

$$\gamma^{(n)} = \frac{d^{n+1}s}{dt^{n+1}}.$$

Stosownie do tego określenia prędkość należy przyjmować jako przyspieszenie rzędu zero, przyspieszenie zaś w ściślejszym znaczeniu jako przyspieszenie rzędu pierwszego. Przyspieszenie rzędu  $n$ -go jest granicą stosunku przyrostu przyspieszenia rzędu  $(n-1)$ -go w elemencie czasu, do tego elementu czasu, gdy oba wyrazy stosunku zdążają do zera. Przyrost przyspieszenia rzędu  $(n-1)$  go w elemencie czasu zowiemy przyspieszeniem elementarnym rzędu  $n$ -go; możemy zatem przyspieszenie rzędu  $n$ -go określić także jako granicę stosunku przyspieszenia elementarnego rzędu  $n$ -go do elementu czasu. Jeżeli  $v$  jest prędkością, to  $dv$  jest przyspieszeniem elementarnym ruchu rzędu 1-go, a zatem  $\frac{dv}{dt}$  przyspieszeniem rzędu 1-go. Z wiadomego przyspieszenia rzędu  $n$ -go otrzymujemy drogę wskutek  $(n+1)$ -krotnego całkowania, a stałe całkowania wyznaczamy z wiadomych warunków początkowych.

Z powyższych określeń widzimy, iż z danego związku między drogą a czasem możemy rozpoznać wszelkie cechy ruchu, a gdyby ten związek nie był wprost dany, należy go wyznaczyć przez całkowanie, aby potem dochodzić własności ruchu.

**10. RUCH KRZYWOLINIOWY.** Poznajemy cechy i własności krzywoliniowego ruchu punktu przez rozkład tego ruchu na ruchy elementarne, odbywające się w nieskończenie małych przedziałach czasu.

Granica kierunku prostej, która łączy miejsce punktu w czasie  $t$  z bezpośrednio następującym miejscem jego w czasie  $t+dt$ , wyznacza kierunek ruchu tego punktu. Ponieważ granicą tej prostej jest styczna do toru punktu, przesunięta w miejscu, które punkt zajmuje w czasie  $t$ , przeto ta styczna wyznacza kierunek ruchu. W elemencie czasu przyjmujemy ruch jako prostoliniowy; skoro zatem punkt do końca czasu  $t$  opisał drogę  $s$ , a w czasie  $dt$  drogę  $ds$ , to prędkość tego ruchu elementarnego w kierunku stycznej według poprzednich określeń będzie:

$$(1) \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Tę wielkość nazywamy prędkością krzywoliniowego ruchu punktu w tym miejscu na torze, które odpowiada obranej wartości dla  $t$ . Drogę  $s$  liczymy przytym od pewnego, zresztą dowolnie obranego, miejsca na torze poruszającego się punktu. Określenie prędkości, jako pierwszej pochodnej drogi względem czasu, stosuje się zatem do każdego ruchu punktu, jeżeli tylko kierunek ruchu przyjmujemy zarazem jako kierunek prędkości. Jeżeli prędkość jest stała, to ruch nazywamy jednostajnym, bez względu na tor poruszającego się punktu. Wszystkie twierdzenia o ruchu prostoliniowym i jednostajnym możemy zastosować do ruchu elementarnego na linii krzywój.

Niech  $x, y$  i  $z$  będą spólrzędnymi prostokątnymi miejscem poruszającego się punktu, które on zajmuje w czasie  $t$ ; wówczas  $x+dx, y+dy$  i  $z+dz$  będą spólrzędnymi jego miejsca sąsiedniego w czasie  $t+dt$ , a różniczki  $dx,$

$dy$  i  $dz$  oznaczają drogi, jakie rzuty tego punktu opisują na osiach współrzędnych w przedziale  $dt$  czasu. Z tego wynika, że rzuty prędkości  $v$  na osi współrzędnych wyrażają się wzorami

$$(2) \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

z których wynika nowe wyrażenie prędkości ruchu

$$(3) \quad v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Ten wzór daje wartość, a równania (2) wyznaczają kierunek prędkości. Stosujemy powyższe wzory wtedy, kiedy ruch punktu określony jest zapomocą trzech równań

$$(4) \quad x = F_1(t), \quad y = F_2(t), \quad z = F_3(t),$$

dozwalających wyznaczyć miejsce punktu w każdym czasie, a które nazywamy równaniami ruchu. Rugując z tych równań parameter  $t$ , otrzymamy dwa równania między  $x$ ,  $y$  i  $z$ , które wyznaczają tor punktu. Rugowanie czasu nie jest atoli koniecznie potrzebne; możemy bowiem dochodzić własności linii krzywój, której współrzędne punktowe są funkcjami pewnego parametru, zachowując ów parametr w toku rachunku. —

Pochodne  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  mają znaczenie składowych prędkości punktu, branych w kierunkach osi współrzędnych. Wyznaczywszy te pochodne z równań ruchu, możemy ruch punktu w każdej chwili rozłożyć na trzy ruchy elementarne w kierunkach osi, i nawzajem, z prędkości tych ruchów możemy wyznaczyć prędkość punktu, składając je wiadomym sposobem (art. 4). Takie postępowanie sprowadza badanie ruchu krzywoliniowego do badania trzech jednoczesnych ruchów prostoliniowych w danych kierunkach, co przedstawia wielkie korzyści.

Każdą z powyższych pochodnych nazywamy prędkością punktu w kierunku odpowiedniej osi współrzędnych. Jeżeli osi współrzędnych stanowią układ nieprostokątny, to i wtedy pochodne współrzędnych względem czasu przedstawiają także składowe prędkości w kierunkach osi (art. 3), a prędkość punktu może być z tych składowych obliczona.

Prędkość punktu możemy także obliczyć, znając jego współrzędne biegunowe. Niechaj tymi współrzędnymi punktu będą: promień wodzący  $r$ , kąt  $\varphi$ , który promień wodzący tworzy z osią  $z$ , i kąt  $\theta$ , który ślad płaszczyzny, przesuniętej przez  $r$  i oś  $z$ , na płaszczyźnie  $xOy$  tworzy z osią  $x$ . Używając słownictwa geograficznego, możemy kąt  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  nazwać szerokością, a kąt  $\theta$  długością punktu; płaszczyzna, przesunięta przez  $r$  i oś  $z$ , jest południkiem tego punktu, a płaszczyzna  $xOz$  południkiem pierwszym. Co się zaś tyczy kierunków, to  $r$  liczymy zawsze od początku układu ku punktowi  $m$ , kąt  $\varphi$

liczymy od dodatniej części osi  $z$  do promienia  $r$ , a kąt  $\theta$  liczymy na płaszczyźnie  $xOy$  (na równiku) od dodatniej części osi  $x$  ku dodatniej części osi  $y$ . Między współrzędnymi  $x, y, z$  i  $r, \theta, \varphi$  mamy związki:

$$(5) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

Rozłożmy prędkość  $v$  na trzy prędkości wzajemnie do siebie prostopadłe; mianowicie na:  $v_r$  wzdłuż promienia wodzącego  $r$ ,  $v_p$  wzdłuż prostopadłej  $p$  do tego promienia na płaszczyźnie południka punktu  $m$ ,  $v_\pi$  wzdłuż prostopadłej  $\pi$  do tych dwu prostych. Jeżeli przez  $(l, \lambda)$  oznaczymy kąt, zawarty między dodatnimi kierunkami dwu prostych  $l$  i  $\lambda$ , to dostawy kierunkowe prostych  $r, p$  i  $\pi$  wyrażą się wzorami:

$$(6) \quad \begin{cases} \cos(r, x) = \cos \theta \sin \varphi, & \cos(p, x) = \cos \theta \cos \varphi, & \cos(\pi, x) = -\sin \theta, \\ \cos(r, y) = \sin \theta \sin \varphi, & \cos(p, y) = \sin \theta \cos \varphi, & \cos(\pi, y) = \cos \theta, \\ \cos(r, z) = \cos \varphi, & \cos(p, z) = -\sin \varphi, & \cos(\pi, z) = 0. \end{cases}$$

