



CZĘŚĆ DRUGA.

DYNAMIKA CIAŁ SZTYWNYCH.

ROZDZIAŁ VI.

DYNAMIKA PUNKTU.

66. PRAWA ZASADNICZE DYNAMIKI. POJĘCIE SIŁY. Dotąd rozważaliśmy ruch w ten sposób, iż, mając w danym przypadku warunki kinematyczne konieczne i dostateczne, możemy podać wszystkie cechy ruchu każdego punktu układu sztywnego. W zagadnieniach atoli o ruchu ciała materalnego nie są warunki kinematyczne bezpośrednio dane, lecz wiadome są działania, których ciało poruszające się doznaje od innych ciał, a z nich mamy dopiero wyprowadzić równania, określające ruch każdego punktu, jeżeli znamy ustrój ciała, tudzież wszelkie warunki, ograniczające swobodę ruchu jego punktów. W innych zaś przypadkach znamy ruch ciała materalnego, a zagadnienie polega na tym, aby rozpoznać działania, jakie w danych okolicznościach mogą ten ruch wywołać.

Przedewszystkim należy określić działania, których skutkiem jest ruch ciał materalnych. Wszelkie wiadomości, pozwalające określić owe działania, polegają na doświadczeniu, którego wyniki streszczamy w pewnych prawach zasadniczych, stanowiących podstawę dynamiki.

Od czasów Newton'a przyjmujemy następujące trzy prawa zasadnicze dynamiki, po raz pierwszy przezeń sformułowane:

1) *Każde ciało trwa dopóty w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego i prostoliniowego, dopóki wskutek sił przyłożonych nie zmieni tego stanu (prawo bezwładności materalnej).*

2) *Zmiana ruchu jest proporcjonalna względem siły przyłożonej i ma miejsce w kierunku prostej, która jest kierunkiem działania siły (prawo niezależności sił).*

3) *Wzajemne działania dwu ciał są zawsze równe i mają kierunki wprost przeciwnie (prawo wzajemności działania).* —

Aby zrozumieć znaczenie i wyniki tych praw, wypada przytoczyć niektóre pojęcia pomocnicze, wynikające z ogólnego pojęcia ciała materjalnego.

Jak punkt geometryczny, służący do wskazania miejsca w przestrzeni, stanowi granicę w pojęciu przestrzeni, tak punkt materjalny stanowi granicę w pojęciu wciąż malejącego elementu ciała materjalnego. To pojęcie nie jest w związku z kwestyją podzielności materji; gdybyśmy bowiem z jakichkolwiek powodów przyjęli, że rozmiary liniowe najmniejszych części materji mają pewne granice skończone, to możemy zawsze jeszcze wyobrazić sobie cząstkę o mniejszych jeszcze rozmiarach. Nie należy przeto pojęcia punktu materjalnego mieszać z pojęciami atomu lub molekuly, które mają inne znaczenie i służą do innych celów.

Z pojęcia punktu materjalnego tworzymy pojęcie linii materjalnej i pojęcie powierzchni materjalnej. Możemy także odwrotnie postępować, rozważając naprzód powierzchnię materjalną jako granicę ciała, potem linią materjalną jako granicę powierzchni, a w końcu punkt materjalny jako granicę linii.

Pierwsze prawo dynamiki wyraża, że punkt materjalny, samemu sobie zostawiony, a więc nie pozostający pod wpływem innych punktów materjalnych, nie zmienia prędkości swego ruchu, ani pod względem wielkości, ani też pod względem kierunku. Należy jednak ściśle określić układ odniesienia; ruch bowiem jednostajny i prostoliniowy względem układu A. może być całkiem inny względem układu B. Rozumić tu zatem winniśmy rozważanie ruchu punktu względem układu zasadniczego (art. 1), samemu sobie zostawionego, a więc odbywającego ruch postępowy, prostoliniowy i jednostajny. Uzupełniwszy w ten sposób pierwsze prawo dynamiki, nazywamy je prawem bezwładności materji, upatrując bezwładność w trwaniu każdego punktu materjalnego w stanie spoczynku lub ruchu niezmiennego, jeżeli ten punkt samemu sobie jest pozostawiony. Z samego wytłomaczenia tego prawa okazuje się, że bezwładności nie należy mieszać z oporem, jaki ciała stawiają innym ciałom, dążącym do ich poruszenia.

Przyczynę zmiany w stanie spoczynku lub w stanie ruchu punktu materjalnego nazywamy siłą. Z kinematyki wiadomo, że ruch punktu w przestrzeni i w czasie jest określony przez prędkość, tudzież, że zmiana prędkości jest określona przez przyśpieszenie. Według zatem podanego określenia należy siłę uważać za przyczynę przyśpieszenia ruchu punktu materjalnego.

Według pierwszego prawa dynamiki zmiana prędkości może zachodzić tylko wskutek działania pewnej siły, atoli z tego prawa nie wynika, aby wskutek działania siły miała zawsze wyniknąć zmiana prędkości.

Jeżeli ciało masyjne zmienia swój ruch, natenczas każda cząstka ciała wogółności doznaje odpowiedniej zmiany swego ruchu, a przeto należy w każdej cząstce ciała wogółności przyjąć działanie pewnej siły.

67. MASA I GĘSTOŚĆ. Według drugiego prawa zasadniczego kierunek przyspieszenia jest zarazem kierunkiem siły, a wielkość przyspieszenia jest proporcjonalna względem wielkości siły. Te związki zachodzą, gdy punkt masyjny jest swobodny, t. j. bez wszelkiej przeszkody i bez wszelkiego ograniczenia poddany działaniu siły. Gdy istnieją jakiekolwiek ograniczenia swobody, natenczas siła jest proporcjonalna względem takiego przyspieszenia, jakiebyśmy otrzymali, gdyby owe ograniczenia usunięto.

