

b). Niech będzie dany obrót  $\omega$  około osi O (fig. 16) i ruch postępowy  $v$  w kierunku, tworzącym kąt  $\varphi$  z tą osią; mamy złożyć te dwa ruchy chwilowe. Rozłożmy prędkość  $v$  na dwie prędkości  $v'$  i  $v''$ ; składowa  $v'$  niech będzie równoległa do osi O, a  $v''$  niech będzie prostopadła do tej osi. Wtedy otrzymamy  $v' = v \cdot \cos \varphi$ ,  $v'' = v \cdot \sin \varphi$ . Dany obrót  $\omega$  wraz z ruchem postępowym  $v''$  sprawiają obrót  $\omega$  około pewnej osi S, równoległej do O, którą według  $\alpha$ . wyznaczyć możemy. Ruch zatem wypadkowy będzie się składał z obrotu chwilowego  $\omega$  około tej osi S i z chwilowego ruchu postępowego  $v'$  w kierunku osi O, a więc także osi S.

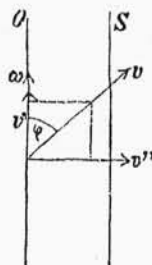


Fig. 16.

Ruch układu niezmiennego, składający się z obrotu chwilowego około pewnej osi i z chwilowego ruchu postępowego w kierunku tej osi, nazywamy skrętem chwilowym tego układu, tak iż *obróć chwilowy wraz z ruchem postępowym chwilowym, który nie jest prostopadły do osi obrotu, są równoważne skrętowi chwilowemu*. Gdy skręt zachodzi, rozróżniamy dwie prędkości, mianowicie: prędkość obrotu i prędkość ruchu postępowego. Jeżeli żadna z tych prędkości nie jest równa zeru, to skręt składa się z dwu ruchów chwilowych. Jeżeli prędkość obrotu jest równa zeru, to skręt sprowadza się do chwilowego ruchu postępowego; jeżeli zaś prędkość postępową jest równa zeru, to skręt redukuje się do samego obrotu chwilowego.

**30. SPÓRZĘDNE OBROTU CHWILOWEGO.** Niech będzie dany obrót chwilowy  $\omega$  około pewnej osi O, której położenie względem trzech prostokątnych osi współrzędnych jest wiadome. Poprowadźmy przez początek A współrzędnych prostą O', równoległą do O, i nadajmy układowi niezmiennemu dwa obroty chwilowe  $\omega$  i  $-\omega$  około tej prostej O'; nie zmienimy przez to jego ruchu chwilowego. Obrót dany  $\omega$  razem z obrotem  $-\omega$  około prostej O' tworzą parę obrotów, której moment  $\mu$  równy jest momentowi pierwotnego obrotu względem punktu A (art. 28). Tym sposobem zastąpiliśmy obrót pierwotny obrotem z tą samą prędkością kątową, lecz około prostej O' (przechodzącej przez początek współrzędnych), oraz ruchem postępowym o prędkości  $\mu$ . Rozłożmy teraz (art. 23) obrót  $\omega$  około prostej O' na trzy obroty  $\Xi$ , H i Z około osi współrzędnych Ax, Ay i Az, a ruch postępowy  $\mu$  (art. 5) na trzy  $\Lambda$ , M i N w kierunkach tych osi; widzimy, że *obróć chwilowy układu niezmiennego jest równoważny trzem obrotom chwilowym około trzech prostokątnych osi współrzędnych wraz z trzema ruchami chwilowymi postępowymi w kierunkach tychże osi*. To twierdzenie pozostaje widocznie prawdziwym dla układu ukośnokątnego współrzędnych.

Prędkości kątowe  $\Xi$ , H i Z trzech obrotów chwilowych około osi współrzędnych, tudzież prędkości  $\Lambda$ , M i N trzech ruchów chwilowych postępowych w kierunkach tych osi, nazywać będziemy współrzędnymi obrotu chwilowego danego. Współrzędne  $\Xi$ , H i Z są rzutami danej prędkości kątowej  $\omega$  na

osi współrzędnych, a współrzędne  $\Lambda$ ,  $M$  i  $N$  są (art. 26) momentami danego obrotu względem tychże osi.

Według art. 25-go, między współrzędnymi obrotu chwilowego zachodzi związek następujący:

$$(1) \quad \Xi \Lambda + H M + Z N = 0,$$

a można okazać, że nawzajem między powyższymi wielkościami zachodzi ten związek, jeżeli one mają być współrzędnymi obrotu chwilowego. Jakoż, dokonajmy składu obrotów  $\Xi$ ,  $H$  i  $Z$  około osi  $Ax$ ,  $Ay$  i  $Az$  na jeden obrót  $\omega$  około osi  $O'$ , przez początek  $A$  przechodzącą,

$$(2) \quad \omega = \sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2},$$

a wtedy dostawy kierunkowe  $a$ ,  $b$  i  $c$  tej osi będą

$$(3) \quad a = \frac{\Xi}{\omega}, \quad b = \frac{H}{\omega}, \quad c = \frac{Z}{\omega};$$

składając podobnie ruchy postępowe  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  w kierunkach osi  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Az$  w jeden ruch postępowy chwilowy  $\mu$ ,

$$(4) \quad \mu = \sqrt{\Lambda^2 + M^2 + N^2},$$

jako wyrażenia dostaw kierunkowych  $a'$ ,  $b'$  i  $c'$  tego ruchu postępowego mieć będziemy

$$(5) \quad a' = \frac{\Lambda}{\mu}, \quad b' = \frac{M}{\mu}, \quad c' = \frac{N}{\mu}.$$

Żeby obrót  $\omega$  około osi  $O'$  wraz z ruchem postępowym  $\mu$  dał obrót chwilowy około osi  $O$ , równoległej do  $O'$ , potrzeba, aby ruch postępowy  $\mu$  był prostopadły (art. 29) do osi  $O'$ , a zatem  $aa' + bb' + cc' = 0$ . Jeżeli w tym równaniu podstawimy wartości z równań (3) i (5), to otrzymamy podane powyżej równanie warunkowe (1).

Obierzmy na osi  $O$  danego obrotu  $\omega$  dowolny punkt  $(x, y, z)$ ; według wzorów (3) art. 25-go, otrzymamy następujące trzy równania:

$$(6) \quad Zy - Hz - \Lambda = 0, \quad \Xi z - Zx - M = 0, \quad Hx - \Xi y - N = 0,$$

które, wskutek warunku (1), sprowadzają się do dwu równań niezależnych. Te równania wyznaczają rzuty osi  $O$  na płaszczyzny współrzędnych.

Sześć współrzędnych  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  i  $N$ , między którymi zachodzi związek (1), określają zupełnie obrót. Jakoż, z równania (2) możemy obliczyć prędkość kątową obrotu, równania (6) wyznaczają jego oś, a równania (3) pozwalają rozpoznać kierunek obrotu chwilowego.

**31. SPÓŁRZĘDNE SKRĘTU CHWILOWEGO.** Niech będzie dany skręt chwilowy z prędkościami kątową  $\omega$  i ruchu postępowego  $v$ . Rozłóżmy obrót  $\omega$  na trzy obroty  $\Xi$ ,  $H$  i  $Z$  około osi współrzędnych i na trzy ruchy postępowe  $\Lambda'$ ,  $M'$  i  $N'$  w kierunkach tych osi; rozłóżmy podobnie ruch postępowy  $v$  danego skrętu na trzy ruchy postępowe  $\Lambda''$ ,  $M''$  i  $N''$  w kierunkach tychże samych osi. Trzy

prędkości katowe  $\Xi$ ,  $H$  i  $Z$  wraz z trzema prędkościami ruchów postępowych,  $\Lambda = \Lambda' + \Lambda''$ ,  $M = M' + M''$ ,  $N = N' + N''$  nazywamy spólrzędnymi skrętu chwilowego względem danych osi spólrzędnych. A zatem *skręt chwilowy można rozłożyć na trzy obroty około osi spólrzędnych i na trzy ruchy postępowe w kierunkach tych osi*, a prędkości tych sześciu ruchów są właśnie spólrzędnymi skrętu. Ponieważ  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$ ,  $\Lambda'$ ,  $M'$  i  $N'$  są spólrzędnymi obrotu, stanowiącego jeden z ruchów składowych skrętu, przeto

$$\Xi \Lambda' + H M' + Z N' = 0,$$

z czego łatwo wyciągnąć wniosek, że funkcja

$$(1) \quad \kappa = \Xi \Lambda + H M + Z N,$$

utworzona ze spólrzędnych skrętu chwilowego, nie może być równa zeru. Podstawiając bowiem w tej funkcji wartości spólrzędnych skrętu, otrzymamy

$$(2) \quad \kappa = \Xi \Lambda'' + H M'' + Z N'';$$

ponieważ zaś  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$ ,  $\Lambda''$ ,  $M''$  i  $N''$  nie są spólrzędnymi obrotu chwilowego, przeto ta funkcja nie może przybrać wartości równej zeru. Wielkość  $\kappa$ , utworzoną według wzoru (1) ze spólrzędnych skrętu chwilowego, będącą funkcją jednorodną stopnia 2-go jego spólrzędnych, nazywamy parametrem skrętu chwilowego.