Różniczkując równania (5) względem  $t$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} - r \cdot \sin \theta \sin \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{dr}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= r \cdot \sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{dr}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= -r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \cdot \frac{dr}{dt}, \end{aligned}$$

a obliczając następnie przy pomocy wzorów (6) z tych składowych prędkości  $v$  rzuty jej na proste  $r, p, \pi$ , otrzymamy nowe składowe prędkości  $v$ , wyrażone przy pomocy pochodnych współrzędnych biegunowych punktu,

$$(7) \quad \begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt}, \\ v_p = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \\ v_\pi = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

Możemy te składowe obliczyć bezpośrednio, bez pomocy współrzędnych prostokątnych. Prowadząc z punktu  $m$  owe trzy proste  $r, p, \pi$ , obierzmy na krzywej ( $m$ ) punkt nieskończenie bliski  $m'$  o współrzędnych  $r + dr, \varphi + d\varphi, \theta + d\theta$ ; współrzędnymi więc punktu  $m'$  względem układu owych trzech prostych będą:  $dr, r \cdot d\varphi, r \cdot d\theta \cdot \sin \varphi$ . Te współrzędne wyobrażają rzuty drogi elementarnej  $mm'$  na te trzy proste; dzieląc zatem każdą z nich przez element czasu, otrzymamy odpowiednie prędkości  $v_r, v_p, v_\pi$ .

Jeżeli punkt opisuje krzywą płaską, to w jej płaszczyźnie obierzmy oś biegunową; wtedy  $\theta = 0$ , a zatem  $v_\pi = 0$ . Otrzymamy wówczas

$$(8) \quad v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_p = r \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

jako prędkości punktu w kierunku promienia wodzącego i w kierunku prostopadłym do promienia.

Ze wzorów (7) i (8) wynika następujące wyrażenie prędkości  $v$ ,

$$(9) \quad v^2 = v_r^2 + v_p^2 + v_\pi^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left[ \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin^2 \varphi \right],$$

a wrazie ruchu po krzywej płaskiej

$$(10) \quad v^2 = v_r^2 + v_p^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Równaniami ruchu nazywamy tu równania

$$(11) \quad r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t),$$

określające współrzędne biegunowe poruszającego się punktu w funkcji czasu.

Miedzy składowymi  $v_r$ ,  $v_p$ ,  $v_\pi$  prędkości  $v$ , a jej składowymi  $v_r$ ,  $v_p$ ,  $v_\pi$  zachodzi ta ważna różnica, że kierunki pierwszych są stałe, podczas gdy kierunki drugich składowych zmieniają się ze zmianą miejsca punktu podczas ruchu.

**11.** Podobnie jak pojęcie prędkości, tak pojęcie przyspieszenia daje się przenieść z ruchu prostoliniowego na ruch krzywoliniowy.

Przypuśćmy, że punkt opisuje linią krzywą ( $m$ ) (fig. 5a) i przy końcu czasu  $t$  znajdzie się w miejscu  $m$ , posiadając w kierunku stycznej do toru prędkość  $v$ , i że po upływie elementu czasu  $dt$  przybywa do miejsca sąsiedniego  $m'$  z prędkością w kierunku stycznej do toru  $V = v + dv$ , różniącą się co do kierunku i wielkości nieskończenie mało od prędkości  $v$ . Wykreślmy na fig. 5b z dowolnego punktu  $O$  obie prędkości i rozłóżmy  $V$  na dwie składowe, z których jedna niech będzie  $v$ ; wówczas druga składowa będzie nieskończenie mała i ona przedstawi widocznie tę prędkość, której punkt nabywa w elemencie czasu  $dt$  i wskutek której prędkość  $v$  przybiera co do wielkości i kierunku wartość  $V$ . Ten nieskończenie mały przyrost prędkości w elemencie czasu nazywamy przyspieszeniem elementarnym ruchu punktu

w miejscu  $m$ , jakie ten punkt zajmuje przy końcu czasu  $t$ , a granicę stosunku przyspieszenia elementarnego do elementu czasu, w którym ono zachodzi, nazywamy przyspieszeniem ruchu w punkcie  $m$ . Gdy prędkości  $v$  i  $V$  rozważać będziemy w ich położeniach właściwych na stycznych do toru w punktach  $m$  i  $m'$ , to płaszczyzna, przez nie przesunięta, jest płaszczyzną ściśle-

Fig. 5a.

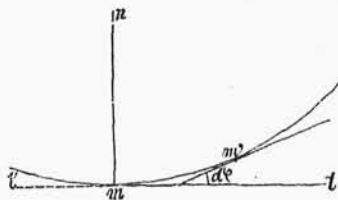
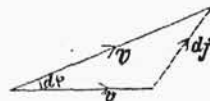


Fig. 5b



styczną do toru w punkcie  $m$ ; a ponieważ prędkość  $V$  jest wypadkową prędkości  $v$  i przyspieszenia elementarnego, przeto okazuje się, że przyspieszenie elementarne leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru punktu poruszającego się.

Aby wyznaczyć to przyspieszenie, obierzmy płaszczyznę ściśle styczną do  $(m)$  w punkcie  $m$  jako płaszczyznę rysunku i wystawmy na nią w punkcie  $m$  dwie osi współrzędnych: oś  $mt$  w kierunku stycznej czyli prędkości  $v$ , i oś  $mn$  w kierunku normalnej głównej ku środkowi krzywizny toru. Prędkość  $V$  czyni z osią  $mt$  kąt nieskończenie mały  $d\varphi$ , który liczymy od tej osi ku osi  $mn$ ; jest on kątem krzywizny toru  $(m)$  w punkcie uważanym. Rozłóżmy prędkość  $V$  na dwie składowe,  $V_t$  i  $V_n$  w kierunkach osi  $mt$  i  $mn$ ; natenczas

$$V_t = V \cdot \cos d\varphi, \quad V_n = V \cdot \sin d\varphi,$$

a jeżeli wstawimy  $V = v + dv$  i odrzucimy wielkości nieskończenie małe względem elementu czasu  $dt$ , to otrzymamy

$$V_t = v + dv, \quad V_n = (v + dv) d\varphi = v \cdot d\varphi.$$

Rozłóżmy podobnie prędkość  $v$  na składowe  $v_t$  i  $v_n$ ; wtedy  $v_t = v$ ,  $v_n = 0$ . Oznaczmy teraz przez  $dj$  szukane przyspieszenie elementarne, a przez  $dj_t$  i  $dj_n$  jego rzuty na osi współrzędnych; z poprzedniego określenia wynika, że wtedy

$$(1) \quad dj_t = V_t - v_t = dv, \quad dj_n = V_n - v_n = v \cdot d\varphi,$$

a zatem

$$(2) \quad dj = \sqrt{dj_t^2 + dj_n^2} = \sqrt{dv^2 + v^2 \cdot d\varphi^2}.$$

Jeżeli  $(dj, v)$  oznacza kąt, jaki kierunek przyspieszenia elementarnego tworzy z kierunkiem prędkości, to

$$(3) \quad \text{tang}(dj, v) = \frac{dj_n}{dj_t} = \frac{v \cdot d\varphi}{dv},$$

a jeżeli przyspieszenie oznaczmy przez  $\gamma$ , to

$$(4) \quad \gamma = \frac{dj}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + v^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}, \quad \text{tang}(\gamma, v) = \frac{v \cdot d\varphi}{dv}.$$