Z proporcjonalności siły względem przyspieszenia wynika, że dwie siły są równe, jeżeli temuż samemu punktowi swobodnemu udzielają tegoż samego przyspieszenia; tudzież, że stosunek przyspieszeń, których dwie siły udzielają temuż samemu punktowi swobodnemu, jest równy stosunkowi tychże sił. Możemy więc daną siłę wymierzyć zapomocą innej siły, za jednostkę obranej, jeżeli do pomiaru sił używamy tegoż samego punktu masyjnego.

Doświadczenie uczy, że jeżeli dwie równe siły przyłożymy do dwu różnych punktów swobodnych, natenczas przyspieszenia ruchu tych punktów będą wogółności różne. Z tego wynika, że, chcąc ustanowić taki sposób mierzenia sił, przy którego zastosowaniu możnaby użyć jakiegokolwiek punktu masyjnego, należy koniecznie uwzględnić tę własność punktu, wskutek której ów punkt przy działaniu pewnej siły otrzymuje pewne przyspieszenie w kierunku téjże siły.

W tym celu wprowadzamy stosunek, który zachodzi między siłą a przyspieszeniem, udzielonym przez tę siłę swobodnemu punktowi masyjnemu; ów stosunek nazywamy masą punktu tego. Jako jednostkę masy przyjmujemy tę, której jednostka siły udziela jednostkę przyspieszenia. Jeżeli zatem siła, równa n -krotnej jednostce sił, udziela punktowi swobodnemu a tegoż przyspieszenia, co jednostka siły innemu punktowi swobodnemu b , natenczas masa punktu a jest n -krotnością masy punktu b . Dwa punkty geometryczne różnią się od siebie tylko pod względem miejsca, które one w przestrzeni zajmują; zaś między dwoma punktami masyjnymi zachodzi różnica tak pod względem miejsca, jak i pod względem masy, a dwa punkty o równych masach należy uważać za równoważne pod względem dynamicznym, t. j. mogące się wzajemnie zastąpić ze względu na skutki działania sił.

Doświadczeń nie dozwala ani bezpośrednio dostrzegać, ani bezpośrednio mierzyć działania sił na punkty masyjne, lecz tylko na ciała o rozmiarach skończonych, chociażby bardzo małych. Z doświadczenia jednak wiadomo, że na ciało masyjne winny działać siły skończone, żeby punktom jego udzielić przyspieszeń skończonych, a z tego wnosimy, że w każdej nieskończenie małej części ciała należy przyjąć siłę nieskończenie małą tegoż samego rzędu, co nieskończenie mała przestrzeń, przez tę część zajętą. Masa punktu będzie więc wyrażona przez liczbę dodatnią i nieskończenie małą tegoż samego rzędu, co przestrzeń, zajętą przez element ciała, którego granicą jest punkt uważany.

Ponieważ element przestrzeni jest zajęty przez element materii ciała tegoż samego rzędu, co masa i przestrzeń, przeto masa punktu bywa często określana jako granica ilości materii, w elemencie ciała zawartej, a zatem masa ciała o skończonych rozmiarach jako ilość materii tego ciała. Takie określenie możnaby uważać za ścisłe, gdybyśmy mogli przyjąć, że wszystkie ciała są utworzone z tej samej materii; wtedy bowiem porównywanie różnych ilości tej samej materii byłoby bezpośrednio zrozumiałe. Ponieważ takie przypuszczenie nie zgadza się ze znanymi własnościami ciał, przeto podane poprzednio określenie masy należy uważać za jedynie ścisłe.

Sumę mas wszystkich nieskończenie małych elementów ciała materalnego nazywamy masą ciała tego. Masa ciała materalnego jest wielkością skończoną i dodatnią.

Aby poznać rozmieszczenie masy ciała w przestrzeni, szukamy stosunku między masą a objętością każdego z elementów ciała. Granicę, do której zdąża stosunek masy do objętości elementu ciała, jeżeli wymiary liniowe tego elementu dążą nieograniczenie do zera, nazywamy gęstością ciała w tym punkcie, który uważamy za granicę elementu. Aby to określenie miało dokładne znaczenie, należy znać sposób dzielenia objętości ciała na elementy; obrawszy wtedy pewien punkt wewnątrz lub na powierzchni ciała, znamy tym samym element ciała, którego granicą jest ten punkt. Ponieważ masa i objętość elementu są wielkościami dodatnimi i nieskończenie małymi tego samego rzędu, przeto gęstość jest wielkością skończoną i dodatnią.

Wyznaczwszy gęstość w każdym punkcie ciała, którego miejsce określamy przez jego współrzędne, możemy wyrazić gęstość jako funkcją współrzędnych każdego punktu. Jeżeli gęstość we wszystkich punktach ciała jest taż sama, to ciało nazywamy jednorodnym; kiedy zaś gęstość nie posiada stałej wartości, zwiemy je niejednorodnym. Z określenia jednorodności wynika, że gęstość ciała jednorodnego równa się stosunkowi masy tego ciała do jego objętości; do wyznaczenia więc gęstości ciała jednorodnego wystarcza uważanie stosunku dwu wielkości skończonych. Znając ustrój geometryczny ciała i jego gęstość w każdym punkcie, znamy rozmieszczenie masy wewnątrz tego ciała i na jego powierzchni.

