenie mała; możemy przeto gęstość  $\sigma$  ciała w każdym punkcie wewnątrz tej powierzchni uważać za stałą. Wystawmy w  $\mu$  stożek nieskończenie wązki, który na kuli o promieniu 1 zakreśla pole  $d\omega$ , natenczas pole, jakie ten stożek wyznacza na kuli o promieniu  $\rho < \varepsilon$ , będzie  $\rho^2 d\omega$ ; masa stożka, zawarta między kulami o promieniach  $\rho$  i  $\rho + d\rho$ , będzie  $\sigma \rho^2 d\omega d\rho$ , a punkt  $\mu$  doznawać będzie od tej masy przyciągania  $k \mu \sigma d\omega \cdot d\rho$ .

Cały zatem stożek przyciąga punkt  $\mu$  z siłą  $k \mu \sigma \int_0^\varepsilon d\omega \cdot d\rho = k \mu \sigma \varepsilon \cdot d\omega$ .

Jeżeli  $E$  jest największą odległością punktu na powierzchni rozważanej od punktu  $\mu$ , wtedy suma przyciągań wszystkich stożków elementarnych, otaczających punkt  $\mu$ , będzie mniejsza, niż  $k \mu \sigma E \int d\omega$ . A ponieważ całka  $\int d\omega$ , rozciągająca się na wszystkie stożki, przedstawia powierzchnią kuli o promie-

niu 1, wynoszącą  $4\pi$ , przeto powyższa suma będzie mniejszą niż  $4\pi k\mu\sigma E$ . Z uwagi zaś, że wypadkowa sił przyciągania nie może być większa od sumy tychże sił, wynika, że całkowite przyciąganie, jakiego punkt  $\mu$  doznaje od sąsiednich punktów ciała, jest mniejsze, niż  $4\pi k\mu\sigma E$ . Jeżeli przeto  $E$  zdąża nieograniczenie do zera, wtedy przyciąganie, jakiego punkt  $\mu$  doznaje od punktów ciała, znajdujących się wewnątrz rozważanej powierzchni nieskończenie małej, zdąża do granicy zero. Gdyby punkt  $\mu$  znajdował się na powierzchni ciała, wtedy nieskończenie bliskie punkty ciała przyciągałyby go z siłą, mniejszą niż  $2\pi k\mu\sigma E$ ; ta siła zdąża do granicy zero dla nieograniczenia malejącego  $E$ . Widzimy zatem, że przy obliczaniu przyciągania punktu, znajdującego się wewnątrz ciała lub na powierzchni jego, możemy wyłączyć punkty nieskończenie bliskie i rozważać tylko te punkty ciała, które znajdują się w skończonej odległości od punktu przyciąganego. Gęstość ciała przyciągającego winna być jednak funkcją ciągłą współrzędnych.

**122. OBLICZANIE SKŁADOWYCH PRZYSIĄGANIA.** Niech  $x, y, z$  oznaczają współrzędne prostokątne dowolnego punktu ciała przyciągającego, w którym zachodzi gęstość  $\sigma$ , to  $dm = \sigma dx dy dz$  jest masą elementu ciała, którego krawędziem jest ten punkt. Punkt  $\mu$  o współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$  doznaje od tego elementu przyciągania

$$\frac{k\mu\sigma \cdot dx dy dz}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = \frac{k\mu\sigma \cdot dx dy dz}{r^2};$$

a ponieważ zaś ilorazy  $(x - \xi) : r$ ,  $(y - \eta) : r$ ,  $(z - \zeta) : r$  wyrażają odpowiednio dostawy kierunkowe tej siły, przeto mnożąc siłę przez te wielkości, otrzymamy odpowiednie przyciągania elementarne  $dX, dY, dZ$  w kierunkach osi współrzędnych. Dodając siły, w tym samym kierunku działające, będziemy mieli

$$(1) \quad \begin{cases} X = k\mu \iiint \frac{\sigma(x - \xi) dx dy dz}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ Y = k\mu \iiint \frac{\sigma(y - \eta) dx dy dz}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ Z = k\mu \iiint \frac{\sigma(z - \zeta) dx dy dz}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

jako ogólne wyrażenia przyciągania, którego punkt  $\mu$  doznaje od ciała w kierunku, równoległym do każdej z osi współrzędnych. Pierwiastki w mianownikach mają być brane jako dodatnie, a składowe  $dX, dY, dZ$  każdego przyciągania elementarnego mają znaki odpowiednich różnic  $x - \xi, y - \eta, z - \zeta$ . Całki potrójne rozciągają się na całą masę ciała przyciągającego, a wartości  $\xi, \eta, \zeta$  są stałe.