Z tych równań okazuje się naprzód, że przyspieszenie elementarne jest wielkością nieskończenie małą tego samego rzędu, co element czasu  $dt$ . Dalej widzimy, że kierunek przyspieszenia elementarnego, który zarazem jako kierunek przyspieszenia uważać należy, tworzy z kierunkiem prędkości kąt, mający wielkość skończoną, który tylko w przypadkach szczególnych może przyjąć wartość zero. Jeżeli bowiem ruch punktu jest ciągły względem czasu, to kąt  $(\gamma, v)$  będzie zerem, gdy  $d\varphi = 0$ , co miejsce mieć będzie dla ruchu prostoliniowego, a dla ruchu po linii krzywej zachodzić może tylko w punkcie przegięcia. Z wyjątkiem więc tych dwu przypadków nie ma przyspieszenie kierunku prędkości. Jeżeli przyrost  $dv$  prędkości jest dodatni, to kierunek przyspieszenia przypada wewnątrz kąta prostego  $tmn$ , zawartego między kierunkiem

prędkości a kierunkiem normalnej głównej. Jeżeli zaś  $dv$  jest ujemne, wtedy kierunek przyspieszenia przypada wewnątrz kąta prostego  $t'mn$ , utworzonego przez przedłużenie kierunku prędkości z kierunkiem normalnej głównej. Widzimy bowiem z równań (1), że rzut  $dj_t$  przyspieszenia elementarnego na styczną ma ten sam znak, co różniczka  $dv$ , a rzut  $dj_n$  tego przyspieszenia na normalną główną ma zawsze znak dodatny.

Rozłożyliśmy przyspieszenie elementarne na dwie składowe prostokątne. Jedna składowa  $dj_t$  ma kierunek stycznej do toru ( $m$ ) w punkcie  $m$  i dlatego zwiemy ją przyspieszeniem elementarnym stycznym; druga zaś składowa  $dj_n$  ma kierunek normalnej głównej ku środkowi krzywizny toru i dlatego zwiemy ją przyspieszeniem elementarnym normalnym, lub dośrodkowym. Granicę stosunku przyspieszenia elementarnego stycznego do elementu czasu nazywamy odpowiednio przyspieszeniem stycznym, a granicę stosunku przyspieszenia elementarnego normalnego do elementu czasu nazywamy przyspieszeniem normalnym, albo dośrodkowym ruchu w punkcie  $m$ . Oznaczywszy te przyspieszenia odpowiednio przez  $\gamma_t$  i  $\gamma_n$ , mamy

$$(5) \quad \gamma_t = \frac{dj_t}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \gamma_n = \frac{dj_n}{dt} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

$$(6) \quad \gamma = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2}.$$

Niech  $ds$  oznacza drogę elementarną  $mm'$ , a  $\rho$  promień krzywizny toru w punkcie  $m$ ; wtedy  $ds = \rho \cdot d\varphi$ , a zatem  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$ , z czego wynika:

$$(7) \quad \gamma_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} = \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^4}.$$

Z tych równań widzimy, że przyspieszenie normalne jest proporcjonalne względem kwadratu prędkości ruchu punktu i względem krzywizny jego toru, że zatem do obliczenia tego przyspieszenia nie wystarcza sama znajomość związku między drogą a czasem, lecz trzeba znać koniecznie kształt toru ( $m$ ). Z równania (5) okazuje się, że przyspieszenie styczne zależy tylko od związku między drogą a czasem.

Przyspieszenie styczne znika i tylko wtenczas zniknąć może, gdy  $dv = 0$ , to znaczy, gdy ruch jest jednostajny. Przy ruchu po linii prostej niema wcale przyspieszenia normalnego, bo  $\frac{1}{\rho} = 0$ , a przy ruchu krzywoliniowym znika przyspieszenie normalne tylko w punktach przegięcia, t. j. w tych miejscach na torze, w których kierunek ruchu pozostaje ten sam przez dwa elementy czasu, po sobie następujące. Gdzie tylko podczas ruchu zachodzi zmiana kierunku prędkości, tam przyspieszenie normalne zawsze się pojawia. Możemy zatem powiedzieć, iż *obie zmiany prędkości od punktu do punktu, zachodzące co do wielkości i co do kierunku, wyrażają się w stosunku do czasu przez*



właściwe sobie przyspieszenia: przyspieszenie styczne wpływa tylko na zmianę wielkości, a przyspieszenie normalne tylko na zmianę kierunku prędkości.

Przejście punktu z miejsca  $m$  do  $m'$ , któremu to przejściu towarzyszy zmiana prędkości, możemy uważać jako skutek dwu ruchów nieskończenie małych, zachodzących w elemencie czasu  $dt$ , jednego w kierunku stycznej, a drugiego w kierunku normalnej głównej do toru. Ruch po stycznej jest jednostajnie przyspieszony, a jego prędkość początkowa wynosi  $v$ , przyspieszenie zaś  $\gamma_t$ ; więc droga, opisana w czasie  $dt$ , będzie  $ds = v \cdot dt + \frac{1}{2} \gamma_t \cdot dt^2$ , czyli  $ds = v \cdot dt$ , gdy opuścimy wielkość nieskończenie małą rzędu 2-go. Ruch po normalnej głównej jest także jednostajnie przyspieszony, a jego prędkość początkowa jest 0, przyspieszenie zaś  $\gamma_n$ ; więc droga w czasie  $dt$  będzie  $\frac{1}{2} \gamma_n dt^2 = \frac{v^2}{2\rho} dt^2 = \frac{ds^2}{2\rho}$ . Droga zatem w kierunku stycznej jest nieskończenie mała tego samego rzędu, co element czasu, droga zaś w kierunku normalnej głównej jest nieskończenie mała w porównaniu z tym elementem czasu. Tę drogę nieskończenie małą rzędu 2-go, jaką punkt opisuje w elemencie czasu w kierunku normalnej głównej, zowiemy jego zboczeniem. Wskutek tego zboczenia zmienia się kierunek ruchu; gdyby zboczenia nie było, ruch punktu byłby prostoliniowy.

**12. SKŁAD I ROZKŁAD PRZYSPIESZEŃ**, w poprzednim dochodzeniu używany, podobnie polega na jednoczesnym rozważaniu ruchów jednostajnie zmiennych, jak skład i rozkład prędkości na rozważaniu ruchów jednostajnych. Niech punkt  $m$  odbywa ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny względem układu  $A_1$  z przyspieszeniem  $\gamma_1$ , układ  $A_1$  unosi punkt  $m$  z przyspieszeniem  $\gamma_2$  względem układu  $A_2, \dots$ , układ na koniec  $A_{n-1}$  niech unosi układy  $A_1, \dots, A_{n-2}$  wraz z  $m$  z przyspieszeniem  $\gamma_n$  względem układu nieruchomego  $A_n$ ; mamy wyznaczyć ruch punktu  $m$  względem  $A_n$ , znając jeszcze prędkość początkową tego punktu. Rozważajmy ruchy w elemencie czasu  $dt$ ; wtedy  $\gamma_1 \cdot dt, \gamma_2 \cdot dt, \dots, \gamma_{n-1} \cdot dt, \gamma_n \cdot dt$  będą odpowiednimi przyspieszeniami elementarnymi. Ponieważ przyspieszenia elementarne określiliśmy jako przyrosty prędkości, czyli jako nieskończenie małe prędkości punktowi udzielone, przeto do nich stosuje się metoda, za której pomocą dokonywaliśmy składu i rozkładu prędkości. Składając zatem zapomocą wieloboku powyższe przyspieszenia elementarne, otrzymamy wypadkowe przyspieszenie elementarne punktu  $m$ . Z wiadomej zatem prędkości punktu możemy wyznaczyć jego ruch wypadkowy. Króśląc wielobok skończony, którego boki przedstawiają przyspieszenia  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , otrzymamy bezpośrednio przyspieszenie  $\gamma$  szukanego ruchu punktu, którego stosunek do wypadkowego przyspieszenia elementarnego będzie równy stosunkowi każdego z przyspieszeń składowych  $\gamma_i$  do odpowiedniego przyspieszenia elementarnego  $\gamma_i \cdot dt$ . Obadwa bowiem wieloboki są podobne, a ich boki odpowiednie są równoległe. Z tego nietylko się okazuje, co znaczy skład i rozkład przyspieszeń, ale zarazem przedstawia się metoda tych działań, nie różniącą się niczym od metody przy składzie i rozkła-