Jeżeli x, y, z są współrzędnymi prostokątnymi punktu, w którym gęstość wynosi σ , jeżeli M oznacza masę ciała, V jego objętość, to w tym punkcie

$$\sigma = \frac{dM}{dV}, \quad dM = \sigma \cdot dV,$$

a ponieważ $dV = dx dy dz$, przeto ogólnie:

$$M = \iiint \sigma \cdot dx dy dz,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całą objętość ciała. Używając innego rodzaju współrzędnych, należy element objętości ciała odpowiednio obliczyć i wyrazić gęstość σ w funkcji tych współrzędnych, aby otrzymać masę ciała.

68. MIARA SIŁY I MIARA MASY. W bardzo wielu zagadnieniach dynamiki, jak się to później okaże, otrzymujemy dokładny obraz ruchu ciał, a nawet układów ciał materjalnych, uważając ruch pewnego punktu, w którym skupiamy wszystkie siły, na oddzielne punkty ciał działające. Aby przyspieszenie takiego punktu, na który działają siły skończone, miało wartość skończoną, należy temu punktowi przypisać masę skończoną. Tym sposobem otrzymujemy pojęcie punktu materjalnego o masie skończonej, które, lubo nie odpowiada rzeczywistości, dla dalszego użytku w badaniach dynamicznych przedstawia znakomite korzyści. Ze względu na wielką dogodność tego pojęcia opieramy nawet dynamikę ciał materjalnych na dynamice punktu o masie skończonej.

Jeżeli, według art. 67-go, za jednostkę masy obierzemy masę takiego punktu, któremu jednostka siły nadaje przyspieszenie równe jednostce, to miarą masy będzie stosunek siły do przyspieszenia. Jeżeli zatem siła P nadaje punktowi materjalnemu przyspieszenie γ , natenczas masa punktu będzie

$$(1) \quad m = \frac{P}{\gamma},$$

z czego wyniku odpowiednio wyrażenie siły

$$(2) \quad P = m \cdot \gamma.$$

To wyrażenie siły polega na założeniu, wynikającym ze sposobu mierzenia masy, t. j. na tym, że za jednostkę siły obieramy tę siłę, która punktowi o masie równej jednostce udziela przyspieszenia równego jednostce.

Do wykonania pomiaru masy możemy użyć jakiegokolwiek siły, na tę masę działającej. Najkorzystniej używamy w tym celu tak zwanej siły ciężkości, pod wpływem której wszystkie punkty ciała, spadającego bez obrotu swobodnie na ziemię, doznają tego samego przyspieszenia. Wielkość tej siły wyobraża tak zwany ciężar ciała. Ponieważ przyspieszenie każdego punktu ciała, spadającego na ziemię, jest toż samo, przeto siła ciężkości jest proporcjonalna względem masy spadającej, a wielkość liczby, która ich stosunek przedstawia, zależy tylko od miejsca spadku na powierzchni ziemi. Jeżeli Q jest ciężarem masy m , a g przyspieszeniem spadku w tym samym miejscu na ziemi, gdzie ciężar Q wyznaczono, to

$$(3) \quad g = \frac{Q}{m}, \text{ skąd } Q = mg, \quad m = \frac{Q}{g}.$$

Ten związek jest podstawą postępowania przy mierzeniu masy. Stosunek ciężarów dwu mas w tym samym miejscu na ziemi równa się stosunkowi tychże mas; mierzenie ciężaru zapomocą wagi jest przeto mierzeniem masy. W jakimkolwiek punkcie na ziemi mierzymy tym sposobem masę, zawsze otrzymamy ten sam wynik, mimo, iż przyspieszenie spadku nie jest stałe na powierzchni ziemi. Ciężar i przyspieszenie spadku zmieniają się jednocześnie bez zmiany ich wzajemnego stosunku. Z powodu ścisłego związku między masą a ciężarem nie używamy nawet osobnej nazwy dla jednostki masy, lecz

mianujemy tę jednostkę tym samym wyrazem, jakiego używamy dla jednostki ciężaru.

W układzie jednostek, który, za przykładem fizyków angielskich, coraz więcej się rozpowszechnia, przyjmujemy centymetr za jednostkę długości, sekundę za jednostkę czasu, a gram, t. j. masę jednego centymetra sześciennego wody czystej przy największej gęstości (4° C.), za jednostkę masy. Jednostką siły w tym układzie jest przeto siła, która, działając na jeden gram, udziela mu w jednej sekundzie przyspieszenia jednego centymetra. Tę jednostkę siły nazywamy dyną. Używając dla wyznaczenia siły wzoru $P = m\gamma$, wyrażamy wielkość siły w dynach jako jednostkach bezwzględnych, t. j. takich jednostkach, które nie zależą od miejsca na powierzchni ziemi, w którym działanie siły zachodzi.

Pospolicie używamy jednak innej metody mierzenia sił, porównyując je z siłą ciężkości. Jeżeli siła P udziela masie m przyspieszenia γ , to

$$(4) \quad P = m\gamma = \frac{Q}{g} \gamma = \frac{\gamma}{g} \cdot Q,$$

Czynnik $\frac{\gamma}{g}$ jest liczbą bezwzględną; możemy zatem siłę wyrazić także w tych samych jednostkach, w których wyrażamy ciężary ciał. Siła P gramów, przyłożona do masy P gramów, udziela tej masie przyspieszenia g ; przyłożona zaś do masy P' gramów, nadaje tej masie przyspieszenie $\gamma = \frac{P}{P'} g$.

Mierzenie siły jednostką ciężarów nie jest bezwzględne; wynik bowiem tego mierzenia zależy od miejsca na ziemi, w którym pomiar uczyniono, należy zatem dla dokładnego zrozumienia liczby, dającej wielkość siły, wymienić miejsce pomiaru. Z tego powodu nie nadaje się ta metoda do ogólnych badań naukowych, chociaż jest przydatna i wystarczająca w zagadnieniach natury praktycznej.