Możemy  $X, Y, Z$  wyrazić we współrzędnych biegunowych. Niech punkt przyciągany będzie początkiem osi;  $r, \phi, \vartheta$  niech będą współrzędnymi biegunowymi dowolnego punktu ciała, których znaczenie określiliśmy w art. 98-ym. Wtedy

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \cos \vartheta, \quad z = r \sin \phi \sin \vartheta, \quad dm = \sigma r^2 \sin \phi dr d\vartheta d\phi;$$

przyciąganie elementarne  $= \frac{k\mu dm}{r^2} = k\mu \sigma \sin \phi dr d\vartheta d\phi$ ; a więc

$$(2) \quad \begin{cases} X = k\mu \iiint \sigma \cdot \cos \phi \sin \phi \cdot dr d\vartheta d\phi, \\ Y = k\mu \iiint \sigma \cdot \sin^2 \phi \cos \vartheta \cdot dr d\vartheta d\phi, \\ Z = k\mu \iiint \sigma \cdot \sin^2 \phi \sin \vartheta \cdot dr d\vartheta d\phi, \end{cases}$$

gdzie gęstość  $\sigma$  jest funkcją współrzędnych  $r, \phi, \vartheta$ . Wzory (1) i (2) podał Lagrange.

Składowe przyciągania punktu przez ciało jednorodne dają się wyrazić przez całki podwójne, zależne tylko od powierzchni tego ciała. Załóżmy w (1), że  $\sigma$  ma wartość stałą, wtedy

$$X = k\mu \sigma \iiint \frac{(x - \xi) dx dy dz}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} = k\mu \sigma \cdot I_x.$$

Możemy wyrażenie  $I_x$  całkować względem  $x$ . W tym celu rzućmy powierzchnię ciała przyciągającego prostokątnie na płaszczyznę  $yOz$ , obierzmy wewnątrz rzutu punkt dowolny  $(y, z)$ , i poprowadźmy przez ten punkt prostą, równoległą do osi  $x$ -ów. Ta prosta przetnie zamkniętą powierzchnię ciała w parzystej ilości punktów, które, poczynając od płaszczyzny  $yOz$ , oznaczmy przez  $1, 2, 3, 4, \dots, 2n-1, 2n$ , a odległości tychże punktów od  $\mu$  niech będą odpowiednio  $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_{2n-1}, r_{2n}$ . Ponieważ

$$\int \frac{(x - \xi) dx}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} = -[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{r};$$

przeto biorąc tę całkę przy stałych  $y$  i  $z$ , między krańcami odpowiednimi powyższej prostej, weźmiemy wyrażenie po prawej stronie między takimi krańcami: od punktu 1 do 2, od 2 do 3, ..., od  $2n-1$  do  $2n$ , z czego wynika, że suma

$$-\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right) - \dots - \left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n-1}}\right)$$

przedstawia wartość téj całki. Oznaczając tę sumę dla krótkości przez  $\Sigma\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$ , otrzymamy

$$(3) \quad I_x = -\Sigma \iint \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) dy dz.$$

Słupki elementarne o podstawie  $dydz$  wycina na powierzchni ciała w punktach 1, 2, ... nieskończenie małe pola  $d\omega_1, d\omega_2, \dots$ , których wspólnym rzutem na płaszczyznę  $yOz$  jest prostokąt  $dydz$ . Wystawmy w każdym punkcie  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) normalną zewnętrzną  $N_i$  do powierzchni ciała (w stronę, gdzie nie ma punktów przyciągających); wtedy w punktach, oznaczonych wskaźnikiem nieparzystym, w których zatem prosta, równoległa do osi  $x$ , wchodzi do wnętrza ciała, tworzy normalna z tą prostą kąt rozwarty; w punktach zaś o wskaźniku parzystym, w których ta prosta występuje z ciała, tworzy normalna zewnętrzną kąt ostry z tą prostą. Otrzymamy zatem