Niech  $a$ ,  $b$  i  $c$  oznaczają dostawy kierunkowe osi skrętu i niech

$$(3) \quad \omega = \sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2};$$

wówczas

$$(4) \quad a = \frac{\Xi}{\omega}, \quad b = \frac{H}{\omega}, \quad c = \frac{Z}{\omega}.$$

Suma rzutów prędkości  $\Lambda''$ ,  $M''$ ,  $N''$  na oś skrętu daje prędkość  $v$  ruchu postępowego skrętu; będzie zatem

$$v = a \Lambda'' + b M'' + c N'' = \frac{\Xi \Lambda'' + H M'' + Z N''}{\omega},$$

czyli, po wstawieniu wartości z (2) i (3),

$$(5) \quad v = \frac{\Xi \Lambda + H M + Z N}{\sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2}} = \frac{\kappa}{\omega}, \text{ a zatem } \kappa = v \cdot \omega.$$

Z ostatniego równania okazuje się, że parametr skrętu jest iloczynem obudwu jego prędkości, z czego także wynika, że ów parametr nie może być równy zeru, dopóki skręt chwilowy nie zredukuje się do samego obrotu lub do samego ruchu postępowego. Stosunek

$$(6) \quad \lambda = \frac{v}{\omega} = \frac{\Xi \Lambda + H M + Z N}{\Xi^2 + H^2 + Z^2}$$

prędkości ruchu postępowego skrętu chwilowego do jego prędkości katowej, nazywać będziemy wskaźnikiem skrętu chwilowego. Jeżeli wskaźnik skrętu jest zerem ( $v = 0$ ), natenczas skręt redukuje się do samego obrotu

około swęj osi; jeżeli wskaźnik przybiera wartość nieskończenie wielką ( $\omega = 0$ ), to skręt redukuje się do samego ruchu postępowego wzdłuż swęj osi. Wskaźnik skrętu może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

Z równania (5) obliczmy prędkość  $v$ ; otrzymamy

$$\Lambda' = \Lambda - av = \Lambda - a\lambda\omega = \Lambda - \lambda\Xi;$$

taksamo dla innych spółrzędnych mieć będziemy

$$(7) \quad \Lambda' = \Lambda - \lambda\Xi, \quad M' = M - \lambda H, \quad N' = N - \lambda Z.$$

Jeżeli zatym punkt  $(x, y, z)$  jest punktem dowolnym na osi skrętu, to, według art. 30-go,

$$(8) \quad \begin{cases} Zy - Hz - (\Lambda - \lambda\Xi) = 0, \\ \Xi z - Zx - (M - \lambda H) = 0, \\ Hx - \Xi y - (N - \lambda Z) = 0. \end{cases}$$

Sześć spółrzędnych  $\Xi, H, Z, \Lambda, M$  i  $N$  okręślają zupełnie skręt chwilowy. Równania bowiem (3) i (4) dają obie prędkości skrętu, a równania (8), redukujące się, jak poprzednio okazano, do dwu równań niezależnych, okręślają oś tego skrętu.

Jeżeli mamy sześć spółrzędnych skrętu chwilowego, to możemy obliczyć prędkość dowolnego punktu  $(x, y, z)$  układu niezmiennego, któremu ten skręt został udzielony, dodając do siebie prędkości, jakich ten punkt nabywa w kierunku każdej osi spółrzędnych wskutek obrotu i wskutek ruchu postępowego. Żądane zatym prędkości tego punktu będą, według równań (3) art. 24-go,

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = Hz - Zy + \Lambda, \quad \frac{dy}{dt} = Zx - \Xi z + M, \quad \frac{dz}{dt} = \Xi y - Hx + N.$$

**32. SKŁAD SKRĘTÓW CHWILOWYCH** Udzielamy układowi niezmiennemu jednocześnie  $n$  skrętów chwilowych około  $n$  osi, mamy zaś wyznaczyć jego ruch wypadkowy. Niech  $S_i$  będzie osią  $i$ -go skrętu składowego, a  $\omega_i, v_i$  niech oznaczają jego prędkości. Wystawmy w dowolnym punkcie  $A$  prostokątny układ osi spółrzędnych  $Ax, Ay, Az$  i wyznaczmy spółrzędne  $\Xi_i, H_i, Z_i, \Lambda_i, M_i$  i  $N_i$  (art. 31) tego skrętu względem tychże osi. Czyniąc to samo z każdym skrętem, złożmy zosobna obroty i ruchy postępowe chwilowe, odpowiadające każdej osi spółrzędnych. Prędkości sześciu ruchów chwilowych, otrzymanych tym sposobem, będą równe sumom algebraicznym spółrzędnych danych skrętów; otrzymamy więc

$$(1) \quad \Xi = \sum \Xi_i, \quad H = \sum H_i, \quad Z = \sum Z_i, \quad \Lambda = \sum \Lambda_i, \quad M = \sum M_i, \quad N = \sum N_i.$$

Ponieważ wielkość  $\kappa = \Xi\Lambda + HM + ZN$  nie będzie wogólności równa zeru, przeto prędkości  $\Xi, H, Z, \Lambda, M$  i  $N$  będą spółrzędnymi pewnego skrętu chwilowego, przedstawiającego właśnie szukany ruch wypadkowy, który jest równoważny danym skrętom.

Ilekolwiek skrętów chwilowych, jednocześnie rozważanych, nazywamy układem skrętów, a sumy algebraiczne spółrzędnych odpowiednich

wszystkich skrętów tego układu nazywamy *spółrzednymi układu skrętów*. Mamy zatem twierdzenie: *układ skrętów jest równoważny skrętowi chwilowemu, którego spółrzednymi są spółrzedne tego układu*. Oś skrętu wypadkowego układu skrętów nazywamy *osią centralną układu skrętów*. Wielkość  $\kappa = \Xi\Lambda + HM + ZN$ , utworzoną ze spółrzednych układu skrętów, nazywamy *parametrem układu*, a wielkość  $\lambda = \frac{\Xi\Lambda + HM + ZN}{\Xi^2 + H^2 + Z^2}$  nazywamy *wskaźnikiem układu*. Parametr i wskaźnik układu skrętów są odpowiednio równe parametrowi i wykładnikowi skrętu wypadkowego.

Sposobem wyżej wskazanym możemy także wyznaczyć wypadkową ilu-  
kolwiek obrotów chwilowych, układowi niezmiennemu jednocześnie udzielonych. Wyznamy spółrzedne każdego z danych obrotów względem osi  $Ax$ ,  $Ay$  i  $Az$ , dodajmy do siebie ich spółrzedne odpowiednie, a otrzymamy według (1) prędkości sześciu ruchów chwilowych, z których możemy wyznaczyć ruch wypadkowy. Ponieważ z równania warunkowego dla każdego z danych obrotów, mianowicie z tego, że  $\kappa_i = \Xi_i\Lambda_i + H_iM_i + Z_iN_i = 0$ , nie wynika wogólności, aby wielkość  $\Xi\Lambda + HM + ZN$  była równa zeru, przeto (art. 31) mamy twierdzenie: *układ obrotów jest wogólności równoważny skrętowi chwilowemu, którego spółrzednymi są spółrzedne tego układu*. Co zaś należy rozumieć przez układ obrotów i przez spółrzedne układu obrotów, to widoczne jest z poprzednich określeń dla układu skrętów.