Ziemia przyciąga masę jednego grama siłą g dyn, z czego się okazuje, że przyspieszenie spadku, wyrażone w centymetrach, przedstawia w każdym punkcie na ziemi czynnik zamiany względnej miary sił na miarę bezwzględną. Jeżeli przy mierzeniu sił w gramach chcemy zachować znaczenie równania $P = m\gamma$, to dla $P = 1$, $\gamma = 1$, winniśmy brać $m = \frac{Q}{g} = 1$, a zatem winniśmy za jednostkę masy uważać tę masę, której ciężar jest wyrażony przez tyle gramów, ile centymetrów wynosi przyspieszenie spadku. W średnich zatem szerokościach geograficznych należałoby masę około 981 centymetrów sześciennych wody czystej przy 4° C. brać za jednostkę masy; ta jednostka zmieniałaby się stosownie do szerokości geograficznej miejsca. Przedstawia więc niedogodności względna miara sił.

69. SIŁY CIĄGŁE I SIŁY POPRZĘDOWE. Drugie prawo dynamiki daje nie tylko miarę siły, ale wyraża nadto, że kierunek przyspieszenia, którego siła udziela punktowi swobodnemu, jest kierunkiem siły. Bez względu na swą prędkość, punkt otrzymuje przyspieszenie w kierunku działania siły; a gdyby

zachodziło jednoczesne działanie na punkt większej ilości sił, natenczas każda z tych sił wywołałaby przyspieszenie w swoim kierunku, niezależnie od działania sił pozostałych. W tym pojęciu nazywamy drugie prawo dynamiki prawem niezależności działania sił.

Na podstawie dwu pierwszych praw określamy wszystkie cechy siły, które pozwalają wprowadzić ją w rachunek. Punkt materyjalny, na który siła działa, zwiemy punktem przyłożenia siły; prostą, wzdłuż której ma miejsce działanie siły, jej promieniem działania. Punkt przyłożenia, wielkość siły i kierunek promienia działania określają siłę dokładnie. Odcinając wielkość siły według pewnej, zresztą dowolnej, jednostki miary od jej punktu przyłożenia na promieniu działania, możemy siłę przedstawić geometrycznie, podobnie jak prędkość, przyspieszenie i t. p.

Jeżeli siła działa w kierunku prędkości punktu, natenczas ruch punktu pozostanie prostoliniowym, a ponieważ siła o niezmiennej wielkości daje przyspieszenie stałe, przeto ruch punktu będzie jednostajnie przyspieszony. Jeżeli v oznacza prędkość punktu, to mamy

$$P = m\gamma, \text{ a ponieważ } \gamma = \frac{dv}{dt}, \text{ przeto będzie także:}$$

$$(5) \quad P = m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv).$$

Iloczyn masy i prędkości punktu nazywamy ilością ruchu albo momentem ruchu tego punktu. Według Newton'a uważamy ilość ruchu mv za dynamiczną (kinetyczną) miarę ruchu punktu. Ostatnie równanie okazuje, że jeżeli siła działa w kierunku ruchu (lub w kierunku wprost przeciwnym), natenczas miarą siły jest pochodna ilości ruchu względem czasu, czyli—jak się także wyrazić możemy—zmiana ilości ruchu w jednostce czasu. W tym znaczeniu pierwotnie Newton podał drugie prawo dynamiki.

Równanie (5) daje ogólnie dla jakiegokolwiek siły, działającej w kierunku ruchu punktu

$$P \cdot dt = d(m \cdot v).$$

Przyjmując wogólności siłę zmienną, całkujemy to równanie między dwoma wiadomymi końcami t_1 i t_2 , którymto czasem odpowiadają prędkości v_1 i v_2 ; i otrzymamy

$$(6) \quad \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt = m(v_2 - v_1).$$

Żeby całka po lewej stronie tego równania mogła być obliczona, przyjmujemy, że znamy wielkość siły w funkcji czasu.

Załóżmy, że przedział czasu $\tau = t_2 - t_1$ trwania działania siły nieograniczenie maleje, dążąc do zera, a wielkość siły nieograniczenie wzrasta; wówczas powyższa całka dążyć będzie wogólności do pewnej skończonej granicy F , otrzymamy

$$(7) \quad F = m(v_2 - v_1).$$

W nieograniczenie małym przedziale czasu τ prędkość v_1 przybrała wartość v_2 , jeżeli przypuścimy, że prędkość posiadała ciągle wartości skończone. Jeżeli V jest największą wartością skończoną, jaką prędkość przybrała w przedziale τ , to punkt opisał drogę mniejszą, niż $V\tau$; jeżeli więc τ zdąża do zera, to droga punktu także do zera zdążać będzie. Możemy przeto powiedzieć, że prędkość v_1 przybrała nagle wartość v_2 , podczas gdy punkt nie poruszył się wcale.