dzie prędkości. Jeżeli przyspieszenie wypadkowe ma kierunek prędkości punktu, natenczas ruch punktu nie zmienia pierwotnego kierunku; w każdym zaś innym przypadku zmiana taka nastąpi. Płaszczyzna, przesunięta przez prędkość punktu i przyspieszenie wypadkowe, będzie ściśle styczną do toru punktu. Rozkładając przyspieszenie wypadkowe na przyspieszenia styczne i normalne, możemy z wiadomej prędkości obliczyć krzywiznę  $\frac{1}{\rho}$  toru, tudzież związek między drogą i czasem. Wszystkie twierdzenia, okazane w art. 4-ym i 5-ym o składzie i rozkładzie prędkości, stosują się bez wyjątku do przyspieszeń ruchu punktu.

Z tych twierdzeń robimy użytek, aby obliczyć przyspieszenie, mając równania ruchu. Niech współrzędne prostokątne punktu  $(x, y, z)$  dane będą jako funkcje czasu; wówczas  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $v_z = \frac{dz}{dt}$  są prędkościami tego punktu w kierunkach osi współrzędnych, czyli prędkościami jego rzutów, poruszających się wzdłuż tych osi. Ponieważ ruch każdego z tych rzutów jest prostoliniowy, przeto:

$$(1) \quad \gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \gamma_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

będą przyspieszeniami ruchu tych rzutów, a zatem, na mocy poprzednich twierdzeń, rzutami czyli składowymi przyspieszenia ruchu punktu. Mamy zatem dla każdego ruchu:

$$(2) \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

$$(3) \quad \cos(\gamma, x) : \cos(\gamma, y) : \cos(\gamma, z) = \frac{d^2x}{dt^2} : \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{d^2z}{dt^2};$$

te równania pozwalają z równań ruchu obliczyć wielkość i kierunek przyspieszenia. Następnie mamy

$$(4) \quad \begin{cases} \cos(\gamma, v) = \frac{\gamma_x v_x + \gamma_y v_y + \gamma_z v_z}{\gamma v}, \\ \sin(\gamma, v) = \frac{[(\gamma_x v_y - \gamma_y v_x)^2 + (\gamma_y v_z - \gamma_z v_y)^2 + (\gamma_z v_x - \gamma_x v_z)^2]^{\frac{1}{2}}}{\gamma v}, \end{cases}$$

a te równania wyznaczają kąt między przyspieszeniem a prędkością. Z tych równań wynikają następujące wyrażenia na przyspieszenia styczne i normalne:

$$(5) \quad \gamma_t = \gamma \cdot \cos(\gamma, v) = \frac{\gamma_x v_x + \gamma_y v_y + \gamma_z v_z}{v},$$

$$(6) \quad \gamma_n = \gamma \cdot \sin(\gamma, v) = \frac{[(\gamma_x v_y - \gamma_y v_x)^2 + (\gamma_y v_z - \gamma_z v_y)^2 + (\gamma_z v_x - \gamma_x v_z)^2]^{\frac{1}{2}}}{v}.$$

Przyspieszenie może być także obliczone ze współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$  i  $\theta$ , których używaliśmy w art. 10-ym do obliczenia prędkości. Niechaj



$\gamma_r$ , i  $\gamma_p$ ,  $\gamma_\pi$  będą składowymi przyspieszenia, wziętymi w kierunkach prostych  $r$ ,  $p$  i  $\pi$ . Różniczkując równania (5) art. 10-go dwa razy względem czasu, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= r \cdot \cos \theta \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - r \cdot \sin \theta \sin \varphi \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos \theta \sin \varphi \frac{d^2r}{dt^2} - \\ &- 2r \cdot \sin \theta \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - 2 \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + 2 \cos \theta \cos \varphi \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \\ &- r \cdot \cos \theta \sin \varphi \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= r \cdot \sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + r \cdot \cos \theta \sin \varphi \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin \theta \sin \varphi \frac{d^2r}{dt^2} + \\ &+ 2r \cdot \cos \theta \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + 2 \cos \theta \sin \varphi \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + 2 \sin \theta \cos \varphi \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \\ &- r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -r \sin \varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \cos \varphi \cdot \frac{d^2r}{dt^2} - 2 \sin \varphi \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - r \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.\end{aligned}$$

Rzucając te przyspieszenia na proste  $r$ ,  $p$ ,  $\pi$ , otrzymamy

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin^2 \varphi \right], \\ \gamma_p = r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - r \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \gamma_\pi = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \varphi + 2r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \varphi, \end{cases}$$

zaś

$$\gamma = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_p^2 + \gamma_\pi^2}.$$

Jeżeli tor punktu jest krzywą płaską, to, obrawszy płaszczyznę krzywój jako południk pierwszy, będziemy mieli wciąż  $\theta = 0$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ,  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ , a zatem  $\gamma_\pi = 0$ . Otrzymamy więc

$$(8) \quad \begin{cases} \gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ \gamma_p = r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \end{cases}$$

jako składowe przyspieszenia,brane w kierunku promienia wodzącego i w kierunku do niego prostopadłym. Porównanie wzorów (7) z wzorami (7) art. 10-go okazuje, że przyspieszenia punktu w kierunkach prostych  $r$ ,  $p$  i  $\pi$  nie są pochodnymi prędkości w tych kierunkach względem czasu, jak to zachodzi dla współrzędnych prostokątnych. Ta różnica między tymi dwoma rodzajami współrzędnych stąd pochodzi, że proste  $r$ ,  $p$  i  $\pi$  poruszają się wraz z punktem, że zatem układ tych osi współrzędnych zajmuje inne położenie na początku, a inne

przy końcu elementu czasu  $dt$ , podczas gdy osi  $x, y$  i  $z$  zachowują ciągle też same kierunki.

**13. PRZYŚPIESZENIA RZĘDÓW WYŻSZYCH.** Jeżeli  $x, y$  i  $z$  są współrzędnymi prostokątnymi punktu poruszającego się, to wielkość dodatnią

$$(1) \quad \gamma^{(n)} = \sqrt{\left(\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}\right)^2},$$

przy  $n$  całkowitym i dodatnim nazywamy przyśpieszeniem rzędu  $n$ -go ruchu tego punktu.

Kierunek tego przyśpieszenia otrzymujemy, odcinając wielkości

$$(2) \quad \gamma_x^{(n)} = \frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \quad \gamma_y^{(n)} = \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad \gamma_z^{(n)} = \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}$$

na odpowiednich osiach współrzędnych i składając te odcinki zapomocą wieloboku. Każda z pochodnych (2) oznacza przyśpieszenie rzędu  $n$ -go w kierunku odpowiedniej osi współrzędnych. Jeżeli według tego określenia wyznaczmy przyśpieszenia punktu rzędu  $(n-1)$ -go w czasach  $t$  i  $t+dt$ , to przyśpieszeniem elementarnym rzędu  $n$ -go nazywamy nieskończenie małą wielkość, o jaką przyśpieszenie rzędu  $(n-1)$ -go zmienia się w elemencie czasu  $dt$ . Przyśpieszenie zaś  $\gamma^{(n)}$  jest granicą stosunku przyśpieszenia elementarnego rzędu  $(n-1)$ -go do elementu czasu.

