

ROZDZIAŁ IX.

TEORYJA ŚRODKA MASY I MOMENTU BEZWŁADNOŚCI.

97. OKRĘŚLENIE I WŁASNOŚCI ŚRODKA MASY. Iloczyn masy punktu masy materjalnego i jego odległości od danéj płaszczyzny nazywamy momentem masy tegoż punktu względem téjże płaszczyzny. Przyjmując odległość punktu od płaszczyzny jako dodatną lub ujemną, według tego, czy punkt znajduje się po pewnéj czytéż po przeciwnéj stronie płaszczyzny, będziemy moment masy punktu uważali odpowiednio za dodatny lub za ujemny. Moment masy punktu jest równy zeru względem płaszczyzny, która przezeń przechodzi.

Niech będzie dany układ (m_i) punktów o masach m_i , $(i = 1, 2, \dots, n)$, natenczas sumę algebriczną momentów masy wszystkich punktów układu względem danéj płaszczyzny zowiemy momentem masy układu tego względem téjże płaszczyzny. Wyprowadźmy z punktu O trzy wzajemnie prostopadłe osi układu współrzędnych, Ox , Oy , Oz , i oznaczmy przez x_i , y_i , z_i współrzędne punktu m_i , a przez μ_x , μ_y , μ_z momenty masy układu (m_i) względem płaszczyzn odpowiednio Oyz , Ozx , Oxy ; wówczas $\mu_x = \sum m_i x_i$, $\mu_y = \sum m_i y_i$, $\mu_z = \sum m_i z_i$.

Jeżeli $Ax + By + Cz + D = 0$ jest równaniem płaszczyzny dowolnéj, δ_i odległością punktu m_i od téj płaszczyzny, to $\mu = \sum m_i \delta_i$ jest momentem masy układu (m_i) względem téj płaszczyzny. Wprowadźmy $p = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; wtedy

$$\delta_i = \frac{1}{p} (Ax_i + By_i + Cz_i + D),$$

a więc

$$(1) \quad \mu = \frac{1}{p} (A\mu_x + B\mu_y + C\mu_z + DM),$$

gdzie $M = \sum m_i$ oznacza masę układu (m_i) . Stąd widzimy, że, znając momenty masy układu względem płaszczyzn współrzędnych, możemy z nich obliczyć moment masy tego układu względem jakiegokolwiek płaszczyzny.

Jeżeli oznaczmy

$$(2) \quad \xi = \frac{\mu_x}{M}, \quad \eta = \frac{\mu_y}{M}, \quad \zeta = \frac{\mu_z}{M},$$

to punkt S, którego współrzędne względem osi Ox , Oy i Oz mają odpowiednio wartości ξ , η i ζ , nazywamy *środkiem masy układu masyjnego* (m_i). Niech δ będzie odległością środka masy od płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, wówczas, według (1),

$$(3) \quad \mu = \frac{M}{p} (A\xi + B\eta + C\zeta + D) = M \cdot \delta.$$

A zatem: środek masy posiada tę własność, iż moment masy M układu masyjnego, skupionęj w środku masy, względem jakiegokolwiek płaszczyzny, jest równy momentowi masy tegoż układu względem téjże samej płaszczyzny. Równania (2), które możemy także tak napisać: $\mu_x = M \cdot \xi$, $\mu_y = M \cdot \eta$, $\mu_z = M \cdot \zeta$, wyrażają owę własność środka masy względem płaszczyzn współrzędnych. Z tych równań okazuje się, że układ masyjny posiada tylko jeden środek masy, dokładnie oznaczony, albowiem ξ , η i ζ nie mogą przybrać ani wartości nieoznaczonych, ani nieskończone wielkich. Połączmy osi współrzędnych stale z układem; natenczas ξ , η i ζ będą ciągle posiadały te same wartości, jakiegokolwiek układowi damy położenie w przestrzeni, a zatem *położenie środka masy układu masyjnego w tym układzie nie zależy od położenia tego układu w przestrzeni*.

Jeżeli punkty układu (m_i) znajdują się na płaszczyźnie Oxy , to $\mu_z = 0$, a więc $\zeta = 0$, a zatem *środek masy układu płaskiego znajduje się na płaszczyźnie tego układu*. Jeżeli punkty układu znajdują się na prostej Ox , wtedy $\mu_y = 0$, $\mu_z = 0$, więc $\eta = 0$, $\zeta = 0$, a zatem środek masy znajduje się także na téj prostej. Jeżeli każdy punkt układu ma tę samą masę m , wtedy $\mu_x = m \cdot \Sigma x_i$, $\mu_y = m \cdot \Sigma y_i$, $\mu_z = m \cdot \Sigma z_i$, a jeżeli układ składa się z n punktów, wówczas $\xi = \Sigma x_i : n$, $\eta = \Sigma y_i : n$, $\zeta = \Sigma z_i : n$, $\delta = \Sigma \delta_i : n$; odległość środka masy od każdej płaszczyzny jest średnią odległości wszystkich punktów od téjże płaszczyzny.