Skład ilu-  
kolwiek skrętów (lub obrotów) chwilowych nazywamy *inaczej przekształceniem albo transformacją układu ruchów owych*, to znaczy sprowadzeniem tych ruchów do innej, prostszej postaci, im równoważnej i lepiej się nadającej do rozpoznania prędkości każdego punktu układu niezmiennego, któremu tych ruchów udzielono. Ten skład nazywamy także *redukcją* czyli sprowadzeniem układu ruchów owych do tego punktu  $A$ , który został obrany jako początek układu osi spółrzednych. Ponieważ skręt jest dokładnie określony, jeżeli znamy jego spółrzedne względem jakichkolwiek trzech osi spółrzednych prostokątnych (art. 31), przeto otrzymamy zawsze ten sam skręt wypadkowy niezależnie od tego, do którego punktu redukujemy dany układ skrętów lub obrotów, i jakiego układu osi spółrzednych używamy do téj redukcji.

Wynik przekształcenia układu skrętów może być rozmaity, stosownie do wartości spółrzednych tego układu. Jeżeli każda spółrzedna układu jest równa zeru, natenczas dane skręty znoszą się. Jeżeli parametr układu skrętów jest równy zeru, a spółrzedne jego  $\Xi$ ,  $H$  i  $Z$  nie są wszystkie równe zeru, wtedy ten układ jest równoważny obrotowi chwilowemu. Jeżeli każda ze spółrzednych  $\Xi$ ,  $H$  i  $Z$  jest równa zeru, a spółrzedne  $\Lambda$ ,  $M$  i  $N$  nie znikają jednocześnie, natenczas układ jest równoważny ruchowi postępowemu chwilowemu. Układ skrętów, którego parametr nie jest równy zeru, jest równoważny skrętowi. Podane tu twierdzenia stosują się także do układu obrotów chwilowych.

Jeżeli dwa układy skrętów (lub obrotów) dają ten sam skręt wypadkowy, wtedy są równoważne i mogą się nawzajem zastąpić. Spółrzedne odpowie-

dnie takich dwu układów są sobie równe. I nawzajem, jeżeli spólrzędne odpowiednie takich dwu układów są sobie równe, to układy te są równoważne, bo każdy z nich daje ten sam skręt wypadkowy. A zatem, *do równoważności dwu układów skrętów (lub obrotów) chwilowych potrzeba i wystarcza, aby ich spólrzędne odpowiednie były równe sobie.*

**33.** Parametr układu obrotów ma ważne znaczenie geometryczne. Aby je okazać, weźmy dwa obroty, jeden  $(\Xi_1, H_1, Z_1, \Lambda_1, M_1, N_1)$ , a drugi  $(\Xi_2, H_2, Z_2, \Lambda_2, M_2, N_2)$ . Niech  $a_1, b_1, c_1$  będą dostawami kierunkowymi, a  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  momentami osi  $O_1$  pierwszego obrotu względem osi spólrzędnych; podobne znaczenie niech mają  $a_2, b_2, c_2, \alpha_2, \beta_2$  i  $\gamma_2$  dla drugiej osi  $O_2$ . Obiérając na prostój  $O_1$  punkt dowolny  $(x_1, y_1, z_1)$ , mamy, według art. 26-go,

$$(1) \quad \alpha_1 = c_1 y_1 - b_1 z_1, \quad \beta_1 = a_1 z_1 - c_1 x_1, \quad \gamma_1 = b_1 x_1 - a_1 y_1$$

i podobnie dla punktu  $(x_2, y_2, z_2)$  na osi  $O_2$ . Między tymi wielkościami zachodzi związek

$$(2) \quad a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 = 0,$$

konieczny i wystarczający na to, aby te wielkości należały do téj samej prostój. Pisząc równania osi  $O_1$  w postaci

$$(3) \quad x = \frac{a_1}{c_1} z + m_1, \quad y = \frac{b_1}{c_1} z + n_1,$$

otrzymamy łatwo

$$m_1 = -\frac{\beta_1}{c_1}, \quad n_1 = \frac{\alpha_1}{c_1};$$

równania zatym osi  $O_1$  i  $O_2$  są

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{c_1} (a_1 z - \beta_1), \\ y = \frac{1}{c_1} (b_1 z + \alpha_1), \end{array} \right. \quad \text{ i } \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{c_2} (a_2 z - \beta_2), \\ y = \frac{1}{c_2} (b_2 z + \alpha_2). \end{array} \right.$$

Z nich się okazuje, że wielkości  $a, b, c, \alpha, \beta$  i  $\gamma$ , zadość czyniące warunkowi  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  i warunkowi (2), zupełnie wyznaczają prostą, tak iż możemy je przyjmować za spólrzędne prostój.

Niech  $\delta_{12}$  będzie najkrótszą odległością wzajemną osi  $O_1$  i  $O_2$ ; wiadomo, że

$$\delta_{12} = \frac{(c_2 b_1 - c_1 b_2)(m_1 - m_2) + (a_2 c_1 - a_1 c_2)(n_1 - n_2)}{\sqrt{(c_2 b_1 - c_1 b_2)^2 + (a_2 c_1 - a_1 c_2)^2 + (b_2 a_1 - b_1 a_2)^2}}.$$

Ponieważ mianownik tego ułamka jest wstawą kąta, który z sobą tworzą obie proste, przeto moment  $m_{12}$  tych osi (art. 26) wynosi

$$m_{12} = (c_2 b_1 - c_1 b_2)(m_1 - m_2) + (a_2 c_1 - a_1 c_2)(n_1 - n_2).$$

Podstawiając wartości  $m_1, m_2, n_1, n_2$  i uwzględniając warunki (2), otrzymamy

$$(5) \quad m_{12} = a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 + a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1,$$



jako wyrażenie momentu dwu prostych, z których każda jest określona zapo-  
mocą sześciu współrzędnych. Wyrażając współrzędne osi  $O_1$  przez współrzędne  
obrotu chwilowego około niej, mamy według równania (2) art. 26-go

$$(6) \quad a_1 = \frac{\Xi_1}{\omega_1}, \quad b_1 = \frac{H_1}{\omega_1}, \quad c_1 = \frac{Z_1}{\omega_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\Lambda_1}{\omega_1}, \quad \beta_1 = \frac{M_1}{\omega_1}, \quad \gamma_1 = \frac{N_1}{\omega_1},$$

$$\omega_1 = \sqrt{\Xi_1^2 + H_1^2 + Z_1^2},$$

i podobnie dla osi  $O_2$ , z czego się okazuje, że współrzędne osi obrotu chwilowego  
są proporcjonalne względem współrzędnych tego obrotu. Podstawiając te  
wartości w (5), mieć będziemy

$$(7) \quad m_{12} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} (\Xi_1 \Lambda_2 + H_1 M_2 + Z_1 N_2 + \Xi_2 \Lambda_1 + H_2 M_1 + Z_2 N_1),$$

czyli

$$(8) \quad \omega_1 \omega_2 \cdot m_{12} = \Xi_1 \Lambda_2 + H_1 M_2 + Z_1 N_2 + \Xi_2 \Lambda_1 + H_2 M_1 + Z_2 N_1.$$

Parametr układu dwu danych obrotów wynosi

$$\kappa = (\Xi_1 + \Xi_2)(\Lambda_1 + \Lambda_2) + (H_1 + H_2)(M_1 + M_2) + (Z_1 + Z_2)(N_1 + N_2);$$

a ponieważ, jak wiadomo, dla tych obrotów mają miejsce związki

$$\Xi_1 \Lambda_1 + H_1 M_1 + Z_1 N_1 = 0, \quad \Xi_2 \Lambda_2 + H_2 M_2 + Z_2 N_2 = 0, \quad \text{przeto}$$

$$(9) \quad \kappa = \Xi_1 \Lambda_2 + H_1 M_2 + Z_1 N_2 + \Xi_2 \Lambda_1 + H_2 M_1 + Z_2 N_1;$$

z czego wynika, że

$$(10) \quad \kappa = \omega_1 \omega_2 \cdot m_{12}.$$

Odetnijmy na każdej osi obrotu odpowiednią prędkość kątową (art. 22); otrzy-  
mane tym sposobem cztery punkty końcowe tych odcinków możemy przyjąć  
jako wierzchołki czworościanu, którego krawędziami przeciwległymi są owe  
odcinki  $\omega_1$  i  $\omega_2$  na powyższych osiach. Wiadomo, że objętość tego czworo-  
ścianu wynosi  $\frac{1}{6} \omega_1 \omega_2 \cdot m_{12}$ , wielkość bowiem  $m_{12}$  jest iloczynem najkrótszej

odległości dwu krawędzi przeciwległych i wstawy ich kąta nachylenia. Poró-  
wnywając to wyrażenie z równaniem (10), widzimy, że parametr układu dwu  
obrotów chwilowych równa się sześciokrotnej objętości czworościanu, którego kra-  
wędziami przeciwległymi są prędkości katowe tych obrotów, na ich osiach odcięte.