$$dydz = -d\omega_1 \cdot \cos(N_1, x) = d\omega_2 \cos(N_2, x) \text{ i t. d., a więc}$$

$$\left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) dy \cdot dz = \frac{d\omega_2 \cos(N_2, x)}{r_2} + \frac{d\omega_1 \cos(N_1, x)}{r_1};$$

a stąd

$$(4) \quad I_x = -\Sigma \iint \frac{d\omega \cdot \cos(N, x)}{r}.$$

Ponieważ znak  $\Sigma$  rozumiemy się sam przez się, gdyż w całce podwójnej wziąć mamy odpowiednie wartości dla wszystkich punktów, w których prosta, równoległa do osi  $x$ -ów, przecina powierzchnię ciała, przeto możemy go opuścić. Obliczając podobnie  $I_y$  i  $I_z$  przez całkowanie względem  $y$  i  $z$ , otrzymamy z (1)

$$(5) \quad \begin{cases} X = -k\mu\sigma \iint \frac{d\omega \cdot \cos(N, x)}{r}, \\ Y = -k\mu\sigma \iint \frac{d\omega \cdot \cos(N, y)}{r}, \\ Z = -k\mu\sigma \iint \frac{d\omega \cdot \cos(N, z)}{r}. \end{cases}$$

Te wzory, podane przez K. F. Gauss'a, stosują się tylko do ciał jednorodnych, a normalna  $N$  ma być wzięta w kierunku zewnętrznym. Całki podwójne zależą tylko od powierzchni ciała.

Używając współrzędnych biegunowych dla ciała jednorodnego, skuteczniejmy w pierwszym równaniu (2) całkowanie względem  $r$ ; mieć będziemy

$$X = k\mu\sigma \iint (r_2 - r_1) \cos\psi \sin\psi d\vartheta d\psi = k\mu\sigma \iint (r_2 - r_1) \sin\psi \cdot \cos(r, x) d\vartheta d\psi,$$

gdzie  $r_1, r_2$  oznaczają odpowiednio odległości od  $\mu$  dwu punktów 1, 2,

w których prosta, poprowadzona pod kątami  $\phi, \vartheta$ , przecina powierzchnią ciała. Opuściliśmy znak sumowania  $\Sigma$  dla uproszczenia wzoru. Weźmy kulę ze środkiem  $\mu$  o promieniu  $r$ ; wtedy, biorąc stałe  $\phi, \vartheta, d\phi, d\vartheta$ , otrzymamy na niej nieskończenie małą powierzchnią  $d\omega' = r^2 \sin \phi \cdot d\phi \cdot d\vartheta$ . Niech  $d\omega$  będzie elementem powierzchni ciała, którego rzutem na kulę jest  $d\omega'$ , wtedy  $d\omega' = \mp d\omega \cdot \cos(N, r)$ , gdzie  $(N, r)$  oznacza kąt, który normalna zewnętrzna do powierzchni ciała tworzy z promieniem  $r$ . Znak  $-$  ma być wzięty w przypadku, gdy powierzchnia zwrócona jest stroną wypukłą ku  $\mu$ , a znak  $+$  wtedy, gdy ta powierzchnia jest zwrócona ku  $\mu$  stroną wklęsłą. Będzie więc

$$r^2 \sin \phi d\phi d\vartheta = \mp d\omega \cdot \cos(N, r),$$

a stąd

$$(r_2 - r_1) \sin \phi d\phi d\vartheta = \frac{d\omega_2 \cdot \cos(N_2, r_2)}{r_2} + \frac{d\omega_1 \cdot \cos(N_1, r_1)}{r_1}.$$

Podstawiając tę wartość w  $X$  i postępując podobnie z  $Y$  i  $Z$ , mieć będziemy

$$(6) \quad \begin{cases} X = k\mu\sigma \iint \frac{d\omega \cdot \cos(N, r) \cdot \cos(r, x)}{r}, \\ Y = k\mu\sigma \iint \frac{d\omega \cdot \cos(N, r) \cdot \cos(r, y)}{r}, \\ Z = k\mu\sigma \iint \frac{d\omega \cdot \cos(N, r) \cdot \cos(r, z)}{r}. \end{cases}$$