Z równania (3) wynika, że dla $\delta = 0$ jest $\mu = 0$ i nawzajem, jeżeli $\mu = 0$, to $\delta = 0$. *Moment masy układu jest równy zeru względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy, i nawzajem: jeżeli moment masy układu względem płaszczyzny jest równy zeru, wówczas środek masy znajduje się na téj płaszczyźnie*. Z tych twierdzeń wynika, że położenie układu względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy, jest takie, że pewne punkty układu znajdują się po jednej, a inne po drugiej stronie téj płaszczyzny, nigdy zaś takie, żeby wszystkie punkty znajdowały się po jednej stronie owęj płaszczyzny. Podobnie ma się rzecz z płaskim układem mas; jeżeli taki układ obwiedziemy wielokątem wypukłym, którego wierzchołkami są punkty krańcowe układu, wówczas środek masy układu znajduje się wewnątrz tego wielokąta.

98. SPOSOBY WYZNACZENIA ŚRODKA MASY. Przy wyznaczaniu środka masy ciała masyjnego, stanowiącego układ ciągły punktów, należy rozwa-

żyć, że masy elementów ciała są wielkościami nieskończenie małymi tegoż samego rzędu, co objętości tychże elementów, wskutek czego przy obliczaniu momentu masy ciała należy sumowanie zastąpić przez całkowanie. Dzielic moment masy ciała względem pewnej płaszczyzny przez masę ciała, otrzymamy odległość środka masy od tej płaszczyzny. Obierzmy wewnątrz ciała punkt (x, y, z) , w którym zachodzi gęstość σ , i wydzielmy z ciała równoległościan $dx dy dz$, którego wierzchołkiem, najbliższym początku układu współrzędnych, jest punkt (x, y, z) ; wówczas $dm = \sigma \cdot dx dy dz$ będzie masą tego równoległościanu. Współrzędne środka masy ciała wyrażą się wtedy zapomocą wzorów

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{m} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \sigma x dx dy dz; \\ \eta = \frac{1}{m} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \sigma y dx dy dz; \\ \zeta = \frac{1}{m} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \sigma z dx dy dz, \end{cases}$$

w których

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \sigma dx dy dz$$

oznacza masę ciała, a całki potrójne rozciągają się na powierzchnię ograniczającą. Dla ciała jednorodnego gęstość σ jest stała; jeżeli zatem dV jest objętością elementu o masie dm , zaś V objętością ciała, natenczas

$$(2) \quad \xi = \frac{1}{V} \int x \cdot dV, \quad \eta = \frac{1}{V} \int y \cdot dV, \quad \zeta = \frac{1}{V} \int z \cdot dV,$$

gdzie znak całkowania jednokrotnego został użyty przez skrócenie. Ponieważ ξ , η i ζ nie zależą od σ , przeto widzimy, że *położenie środka masy ciała jednorodnego nie zależy od gęstości tego ciała*. Wzory (2) możemy tak rozumieć, jakoby gęstość ciała była równa jednostce.

Możemy środek masy wyznaczyć zapomocą współrzędnych biegunowych. Obierzmy jako współrzędne: promień wodzący r , kąt ϕ , który ten promień tworzy z osią x , i kąt ϑ , który płaszczyzna, poprowadzona przez r i oś x , tworzy z płaszczyzną Oxy . Wtedy

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \cos \vartheta, \quad z = r \sin \phi \sin \vartheta, \\ dV = r^2 \sin \phi \cdot dr d\vartheta d\phi, \quad dm = \sigma r^2 \sin \phi \cdot dr d\vartheta d\phi,$$

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{m} \int \int \int r^3 \sin \phi \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\phi, \\ \eta = \frac{1}{m} \int \int \int r^3 \sin^2 \phi \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\phi, \\ \zeta = \frac{1}{m} \int \int \int r^3 \sin^2 \phi \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\phi. \end{cases}$$

Co do krańców całkowania należy rozróżnić dwa przypadki. Popiérwsze: jeżeli początek układu spółrzędnych znajduje się wewnątrz ciała, a całkujemy naprzód względem ϑ , następnie względem ϕ , wtedy krańcami dla ϑ są: 0 i 2π , dla ϕ : 0 i π ; jeżeli całkujemy naprzód względem ϕ , potem względem ϑ , krańcami dla ϕ są: 0 i 2π , dla ϑ : 0 i π . Powtóre: jeżeli początek znajduje się zewnątrz ciała, wtedy krańce dla ϑ i ϕ należy wyznaczyć ze stożka, stycznego do powierzchni ciała i wystawionego w początku.

Z podanego twierdzenia o środku masy ciała jednorodnego wynika, że, wrazie, gdy powierzchnia takiego ciała posiada płaszczyznę symetrii, środek jego masy znajduje się na téj płaszczyźnie, albowiem moment jego masy względem téj płaszczyzny jest widocznie równy zeru. Jeżeli powierzchnia ciała jednorodnego ma oś symetrii, wtedy środek jego masy znajduje się na téj osi. A zatym środek masy jednorodnej bryły obrotowej znajduje się na osi obrotu. Jeżeli ciało jednorodne ma powierzchnią ze środkiem, wówczas ten punkt jest zarazem środkiem masy ciała. To twierdzenie prowadzi bezpośrednio do wyznaczenia środka masy kuli jednorodnej, brył jednorodnych foremnych, walca obrotowego i t. p. —