Obliczmy przyśpieszenie rzędu 2-go. Przyśpieszenie  $\gamma$  w punkcie  $(x, y, z)$  który nazwijmy  $m$ , przypada w odpowiedniej płaszczyźnie ściśle stycznej do toru w punkcie  $m$ , a przyśpieszenie  $\Gamma$  w punkcie nieskończenie bliskim  $m'$  ( $x+dx, \dots$ ) przypada w płaszczyźnie ściśle stycznej w tym punkcie. A zatem przyśpieszenie elementarne rzędu 2-go w punkcie  $m$  nie przypadnie, mówiąc wogólnie, w płaszczyźnie ściśle stycznej w tym punkcie. Wystawmy zatem w punkcie  $m$  trzy proste:  $mt$  styczną do toru ( $m$ ),  $mn$  normalną główną i  $mb$  dwunormalną, t. j. prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej; przyśpieszenie rzędu 2-go  $\gamma^{(2)}$  możemy rozłożyć odpowiednio na trzy składowe do siebie prostopadłe,  $\gamma_t^{(2)}$ ,  $\gamma_n^{(2)}$ ,  $\gamma_b^{(2)}$  wzdłuż tych trzech prostych. Jeżeli  $\rho$  jest promieniem krzywizny w punkcie  $m$ , a dla krótkości wprowadzimy oznaczenia

$$(3) \quad a = dy \, d^2z - dz \, d^2y, \quad b = dz \, d^2x - dx \, d^2z, \quad c = dx \, d^2y - dy \, d^2x, \\ k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

to kierunki prostych  $mt, mn, mb$  wyznaczone będą przez następujące równania:

$$(4) \quad \begin{cases} \cos(t, x) = \frac{dx}{sp}, & \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, & \cos(t, z) = \frac{dz}{ds}; \\ \cos(n, x) = \rho \cdot \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, & \cos(n, y) = \rho \cdot \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, & \cos(n, z) = \rho \cdot \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}; \\ \cos(b, x) = \frac{a}{k}, & \cos(b, y) = \frac{b}{k}, & \cos(b, z) = \frac{c}{k}. \end{cases}$$

Rzuty przyspieszenia  $\gamma^{(2)}$  na osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  są

$$(5) \quad \gamma_x^{(2)} = \frac{d^3x}{dt^3}, \quad \gamma_y^{(2)} = \frac{d^3y}{dt^3}, \quad \gamma_z^{(2)} = \frac{d^3z}{dt^3};$$

będzie zatem

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma_t^{(2)} = \frac{d^3x}{dt^3} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{d^3z}{dt^3} \cdot \frac{dz}{ds}, \\ \gamma_n^{(2)} = \rho \left( \frac{d^3x}{dt^3} \cdot \frac{d}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{d^3z}{dt^3} \cdot \frac{d}{ds} \frac{dz}{ds} \right), \\ \gamma_b^{(2)} = \frac{1}{k} \left( a \cdot \frac{d^3x}{dt^3} + b \cdot \frac{d^3y}{dt^3} + c \cdot \frac{d^3z}{dt^3} \right). \end{cases}$$

Lecz

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 = [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) - (d^2x \cdot dx + d^2y \cdot dy + d^2z \cdot dz)^2,$$

a ponieważ

$$(7) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

a nadto, według równania (7) ustępu 11-go,

$$(8) \quad (d^2s)^2 + \frac{ds^4}{\rho^2} = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2,$$

przeto

$$k^2 = ds^2 \left[ (d^2s)^2 + \frac{ds^4}{\rho^2} \right] - (d^2x \cdot dx + d^2y \cdot dy + d^2z \cdot dz)^2.$$

Różniczkując równanie (7), otrzymamy

$$(9) \quad ds \cdot d^2s = dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz \cdot d^2z,$$

co, po wstawieniu w  $k^2$ , daje

$$(10) \quad k = \frac{ds^3}{\rho}.$$

Niech  $d\epsilon$  będzie kątem, zawartym między płaszczyznami ściślestycznymi w punkcie  $m$  i w punkcie  $m'$ ; wielkość

$$\frac{1}{r} = \frac{d\epsilon}{ds}$$

nazywamy, jak wiadomo, skręceniem krzywej ( $m$ ) w punkcie  $m$ , długość zaś  $r$  promieniem skręcenia. Z teorii krzywych skośnych wiadomo, że

$$\frac{1}{r} = \frac{a \cdot d^3x + b \cdot d^3y + c \cdot d^3z}{ds^2 [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]},$$

czyli, po uwzględnieniu związku (8),

$$(11) \quad \frac{1}{r} = \rho^2 \cdot \frac{a \cdot d^3x + b \cdot d^3y + c \cdot d^3z}{ds^6}.$$

Różniczkując równanie (9), otrzymamy

$$ds \cdot d^3s + (d^2s)^2 = dx \cdot d^3x + dy \cdot d^3y + dz \cdot d^3z + (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2,$$

a z tego równania i równań (8) wynika

$$(12) \quad ds \cdot d^3s - \frac{ds^4}{\rho^2} = dx \cdot d^3x + dy \cdot d^3y + dz \cdot d^3z,$$

Podstawiając tę wartość w pierwsze równanie (6), mieć będziemy

$$(13) \quad \gamma_t^{(2)} = \frac{1}{ds \cdot dt^3} \left[ ds \cdot d^3s - \frac{ds^4}{\rho^2} \right] = \frac{d^3s}{dt^3} - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3;$$

a ponieważ  $\gamma_t = \frac{d^2s}{dt^2}$  jest przyspieszeniem stycznym rzędu 1-go, zaś  $v = \frac{ds}{dt}$  prędkością, przeto

$$(14) \quad \gamma_t^{(2)} = \frac{d\gamma_t}{dt} - \frac{v^3}{\rho^2} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}.$$

Zważmy, że, bez względu na zmienną niezależną;

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{ds \cdot d^2x - dx \cdot d^2s}{ds^3}; \quad \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} = \dots; \quad \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} = \dots,$$

co podstawivszy w drugie z równań (6), mieć będziemy

$$\gamma_n^{(2)} = \frac{\rho}{ds^3 \cdot dt^3} \cdot [(ds \cdot d^2x - dx \cdot d^2s) d^3x + (ds \cdot d^2y - dy \cdot d^2s) d^3y + (ds \cdot d^2z - dz \cdot d^2s) d^3z],$$

czyli, po uporządkowaniu,

$$(15) \quad \gamma_n^{(2)} = \frac{\rho}{ds^3 \cdot dt^3} [ds (d^2x \cdot d^3x + d^2y \cdot d^3y + d^2z \cdot d^3z) - d^2s (dx d^3x + dy d^3y + dz d^3z)],$$

Różniczkując zaś równanie (12), otrzymamy

$$(16) \quad d^2s \cdot d^3s + \frac{ds^3}{\rho^3} (2\rho \cdot d^2s - ds \cdot d\rho) = d^2x \cdot d^3x + d^2y \cdot d^3y + d^2z \cdot d^3z,$$

a podstawiając wartości z równań (12) i (16) w równanie (15), będziemy mieli

$$(17) \quad \gamma_n^{(2)} = \frac{ds}{dt} \left[ \frac{3}{\rho} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\rho}{dt} \right], \text{ czyli}$$

$$(18) \quad \gamma_n^{(2)} = \frac{ds}{dt} \left[ \frac{3}{\rho} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \text{ albo}$$

$$(19) \quad \gamma_n^{(2)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{\rho} \right) + \frac{v}{\rho} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d\gamma_n}{dt} + \frac{v}{\rho} \cdot \frac{dv}{dt},$$

gdzie  $\gamma_n$  jest przyspieszeniem normalnym rzędu 1-go. Jeżeli na koniec wartości z równań (10) i (11) podstawimy w trzecie równanie (6), to wyniknie

$$(20) \quad \gamma_b^{(2)} = \frac{1}{r\rho} \cdot \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 = \frac{v^3}{r\rho}.$$