**123. PRZCIĄGANIE KULI.** Obierzmy środek jednorodnej kuli przyciągającej, o gęstości  $\sigma$  i o promieniu  $R$ , za początek osi, a oś  $x$  poprowadźmy przez punkt  $\mu$  (fig. 52). Dzieląc kulę płaszczyznami, prostopadłymi do  $Ox$ , na warstwy elementarne, widzimy, że przyciąganie każdej takiej warstwy ma kierunek osi  $x$  ku środkowi  $O$  kuli, z czego wynika, że kierunek prosty  $\mu O$  jest kierunkiem przyciągania punktu  $\mu$ . Mamy więc  $Y = 0, Z = 0$ , a  $X$  jest całkowitym przyciąganiem. Aby zastosować wzór Gauss'a, obierzmy dowolny punkt  $m$  na powierzchni kuli, przyjmijmy kąt  $\mu Om = \theta$ ; wtedy  $(N, x) = \theta$ . Poprowadźmy płaszczyznę przez  $m$  i  $Ox$ , która z płaszczyzną  $xOy$  tworzy kąt  $\varphi$ ;  $\theta$  i  $\varphi$  są współrzędnymi punktu  $m$ . Element powierzchni kuli będzie  $d\omega = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , a oznaczając  $O\mu = \delta$ , mamy  $r = \mu m = \sqrt{R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta}$ ; więc

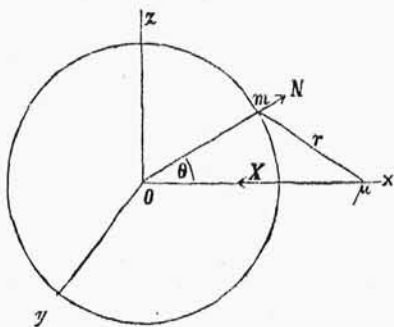


Fig. 52.

$$X = -k\mu\sigma R^2 \int \int \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta}}.$$

Całkując naprzód względem  $\varphi$  od 0 do  $2\pi$ , mamy

$$(1) \quad X = -2\pi k R^2 \mu \sigma \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta}}.$$

Z całkowania częściowego wypada

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta}} &= \frac{\cos \theta}{R\delta} (R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{3R^2\delta^2} (R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Przy obliczaniu wartości téj całki należy rozróżnić trzy przypadki:

a) Punkt  $\mu$  znajduje się zewnątrz kuli,  $\delta > R$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta}} &= -\frac{(R^2 + \delta^2 + 2R\delta)^{\frac{1}{2}} + (R^2 + \delta^2 - 2R\delta)^{\frac{1}{2}}}{R\delta} + \\ &+ \frac{(R^2 + \delta^2 + 2R\delta)^{\frac{3}{2}} - (R^2 + \delta^2 - 2R\delta)^{\frac{3}{2}}}{3R^2\delta^2} = -\frac{(R + \delta) + (\delta - R)}{R\delta} + \\ &+ \frac{(R + \delta)^3 - (\delta - R)^3}{3R^2\delta^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{\delta^2}, \text{ więc} \end{aligned}$$

$$2) \quad X = -\frac{4}{3} \pi R^3 \sigma \cdot \frac{k\mu}{\delta^2} = -\frac{kM\mu}{\delta^2},$$

gdzie  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma$  jest masą kuli jednorodnej.

b) Punkt  $\mu$  znajduje się wewnątrz kuli,  $\delta < R$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \theta}} &= -\frac{(R + \delta) + (R - \delta)}{R\delta} + \\ &+ \frac{(R + \delta)^3 - (R - \delta)^3}{3R^2\delta^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta}{R^2}, \end{aligned}$$

$$(3) \quad X = -\frac{4}{3} \pi k\mu\sigma \cdot \delta.$$

c) Punkt  $\mu$  znajduje się na powierzchni kuli,  $\delta = R$ , wtedy z obudwu wzorów (2) i (3) wypada

$$(4) \quad X = -\frac{4}{3} \pi k\mu\sigma \cdot R.$$

Wzory (2), (3) i (4) wyrażają następujące ważne twierdzenia Newton'a:

1) kula jednorodna przyciąga punkt, znajdujący się zewnątrz niej tak, jakgdyby



j jej masa była skupiona w środku; 2) kula jednorodna przyciąga punkt wewnątrzny proporcjonalnie względem odległości tego punktu od środka kuli; 3) przyciąganie, jakiego punkt wewnątrz kuli jednorodnej doznaje, równa się przyciąganiu kuli spółśrodkowej, której powierzchnia przechodzi przez punkt przyciągany [to twierdzenie wynika z porównania wzorów (3) i (4)]. 4) środek kuli jednorodnej nie jest przez tę kulę całkiem przyciągany. Kładąc bowiem w (3)  $\delta = 0$ , otrzymamy  $X = 0$ .

Z 3-go twierdzenia wnosimy, że jeżeli punkt przyciągany znajduje się wewnątrz kuli i jeżeli poprowadzimy przeczeń powierzchnią kuli o promieniu  $\delta$ , spółśrodkową z daną, która całą kulę dzieli na kulę pełną o promieniu  $\delta$  i na warstwę kulistą o grubości  $R - \delta$ , to ta warstwa nie wywiera na punkt żadnego przyciągania.

To ważne twierdzenie można bezpośrednio okazać. Rozważajmy w tym celu nieskończenie cienką warstwę kulistą jednorodną, której promień wewnętrzny jest  $\rho$  (fig. 53), a promień zewnętrzny  $\rho + d\rho$ ; niech punkt  $\mu$  znajduje się w wy-

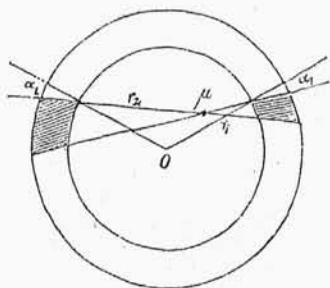


Fig. 53.

drażeniu warstwy, a zatem wewnątrz powierzchni kuli o promieniu  $\rho$ . Poprowadźmy przez  $\mu$  nieskończenie wąski stożek podwójny, który na kuli, zakreślonej promieniem  $l$ , wycina powierzchnią  $d\omega$ , i niech  $d\omega_1$  i  $d\omega_2$  oznaczają odpowiednio powierzchnie, jakie ten stożek wycina po obu stronach swego wierzchołka na kuli  $\rho$ . Niech tworzące  $r_1$  i  $r_2$  tego stożka tworzą z promieniami kuli odpowiednio kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ ; wtedy  $d\omega_1 \cdot \cos \alpha_1 = r_1^2 \cdot d\omega$ ,  $d\omega_2 \cdot \cos \alpha_2 = r_2^2 \cdot d\omega$ .

Jeżeli przeto  $dr$  jest spólną grubością elementów warstwy, tymi stożkami objętych, a  $\sigma$  gęstością warstwy, to masy tych elementów będą odpowiednio  $\sigma \cdot \frac{r_1^2 \cdot d\omega \cdot dr}{\cos \alpha_1}$ ,  $\sigma \cdot \frac{r_2^2 \cdot d\omega \cdot dr}{\cos \alpha_2}$ . Dzieląc te masy przez kwadraty ich odległości od  $\mu$  i zważając, że w granicy  $\alpha_1 = \alpha_2$ , widzimy, że obie przeciwległe masy elementarne tej warstwy wywierają na punkt  $\mu$  przyciągania równe i o kierunkach przeciwnych, które się znoszą. Czyniąc to samo z każdym stożkiem elementarnym, otrzymujemy po dwie siły równe i o kierunkach przeciwnych, z czego wynika twierdzenie: *nieskończenie cienka warstwa kulista jednorodna nie przyciąga punktu, znajdującego się wewnątrz jej mniejszej powierzchni*. To twierdzenie utrzymuje się także wtedy, kiedy punkt  $\mu$  znajduje się na powierzchni owej mniejszej warstwy, jak się o tym przekonać można sposobem, używanym w art. 121-ym. — Przyciąganie jednorodnej warstwy kulistej o grubości skończonej jest sumą przyciągań wszystkich warstw elementarnych, na które ta warstwa daje się podzielić, a przeto *warstwa kulista jednorodna o grubości skończonej nie przyciąga punktu, znajdującego się wewnątrz jej powierzchni mniejszej, lub na tej powierzchni*. Ponieważ gęstość



warstwy kulistej może się zmieniać od jednej warstwy elementarnej do drugiej, byleby tylko każda warstwa była jednorodna, przeto *warstwa kulista niejednorodna o grubości skończonej, składająca się z jednorodnych warstw spółśrodkowych, nie przyciąga punktu, znajdującego się wewnątrz jej powierzchni mniejszej lub na tej powierzchni.*