Parametr  $\kappa$  może być dodatny lub ujemny; należy zatem ustalić pe-  
wne prawidło, według którego objętość tego czworościanu ma być brana  
z odpowiednim znakiem, aby miało miejsce równanie (10). Zważmy, że mo-  
żemy napisać  $\kappa = \omega_1 \times m_{12} \omega_2 = \omega_2 \times m_{12} \omega_1$ ; parametr zatem dwu obrotów  
około osi  $O_1$  i  $O_2$  równy jest iloczynowi prędkości katowej  $\omega_1$  obrotu około  $O_1$   
i momentu obrotu  $\omega_2$  względem tejże osi, lub także iloczynowi prędkości kato-  
wej  $\omega_2$  obrotu około  $O_2$  i momentu obrotu  $\omega_1$  względem tejże osi. Przed-  
stawny geometrycznie (art. 22) obiedwie prędkości katowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$  na odpo-  
wiednich osiach, tudzież (art. 26) moment jednego z tych obrotów względem  
osi innego obrotu; na tej osi, względem której braliśmy moment, otrzymamy

dwa odcinki, z których jeden przedstawia prędkość kątową odpowiedniego obrotu około téj osi, a inny przedstawia moment pozostałego obrotu względem téjże osi. W przypadku, kiedy te dwa odcinki mają ten sam kierunek, należy parametr i objętość czworościanu przyjmować jako dodatnie, a kiedy odcinki mają kierunki wprost sobie przeciwne, przyjmować je jako ujemne.

Niech będzie dany układ  $n$  obrotów  $(\Xi_i, H_i, Z_i, \Lambda_i, M_i, N_i)$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ ; to parametr tego układu będzie:

$$\alpha = \sum \Xi_i \cdot \sum \Lambda_i + \sum H_i \cdot \sum M_i + \sum Z_i \cdot \sum N_i.$$

Przekształcając stronę prawą tego równania i uwzględniając warunek

$$\Xi_i \Lambda_i + H_i M_i + Z_i N_i = 0,$$

otrzymamy

$$(11) \quad \alpha = \sum_k \sum_i (\Xi_i \Lambda_k + H_i M_k + Z_i N_k + \Xi_k \cdot \Lambda_i + H_k \cdot M_i + Z_k \cdot N_i),$$

gdzie sumowanie podwójne rozciąga się na wszystkie kombinacje z danych  $n$  wskaźników po dwa; suma przeto na prawej stronie równania (11) ma  $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$  wyrazów. To równanie wyraża następujące twierdzenie: *parametr układu obrotów chwilowych równa się sześciokrotnej sumie algebricznej objętości czworościanów, wystawionych, jako na krawędziach przeciwległych, na każdych dwu prędkościach kątowych tych obrotów, odciętych na ich osiach.*

Stosując to twierdzenie także do przekształcenia układu obrotów (art. 32), otrzymamy następujące twierdzenie: *układ obrotów chwilowych jest równoważny jednemu obrotowi, jeżeli suma algebriczna objętości czworościanów, wystawionych na każdych dwu prędkościach kątowych tych obrotów, odciętych na ich osiach, jest równa zeru (twierdzenie Chasles'a).*

Obierzmy prostą dowolną o rozważanych powyżej współrzędnych  $a, b, c, \alpha, \beta$  i  $\gamma$ ; moment obrotu  $\omega_i$  względem téj prostej, według (8), wynosi

$$a \Lambda_i + b M_i + c N_i + \alpha \Xi_i + \beta H_i + \gamma Z_i.$$

Odetnijmy na prostej długość dowolną  $\delta$  i wystawmy czworościan, którego krawędziami przeciwległymi są długość  $\delta$  i prędkość kątowa  $\omega_i$ , odcięta na osi obrotu  $O_i$ , natenczas sześciokrotna objętość tego czworościanu będzie

$$\delta(a \Lambda_i + b M_i + c N_i + \alpha \Xi_i + \beta H_i + \gamma Z_i).$$

Gdy uczynimy toż samo z każdym obrotem danego układu, to sześciokrotna suma algebriczna objętości takich czworościanów, których spólną krawędzią jest prosta  $\delta$ , a krawędziami przeciwległymi są prędkości kątowe danych obrotów, będzie

$$\delta(a \cdot \sum \Lambda_i + b \cdot \sum M_i + c \cdot \sum N_i + \alpha \cdot \sum \Xi_i + \beta \cdot \sum H_i + \gamma \cdot \sum Z_i).$$

Jeżeli dane obroty znoszą się, to każdy wyraz sumy w nawiasie jest równy zeru, jakkolwiek obierzemy prostą  $\delta$ ; będzie przeto

$$(12) \quad \sum \delta(a \Lambda_i + b M_i + c N_i + \alpha \cdot \Xi_i + \beta \cdot H_i + \gamma \cdot Z_i) = 0,$$



t. j. jeżeli ilekolwiek obrotów chwilowych nawzajem się znosi, to suma algebralna objętości czworościanów, wystawionych, jako na krawędziach przeciwnych, na dowolnej prostej i na prędkości kątowej każdego z tych obrotów, jest równa zeru (twierdzenie Möbius'a).

**34.** Oś CENTRALNA DWU OBROTÓW OKOŁO SKOŚNYCH OSI. Niech będą dane dwa obroty  $\omega_1$  i  $\omega_2$  około skośnych względem siebie osi  $O_1$  i  $O_2$ ; wówczas objętość czworościanu, wystawionego na ich prędkościach kątowych, nie może być równa zeru, a zatem takie dwa obroty są równoważne skrętowni (art. 33). Z równania (1) art. 31-go okazuje się, że jeżeli prędkość kątową tego skrętu przedstawimy geometrycznie na osi centralnej, to rzut jej na każdą z osi współrzędnych jest równy sumie algebralnej rzutów prędkości danych obrotów na tę oś. Jeżeli więc z dowolnego punktu wykreślimy równoległobok, którego boki są równe i równoległe do prędkości kątowych danych obrotów, to przekątna tego równoległoboku będzie miała kierunek i długość odcinka, mającego przedstawiać geometrycznie prędkość kątową skrętu około osi centralnej, a zatem oś centralna będzie równoległa do téj przekątnej.

Aby wyznaczyć położenie osi centralnej, nakreślimy najkrótszą odległość obu osi, która je przecina odpowiednio w punktach  $o_1$  i  $o_2$ , i odetnijmy na osiach od tych punktów odpowiednio ich prędkości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Obierzmy punkt  $o_1$  jako początek układu osi współrzędnych, prostą  $O_1$  w kierunku odciętej prędkości  $\omega_1$  jako oś  $x$ , a najkrótszą odległość w kierunku  $o_1o_2$  jako oś  $z$ . Oznaczmy jeszcze przez  $\delta$  najkrótszą odległość  $o_1o_2$ , a przez  $\varphi$  kąt, który z sobą tworzą odcinki  $\omega_1$  i  $\omega_2$ ; wówczas współrzędne obrotu  $\omega_1$  będą

$$(1) \quad \Xi_1 = \omega_1, \quad H_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad \Lambda_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0,$$

a współrzędne obrotu  $\omega_2$  będą

$$(2) \quad \Xi_2 = \omega_2 \cos \varphi, \quad H_2 = \omega_2 \sin \varphi, \quad Z_2 = 0, \quad \Lambda_2 = -\delta \omega_2 \sin \varphi, \\ M_2 = \delta \omega_2 \cos \varphi, \quad N_2 = 0.$$