Równania (14), (19) i (20) wyrażają odpowiednio przyspieszenia rzędu drugiego: styczne, normalne i dwunormalne, wyrażone przy pomocy prędkości i jej pochodnych względem czasu, tudzież przez promień krzywizny i promień skręcenia toru. Dla krzywej płaskiej w każdym punkcie jest  $\frac{1}{r} = 0$ , a zatem  $\gamma_b^{(2)} = 0$ . Dla ruchu prostoliniowego mamy nadto  $\frac{1}{\rho} = 0$ , a więc

$$\gamma_t^{(2)} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3s}{dt^3} = \gamma^{(2)}, \quad \gamma_n^{(2)} = 0, \quad \gamma_b^{(2)} = 0.$$

Dla zwykłej linii śrubowej promienie  $r$  i  $\rho$  są stałe; skoro zatem punkt taką krzywą jednostajnie opisuje, natenczas  $\gamma_t^{(2)}$  i  $\gamma_b^{(2)}$  będą wielkościami stałymi.

**14. HODOGRAF.** Równanie  $v = f(t)$ , dające prędkość ruchu w funkcji czasu, możemy przedstawić geometrycznie; otrzymujemy tym sposobem obraz ruchu co do prędkości. Poprowadźmy w tym celu dwie prostokątne osi

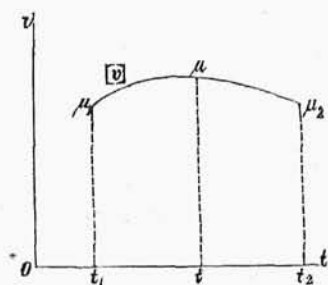


Fig. 6.

$Ot$ ,  $Ov$  (fig. 6) i, obliczywszy dla danego  $t$  odpowiednie  $v$ , odetnijmy czas  $t$  na osi  $Ot$ , a prędkość  $v$  na osi  $Ov$ . Otrzymamy w ten sposób punkt  $\mu$ , który przy ciągłej zmianie argumentu  $t$  przebiegnie pewną krzywą  $[v]$ , którą nazywamy krzywą prędkości ruchu punktu. Równanie tej krzywej jest  $v = f(t)$ . Dla ruchu jednostajnego ta krzywa jest linią prostą, równoległą do  $Ot$ ; dla ruchu jednostajnie zmiennego, gdy  $v = c + \gamma t$ , krzywa prędkości będzie linią prostą, nachyloną do  $Ot$  pod kątem, którego styczna jest  $\gamma$ , a przecinającą  $Ov$  w punkcie

$v = c$ . Droga  $s$ , którą punkt  $m$  opisuje w czasie  $t_2 - t_1$ , wynosi

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt,$$

jest zatem proporcjonalna względem pola  $t_1\mu_1\mu_2t_2$ , ograniczonego rzędnymi  $t_1\mu_1$ ,  $t_2\mu_2$  w punktach  $t_1$ ,  $t_2$  i łukiem  $\mu_1\mu_2$  krzywej  $[v]$ . Zamieniając to pole na prostokąt o tej samej podstawie i równoważny, otrzymamy wysokość  $v_s$  tego prostokąta ze wzoru

$$(1) \quad v_s = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt.$$

Ta wysokość przedstawia prędkość ruchu jednostajnego, wskutek którego punkt  $m$  opisałby w czasie  $t_2 - t_1$  tę samą drogę, jaką opisuje ruchem zmiennym. Nazywamy ją prędkością średnią ruchu, a wzór (1) służy do obliczenia prędkości średniej, gdy znamy  $v$  w funkcji  $t$ . Styczna do krzywej

prędkości w punkcie  $\mu$  tworzy z osią  $Ot$  kąt, którego styczna trygonometryczna wynosi  $\frac{dv}{dt}$ ; widzimy zatem, że nachylenie tej stycznej do osi  $Ot$  pozwala obliczyć przyspieszenie styczne ruchu.

Podobnym sposobem możemy przedstawić geometrycznie przyspieszenie ruchu w funkcji czasu. Każdy zresztą związek między jakimikolwiek dwiema wielkościami, ruch określającymi, np.  $v = F(s)$ ,  $\gamma = F(v)$  i t. p., daje się przedstawić geometrycznie. Do takiego przedstawienia geometrycznego używamy z korzyścią współrzędnych biegunowych. Przesuńmy przez dowolny punkt  $O$  proste, równoległe do następujących po sobie stycznych do toru poruszającego się punktu, i odetnijmy na tych prostych od punktu  $O$  długości, proporcjonalne względem odpowiednich prędkości; wówczas linią, łączącą punkty końcowe tych odcinków, nazywamy, według W. Hamilton'a, hodografem ruchu punktu. Jeżeli tor jest krzywą skośną, to hodograf jest także taką krzywą; dla toru płaskiego hodograf jest krzywą płaską. Hodograf leży na powierzchni stożkowej, mającej tworzące równoległe do stycznych do toru, a płaszczyzny styczne równoległe do płaszczyzn ściśle stycznych do toru. Jeżeli ruch punktu jest jednostajny, to hodograf zamienia się na koło po rozwinięciu stożka na płaszczyźnie; jest zatem tak zwaną krzyżownicą prostokątną na stożku; dla ruchu jednostajnego na płaszczyźnie hodograf jest kołem, zatoczonym z punktu początkowego. Jeżeli  $\mu$  i  $\mu'$  są dwoma nieskończenie bliskimi punktami hodografu, odpowiadającymi punktom  $m$  i  $m'$  na torze poruszającego się punktu, to prosta  $\mu\mu'$  jest równoległa do przyspieszenia elementarnego w punkcie  $m$ , a zatem styczne do hodografu są równoległe do przyspieszeń ruchu punktu. Niechaj  $x = F_1(t)$ ,  $y = F_2(t)$ ,  $z = F_3(t)$  będą równaniami ruchu punktu, a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  współrzędnymi bieżącymi hodografu; wtedy

$$\xi = F_1'(t), \quad \eta = F_2'(t), \quad \zeta = F_3'(t).$$

Rugując czas z tych równań, otrzymamy równania hodografu w zwyczajnej postaci. — Jeżeli tor punktu jest krzywą płaską, której współrzędne biegunowe są  $r$  i  $\varphi$ , to, biorąc biegun za początek układu prostokątnego współrzędnych, a oś biegunową za oś  $x$ -ów, otrzymamy współrzędne hodografu:

$$\begin{cases} \xi = \frac{dr}{dt} \cdot \cos \varphi - r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \varphi, \\ \eta = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi + \frac{dr}{dt} \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

Wyrażmy  $r$  przez  $\varphi$  z równania toru i wyrugujmy z tych równań kąt  $\varphi$ ; otrzymamy wtedy równanie hodografu we współrzędnych prostokątnych.

**15. RUCH CENTRALNY.** Poznawszy cechy ruchu punktu, zastanowimy się nad niektórymi szczególnymi ruchami, które, bądźto ze względu na osobliwe swe własności, bądźtóż ze względu na swą ważność w licznych zagadnieniach mechaniki, zasługują na szczególną uwagę.