Otrzymamy przyciąganie nieskończenie cienkiej warstwy o promieniu wewnętrznym  $R$  a o grubości  $dR$  na punkt wewnętrzny  $\mu$ , różniczkując (2) względem  $R$ , skąd

$$dX = -4\pi R^2 \sigma \frac{k\mu}{\delta^2} dR,$$

a ponieważ  $dM = 4\pi R^2 \sigma \cdot dR$  jest masą warstwy, przeto

$$(5) \quad dX = -\frac{k\mu \cdot dM}{\delta^2},$$

t. j. *nieskończenie cienka warstwa kulista przyciąga punkt zewnętrzny tak, jakdyby jej masa była skupiona w środku.* Z tego zaś wynika nowe twierdzenie, że *kula niejednorodna lub warstwa kulista niejednorodna o skończonej grubości, składająca się z jednorodnych warstw spółśrodkowych, przyciąga punkt zewnętrzny tak, jakdyby jej masa była skupiona w środku.*

Sila, sprawiająca spadek punktu masyjnego na ziemię, jest wypadkową przyciągań tego punktu przez wszystkie elementy ziemi. Przyjmując ziemię za kulę, składającą się z warstw jednorodnych, widzimy, że przyciąganie każdego punktu ma kierunek ku środkowi ziemi, a wielkość tego przyciągania oblicza się według danych twierdzeń, stosownie do tego, czy punkt znajduje się zewnątrz czy też wewnątrz ziemi.

**124. POTENCYJAŁ PRZCIĄGANIA (FUNKCYJA POTENCYJALNA).** Przyciąganie, na punkt masyjny wywierane przez ciało, którego elementy przyciągają ten punkt według prawa Newton'a, posiada zawsze potencyjał, to znaczy, że składowe owego przyciągania w kierunkach osi spółrzędnych dają się przedstawić jako pochodne cząstkowe pewnej funkcji spółrzędnych punktu, przyciąganego względem tychże spółrzędnych.

Aby to okazać, oznaczymy ogólnie przez  $r$  odległość punktu przyciąganego ( $\xi, \eta, \zeta$ ) od punktu ( $x, y, z$ ) ciała przyciągającego, a przez  $dm$  element masy tego ciała; wtedy równania (1) art. 122-go możemy tak napisać

$$(1) \quad X = k\mu \int \frac{x - \xi}{r^3} dm, \quad Y = k\mu \int \frac{y - \eta}{r^3} dm, \quad Z = k\mu \int \frac{z - \zeta}{r^3} dm.$$

Niech punkt przyciągany znajduje się w odległości skończonej od każdego punktu ciała przyciągającego; natenczas funkcya

$$(2) \quad U = k\mu \int \frac{dm}{r} = k\mu \int \int \int \frac{\sigma \cdot dx dy dz}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

jest potencjałem przyciągania tego punktu. Całkowanie rozciąga się na całą masę ciała przyciągającego, a gęstość jest funkcją ciągłą współrzędnych. Ponieważ funkcja  $U$  nie zawiera żadnego wyrazu nieskończenie wielkiego, albowiem punkt  $\mu$  jest w odległości skończonej od każdego punktu ciała, przeto możemy do  $U$  stosować twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowania. Otrzymamy tą drogą

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = k\mu \int \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) dm = k\mu \int -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi} dm.$$

A ponieważ  $\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{x-\xi}{r}$ , przeto

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = k\mu \int \frac{x-\xi}{r^3} dm; \text{ podobnie } \frac{\partial U}{\partial \eta} = \dots, \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \dots$$

Z porównania tych wzorów z wzorami (1) wynika

$$(3) \quad X = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

Z tych równań wypada, że  $U$  jest potencjałem przyciągania.