Z tych wartości wynikają współrzędne skrętu wypadkowego

$$(3) \quad \Xi = \omega_1 + \omega_2 \cos \varphi, \quad H = \omega_2 \sin \varphi, \quad Z = 0, \quad \Lambda = -\delta \omega_2 \sin \varphi, \\ M = \delta \omega_2 \cos \varphi, \quad N = 0.$$

Ponieważ dla skrętu wypadkowego mamy  $Z = 0$  i  $N = 0$ , przeto okazuje się naprzód, że oś centralna przecina najkrótszą odległość osi obu dwu obrotów pod kątem prostym. Niech oś centralna  $S$  przecina tę najkrótszą odległość w punkcie  $s$ , i przyjmijmy  $\delta_1 = o_1s$ ,  $\delta_2 = so_2$ ; wtedy  $\delta_1$  i  $\delta_2$  przedstawiają odpowiednio najkrótsze odległości osi  $S$  od osi  $O_1$  i od osi  $O_2$ . Aby wyznaczyć  $\delta_1$  i  $\delta_2$ , szukajmy, według 1-go z równań (14) art. 30-go, równania rzutu osi centralnej na płaszczyznę  $xz$ ; to równanie będzie:  $H\delta_1 + (\Lambda - \lambda \cdot \Xi) = 0$ , gdzie  $\lambda$  jest wskaźnikiem skrętu wypadkowego. Niech  $\kappa$  będzie parametrem,  $\omega$  prędkością kątową, a  $v$  prędkością ruchu postępowego tego skrętu; mamy tu

$$(4) \quad \kappa = \Xi \Lambda + H M + Z N = -\delta \cdot \omega_1 \omega_2 \sin \varphi, \quad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \omega_2 \cos \varphi,$$

$$(5) \quad \lambda = \frac{\kappa}{\omega^2} = -\delta \cdot \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2} \sin \varphi, \quad v = -\delta \cdot \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega} \sin \varphi,$$

a więc

$$\delta_1 = \frac{\delta}{\omega^2} \omega_2 (\omega_2 + \omega_1 \cos \varphi),$$

z czego wynika

$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = \frac{\delta}{\omega^2} \cdot \omega_1 (\omega_1 + \omega_2 \cdot \cos \varphi),$$

a przeto

$$(6) \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_2 + \omega_1 \cos \varphi}{\omega_1 + \omega_2 \cos \varphi}.$$

Oznaczmy odpowiednio przez  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  kąty, które  $S$  tworzy z  $O_1$  i  $O_2$ ; wtedy

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega_2 \sin \varphi}{\omega_1 + \omega_2 \cos \varphi}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{\omega_1 \sin \varphi}{\omega_2 + \omega_1 \cos \varphi}.$$

Wstawiając stąd  $\omega_1 + \omega_2 \cos \varphi$  i  $\omega_2 + \omega_1 \cos \varphi$  w równanie (6), otrzymamy ostatecznie ciekawy związek

$$(7) \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2},$$

który pozwala wyznaczyć punkt  $s$ , a tym samym położenie osi centralnej w przestrzeni, jeżeli jej kierunek został poprzednio wyznaczony.

Dwa obroty około osi skośnych możemy z sobą złożyć bez użycia współrzędnych. Niech  $O_1$  i  $O_2$  (fig. 17) będą danymi osiami,  $\delta = o_1 o_2$  ich najkrótszą

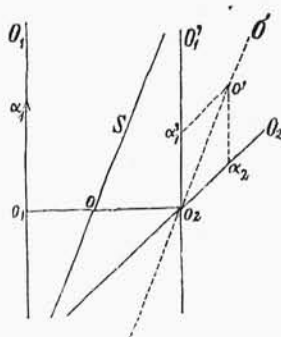


Fig. 17.

odległością, a odcinki  $\omega_1 = o_1 a_1$  i  $\omega_2 = o_2 a_2$  niech przedstawiają odpowiednie prędkości kątowe. Poprowadziwszy przez  $o_2$  prostą  $O'_1$ , równoległą do  $O_1$ , dodajmy do danych ruchów dwa obroty  $\omega_1$  i  $-\omega_1$  około prostej  $O'_1$ . Obroty  $\omega_2$  około  $O_2$  i  $\omega_1$  około  $O'_1$  wytworzą obrót z prędkością kątową  $\omega = o_2 o'$  około przekątnej  $O'$  równoległoboku  $o_2 a'_1 o' a_2$ ; obrót  $-\omega_1$  około  $O'_1$  i obrót  $\omega_1$  około  $O_1$  wywołają ruch postępowy (parę obrotów) z prędkością  $\delta \omega_1$ . Obrót  $\omega$  wraz z ruchem postępowym  $\delta \omega_1$ , który nie jest prostopadły do osi obrotu, sprawi skręt wypadkowy około prostej  $S$ , równoległej do  $O'$ , będącej zatem osią centralną danych obrotów. Każda prosta układu niezmiennego, ulegającego danym obrotom, zmienia miejsce swoje w przestrzeni, a oś centralna  $S$  jest jedyną prostą, posuwającą się wzdłuż siebie samą.

Wskutek obrotu chwilowego około  $O_1$  opisze prosta  $S$  element powierzchni hiperboloidy obrotowej, której osią jest  $O_1$ , i zajmie pewne miejsce  $S'$ ; prosta  $S'$ , wskutek obrotu około  $O_2$ , opisze element powierzchni drugiej hiperboloidy obrotowej, której osią jest prosta  $O_2$ . Ponieważ prosta  $S'$ ,

skutkiem tego ostatniego ruchu, schodzi się razem z prostą  $S$ , przeto obie hiperbolojdy są do siebie styczne wzdłuż tworzącej  $S$ . Wiadomo, że koła szyjne dwu hiperbolojd obrotowych, stycznych do siebie wzdłuż tworzącej, przecinają się w tym punkcie, w którym ta tworząca przecina najkrótszą odległość ich osi pod kątem prostym. Z tego wynika, że prosta  $S$  przecina w pewnym punkcie  $s$  najkrótszą odległość danych osi pod kątem prostym i że odcinki  $o_1s$  i  $o_2s$  przedstawiają promienie kół szyjnych tych hiperbolojd. Aby wyznaczyć punkt  $s$ , trzeba zauważyć, że on jest jedynym punktem na prostej  $o_1o_2$ , posuwającym się równolegle do przekątnej  $O'$ . Z tego warunku można wyznaczyć podany stosunek odcinków  $o_1s$  i  $o_2s$ , tudzież prędkość ruchu postępowego skreću chwilowego. Pozostawiamy to dochodzenie czytelnikowi.

**35. OBROTOWY SPRĘŻONE.** Skręt chwilowy lub układ skrętów (albo obrotów), którego parametr nie jest równy zeru, daje się nieskończenie wieloma sposobami zastąpić przez dwa obroty chwilowe około osi skośnych. Jakoż, niech  $\Xi, H, Z, \Lambda, M$  i  $N$  będą współrzędnymi danego układu skrętów, zaś  $\Xi', \dots, N'$ ;  $\Xi'', \dots, N''$  niech będą odpowiednio współrzędnymi dwu obrotów około osi skośnych  $O'$  i  $O''$ . Te dwa obroty będą równoważne danemu układowi skrętów, jeżeli dają ten sam skręt wypadkowy, co dany układ. Warunki zatem konieczne i dostateczne równoważności są:

$$(1) \quad \begin{cases} \Xi' + \Xi'' = \Xi, & H' + H'' = H, & Z' + Z'' = Z, \\ \Lambda' + \Lambda'' = \Lambda, & M' + M'' = M, & N' + N'' = N, \end{cases}$$

przyczym

$$(2) \quad \Xi'\Lambda' + H'M' + Z'N' = 0, \quad \Xi''\Lambda'' + H''M'' + Z''N'' = 0.$$

Do wyznaczenia tych dwu obrotów potrzeba 12-u współrzędnych, między którymi zachodzi tylko 8 związków, wyrażonych zapomocą równań (1) i (2); możemy zatem 4 współrzędne dowolnie obrać, a wtedy obadwa obroty będą wyznaczone. Z tego okazuje się, że możemy nieskończenie wieloma sposobami wyznaczyć takie dwa obroty około dwu skośnych osi, które są równoważne danemu układowi skrętów. Równania (1) pokazują, że parametr tych dwu obrotów jest równy parametrowi danego układu skrętów. Uwzględniając znaczenie geometryczne parametru, możemy powiedzieć: *jakimkolwiek sposobem zastąpimy układ skrętów lub obrotów, którego parametr nie jest równy zeru, dwoma obrotami około osi skośnych, objętość czworosiannu, wystawionego, jako na krawędziach przeciwnych, na prędkościach kątowych tych dwu obrotów, odciętych na ich osiach, jest stała* (twierdzenie Charles'a).