Aby wyznaczyć środek masy powierzchni, przyjmijmy, że $z=f(x, y)$ jest jéj równaniem. Rzut nieskończenie małej części dF powierzchni na płaszczyznę Oxy jest równy $dx dy$, a jeżeli (N, z) oznacza kąt, który normalna N w punkcie (x, y, z) tworzy z osią z , wówczas $dx dy = dF \cdot \cos(N, z)$, więc $dF = dx dy : \cos(N, z)$. Wprowadźmy $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, wtedy $\cos(N, z) = 1 : \sqrt{1+p^2+q^2}$, więc $dF = \sqrt{1+p^2+q^2} \cdot dx dy$. Spółrzędnymi więc środka masy będą:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{m} \int \int \sigma x \sqrt{1+p^2+q^2} \cdot dx dy, \\ \eta = \frac{1}{m} \int \int \sigma y \sqrt{1+p^2+q^2} \cdot dx dy, \\ \zeta = \frac{1}{m} \int \int \sigma z \sqrt{1+p^2+q^2} \cdot dx dy, \end{cases}$$

gdzie m oznacza masę powierzchni. Krańce całek podwójnych zależą od wiadomego ograniczenia powierzchni. Dla powierzchni jednorodnej otrzymamy

$$(5) \quad \xi = \frac{1}{F} \int x \cdot dF, \quad \eta = \frac{1}{F} \int y \cdot dF, \quad \zeta = \frac{1}{F} \int z \cdot dF.$$

Gdyby równanie powierzchni dane było w postaci $f(x, y, z) = 0$, wtedy trzeba $\cos(N, z)$ wyrazić przez pochodne cząstkowe funkcji f , aby otrzymać ξ, η, ζ . Środek masy ciała jednorodnego nie jest, mówiąc wogółności, zarazem środkiem masy jego powierzchni; dla ciał obrotowych i jednorodnych obadwa środki znajdują się na osi obrotu. Środek geometryczny jednorodnego ciała foremnego jest zarazem środkiem masy jego powierzchni.

Aby wyznaczyć środek masy linii krzywój, oznaczmy przez ds element łuku, przez σ gęstość w punkcie (x, y, z) i nadto $x' = dx : dz$, $y' = dy : dz$, wtedy

$$(6) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{m} \int \sigma x \sqrt{1+x'^2+y'^2} \cdot dz, \\ \eta = \frac{1}{m} \int \sigma y \sqrt{1+x'^2+y'^2} \cdot dz, \\ \zeta = \frac{1}{m} \int \sigma z \sqrt{1+x'^2+y'^2} \cdot dz, \end{cases}$$

a dla krzywój jednorodnej

$$(7) \quad \xi = \frac{1}{s} \int x ds, \quad \eta = \frac{1}{s} \int y ds, \quad \zeta = \frac{1}{s} \int z ds.$$

Aby wyznaczyć środek masy jednorodnego pola płaskiego, obierzmy osi Ox i Oy na płaszczyźnie tego pola, a wtedy pierwsze dwa równania (5) wystarczą do obliczenia spórzędnych ξ i η . Podobnie wystarczają dwa pierwsze równania (7) do wyznaczenia środka masy jednorodnej krzywój płaskiej.

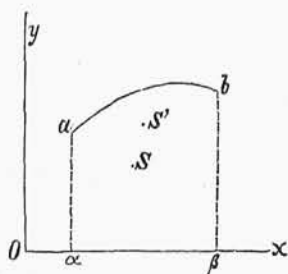


Fig. 40.

W bardzo wielu zagadnieniach można środek masy układu masyjnego wyznaczyć zapomocą następującego twierdzenia, którego udowodnienie pozostawiamy czytelnikowi: *jeżeli układ masyjny w dowolny sposób podzielimy na części i masę każdej części skupimy w jej środku masy, to środek masy układu tych punktów jest zarazem środkiem masy danego układu masyjnego.*

Niech krzywa płaska ab (fig. 40) obraca się około osi Ox ; wtedy linija ab utworzy powierz-

chnią obrotową, figura zaś $\alpha a b \beta$ bryłą obrotową. Niech nadto P będzie wielkością tak powstałąj powierzchni obrotowej i oznaczmy $x_1 = O\alpha$, $x_2 = O\beta$, wtedy

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \cdot ds.$$

Jeżeli η jest odległością środka masy S łuku ab od osi x , to

$$\eta = \frac{1}{s} \int_{x_1}^{x_2} y \cdot ds, \quad s\eta = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot ds,$$

$$(8) \quad P = 2\pi \eta \cdot s,$$

t. j. *powierzchnia obrotowa, utworzona przez obrót krzywej płaskiej, równa się iloczynowi długości téj krzywej i długości drogi, którą opisuje środek masy téj krzywej.*

Niech V będzie objętością bryły obrotowej; wtedy

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \cdot dx.$$

Odległość środka masy elementu $y dx$ figury płaskiej $\alpha a b \beta$ od osi x wynosi $y : 2$; a więc $\frac{y^2}{2} dx$ będzie momentem masy tego elementu względem osi x . Jeżeli więc η' oznacza odległość środka masy S' figury $F = \alpha a b \beta$ od osi x , wówczas

$$\eta' = \frac{1}{2F} \int_{x_1}^{x_2} y^2 \cdot dx, \quad 2F\eta' = \int_{x_1}^{x_2} y^2 \cdot dx,$$

$$(9) \quad V = 2\pi \eta' \cdot F.$$

Objętość bryły obrotowej, utworzonej przez obrót figury płaskiej, jest równa iloczynowi jęj pola i długości drogi, którą środek masy téj figury opisuje. Podane dwa twierdzenia nazywamy twierdzeniami Pappusa.