Ruchem centralnym (środkowym) punktu nazywamy ruch taki, przy jakim przyspieszenie  $\gamma$  nieustannie przechodzi przez pewien punkt stały. Ten punkt stały nazywamy środkiem ruchu centralnego.

Aby się przekonać, czy taki ruch jest możebny i pod jakimi warunkami zachodzi, oznaczmy przez  $(\gamma, r)$  kąt, który przyspieszenie ruchu punktu  $(x, y, z)$  tworzy z promieniem wodzącym  $r$ , łączącym ten punkt z początkiem układu współrzędnych. Z równań (3) art. 12-go wynika

$$\begin{aligned}\cos(\gamma, x) &= \frac{d^2x}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}, & \cos(\gamma, y) &= \frac{d^2y}{\sqrt{(d^2x)^2 + \dots}}, \\ \cos(\gamma, z) &= \frac{d^2z}{\sqrt{(d^2x)^2 + \dots}},\end{aligned}$$

a ponieważ  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , przeto, wogólności, dla każdego ruchu

$$(1) \quad \cos(\gamma, r) = \frac{x \cdot d^2x + y \cdot d^2y + z \cdot d^2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}.$$

Aby ruch punktu był centralny, a początek układu współrzędnych środkiem tego ruchu, potrzeba i wystarcza, żeby, bez względu na czas,  $\cos(\gamma, r) = \pm 1$ , czyli  $\cos^2(\gamma, r) = 1$ ; a więc, według (1), wynika, jako warunek takiego ruchu, równość

$$(2) \quad (y \cdot d^2z - z \cdot d^2y)^2 + (z \cdot d^2x - x \cdot d^2z)^2 + (x \cdot d^2y - y \cdot d^2x)^2 = 0.$$

Ponieważ każdy z tych trzech składników jest dodatny, przeto jest tu jednocześnie

$$(3) \quad \begin{cases} y \cdot d^2z - z \cdot d^2y = 0, \\ z \cdot d^2x - x \cdot d^2z = 0, \\ x \cdot d^2y - y \cdot d^2x = 0. \end{cases}$$

Całkując zaś te równania i oznaczając stałe całkowania przez A, B, C, otrzymamy

$$(4) \quad \begin{cases} y \cdot dz - z \cdot dy = A, \\ z \cdot dx - x \cdot dz = B, \\ x \cdot dy - y \cdot dx = C, \end{cases}$$

a mnożąc ostatnie równania odpowiednio przez  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i dodając iloczyny stronami odpowiednimi, mieć będziemy

$$(5) \quad Ax + By + Cz = 0.$$

Ponieważ to równanie przedstawia płaszczyznę, przez środek ruchu przechodzącą, a współrzędne punktu poruszającego się temu równaniu zadość czynią, przeto mamy twierdzenie: *Ruch centralny jest możebny tylko na krzywej płaskiej, której płaszczyzna przechodzi przez środek ruchu.*

To twierdzenie pozwala do ruchu centralnego zastosować równania (8) art. 12-go, jeżeli oś biegunową obierzemy na płaszczyźnie ruchu, a środek ruchu za początek. Ponieważ  $\gamma_p$  jest składową przyspieszenia w kierunku prostopadłym do promienia wodzącego, łączącego punkt ze środkiem ruchu,

przeto warunkiem koniecznym i wystarczającym tego ruchu jest teraz:  $\gamma_r = 0$ , czyli

$$r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

albo

$$(6) \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left( r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0.$$

Całkując to równanie przy założeniu, że  $r$  nie przybiera wartości nieskończenie wielkich, otrzymamy

$$(7) \quad r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2a,$$

gdzie  $a$  jest stałą dowolną. Jeżeli punkt, poruszający się po krzywej płaskiej ( $m$ ) około środka  $O$ , przeniesie się w elemencie czasu z punktu  $m$ ,  $(r, \varphi)$ , do punktu nieskończenie bliskiego  $m'$ ,  $(r + dr, \varphi + d\varphi)$ , to promień wodzący zakreśli nieskończenie mały wycinek  $mOm'$ , którego pole wynosi  $\frac{r^2 \cdot d\varphi}{2}$ ; granicę stosunku tego pola do elementu czasu nazywamy prędkością wycinkową ruchu względem punktu  $O$ . Prędkość zatym wycinkowa wynosi  $\frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ , a równanie (7) okazuje, że stała  $a$  ma znaczenie prędkości wycinkowej. Mamy zatym dalsze twierdzenie: *podczas ruchu centralnego punktu prędkość wycinkowa względem środka ruchu jest stała. I nawzajem: jeżeli prędkość wycinkowa względem pewnego punktu jest stała, to ruch jest centralny względem tego punktu.* Przy ruchu zatym centralnym promień wodzący w różnych czasach zakreśla pola równe, a pola, zakreślane w czasach nierównych, są proporcjonalne względem czasów.

Z równania (7) mamy  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2a}{r^2}$ , t. j. wyrażenie pochodnej kąta  $\varphi$  względem czasu. Podstawmy je w równania (8) art. 10-go i w pierwsze z równań (8) art. 12-go; zważając, że dla ruchu centralnego mamy  $\gamma = \gamma_r$ , otrzymamy:  $v_r = \frac{dr}{dt}$ ,  $v_\varphi = \frac{2a}{r}$ , a zatym dla każdego ruchu centralnego prędkość i przyspieszenie są

$$(8) \quad v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{4a^2}{r^2}}, \quad \gamma = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4a^2}{r^3}.$$

Ponieważ

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2a}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = -2a \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right),$$

przeto także

$$(9) \quad v = \frac{2a}{r^2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}, \quad \text{czyli} \quad v = 2a \sqrt{\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}}.$$

Ponieważ nadto

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2a \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = -2a \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{4a^2}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right),$$

prżeto

$$(10) \quad \gamma = -\frac{4a^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right].$$

Wzory (8) i (9) podał I. Newton, wzór zaś (10) I. Binet.

Oznaczmy przez  $\alpha$  (fig. 7) kąt, który promień wodzący  $Om$  tworzy ze styczną do toru w punkcie  $m$ , spuścimy z punktu  $m$  prostopadłą  $mn$  na promień wodzący  $Om'$  i oznaczmy przez  $\beta$  kąt, który prosta  $mn$  tworzy ze styczną do toru w punkcie  $m$ ; nakoniec na tęż styczną z punktu  $O$  spuścimy prostopadłą i przez  $\mu$  oznaczmy długość tej prostopadłej. Mamy tu

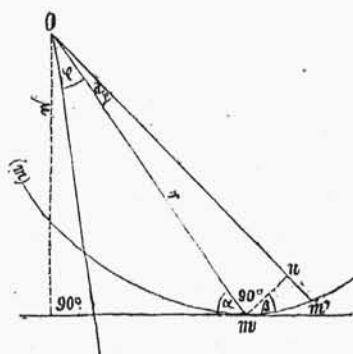


Fig. 7.

$$\mu = r \cdot \sin \alpha = r \cdot \cos \beta = r \cdot \frac{mn}{mm'}, \text{ czyli}$$

$$\mu = r \cdot \frac{r \cdot \frac{d\varphi}{ds}}{ds} = r^2 \cdot \frac{d\varphi}{ds}, \text{ skąd}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{r^2}{\mu}, \text{ a ponieważ } v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

prżeto

$$(11) \quad v = \frac{2a}{\mu},$$

t. j. *prędkość ruchu centralnego jest odwrotnie proporcjonalna względem długości prostopadłej ze środka ruchu na odpowiednią styczną do toru poruszającego się punktu (twierdzenie Newton'a).*

Różniczkując równanie  $\mu = \frac{2a}{v}$  względem  $r$ , mieć będziemy

$$(12) \quad \frac{d\mu}{dr} = -\frac{2a}{v^2} \cdot \frac{dv}{dr}.$$

Różniczkując zaś pierwsze z równań (8), otrzymujemy

$$v \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{dt} \right) - \frac{4a^2}{r^3} = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4a^2}{r^3},$$

a zatem, według drugiego z równań (8),

$$(13) \quad \gamma = v \cdot \frac{dv}{dr},$$

skąd  $\frac{dv}{dr} = \frac{\gamma}{v}$ . Wskutek tego, według równania (12),

$$\frac{d\mu}{dr} = -\frac{2a\gamma}{v^3}, \text{ skąd } \gamma = -\frac{v^3}{2a} \cdot \frac{d\mu}{dr}$$

albo, po uwzględnieniu równania (11),

$$(14) \quad \gamma = -\frac{4a^2}{\mu^3} \cdot \frac{d\mu}{dr}.$$

Wzór (13) na przyspieszenie podał Newton, a wzór (14) A. Moivre.