Poprowadźmy przez  $\mu$  dowolną prostą, której dostawy kierunkowe są  $a, b, c$ , i obierzmy na niej punkt w odległości nieskończenie małej  $dn$  od  $\mu$ , którego współrzędne są  $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$ . Ponieważ  $a = d\xi : dn$ ,  $b = d\eta : dn$ ,  $c = d\zeta : dn$ , przeto rzut prostokątny przyciągania na tę prostą będzie

$$(4) \quad aX + bY + cZ = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dn} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dn} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dn} = \frac{dU}{dn}.$$

Granica zatem ilorazu  $\frac{dU}{dn}$  wyznacza przyciąganie w kierunku elementu  $dn$  (art. 83).

Z powyższego dowodzenia wynika, że wyznaczenie przyciągania punktu, znajdującego się w odległości skończonej od każdego punktu ciała przyciągającego, sprowadza się do obliczenia funkcji

$$(5) \quad V = \int \frac{dm}{r},$$

która przedstawia sumę mas elementów ciała przyciągającego, dzielonych odpowiednio przez ich odległości od punktu przyciąganego. Funkcją  $V$ , przez powyższe równanie określoną, nazywamy potencjałem, albo także funkcją potencjalną ciała przyciągającego względem punktu przyciąganego. Potencjał przyciągania jest  $U = k\mu V$ . Z tego wyrażenia okazuje się, że z wiadomego potencjału ciała otrzymamy potencjał przyciąga-

nia, mnożąc potencjał ciała przez czynnik stały  $k\mu$ . Wystarczy zatem ograniczyć dalsze roztrząsania do samego tylko potencjału  $V$ .

**125.** Niech punkt  $\mu$  znajduje się wewnątrz masy ciała przyciągającego. Obliczając potencjał  $V$  względem tego punktu, otrzymujemy wyrazy nieskończenie wielkie, zależne od tych punktów ciała, których odległość od  $\mu$  zdąża do zera. Podobnie jak w art. 121-ym, ograniczmy te punkty powierzchnią zamkniętą, którą może być kula, opisana z punktu  $\mu$  promieniem nieskończenie małym  $\varepsilon$ . Niech  $V_1$  będzie potencjałem tej kuli, a  $V_2$  potencjałem reszty ciała względem  $\mu$ , to  $V = V_1 + V_2$ , przyczem  $V_2$  posiada wartość dokładnie określona. Masa elementu stożka (art. 121), wystawionego w  $\mu$ , wynosi  $\sigma \rho^2 d\omega \cdot d\rho$ ; dzieląc ją przez  $\rho$ , otrzymamy potencjał

$\sigma \rho d\omega \cdot d\rho$  elementu; potencjał więc całego stożka będzie  $\sigma \int_0^\varepsilon d\omega \cdot \rho d\rho = \frac{\sigma}{2} \varepsilon^2 \cdot d\omega$ ; całkując zatem względem wszystkich elementów  $d\omega$ , zawartych w kuli o promieniu  $\varepsilon$ , otrzymamy

$$V_1 = 2\pi\sigma\varepsilon^2.$$

Jeżeli teraz  $\varepsilon$  maleje bez granic, to  $V_1 = 0$ , a zatem  $V = V_2$ . Widzimy więc, że ta część potencjału, która zależy od punktów nieskończenie bliskich ciała, jest równa zeru, a potencjał przybiera wartość skończoną, zależną tylko od tych punktów ciała, które znajdują się w skończonych odległościach od punktu  $\mu$ .

Przesuńmy punkt  $\mu$  w dowolnym kierunku o długość  $dn$ , nieskończenie małą względem  $\varepsilon$ , i niech  $V + dV$  będzie potencjałem ciała względem nowego położenia  $\mu_1$  tego punktu; wówczas