ĆWICZENIA. — (1). Trójkąt. Niech będzie trójkąt ABC (fig. 41), którego boki BC , CA , AB oznaczmy odpowiednio przez a , b , c , a współrzędne wierzchołków przez (x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2) ; (x_3, y_3, z_3) . Aby wyznaczyć środek masy obwodu trójkąta, zważmy, że środki: S_1 , (ξ_1, η_1, ζ_1) ; S_2 , (ξ_2, η_2, ζ_2) ; S_3 , (ξ_3, η_3, ζ_3) jego boków są zarazem środkami masy tychże boków, gdzie $\xi_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$,

$\xi_2 = \frac{x_3 + x_1}{2}$, $\xi_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ i podobnie η , ζ .

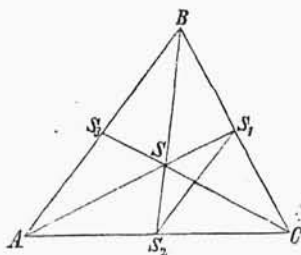


Fig. 41.

Jeżeli S_0 jest środkiem masy obwodu, a (ξ_0, η_0, ζ_0) oznaczają jego spólrzędne, to

$$\xi_0 = \frac{a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3}{a + b + c} = \frac{a(x_2 + x_3) + b(x_3 + x_1) + c(x_1 + x_2)}{2(a + b + c)},$$

podobnie η_0 i ζ_0 . — Aby otrzymać środek masy jednorodnego pola trójkąta, podzielmy to pole na elementy zapomocą prostych, równoległych do BC; wtedy środki masy tych elementów leżą na prostej AS_1 , a więc na tej prostej leży szukany środek. Dzieląc pole równolegle do AC, otrzymamy BS_2 jako drugą prostą, na której ten środek również leży, azatym punkt przecięcia S obu prostych jest środkiem masy pola trójkąta. Ponieważ prosta CS_3 przechodzi także przez punkt S, przeto okazuje się, że proste, łączące środki boków z przeciwległymi wierzchołkami trójkąta, przecinają się w środku masy. Z podobieństwa trójkątów ABS i S_2S_1S wynika, że $SS_2 = \frac{1}{3}BS_2$, że zatym środek masy leży na prostej S_2B w $\frac{1}{3}$ odległości od podstawy. Umieśmy w wierzchołkach A, B, C trzy równe masy m , to S_2 jest środkiem mas, umieszczonych w A i C; skupiając przeto w punkcie S_2 masę $2m$, znajdziemy środek tej masy i masy m w B, jeżeli długość BS_2 podzielimy w stosunku odwrotnym tych mas. Szukanym punktem jest właśnie punkt S, skąd wynika twierdzenie, że *środek masy pola trójkąta jest jednocześnie środkiem trzech równych mas, umieszczonych w jego wierzchołkach*. Z tego twierdzenia wynika, że spólrzędne ξ, η, ζ środka masy S wyrażają się przez wzory

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad \zeta = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

(2). Wielokąt. Aby wyznaczyć środek masy pola jednorodnego czworokąta ABCD, dzielimy go przekątną AC na dwa trójkąty ABC i ADC i wyznaczamy ich środki S_1 i S_2 ; wówczas szukany środek leży na prostej S_1S_2 . Druga przekątna BD dzieli czworokąt na dwa trójkąty DAB i DCB, których środki masy dają drugą prostą $S'_1S'_2$; punkt S leży na przecięciu się prostych S_1S_2 i $S'_1S'_2$. — Dany wielokąt o polu F podzielmy na trójkąty F_i , wyznaczmy środki masy S_i tych trójkątów, na płaszczyźnie tej obierzmy osi Ox i Oy ; wówczas z obliczonych spólrzędnych ξ_i, η_i punktów S_i otrzymamy spólrzędne (ξ, η) środka masy S, używając następujących wzorów:

$$F\xi = \sum F_i\xi_i, \quad F\eta = \sum F_i\eta_i.$$

Jeżeli a i b oznaczają boki równoległe trapezu, a h jego wysokość, to odpowiednie odległości η_a i η_b środka masy pola trapezu od boków a i b wynoszą

$$\eta_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}, \quad \eta_b = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}.$$

Środek masy trapezu jest tym punktem, w którym prosta, łącząca środki boków a i b , przecina prostą, łączącą środki mas dwu trójkątów, na które trapez może być podzielony.