Dwa obroty około osi skośnych, które łącznie są równoważne pewnemu układowi skrętów lub obrotów chwilowych, nazywamy obrotami sprzężonymi względem układu ruchów, a ich osi sprzężonymi osiami obrotu.

Parametr dwu obrotów rozważanych wynosi

$$(3) \quad \kappa = \Xi'\Lambda'' + H'M'' + Z'N'' + \Xi''\Lambda' + H''M' + Z''N'.$$

Wyrugujmy z tego równania współrzędne obrotu około osi  $O''$  za pośrednictwem równań (1) i (2); otrzymamy

$$(4) \quad \Xi \Lambda' + H M' + Z N' + \Lambda \Xi' + M H' + N Z' - \kappa = 0;$$

jeżeli zaś z równań (3) wyrugujemy podobnie współrzędne obrotu około osi  $O'$  to mieć będziemy

$$(5) \quad \Xi \Lambda'' + H M'' + Z N'' + \Lambda \Xi'' + M H'' + N Z'' - \kappa = 0.$$

Miedzy współrzednymi dwu obrotów sprzężonych względem danego układu skrętów (lub obrotów) a współrzednymi tego układu i jego parametrem zachodzą powyższe dwa związki (4) i (5).

Aby rozpoznać wzajemne położenie osi sprzężonych obrotu, przypomnijmy sobie, że moment dwu prostych, z których każdą określamy zapomocą 6-u współrzednych, wynosi (art. 33)

$$(6) \quad m_{12} = a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 + a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1;$$

jeżeli więc dwie proste przecinają się, to prawa strona tego równania jest równa zeru. Niech  $O'$  i  $O''$ , tudzież  $O_1'$  i  $O_1''$  oznaczają dwie pary osi sprzężonych obrotu względem danego układu skrętów (lub obrotów). Poprowadźmy prostą  $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ , przecinającą trzy osi  $O', O''$  i  $O_1'$ , i niech  $(\Xi_1', H_1', Z_1', \Lambda_1', M_1', N_1')$  i  $(\Xi_1'', H_1'', Z_1'', \Lambda_1'', M_1'', N_1'')$  oznaczają odpowiednio obroty około osi  $O_1'$  i  $O_1''$ . Na mocy tylkoco wypowiedzianej uwagi otrzymujemy trzy równania następujące:

$$(7) \quad \begin{cases} a \Lambda' + b M' + c N' + \alpha \Xi' + \beta H' + \gamma Z' = 0, \\ a \Lambda'' + b M'' + c N'' + \alpha \Xi'' + \beta H'' + \gamma Z'' = 0, \\ a \Lambda_1' + b M_1' + c N_1' + \alpha \Xi_1' + \beta H_1' + \gamma Z_1' = 0; \end{cases}$$

wiadomo bowiem (art. 33), że współrzedne osi obrotu są proporcjonalne względem współrzednych obrotu samego. Z dodania dwu pierwszych równań i uwzględnienia związków (1) wyniknie równanie

$$a \Lambda + b M + c N + \alpha \Xi + \beta H + \gamma Z = 0.$$

A jeżeli od niego odejmiemy ostatnie z równań (7), to otrzymamy

$$(8) \quad a \Lambda_1'' + b M_1'' + c N_1'' + \alpha \Xi_1'' + \beta H_1'' + \gamma Z_1'' = 0,$$

z czego się okazuje, że powyższa prosta przecina także oś  $O_1''$ . A zatem cztery proste  $O', O'', O_1'$  i  $O_1''$  mają takie położenie, że każda poprzeczna dla trzech z nich przecina także czwartą, t. j. *cztery proste, które po dwie są osiami sprzężonymi obrotu, należą do tegoż samego układu tworzących hiperbolojdy jednopowłokowej*.

**36. SPÓŁRZĘDNE JEDNORODNE SKRĘTU.** Niech prosta  $S$  o współrzednych  $a, b, c, \alpha, \beta$  i  $\gamma$  będzie osią skrętu o prędkości kątowej  $\omega$  i prędkości ruchu postępowego  $v$ ; gdy  $\lambda$  oznacza wskaźnik skrętu, jest  $v = \lambda \omega$ . Rozłożmy obrót  $\omega$  na trzy obroty,  $a\omega, b\omega$  i  $c\omega$ , około osi współrzednych i na trzy ruchy postępowe,  $\alpha\omega, \beta\omega$  i  $\gamma\omega$ , w kierunkach tych osi, a ruch postępo-

wy  $\lambda\omega$  rozłożmy na trzy,  $a\lambda\omega$ ,  $b\lambda\omega$  i  $c\lambda\omega$ , w kierunkach tych samych osi; wówczas współrzędne skrętu wyrażą się zapomocą wzorów

$$(1) \quad \begin{aligned} \Xi &= a\omega, & \Pi &= b\omega, & Z &= c\omega, & \Lambda &= (\alpha + \lambda a)\omega, & M &= (\beta + \lambda b)\omega, \\ & & & & & & & & N &= (\gamma + \lambda c)\omega. \end{aligned}$$

Kładąc  $\lambda = 0$ , otrzymalibyśmy odpowiednie wyrażenia dla współrzędnych obrotu.

Obierzmy w przestrzeni dowolnie sześć prostych  $O_i$ , ( $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ), gdzie  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ; łatwo okazać, że dany skręt można wogólności rozłożyć na sześć obrotów około tych prostych. Jakoż, jeżeli  $\omega_i$  oznacza prędkość kątową obrotu składowego około prostej  $O_i$ , do równoważności takich sześciu obrotów z danym skrętem potrzeba i wystarcza, żeby zachodziło następujących sześć równań (art. 32):

$$(2) \quad \begin{cases} a\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4 + a_5\omega_5 + a_6\omega_6, \\ b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4 + b_5\omega_5 + b_6\omega_6, \\ c\omega = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4 + c_5\omega_5 + c_6\omega_6, \\ (\alpha + \lambda a)\omega = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 + \alpha_4\omega_4 + \alpha_5\omega_5 + \alpha_6\omega_6, \\ (\beta + \lambda b)\omega = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 + \beta_4\omega_4 + \beta_5\omega_5 + \beta_6\omega_6, \\ (\gamma + \lambda c)\omega = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4 + \gamma_5\omega_5 + \gamma_6\omega_6. \end{cases}$$

Jeżeli ten układ równań liniowych rozwiążemy względem niewiadomych  $\omega_i$ , to otrzymamy prędkości kątowe szukanych sześciu obrotów około powyższych prostych, które to obroty są równoważne danemu skrętowi. Gdyby skręt miał być rozłożony na mniej, niż na sześć obrotów, natenczas rozwiązanie byłoby nie zawsze możliwe, ponieważ powyższe sześć równań zawierałoby mniej niż sześć niewiadomych, a możliwość rozłożenia skrętu zachodziłaby tylko przy szczególnych położeniach danych prostych.