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn}.$$

Jeżeli wystawimy kulę ze środkiem  $\mu_1$  o promieniu  $\varepsilon - dn$ , to z pierwotnej kuli o promieniu  $\varepsilon$  pozostanie warstwa, której największa grubość wynosi  $dn$ . Potencjał kuli o promieniu  $\varepsilon - dn$  względem  $\mu_1$  równa się  $2\pi\sigma(\varepsilon - dn)^2$ ; masa pozostałej warstwy wynosi  $\frac{4}{3}\pi\sigma[\varepsilon^3 - (\varepsilon - dn)^3]$ , jest przeto wielkością nieskończenie małą rzędu 4-go; wskutek tego potencjał jej względem  $\mu_1$  jest wielkością rzędu 3-go, jeżeli  $\sigma$  nie przestaje być funkcją ciągłą współrzędnych. Potencjał przeto warstwy możemy przyjąć jako równy  $\lambda\varepsilon dn$ , gdzie  $\lambda$  jest pewnym współczynnikiem skończonym. Potencjał więc kuli o promieniu  $\varepsilon$  względem  $\mu_1$  będzie  $2\pi\sigma(\varepsilon - dn)^2 + \lambda\varepsilon \cdot dn$ , a stąd

$$dV_1 = 2\pi\sigma(\varepsilon - dn)^2 + \lambda\varepsilon \cdot dn - 2\pi\sigma\varepsilon^2 = (\lambda - 4\pi\sigma)\varepsilon dn,$$

jeżeli zatrzymujemy tylko wielkości rzędu 3-go jako największe. Będzie więc  $\frac{dV_1}{dn} = (\lambda - 4\pi\sigma)\varepsilon$ , z czego wynika, że pochodna  $\frac{dV_1}{dn}$  zdąża do granicy zero,

jeżeli  $\varepsilon$  dąży do zera. Mamy zatem  $\frac{dV}{dn} = \frac{dV_2}{dn}$ ; a ponieważ  $\frac{dV_2}{dn}$  zdąża do granicy skończonej, przeto pochodna potencjału  $V$ , wzięta względem dowolnego przesunięcia punktu  $\mu$ , zdąża także do granicy skończonej. Nadajmy przesunięciu punktu  $\mu$  wartość  $\varepsilon$ , wtedy  $\frac{dV}{\varepsilon} = \frac{dV_2}{\varepsilon}$ , a ponieważ  $k\mu \cdot \frac{dV_2}{\varepsilon}$  jest rzutem przyciągania ciała o potencjale  $V_2$  na punkt zewnętrzny, przeto widzimy, że pochodna potencjału wyraża przyciąganie bez względu na to, czy punkt przyciągany znajduje się zewnątrz, czy wewnątrz ciała.

Wyniki powyższego dochodzenia możemy streścić w twierdzeniu następującym: *jeżeli gęstość ciała jest funkcją ciągłą współrzędnych, natenczas potencjał i pierwsze pochodne jego względem współrzędnych punktu przyciąganego są funkcjami ciągłymi tych współrzędnych, bez względu na położenie tego punktu. Pochodne potencjału są proporcjonalne względem przyciągania punktu.*

Jeżeli potencjał przybiera w punkcie  $\mu$  wartość  $C$ , to  $V - C = 0$  jest równaniem powierzchni potencjalnej, t. j. miejsca tych punktów, względem których potencjał ciała posiada stałą wartość  $C$  (art. 83). Dwie powierzchnie potencjalne nie przecinają się, potencjał bowiem posiada w każdym punkcie w przestrzeni tylko jedną, dokładnie oznaczoną wartość. Przyciąganie punktu jest normalne do powierzchni potencjalnej, przez tenże punkt przechodzącej.

**126. TWIERDZENIA LAPLACE'A I POISSON'A.** Załóżmy dla uproszczenia rachunku  $k=1$ ,  $\mu=1$ , to  $U=V$  i otrzymamy w każdym punkcie

$$(1) \quad X = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}.$$

Niech punkt  $\mu$  znajduje się zewnątrz ciała przyciągającego; wtedy odległość  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$  będzie miała zawsze skończone wartości. Aby obliczyć drugie pochodne potencjału, które, według wzorów, wynikających z (1),

$$(2) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},$$

przedstawiają pochodne sił  $X, Y, Z$  względem współrzędnych punktu  $\mu$ , należy w wyrażeniu funkcji  $V$  różniczkować dwukrotnie względem  $\xi, \eta, \zeta$  pod znakiem całkowania. Tym sposobem otrzymamy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \int \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{r} \right) dm, \quad \text{podobnie} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2};$$

a ponieważ  $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x-\xi}{r^3} = \frac{-r^3 + 3r(x-\xi)^2}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}$   
i podobnie