(3). Niech linija łamana ABCDEF (fig. 42) będzie częścią wielokąta foremnego, to jój środek masy leży na osi symetrii Ox . Oznaczmy przez S_1, S_2

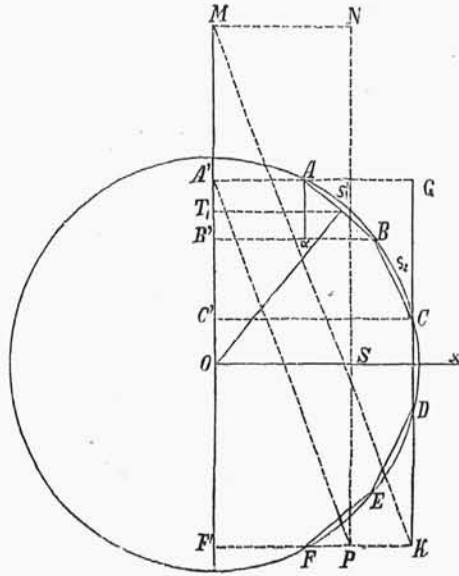


Fig. 42.

odpowiednio środki boków AB, BC, \dots o tój samej długości l ; kładąc $S_1T_1 = \xi_1, S_2T_2 = \xi_2, \dots, OS = \xi$, będziemy mieli

$$\xi \cdot L = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)l,$$

gdzie $L = n \cdot l$ oznacza całą długość linii, składającej się z n części l . Na oś Oy , prostopadłą do Ox , rzucmy punkty A i B w A' i B' , spuśmy z A prostopadłą Aa na BB' i połączmy S_1 ze środkiem O koła opisanego; otrzymamy dwa trójkąty podobne ABa i S_1OT_1 , z których wynika, że $\xi_1 : A'B' = r : l$, gdzie $r = OS_1 = OS_2 = \dots$ jest promieniem koła wpisanego. Mamy zatem

$$\xi_1 l = r \cdot A'B'; \text{ podobnie } \xi_2 l = r \cdot B'C' \text{ i t. d., więc}$$

$$\xi L = (A'B' + B'C' + \dots + E'F')r,$$

a jeżeli przyjmiemy $H = A'B' + B'C' + \dots + E'F' = A'F'$, gdzie H oznacza długość rzutu linii łamanej na oś Oy , to

$$\xi \cdot L = H \cdot r.$$

Ten wzór, niezależny od ilości boków n , pozwala wykreślić punkt S . W tym celu wystawiamy prostokąt $A'GKF'$ o polu Hr , odcinamy długość $FM = L$ i zamieniamy ten prostokąt na prostokąt równoważny, którego wysokość jest L . Bok PN nowego prostokąta $MNPF'$ przecina oś Ox w środku masy S .

Powyższy wzór może być zastosowany do łuku koła. Środek masy łuku jednorodnego ACB (fig. 43) leży na osi symetrii OC. Przez punkt C kręślimy styczną, odcinamy CD równe długości połowy łuku CA, łączymy punkty D i O, prowadzimy AE równolegle do OC aż do przecięcia się z prostą DO; rzut punktu E na OC jest środkiem masy łuku

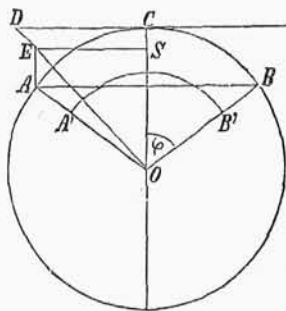


Fig. 43.

AB. Jakoż, $AC = \frac{L}{2}$, $ES = \frac{H}{2}$, a ponieważ z podobieństwa trójkątów OCD i OSE wynika, że $OS : r = \frac{H}{2} : \frac{L}{2}$, przeto $OS = \frac{Hr}{L} = \xi$. Powyższa konstrukcja jest tylko przybliżona, ponieważ łuk koła nie daje się wyprostować. Kładąc kąt $AOB = 2\varphi$, mamy $H = 2r \sin \varphi$, $L = 2r\varphi$, skąd

$$\xi = r \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

Dla półkola jest $\varphi = \frac{\pi}{2}$, więc $\xi = \frac{2r}{\pi}$.

Aby wyznaczyć środek masy wycinka koła ACBO, podzielmy łuk AB na elementy; wówczas wycinek może być podzielony na trójkąty elementarne równoważne, których wierzchołkiem wspólnym jest środek O koła. Środki masy tych trójkątów leżą na łuku A'B', opisanym z O promieniem $\frac{2}{3}r$, a ponieważ masy trójkątów są równe, przeto środek masy S tego wycinka jest zarazem środkiem masy jednorodnego łuku A'B'. Odległość więc ξ' środka masy wycinka od środka koła jest $\xi' = \frac{2r}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{2}{3}\xi$. Dla połowy koła otrzymamy $\xi' = \frac{4r}{3\pi}$.

Uważajmy wycinek OACB jako sumę trójkąta OAB i odcinka ACB, i oznaczmy przez F' , Φ , F'' pola odpowiednio wycinka, trójkąta i odcinka, przez Ξ i S'' środki masy ostatnich dwu figur, a przez Ξ' i ξ'' odległości tych punktów od środka O, to

$$F'\xi' = \Phi\Xi + F'' \cdot \xi'';$$

$\Xi = \frac{2}{3}r \cos \varphi$, $F = r^2 \cdot \varphi$, $\Phi = r^2 \sin \varphi \cos \varphi$, $F'' = F' - \Phi = r^2(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$, więc

$$\xi'' = \frac{2r}{3} \frac{\sin^3 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}.$$

(4). Czworoscian. Aby wyznaczyć środek masy czworoscianu jednorodnego ABCD (fig. 44), dzielimy go na warstwy płaszczyznami, równoległymi do ściany ABC; prosta DS_1 , łącząca środek masy S_1 ściany ABC z wierzchołkiem D, jest miejscem środków masy tych warstw. Gdy połączymy podobnie środek masy S_2 ściany BCD z wierzchołkiem A, to środek masy czworoscianu będzie się także znajdował na prostej AS_2 , a zatem środkiem masy S czworoscianu jest punkt, w którym przecinają się proste DS_1 i AS_2 . Z tego łatwo okazać, że $S_1S = \frac{1}{4}DS_1$, że zatem