Takich sił, któreby w nieograniczenie małym czasie wywoływały skończone zmiany prędkości punktu, niema wprawdzie w przyrodzie; zdarzają się jednak przypadki, że działanie siły trwa przez czas bardzo mały, a skutek jest tak znaczny, że do wywołania jego trzebaby przez czas dłuższy działać bardzo wielką siłą. Takie siły nazywamy siłami popędowymi, a niezupełnie właściwie także siłami chwilowymi. Ponieważ wielkość siły popędowej nie daje się wyznaczyć przez pomiar stopniowych zmian prędkości, a to z powodu, że jej działanie trwa bardzo krótko, przeto stosujemy do takiej siły równanie (7), polegające na skupieniu działania siły w znikającym elemencie czasu. Miarą więc siły popędowej jest całkowity przyrost ilości ruchu punktu. Jeżeli punkt był w spoczynku, a zatem $v_1 = 0$, a $v_2 = v$, to miarą siły popędowej F jest ilość ruchu mv , nabyta przez punkt, gdy przyjmiemy $F = 1$ dla $m = 1$ i $v = 1$. Siły, których miarą jest iloczyn masy i przyspieszenia, które zatym wytwarzają zmiany prędkości tego samego rzędu, co czas ich trwania, nazywamy siłami ciągłymi; zapomocą takiego określenia odróżniamy je wyraźnie od sił chwilowych.

Równanie (6) może być także zastosowane do siły ciągłej. Iloczyn siły P i elementu czasu dt nazywamy popędem chwilowym, albo impulsem,

lubtż popędem elementarnym siły, całkę zaś $\int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt$ nazywamy po-

popędem siły w czasie $t_2 - t_1$. Równanie więc (6) wyraża twierdzenie: *popęd siły równa się jednoczesnemu przyrostowi ilości ruchu jej punktu przyłożenia.*

70. SKŁAD I ROZKŁAD SIŁ. Jeżeli ilekolwiek sił na punkt jednocześnie działa, to każda z nich nadaje punktowi przyspieszenie w kierunku swego działania, a wielkość tego przyspieszenia otrzymamy, dzieląc wielkość owęj siły przez masę punktu. Dokonywając składu oddzielnych przyspieszeń zapomocą wieloboku, otrzymamy przyspieszenie wypadkowe punktu. To jednak przyspieszenie możemy zawsze uważać za nadane punktowi przez jedną siłę, działającą w kierunku tego przyspieszenia, a wielkość téj siły wyrazi się przez iloczyn masy punktu i jego przyspieszenia wypadkowego. Z tego wynika, że jednoczesne działanie ilukolwiek sił na ten sam punkt jest wogólności równoważne działaniu jednéj siły, którą z tego powodu siłą wypadkową nazywamy. Dane siły są téj wypadkowej siłami składowymi.

Z dwu pierwszych praw dynamiki wynika, że siłę wypadkową można bezpośrednio wyznaczyć tąż samą metodą, która służy do składu przyspieszeń. Kręśląc bowiem wielobok, którego następujące po sobie boki przedstawiają,

co do wielkości i co do kierunku, siły składowe, otrzymujemy figurę podobną do wieloboku przyspieszeń i podobnie leżącą, a której każdy bok ma m -krotną długość odpowiedniego boku wieloboku przyspieszeń, jeżeli m jest masą punktu. Ostatni zatem bok tej figury mieć będzie kierunek przyspieszenia wypadkowego, a długość tego boku będzie równa m -krotnej długości boku, przedstawiającego to przyspieszenie; ów zatem bok będzie przedstawiał żadaną siłę wypadkową. Taką figurę nazywamy wielobokiem sił. Ona rozwiązuje postawione zadanie o wyznaczeniu wypadkowej sił, które składem sił nazywamy.—Nawzajem możemy daną siłę rozłożyć na inne siły, do tegoż samego punktu przyłożone, stosując postępowanie, podane przy rozkładzie prędkości i przyspieszenia. Skład sił możemy także uważać za przekształcenie czyli zmianę układu sił, do tegoż samego punktu przyłożonych, które pozwala układ sił zastąpić jedną siłą, układowi sił równoważną, a zatem sprowadzić go do postaci najprostszej.

Jak przyspieszenie punktu przy ruchu krzywoliniowym rozkładamy na przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne czyli dośrodkowe (art. 11), tak siłę, sprawiającą to przyspieszenie, rozkładamy na siłę styczną i na siłę normalną, czyli dośrodkową. Siła styczna nadaje punktowi przyspieszenie styczne w kierunku ruchu, skutkiem którego prędkość v przyrasta w tym kierunku o dv w elemencie czasu dt ; siła normalna nadaje punktowi przyspieszenie normalne w kierunku normalnej głównej, ku środkowi krzywizny, wskutek czego punkt zbacza w tym kierunku, a ruch przestaje być prostoliniowym. Jeżeli P_t oznacza siłę styczną, P_n siłę normalną, to

$$P_t = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}, \quad P_n = m \cdot \frac{v^2}{\rho},$$

gdzie inne litery mają takie znaczenie, jak w art. 11-ym. Siła styczna wywołuje tylko przyspieszenie styczne, siła zaś normalna wywołuje tylko przyspieszenie normalne, a każda z tych sił działa niezależnie od drugiej. Jeżeli $P_n = 0$, to siła P ma kierunek prędkości, a przeto ruch zostanie prostoliniowym i prędkość zmieni się tylko pod względem wielkości. Jeżeli $P_t = 0$, to siła P jest normalna do kierunku ruchu; w tym przypadku znajdzie zmianę prędkości tylko co do kierunku, a ruch będzie jednostajny. W każdym przypadku płaszczyzna, przechodząca przez prędkość i promień działania siły P , jest ściśle styczna do toru punktu; znając siłę normalną i prędkość punktu, możemy obliczyć krzywiznę toru.

Dwa układy sił, do tegoż samego punktu przyłożonych, mające też samą wypadkową, nazywamy równoważnymi, one bowiem nadają punktowi toż samo przyspieszenie. Takie dwa układy sił mogą się wzajemnie zastąpić pod względem skutku, wywartego na punkt przyłożenia.