Atoli dany skręt da się tylko wtedy rozłożyć na sześć obrotów około powyższych prostych, kiedy układowi skończonych wartości na stronach lewych równań (2) odpowiada także układ skończonych wartości sześciu niewiadomych  $\omega_i$ , a do tego potrzeba i wystarcza, aby wyznacznik tego układu równań nie był równy zeru \*). Jeżeli więc oznaczmy

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \end{vmatrix},$$

a sześć prostych  $O_i$  tak obierzemy, żeby ten wyznacznik, utworzony z ich współrzędnych, nie był równy zeru, natenczas możemy dany skręt jednym tylko

\*) Ob. *Teorię wyznaczników* M. A. Baranieckiego, Paryż, 1879, str. 281 i nast.



sposobem rozłożyć na sześć obrotów około tych prostych. Równania (2) wyznaczają wtedy prędkości kątowe tych obrotów. Gdy przyjmiemy  $\lambda = 0$ , to otrzymane wówczas z powyższych równania posłużą do rozłożenia danego obrotu na 6 obrotów około takich 6-u prostych. — O 6-u prostych, dla których powyższy wyznacznik  $\Delta$ , utworzony z ich współrzędnych, nie jest równy zeru, powiemy, że stanowią one układ osi niezależnych obrotu. Z powyższego więc wynika twierdzenie: *skręt (lub obrót) chwilowy daje się tylko jednym sposobem rozłożyć na sześć obrotów około sześciu osi niezależnych.*

Prędkości kątowe takich 6-u obrotów około osi niezależnych nazwiemy współrzędnymi jednorodnymi danego skrętu (lub obrotu) względem układu tychże osi. Dotąd rozkładaliśmy skręt (lub obrót) na 6 ruchów chwilowych, które jednak nie miały wyraźnej cechy jednorodności, chociaż one wynikały, jak zaraz okażemy, wskutek pewnego szczególnego sposobu rozkładania skrętu na 6 obrotów. Współrzędne bowiem  $\Lambda$ ,  $M$  i  $N$  oznaczały prędkości chwilowych ruchów postępowych w kierunkach osi współrzędnych, a ponieważ (art. 28) ruch postępowy chwilowy jest równoważny parze obrotów, czyli obrotowi około osi nieskończenie dalekiej z prędkością kątową równą zeru, przeto widzimy, że współrzędne  $\Lambda$ ,  $M$  i  $N$  można rozważać jako prędkości (lecz nie jako kątowe) trzech ruchów obrotowych około prostych w nieskończoności na płaszczyznach współrzędnych. Trzy osi współrzędnych razem z tymi trzema prostymi w nieskończoności stanowiły układ osi niezależnych obrotu.

Zamiast lewych stron równań (2) przyjmijmy w nich zera; otrzymane wtedy równania będą wyrażały warunki konieczne i wystarczające, aby sześć obrotów około prostych  $O_i$  się znosiło (art. 32). Jeżeli te proste stanowią układ osi niezależnych obrotu, natenczas otrzymanym równaniom uczynią zadość tylko wartości  $\omega_i = 0$  dla każdego wskaźnika  $i$ . Wynika stąd twierdzenie: *około sześciu osi niezależnych nie może istnieć sześć obrotów, któreby się wzajemnie znosiły*, co możemy także wyrazić inaczej: obrót około jednej z 6-u osi niezależnych nie da się rozłożyć na 5 obrotów około 5-u pozostałych osi. Sześć osi niezależnych ma zatem taki kierunek, że nie można wykreślić sześciokąta zamkniętego, którego boki były do nich równoległe, chociaż ta własność nie jest dostateczna do rozpoznania, czy 6 prostych stanowi układ osi niezależnych.

Z powyższego dowodzenia wynika także twierdzenie: *jeżeli około sześciu prostych nie może istnieć sześć obrotów, któreby się wzajemnie znosiły, natenczas te proste stanowią układ niezależnych osi obrotu*, a wtedy każdy skręt (lub obrót) można rozłożyć na obroty około tych prostych.

**37.** Przyjmijmy w równaniach (2) art. poprzedniego  $\lambda = 0$ ; wówczas będziemy mogli użyć tych równań do obliczenia współrzędnych jednorodnych obrotu chwilowego  $\omega$  około danej prostej  $O$ . Oznaczmy przez  $m_i$  moment prostej  $O$  (osi obrotu  $\omega$ ) względem prostej  $O_i$  (osi obrotu składowego  $\omega_i$ ), a przez  $m_{ik}$  moment prostej  $O_i$  względem prostej  $O_k$ ;  $m_{ik} = m_{ki}$ , a  $m_{ii} = 0$ . Pomnożmy równania (2), po przyjęciu w nich  $\lambda = 0$ , odpowiednio przez współrzędne  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a_1, b_1$  i  $c_1$  prostej  $O_1$  i dodajmy je następnie do



siebie, i uczynimy toż samo ze współrzednymi każdej z tych prostych; otrzymamy w ten sposób następujący układ równań:

$$(1) \quad \begin{cases} m_1\omega = m_{12}\omega_2 + m_{13}\omega_3 + m_{14}\omega_4 + m_{15}\omega_5 + m_{16}\omega_6, \\ m_2\omega = m_{21}\omega_1 + m_{23}\omega_3 + m_{24}\omega_4 + m_{25}\omega_5 + m_{26}\omega_6, \\ m_3\omega = m_{31}\omega_1 + m_{32}\omega_2 + m_{34}\omega_4 + m_{35}\omega_5 + m_{36}\omega_6, \\ m_4\omega = m_{41}\omega_1 + m_{42}\omega_2 + m_{43}\omega_3 + m_{45}\omega_5 + m_{46}\omega_6, \\ m_5\omega = m_{51}\omega_1 + m_{52}\omega_2 + m_{53}\omega_3 + m_{54}\omega_4 + m_{56}\omega_6, \\ m_6\omega = m_{61}\omega_1 + m_{62}\omega_2 + m_{63}\omega_3 + m_{64}\omega_4 + m_{65}\omega_5. \end{cases}$$

Z tych równań można obliczyć współrzedne jednorodne danego obrotu, znając momenty osi tego obrotu względem osi obrotów składowych; tudzież momenty tych osi względem siebie. Wyznacznik układu równań (1) jest symetryczny.

Pomnożmy równania (2) art. poprzedniego odpowiednio przez współrzedne  $\alpha, \beta, \gamma, a, b$  i  $c$  osi  $O$  obrotu  $\omega$  i dodajmy iloczyny; wyniknie stąd związek między współrzednymi obrotu

$$(2) \quad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4 + m_5\omega_5 + m_6\omega_6 = 0.$$

Jeżeli zaś to równanie pomnożymy przez  $\omega$  i oznaczymy przez  $\mu_i$  moment danego obrotu  $\omega$  względem osi  $O_i$ , to otrzymamy nowy związek,

$$(3) \quad \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \mu_3\omega_3 + \mu_4\omega_4 + \mu_5\omega_5 + \mu_6\omega_6 = 0.$$

Obierzmy w przestrzeni dowolną prostą ( $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ ), pomnożmy równania (2) art. poprzedniego odpowiednio przez jej współrzedne  $a', b', c', \alpha', \beta'$  i  $\gamma'$  i następnie te równania do siebie dodajmy; oznaczwszy przez  $M$  moment osi  $O$ , a przez  $M_i$  moment osi  $O_i$  względem tej prostej, otrzymamy równanie

$$(4) \quad M\omega = M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3 + M_4\omega_4 + M_5\omega_5 + M_6\omega_6,$$

które wyraża znane twierdzenie, że moment danego obrotu względem jakiegokolwiek prostej jest równy sumie algebricznej momentów jego obrotów składowych względem tejże prostej.

Do rozkładu obrotu można użyć jakiegokolwiek czworościanu, albowiem 6 krawędzi tej bryły stanowi zawsze układ osi niezależnych obrotu. Jakoż, niech ABCD (fig. 18) będzie czworościanem dowolnym; oznaczmy odpowiednio przez 1, 2; 3, 4; 5, 6 jego krawędzi przeciwległe AB, CD; BC, DA; BD, AC. Trzy obroty około krawędzi 1, 3 i 5, schodzących się w wierzchołku B, dają obrót wypadkowy około osi, która przechodzi przez ten wierzchołek; a trzy obroty około krawędzi 2, 4 i 6, leżących na ścianie ACD, dają obrót wypadkowy około osi, która znajduje się na tej ścianie. Ponieważ osi tych dwu obrotów wypadkowych nie mogą stanowić jednej prostej, przeto te dwa obroty nie mogą się znosić, a zatem

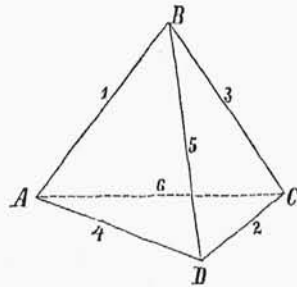


Fig. 18.

nie może istnieć 6 obrotów około krawędzi czworoscianu, któreby się znosiły, z czego wnosimy (art. 36), że te krawędzi stanowią układ niezależnych osi obrotu.