środek masy czworościanu leży na prostej DS_1 w jednej czwartej odległości od ściany ABC . Podobnie jak w trójkącie, można okazać, że środek masy czworościanu jest zarazem środkiem czterech równych mas, umieszczonych w jego wierzchołkach. Jeżeli zatem x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) są współrzędnymi wierzchołków, to dla środka masy czworościanu

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad \eta = \dots, \quad \zeta = \dots$$

Środek równych mas, skupionych w wierzchołkach A i C , leży w środku krawędzi AC , i podobnie dla mas w B i D ; prosta, łącząca te środki, przechodzi przez punkt S ; a ponieważ możemy w dowolnym porządku dokonywać składu mas w wierzchołkach, aby otrzymać S , np. możemy brać masy w A i D , a potem w B i C i t. p., przeto otrzymujemy twierdzenie Monge'a: *proste, łączące środki przeciwległych krawędzi czworościanu, przecinają się w środku masy tego czworościanu.*

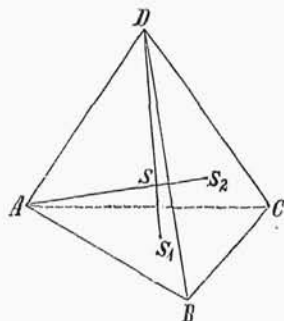


Fig. 44.

Środek masy piramidy znajduje się na prostej, łączącej środek masy podstawy z wierzchołkiem, w $\frac{1}{4}$ odległości wierzchołka od podstawy. Toż samo zachodzi dla stożka. Środek masy powierzchni stożkowej otrzymamy, dzieląc tę powierzchnię na trójkąty elementarne; środki mas trójkątów leżą na krzywej, podług której płaszczyzna przechodząca w $\frac{1}{3}$ wysokości i równoległa do podstawy, przecina stożek; szukany środek masy powierzchni jest środkiem masy tej krzywej, jeżeli bierzemy gęstość w każdym punkcie proporcjonalną względem pola trójkąta elementarnego. Środek masy stożka obrotowego leży na osi w $\frac{1}{4}$ odległości od podstawy, a środek masy powierzchni stożka obrotowego leży na osi w $\frac{1}{3}$ odległości od podstawy.

(5). Środek masy, dowolnie ograniczonej części powierzchni kuli jednorodnej, daje się z łatwością wyznaczyć. Niech $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ będzie równaniem kuli; mamy tu $\frac{\partial z}{\partial x} = p = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q = -\frac{y}{z}$, będzie przeto, według równań (4) art. 98-go,

$$\zeta = \frac{1}{F} \iint z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} \cdot dx \cdot dy = \frac{r}{F} \iint dx \cdot dy.$$

A ponieważ $\iint dx \cdot dy = \Phi$ jest rzutem powierzchni F na płaszczyznę Oxy , przeto $\zeta F = \Phi r$. Odległość więc środka masy dowolnie ograniczonej części powierzchni kuli od płaszczyzny dowolnej jest czwartą proporcjonalną do rzutu tej części

powierzchni na tę płaszczyznę, promienia kuli i powierzchni samój. Niech będzie dana strefa na kuli o promieniu r , ograniczona płaszczyznami, których odległości od środka są H i $H+h$. Kwadraty promieni kół, ograniczających strefę, będą wtedy odpowiednio $\rho_1^2 = r^2 - H^2$, $\rho_2^2 = r^2 - (H+h)^2$; nadto mamy $\Gamma = 2\pi r h$, $\Phi = \pi(\rho_1^2 - \rho_2^2) = \pi[(H+h)^2 - H^2] = \pi[h^2 + 2Hh]$, a zatem

$$\zeta = \frac{\Phi r}{\Gamma} = H + \frac{h}{2},$$

z czego wnosimy, że środek masy strefy leży w połowie jej wysokości na osi symetrii.

(6). Cyklojda. Biorąc podstawę cyklojdy zwykłej za oś x -ów, a punkt zwrotu za początek, mamy równania cyklojdy

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi - \sin \varphi) = 2r(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha), \\ y &= r(1 - \cos \varphi) = 2r \sin^2 \alpha, \text{ gdzie } \alpha = \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

a r jest promieniem koła tworzącego. Z nich otrzymamy $ds = 4r \cdot \sin \alpha d\alpha$, $s = -4r \cos \alpha$; momenty więc dowolnego łuku będą

$$\begin{aligned} \mu_x &= \int x \cdot ds = 8r^2 \int (\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha) d\alpha = 8r^2 \left(-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right), \\ \mu_y &= \int y \cdot ds = 8r^2 \int \sin^3 \alpha \cdot d\alpha = -8r^2 \left(\cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{2}{3} \cos^3 \alpha \right). \end{aligned}$$