Jeżeli wielobok sił składowych jest zamknięty, układ sił nie udziela punktowi żadnego przyspieszenia, a zatem punkt będzie się tak poruszał, jak gdyby tych sił wcale nie było. Że taki skutek jest możebny, o tym wspominaliśmy przy pierwszym prawie dynamiki (art. 66). O takich siłach mówimy,

że nawzajem się znoszą, lub że są w równowadze. Wypadkowa takich sił jest równa zeru, a ten warunek jest zarazem dostateczny, aby się te siły znosiły. — Dwie siły równe i wprost przeciwne, do tego samego punktu przyłożone, znoszą się. Jeżeli do układu sił dodamy siłę, znoszącą wypadkową tego układu, lub dodamy układ sił, którego wypadkowa jest równa i wprost przeciwna wypadkowej danego układu, natenczas zniesiemy ów dany układ sił. Do każdego układu sił możemy dodać układ sił, znoszących się nawzajem, a skutek działania danego układu sił na punkt w niczym się nie zmieni. Równowaga stanowi jedyny przypadek, w którym działanie układu sił na punkt nie daje się zastąpić działaniem jednej siły.

Z powyższego wynika, że siła daje się jednym tylko sposobem rozłożyć na trzy siły w kierunkach trzech osi układu współrzędnych, które nie są równoległe do jednej płaszczyzny (art. 4). Obierzmy prostokątny układ współrzędnych x, y, z i oznaczmy odpowiednio przez X, Y, Z składowe siły P w kierunkach tych osi; wówczas

$$(1) \quad X = aP, \quad Y = bP, \quad Z = cP,$$

gdzie (a, b, c) oznaczają dostawy kątów, które kierunek siły tworzy z dodatnimi kierunkami osi współrzędnych.

Niech na punkt działa jednocześnie n sił P_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), stanowiących układ sił, który oznaczmy przez (P_i) ; możemy każdą siłę rozłożyć na trzy składowe $X_i = a_i P_i, Y_i = b_i P_i, Z_i = c_i P_i$, gdzie a_i, b_i, c_i są dostawami kierunkowymi siły P_i . Wypadkową sił X_i będzie siła $X = \sum X_i$, działająca w kierunku osi x ; podobnie otrzymamy wypadkowe $Y = \sum Y_i, Z = \sum Z_i$ w kierunkach osi y i osi z . Sumy X, Y, Z przedstawiają odpowiednio rzuty wypadkowej na osi współrzędnych; a więc wypadkową możemy wyrazić:

$$(2) \quad P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Jeżeli przez a, b, c oznaczmy dostawy kierunkowe tej wypadkowej, to

$$(3) \quad a = \frac{X}{P}, \quad b = \frac{Y}{P}, \quad c = \frac{Z}{P}.$$

Siły znoszą się, gdy ich wypadkowa P jest równa zeru, t. j. gdy

$$(4) \quad \sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0;$$

ponieważ, nawzajem, z tych równań wynika $P = 0$, przeto one wyrażają warunki konieczne i dostateczne równowagi danych sił. Jeżeli w równaniach art. 5-go zamiast prędkości v_i podstawimy siłę P_i , to otrzymamy twierdzenie ogólne: *aby ilekolewkie siły, do jednego punktu przyłożonych, znosiło się nawzajem, potrzeba i wystarcza, żeby suma algebraiczna ich rzutów prostokątnych na każdą z trzech dowolnych prostych, nierównoległych do jednej płaszczyzny, była równa zeru.* W tym twierdzeniu jest także zawarte twierdzenie, które przedstawiają równania (4). — Jeżeli do punktu przyłożymy drugi układ (P'_i) sił P'_i , to warunki konieczne i dostateczne równoważności obudwu układów sił są

$$(5) \quad \sum X_i = \sum X'_i, \quad \sum Y_i = \sum Y'_i, \quad \sum Z_i = \sum Z'_i.$$

71. MOMENTY SIŁ. Iloczyn wielkości siły i odległości danego punktu od promienia działania tej siły nazywamy momentem siły tej względem tego punktu. Punkt ów zowiemy biegunem tego momentu. To określenie jest równobrzmiące z określeniem momentu obrotu względem punktu (art. 25), jeżeli wyrażenia: «prędkość kątowna obrotu» i «oś obrotu» zastąpimy odpowiednio przez wyrażenia: «wielkość siły» i «promień działania siły». — Ponieważ skład sił o wspólnym punkcie przyłożenia dokonywa się zupełnie tak, jak skład obrotów chwilowych, których osi przecinają się w jednym punkcie, przeto możemy twierdzenia o momentach obrotów bezpośrednio przenieść na momenty sił. Moment siły względem punktu przedstawiamy geometrycznie takim samym sposobem, jak moment obrotu względem punktu.

Weźmy dowolny punkt (x, y, z) na promieniu działania siły, a X, Y, Z niech oznaczają rzuty siły w kierunkach osi współrzędnych; moment μ tej siły względem początku osi będzie, według art. 25-go,

$$(1) \quad \mu = [(Zy - Yz)^2 + (Xz - Zx)^2 + (Yx - Xy)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Poprowadźmy płaszczyznę przez początek osi i daną siłę, wyprowadźmy do niej prostopadłą z początku osi, odetnijmy na tej prostopadłej długość μ (według art. 25) i rzućmy tę długość na osi współrzędnych; wielkości L, M, N tych rzutów będą odpowiednio:

$$(2) \quad L = Zy - Yz, \quad M = Xz - Zx, \quad N = Yx - Xy.$$

Z tych równań wynikają dwa związki następujące:

$$(3) \quad XL + YM + ZN = 0, \quad xL + yM + zN = 0.$$

Niech do punktu (x, y, z) będzie przyłożonych n sił P_i , stanowiących układ sił (P_i) ; między rzutami L_i, M_i, N_i momentów μ_i tych sił P_i względem początku osi, a rzutami L, M, N momentu μ wypadkowej P tego układu, zachodzą związki następujące (art. 25):

$$(4) \quad L = \Sigma L_i, \quad M = \Sigma M_i, \quad N = \Sigma N_i,$$

wyrażające twierdzenie: *moment wypadkowej sił, mających wspólny punkt przyłożenia, względem dowolnego punktu, jest równy wypadkowej momentów tych sił względem tego punktu.* Skład momentów sił o wspólnym punkcie przyłożenia daje się wykonać zapomocą wieloboku momentów tych sił (art. 25). *Jeżeli siły leżą na jednej płaszczyźnie i mają wspólny punkt przyłożenia, natenczas moment siły wypadkowej względem punktu, obranego na tej płaszczyźnie, jest równy sumie algebraicznej momentów tych sił względem tego punktu* (twierdzenie Varignon'a).

Jeżeli x_1, y_1, z_1 są współrzędnymi dowolnymi punktu, a L_1, M_1, N_1 oznaczają odpowiednio rzuty momentu siły P względem tego punktu, to (art. 25)

$$(5) \quad \begin{aligned} L_1 &= Z(y - y_1) - Y(z - z_1) = L - (Zy_1 - Yz_1), \\ M_1 &= X(z - z_1) - Z(x - x_1) = M - (Xz_1 - Zx_1), \\ N_1 &= Y(x - x_1) - X(y - y_1) = N - (Yx_1 - Xy_1), \end{aligned}$$

a zatym moment μ_1 siły P względem punktu (x_1, y_1, z_1) wyrazi się zapomocą wzoru

$$\mu_1 = \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}.$$

Iloczyn wielkości siły i momentu (art. 26) jęj promienia działania względem danęj prostęj nazywamy momentem siły tęj względem tęj prostęj, tę zaś prostą nazywamy osią momentu. To określenie jest równobrzmiące z określeniem momentu obrotu względem prostęj (art. 26) przy odpowiedniej zmianie wyrażęń. Z tego wnosimy, że wielkości, oznaczone poprzednio przez L , M , N , oznaczają odpowiednio momenty siły (X, Y, Z) względem osi spółrzednych x , y i z . *Moment siły względem prostęj jest równy rzutowi na nią momentu tęjże siły względem dowolnego jęj punktu. Moment siły względem punktu jest wypadkową momentów tęj siły względem trzech prostych, przecinających się prostokątnie w tym punkcie. Moment wypadkowej układu sił o spółnym punkcie przyłożenia względem dowolnej prostęj jest równy sumie algebraicznęj momentów sił składowych względem tęj prostęj.* Te twierdzenia wynikają bezpośrednio z art. 26-go.

Aby wyznaczyć moment siły względem prostęj, która nie jest osią spółrzednych, obierzmy na tęj prostęj punkt (x, y, z) i obliczmy, według (5), odpowiednie rzuty L_1 , M_1 , N_1 momentu siły (X, Y, Z) względem tego punktu. Jeżeli a , b , c oznaczają dostawy kierunkowe danęj prostęj, to moment μ' tęj siły względem prostęj wyrazimy zapomocą równania

$$\mu' = aL_1 + bM_1 + cN_1,$$

a jeżeli wstawimy wartości za L_1 , M_1 , N_1 i oznaczmy przez α , β , γ odpowiednie momenty danęj prostęj względem osi spółrzednych (art. 33), to

$$(6) \quad \mu' = aL + bM + cN + \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$

gdzie L , M , N oznaczają odpowiednio momenty danęj siły względem osi spółrzednych.

Jeżeli siły, do jednego punktu przyłożone, znoszą się, natenczas wielobok ich momentów względem każdego punktu jest zamknięty.

72. RÓWNOWAGA PUNKTU NIESWOBODNEGO. Jeżeli ilekolwiek sił przykładamy do punktu swobodnego, natenczas do równowagi tych sił potrzeba i wystarcza, aby ich wypadkowa była równa zeru (art. 70). Jeżeli jednak punkt przyłożenia sił nie jest swobodny, t. j. jeżeli on z danego położenia nie może przyjąć wszelkich nieskończenie bliskich położeń w przestrzeni (art. 42), to dla równowagi sił przyłożonych nie potrzeba koniecznie, żeby wypadkowa tych sił była równa zeru.

Analitycznym wyrazem nieswobody punktu są pewne równania, zachodzące między jego spółrzednymi, które mają być dopełnione, niezależnie od sił przyłożonych. Jeżeli położenie punktu określamy zapomocą trzech spółrzednych, to między tymi spółrzednymi mogą zachodzić conajwięcej dwa równania, aby jeszcze ruch punktu był możebny. Niech jedno takie równanie będzie $F(x, y, z) = 0$; punkt z danego położenia (x, y, z) może zająć tylko takie

położenie sąsiednie, którego współrzędne $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ przywodzą funkcję F do zera. Możemy wtedy powiedzieć, że punkt pozostaje ciągle na pewnej powierzchni, określonej przez równanie $F = 0$. W przypadku dwu takich równań, $F = 0$ i $\varphi = 0$, mówimy, że punkt pozostaje na linii krzywej, przez te równania określonej, bez względu na siły przyłożone. Do równań warunkowych może także czas wchodzić wyraźnie, może być zatem ogólniej $F(x, y, z, t) = 0$ takim równaniem, a wtedy punkt pozostaje na pewnej powierzchni, poruszającej się w przestrzeni, zaś w przypadku dwu takich równań na pewnej poruszającej się linii krzywej.