Spomiędzy momentów  $m_{ik}$  względem krawędzi czworoscianu tylko  $m_{12}$ ,  $m_{34}$  i  $m_{56}$  są różne od zera, a wszystkie inne są równe zero. Otrzymamy zatem z układu (1) następujące równania dla krawędzi czworoscianu:

$$(5) \quad \begin{cases} m_1\omega = m_{12}\omega_2, & m_2\omega = m_{12}\omega_1, & m_3\omega = m_{34}\omega_4, \\ m_4\omega = m_{34}\omega_3, & m_5\omega = m_{56}\omega_6, & m_6\omega = m_{56}\omega_5, \end{cases}$$

z których możemy obliczyć spółrzędne jednorodne  $\omega_i$  danego obrotu  $\omega$  względem krawędzi czworoscianu.

Pomnóżmy te równania odpowiednio przez  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ ,  $\omega_5$  i  $\omega_6$  i dodajmy iloczyny; otrzymamy

$$\omega(m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4 + m_5\omega_5 + m_6\omega_6) = \\ = 2(\omega_1\omega_2 \cdot m_{12} + \omega_3\omega_4 \cdot m_{34} + \omega_5\omega_6 \cdot m_{56}),$$

a zatem, według (2),

$$(6) \quad \omega_1\omega_2 \cdot m_{12} + \omega_3\omega_4 \cdot m_{34} + \omega_5\omega_6 \cdot m_{56} = 0.$$

Równania (5) możemy tak napisać:

$$(7) \quad \mu_1 = m_{12}\omega_1, \mu_2 = m_{12}\omega_2, \mu_3 = m_{34}\omega_3, \mu_4 = m_{34}\omega_4, \mu_5 = m_{56}\omega_5, \mu_6 = m_{56}\omega_6;$$

a jeżeli wartości na  $\omega_i$  z tych równań wstawimy w (6), to wyniknie związek między momentami,

$$(8) \quad \frac{\mu_1\mu_2}{m_{12}} + \frac{\mu_3\mu_4}{m_{34}} + \frac{\mu_5\mu_6}{m_{56}} = 0.$$

Oznaczmy przez  $V$  objętość czworoscianu; jak wiadomo

$$6V = m_{12} \cdot AB \cdot CD = m_{34} \cdot BC \cdot DA = m_{56} \cdot BD \cdot AC.$$

Podstawmy  $m_{12}$ ,  $m_{34}$  i  $m_{56}$  z tych równań w równania (6) i (8); otrzymamy

$$(9) \quad \frac{\omega_1}{AB} \cdot \frac{\omega_2}{CD} + \frac{\omega_3}{BC} \cdot \frac{\omega_4}{DA} + \frac{\omega_5}{BD} \cdot \frac{\omega_6}{AC} = 0,$$

$$(10) \quad \mu_1 \cdot AB \times \mu_2 \cdot CD + \mu_3 \cdot BC \times \mu_4 \cdot DA + \mu_5 \cdot BD \times \mu_6 \cdot AC = 0.$$

## Ć W I C Z E N I A.

(1) Wypadkowa obrotów o skończonych odchyleniach zależy od porządku, w jakim składamy. Niech osi  $O_1$  i  $O_2$  dwu obrotów z odchyleniami skończonymi  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  przecinają się w punkcie  $o$ , i niech te obroty będą udzielone układowi niezmiennemu w porządku wskaźników; ruch wypadkowy będzie obrotem około

pewniej osi  $O$ , przechodzącej przez punkt  $o$ . Osi  $O_1$ ,  $O_2$  i  $O$  tworzą kąt bryłowy, którego kąt dwuścienny przy  $O_1 = \frac{\varphi_1}{2}$  w kierunku przeciwnym obrotowi  $\varphi_1$ , a kąt dwuścienny przy  $O_2 = \frac{\varphi_2}{2}$  w kierunku obrotu  $\varphi_2$ , licząc obadwa kąty od ściany, przechodzącej przez osi  $O_1$  i  $O_2$ . Odchylenie wypadkowe jest równe podwójnemu kątowi dwuściennemu zewnętrznemu przy krawędzi  $O$ . Dowieść tych twierdzeń i wyprowadzić z nich skład obrotów elementarnych.

(2). Dokonać składu dwu obrotów z odchyleniami skończonymi około równoległych osi, i na mocy tego okazać, że para takich obrotów sprawia ruch postępowy. —

Następujące zadania odnoszą się do ruchów chwilowych.

(3). Na płaszczyźnie, przesuniętej dowolnie przez oś obrotu, obierzmy 3 punkty  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  na jednej prostej i oznaczmy odpowiednio przez  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  i  $\mu_3$  momenty tego obrotu względem tych punktów; okazać, że

$$\mu_1 \cdot A_2 A_3 + \mu_2 \cdot A_3 A_1 + \mu_3 \cdot A_1 A_2 = 0.$$

(4). Obierzmy na powyższej płaszczyźnie 4 punkty  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  i  $A_4$ , z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej, i oznaczmy momenty odpowiednio przez  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  i  $\mu_4$ ; wówczas

$$\mu_1 \cdot A_4 A_2 A_3 + \mu_2 \cdot A_4 A_3 A_1 + \mu_3 \cdot A_4 A_1 A_2 + \mu_4 \cdot A_3 A_2 A_1 = 0,$$

gdzie  $A_4 A_2 A_3$  i t. d. oznaczają pola odpowiednich trójkątów, a porządek wskaźników określa obieg trójkąta i znak jego pola.

(5). Dowieść twierdzenia, że moment wypadkowy momentów dwu obrotów, stanowiących parę obrotów, względem każdego punktu w przestrzeni jest stały i równy momentowi tej pary obrotów. I nawzajem, jeżeli moment wypadkowy momentów dwu obrotów względem każdego punktu w przestrzeni jest stały, to te obroty stanowią parę obrotów.

(6). Okazać, że punkty końcowe odcinków, przedstawiających momenty danego obrotu względem punktów tej samej prostej, leżą na pewnej prostej, a punkty końcowe odcinków, przedstawiających momenty obrotu względem punktów tejże samej płaszczyzny, leżą na pewnej płaszczyźnie.

(7). Okazać, że proste, przez dany punkt przechodzące, względem których układ obrotów posiada ten sam moment, tworzą stożek rzędu 2-go, i znaleźć warunek, aby ten stożek stawał się płaszczyzną.

(8). Okazać następującą własność osi sprzężonych obrotu: jeżeli jedna oś obrotu przechodzi przez punkt dany, to oś sprzężona leży na pewnej płaszczyźnie, przez ten punkt przechodzącej.

(9). Dane są dwie proste  $S_1$  i  $S_2$ , przecinające się pod kątem prostym w punkcie  $s$ ; prosta  $S_1$  jest osią skreću o stałym wskaźniku  $\lambda_1$ , a prosta  $S_2$  jest osią skreću o stałym wskaźniku  $\lambda_2$ . Przyjmując, że układowi niezmiennemu około tych osi udzieliliśmy skrećów chwilowych ze zmiennymi prędkościami kątowymi (jednak przy stałych wskaźnikach  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ ), wyznaczyć miejsce geometryczne osi skrećów wypadkowych. [Szukanym miejscem jest powierzchnia skośna rzędu 3-go, nazwana przez

Cayley'ego cylindroidą, a należąca do tak zwanych powierzchni konoidalnych. Jeżeli proste  $S_1$  i  $S_2$  obierzemy odpowiednio jako osi  $x$  i  $y$ , a prostopadłą do nich w punkcie  $s$  jako oś  $z$ , to równanie cylindroidy będzie

$$z(x^2 + y^2) - (\lambda_1 - \lambda_2)xy = 0.]$$

(10). Okazać następujące własności cylindroidy: a) cylindroida rozciąga się do nieskończoności między płaszczyzną  $z = +\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$  a płaszczyzną  $z = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$ ; b) płaszczyzna, prostopadła do osi  $z$ , przecina cylindroidę podług dwu prostych tworzących; c) płaszczyzna, styczna do cylindroidy, przecina tę powierzchnię podług elipsy, której rzut na płaszczyznę  $xy$  jest kołem. Różnica kwadratów osi każdej takiej elipsy jest stała.

---