Podstawiając w s , μ_x i μ_y obrane krańce, otrzymamy spółrządne ξ , η środka masy łuku cyklojdy. Dla połowy cyklojdy będą krańcami $\alpha = 0$ i $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a zatem $s = 4r$, $\mu_x = \mu_y = \frac{16}{3} r^2$, więc $\xi = \eta = \frac{4}{3} r$. Dla całego łuku cyklojdy będzie $s = 8r$, $\mu_x = 8\pi r^2$, $\mu_y = \frac{32}{3} r^2$,

$$\xi = \pi r, \quad \eta = \frac{4}{3} r.$$

Powierzchnia, utworzona przez obrót cyklojdy około podstawy, wynosić będzie, według twierdzenia Pappusa,

$$P = \frac{64}{3} \pi r^2.$$

Dla wyznaczenia środka masy pola, ograniczonego łukiem cyklojdy, podstawą i dwiema rzędnymi, mamy

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int y \cdot dx = 8r^2 \int \sin^4 \alpha d\alpha = 2r^2 \left[-\cos \alpha \sin^3 \alpha + \frac{3}{2} (\alpha - \cos \alpha \sin \alpha) \right], \\ \mu_x &= \int xy \cdot dx = 16r^3 \left[\frac{3}{16} \alpha^2 - \frac{\alpha}{4} \left(\cos \alpha \sin^3 \alpha + \frac{3}{2} \cos \alpha \sin \alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \alpha}{16} (\sin^2 \alpha + 3) - \frac{\sin^6 \alpha}{6} \right], \\ \mu_y &= \frac{1}{2} \int y^2 dx = \frac{8r^3}{6} \left[-\cos \alpha \sin^5 \alpha + \frac{5}{4} \left\{ -\cos \alpha \sin^3 \alpha + \frac{3}{2} (\alpha - \cos \alpha \sin \alpha) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Dla łuku cyklojdy od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$ wartościami krańcowymi α będą 0 i π , wskutek czego $\Gamma = 3\pi r^2$, $\mu_x = 3\pi^2 r^3$, $\mu_y = \frac{15}{6}\pi r^3$; a zatem $\xi = \pi r$, $\eta = \frac{5}{6}r$. Objętość bryły, utworzonej przez obrót pola cykloidalnego około podstawy, wynosi

$$V = 5\pi^2 r^3.$$

(7). Elipsojda. Wyznaczyć środek masy ósmiej części elipsojdy trójosiowej, ograniczonej płaszczyznami głównymi. Jeżeli $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ jest równaniem powierzchni elipsojdy, to całkując naprzód względem z , mamy

$$\mu_x = \int \int x \cdot dx \cdot dy \int_0^c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dz = c \int \int x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dx \cdot dy.$$

Wielkość pod znakiem całkowania podwójnego przedstawia moment względem płaszczyzny Oyz słupka, mającego za podstawę prostokąt $dx dy$ i ograniczonego powierzchnią elipsojdy. Elipsojda przecina płaszczyznę Oxy według elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

całkując zatem względem x , mamy, jako krańce, 0 i $a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, a więc

$$\mu_x = c \int dy \int_0^{a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dx.$$

Kładąc $x = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot \sin \varphi$, otrzymamy

$$\int_0^{a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dx = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{a^2}{3} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\mu_x = \frac{a^2 c}{3} \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot dy;$$

a kładąc $y = b \cos \varphi$, mieć będziemy

$$\begin{aligned} \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy &= -b \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \varphi \cdot d\varphi = \frac{b}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos \varphi \sin^3 \varphi + \frac{3}{2} (\varphi - \cos \varphi \sin \varphi) \right] d\varphi \\ &= \frac{3\pi b}{16}, \end{aligned}$$

skąd

$$\mu_x = \frac{\pi a^2 b c}{16}; \text{ podobnie } \mu_y = \frac{\pi a b^2 c}{16}, \mu_z = \frac{\pi a b c^2}{16}.$$

Ponieważ objętość ósmiej części elipsoidy jest $V = \frac{\pi abc}{6}$, przeto będzie

$$\xi = \frac{\mu_x}{V} = \frac{3}{8} a, \quad \eta = \frac{3}{8} b, \quad \zeta = \frac{3}{8} c.$$

(8). Środkiem trzech mas, umieszczonych w wierzchołkach trójkąta, a proporcjonalnych względem boków przeciwległych, jest środek koła wpisanego; środkiem trzech mas, umieszczonych w wierzchołkach trójkąta, a proporcjonalnych względem wstaw podwójnych kątów przyległych, jest środek koła opisanego.

(9). Środek masy wielokąta, opisanego na kole, środek masy obwodu wielokąta i środek koła leżą na jednej prostej; a stosunek odległości pierwszych dwu środków od środka koła jest 2 : 3.

(10). Środek masy wielościanu, opisanego na kuli, środek masy powierzchni wielościanu i środek kuli leżą na jednej prostej; a stosunek odległości pierwszych dwu środków od środka kuli jest 3 : 4.

(11). Wyznaczyć miejsce geometryczne środków masy trójkątów, wpisanych w dane koło, mających spólny wierzchołek i bok przeciwległy o stałej długości.

(12). Jeżeli w dany czworoscian wpisujemy drugi czworoscian, którego wierzchołkami są środki masy jego ścian; w ten czworoscian wpisujemy trzeci, którego wierzchołkami są środki masy ścian drugiego czworoscianu i t. d., to wszystkie czworosciany będą posiadały spólny środek masy, który jest granicą tych czworoscianów.

(13). Wyznaczyć środek masy wycinka paraboli, ograniczonego dwoma danymi promieniami wodzącymi z ogniska.