W każdym z tych przypadków nieswobody punktu zachodzi równowaga sił przyłożonych, jeżeli wypadkowa tych sił jest normalna do powierzchni lub do linii krzywej, na której punkt ciągle pozostaje. — Jakoż, w przypadku pierwszym, gdy wypadkowa sił nie ma kierunku normalnej do powierzchni, możemy ją rozłożyć na siłę normalną i na siłę, styczną do powierzchni w punkcie uważanym. Składowa normalna tej siły nie może mieć żadnego wpływu na ruch punktu, gdyż w jej kierunku ruch punktu jest niemożliwy wskutek danego warunku; tylko więc składowa styczna może punktowi udzielić przyspieszenia, gdyż ruch punktu jest jedynie możliwy na płaszczyźnie stycznej do powierzchni. W razie zatem równowagi znika ta ostatnia składowa, a przeto wypadkowa jest normalna do powierzchni. — Podobnie okazuje się prawdziwość twierdzenia dla linii krzywej.

Ponieważ dostawy kierunkowe normalnej do powierzchni $F = 0$ w punkcie (x, y, z) są proporcjonalne względem odpowiednich pochodnych cząstkowych funkcji F względem współrzędnych x , y i z , gdy w tych pochodnych podstawimy wartości współrzędnych punktu, i ponieważ dostawy kierunkowe wypadkowej danych sił są odpowiednio proporcjonalne względem jej rzutów X , Y , Z na osi współrzędnych, przeto w przypadku pierwszym warunki równowagi sił są

$$(1) \quad X : Y : Z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

W przypadku zaś danej linii krzywej założymy, że jej równania są $x = F_1(t)$, $y = F_2(t)$, $z = F_3(t)$, gdzie t jest pewnym parametrem; wówczas szukany warunek równowagi wyrazi się zapomocą równania

$$(2) \quad X \cdot \frac{dx}{dt} + Y \cdot \frac{dy}{dt} + Z \cdot \frac{dz}{dt} = 0.$$

Powyższe własności prawdziwymi pozostają, gdy warunki zawierają czas wyraźnie; wystarczy bowiem do równowagi, żeby wypadkowa sił była normalna do powierzchni lub do linii krzywej w tym położeniu, które ta ostatnia chwilowo zajmuje w przestrzeni. Przy różniczkowaniu należy zatem za czas podstawić wartość, odpowiednią uważanemu położeniu punktu, t. j. wyznaczyć kierunek siły, jakgdyby powierzchnia lub linia krzywa była chwilowo nieruchoma. —

Zagadnienia o równowadze punktu nieswobodnego możemy także rozwiązać zapomocą metody współczynników nieoznaczonych. Niech zachodzi

warunek $F = 0$; możemy wtedy równania (1) także otrzymać, rugując współczynnik nieoznaczony λ z następujących trzech równań:

$$(3) \quad X + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

albowiem dwa równania (1) wyrażają warunki konieczne i dostateczne, aby te trzy równania jednocześnie zachodziły. Kładąc $X_1 = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$, $Y_1 = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$, $Z_1 = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$, widzimy, że równania (3) wyrażają warunki równowagi punktu uważanego, gdyby on był swobodny wraze, jeżeli do niego, oprócz siły (X, Y, Z) , byłaby jeszcze przyłożona pewna siła (X_1, Y_1, Z_1) , normalna do powierzchni $F = 0$. Wielkość atoli tej ostatniej siły nie jest oznaczona, ponieważ λ ma wartość nieoznaczoną. Tę ostatnią siłę nazywamy oporem danej powierzchni, a ona właśnie znosi wypadkową sił przyłożonych. Okazuje się więc, że warunki równowagi punktu, pozostającego na danej powierzchni, dają się także wyznaczyć przez to, że punkt uważamy za swobodny, lecz do sił, rzeczywiście przyłożonych, dodajemy jeszcze opór powierzchni w kierunku normalnym. Wypadkowa sił, rzeczywiście przyłożonych, przedstawia wtedy ciśnienie, którego powierzchnia od tych sił doznaje. — W przypadku danej linii krzywej, określonej zapomocą równania $F = 0$ i $\varphi = 0$, możemy podobnie otrzymać odpowiedni warunek równowagi, rugując dwa współczynniki nieoznaczone, λ_1 i λ_2 , z następujących równań:

$$(4) \quad \begin{cases} X + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ Y + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ Z + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Siły dodane, których rzuty przedstawiają się jako iloczyny odpowiedniego współczynnika i pochodnej cząstkowej danej funkcji, wyobrażają opory dwu powierzchni, przecinających się podług danej linii krzywej, a wypadkowa tych oporów wyobraża opór téjże linii krzywej. Wypadkowa sił przyłożonych przedstawia wtedy ciśnienie, które te siły wywierają na daną linię w punkcie uważanym.

73. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH. Nieskończenie małą drogę, po której opisanu punkt przenosi się z miejsca pewnego do nieskończenie bliskiego w przestrzeni, nazwaliśmy w art. 24-ym przesunięciem tego punktu. Jeżeli ruch punktu podlega pewnym warunkom, od sił niezależnym (art. 72), to takie przesunięcie punktu z danego miejsca, wskutek którego punkt zajmuje w przestrzeni miejsce nieskończenie bliskie, odpowiadające danym warunkom, nazywamy przesunięciem przygotowanym (albo niekiedy przysposobionym) tego punktu. Przymiotnik «przygotowany» odnosi się tylko do