(14). Wyznaczyć środek masy ćwiartki elipsy zapomocą spólrzędnych prostokątnych i spólrzędnych biegunowych.

(15). Wyznaczyć środek masy wycinka i środek masy odcinka kuli, używając spólrzędnych prostokątnych i spólrzędnych biegunowych.

(16). Wyznaczyć środek masy ćwiartki krzywej $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

(17). Wyznaczyć środek masy paraboloidy ściętej, tudzież środek masy hiperboloidy obrotowej.

(18). Wyznaczyć środek masy bryły, ograniczonej powierzchnią stożka $\alpha^2 x^2 - (y^2 + z^2) = 0$, płaszczyznami Oxz , Oxy i płaszczyzną, równoległą do Oyz .

(19). Wyznaczyć środek masy części walca $y^2 = x(2a - x)$, ograniczonej dwiema płaszczyznami, przechodzącymi przez oś y -ów.

(20). Okazać, że środek masy łuku linii łańcuchowej leży na prostej, przechodzącej równoległe do osi y -ów przez punkt, w którym przecinają się styczne w punktach końcowych tego łuku.

(21). Wyznaczyć środek masy bryły, utworzonej przez obrót krzywej $y^2 = x^2 \cdot \frac{a-x}{a+x}$, zwaną strofojdą, około osi x -ów. (Początkiem osi spólrzędnych jest punkt podwójny krzywej.)

(22). Wyznaczyć środek masy strefy paraboloidy obrotowej.

(23). Wyznaczyć środek masy półkuli niejednorodnej, której gęstość jest w każdym punkcie proporcjonalna względem odległości tego punktu od podstawy.

(24). Wyznaczyć środek masy spiralnej logarytmicznej, której gęstość jest w każdym punkcie proporcjonalna względem jęj krzywizny.

(25). Elipsojda składa się z nieskończenie cienkich warstw, ograniczonych powierzchniami elipsójd podobnych i podobnie leżących, a gęstość zmienia się od warstwy do warstwy według danego prawa; wyznaczyć środek masy ósmj części téj bryły.

(26). Elipsa, której mimośróđ wynosi $\frac{4}{3\pi}$, obraca się około różnych sty-
cznych; okazać, że objętość bryły, utworzonj przez jednę część, na którą ós mniej-
sza dzieli pole elipsy, jest odwrotnie proporcjonalna względem objętości bryły, utwo-
rzonj przez pozostałą część pola elipsy.

(27). Figura płaska porusza się tak, że jęj płaszczyzna jest ciągle prostopa-
dła do toru środka masy; okazać, że objętość bryły utworzonj równa się iloczynowi
pola figury i drogi jęj środka masy.

(28). Jeżeli wlewamy płyn do naczynia, to środek masy naczynia razem z pły-
nem zajmie wtedy położenie najniższe, gdy znajduje się na powierzchni płynu.

99. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI. Iloczyn masy punktu materyjalnego i kwadratu jego odległości od danj prostj, nazywamy momentem bez-
władności punktu względem prostj danj. Prosta, względem którj
bierzemy ów moment, nazywa się osią momentu bezwładności tego
punktu. Momentem bezwładności punktu względem płaszczyzny nazy-
wamy iloczyn jego masy i kwadratu odległości tego punktu od płaszczyzny,
a momentem bezwładności punktu względem punktu zowiemy iloczyn
masy punktu pierwszego i kwadratu jego odległości od punktu pozostałego.
Zagadnienia dynamiki wymagają głównie znajomości momentu bezwładności
względem prostj; dlatego tym ostatnim się zajmiemy.

Sumę momentów bezwładności wszystkich punktów układu materyjalne-
go względem danj prostj nazywamy momentem bezwładności układu
tego względem owj prostj. Z tego określenia wynika, że moment bezwła-
dności układu jest sumą, wyłącznie tylko wielkości dodatnych; ten moment
może być równy zeru tylko wtenczas, jeżeli układ jest prostoliniowy, a osią
momentu jest prosta, na którj leżą punkty układu. W każdym innym przy-
padku moment bezwładności ma wartość dodatną.

Niech prosta L będzie osią momentu bezwładności układu materyjalne-
go (m_i); obierzmy na téj osi dowolny punkt O , poprowadźmy przez ten punkt
trzy prostopadłe osi układu spółrzednych, Ox , Oy , Oz i niech x_i , y_i , z_i będą
spółrzednymi punktu o masie m_i , należącego do układu (m_i). Jeżeli a , b , c
oznaczają dostawy kierunkowe osi momentu, to kwadrat odległości δ_i tego
punktu od osi wyraża się zapomocą wzoru

$$\delta_i^2 = a^2(y_i^2 + z_i^2) + b^2(z_i^2 + x_i^2) + c^2(x_i^2 + y_i^2) - 2abx_iy_i - 2bcy_iz_i - 2cax_iz_i.$$

Moment bezwładności tego punktu będzie przeto $m_i\delta_i^2$. Kładąc

$$(1) \quad \begin{cases} A = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2), \\ B = \sum m_i(z_i^2 + x_i^2), \\ C = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2), \end{cases} \quad \begin{cases} D = \sum m_iy_iz_i, \\ E = \sum m_iz_ix_i, \\ F = \sum m_ix_iy_i, \end{cases}$$