Z równania (13) wynika

$$v \cdot dv = \gamma \cdot dr;$$

jeżeli zatem punkt podczas ruchu centralnego przybył z miejsca  $m_1, (r_1, \varphi_1)$ , do miejsca  $m_2, (r_2, \varphi_2)$ , a  $v_1, v_2$  są jego prędkościami w tych miejscach, to, całkując ostatnie równanie w tych granicach, otrzymamy

$$(15) \quad v_2^2 - v_1^2 = 2 \int_{r_1}^{r_2} \gamma \cdot dr.$$

Przyspieszenie  $\gamma$  może posiadać kierunek ku środkowi ruchu, lub też kierunek od tego środka. Ponieważ kierunkiem dodatnym promienia wodzącego jest kierunek od środka, przeto w pierwszym przypadku przyspieszenie jest ujemne, w drugim dodatne. Gdy przyspieszenie jest ujemne, tor punktu zwrócony jest ku środkowi stroną wklęsłą; jeżeli zaś przyspieszenie jest dodatne, natenczas tor zwrócony jest ku środkowi ruchu stroną wypukłą. Przy ruchu centralnym prostoliniowym środek ruchu znajduje się na torze. Jeżeli tor punktu jest krzywą zamkniętą, to środek ruchu znajduje się wewnątrz tej krzywej, a przyspieszenie jest skierowane ku środkowi.

Aby wyznaczyć hodograf ruchu centralnego, przesuniemy przez środek ruchu dwie osi prostokątne i obierzmy oś biegunową za oś  $x$ -ów; współrzędne odpowiedniego punktu hodografu będą według art. 14-go:

$$(16) \quad \begin{cases} \xi = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - \frac{2a}{r} \cdot \sin \varphi, \\ \eta = \frac{2a}{r} \cdot \cos \varphi + \frac{dr}{dt} \sin \varphi. \end{cases}$$

Podstawiając z równania toru  $r$  w funkcji  $\varphi$ , i rugując kąt  $\varphi$ , otrzymamy żądane równanie hodografu.

**16.** Zastosujmy powyższą teorię ogólną do ruchu planet około słońca. Ponieważ wymiary liniowe planet są bardzo małe w porównaniu z ich odległością od słońca, przeto możemy w pierwszym przybliżeniu rozważać te ciała jako punkty i stosować podaną teorię do ich ruchu względem słońca. Dla ruchu planet względem słońca podał J. Keppler następujące trzy prawa, które nazywamy prawami Keppler'a.

1°. *Środek planety opisuje elipsę, której ogniskiem jest środek słońca.*

2°. *Promień wodzący, idący ze środka słońca do środka planety, zakreśla w równych czasach pola równe.*

3°. *Kwadraty czasów obiegu gwiazdowych dwu planet około słońca są proporcjonalne względem sześciątów osi wielkich ich torów eliptycznych.*

Z pierwszych dwu praw wynika, że *ruch środka planety względem słońca jest centralny, a środek słońca jest środkiem tego ruchu*. Aby rozpoznać bliżej prawa tego ruchu, obierzmy środek słońca za biegun układu współrzędnych, a prostą od środka słońca ku punktowi przysłonecznemu (perihelium) za oś biegunową; równanie biegunowe toru środka planety będzie wtedy

$$(1) \quad r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi},$$

gdzie  $p$  oznacza parametr,  $e$  zaś mimośród tego toru. Możemy poszukiwania nasze odrazu rozciągnąć na wszystkie krzywe stopnia 2-go, biorąc  $e < 1$ ,  $e = 1$ ,  $e > 1$  według tego, czy tor ( $m$ ) jest elipsą, parabolą, lub też hiperbolą, zaś  $e = 0$ , gdy ( $m$ ) jest kołem.

Różniczkując to równanie względem czasu, otrzymamy

$$\frac{dr}{dt} = \frac{er^2}{p} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

A ponieważ dla ruchu centralnego  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2a}{r^2}$ , gdzie  $a$  jest prędkością wycinkową, przeto

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2ae}{p} \cdot \sin \varphi, \quad \text{a zatem} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{4a^2}{pr^3} (p - r).$$

Po podstawieniu tych wartości w równaniu (8) art. 15-go, wyniknie

$$(2) \quad \gamma = - \frac{4a^2}{pr^3}.$$

Ostatnie równanie można także otrzymać z wzoru Binet'go, — Z tego równania okazuje się, że *przyspieszenie ruchu centralnego po krzywej stopnia 2-go, której ognisko jest środkiem ruchu, posiada kierunek ku ognisku krzywej i jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu długości promienia wodzącego* (twierdzenie Newton'a.).

Możemy obliczyć wielkość przyspieszenia  $\gamma$ , skoro znamy mimośród toru planety i połowę jego osi wielkiej. Gdy oznaczymy tę ostatnią przez  $A$ , to dla elipsy

$$p = A(1 - e^2).$$

Jeżeli  $T$  jest czasem obiegu gwiazdowego planety około słońca, to z twierdzenia, że prędkość wycinkowa jest stała, wynika, że pole elipsy jest iloczynem tej prędkości i czasu  $T$ ; a zatem

$$T \cdot a = \pi \cdot A^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}},$$

skąd

$$a = \frac{\pi \cdot A^2}{T} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Gdy podstawimy te wartości na  $p$  i  $a$  w równaniu (2), to

$$(3) \quad \gamma = - \frac{4\pi^2 \cdot A^3}{r^2 T^2}.$$

Jeżeli  $A'$ ,  $T'$  oznaczają odpowiednie wielkości dla innej planety, to, na mocy trzeciego prawa Keplera,

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{A'^3}{T'^2} = \lambda,$$

gdzie  $\lambda$  jest liczbą stałą dla wszystkich planet. Otrzymujemy zatem następujące wyrażenie przyspieszenia

$$(4) \quad \gamma = -\frac{4\pi^2\lambda}{r^2},$$

z którego wyczytujemy ważne prawo: *przyspieszenie ruchu centralnego planet około słońca ma dla wszystkich planet w jednakowej odległości od słońca tę samą wartość*. To przyspieszenie więc nie zależy ani od wielkości, ani od natury fizycznej planety rozważanej, podobnie jak przyspieszenie każdego punktu ciała, spadającego swobodnie na ziemię, posiada tę samą wielkość bez względu na objętość i na własności fizyczne ciała spadającego.

W punkcie przysłonecznym i w punkcie odsłonecznym promień wodzący jest normalny do toru środka planety, a zatem w tych punktach znika przyspieszenie styczne. Ponieważ w tych punktach prostopadła z ogniska na styczną ma wartość najmniejszą lub największą, przeto prędkość ruchu planety będzie w punkcie przysłonecznym największa, a w punkcie zaś odsłonecznym najmniejsza.

Prawo, wyrażone zapomocą równania (4), nazywamy prawem Newton'a; pierwszy on bowiem wywiódł je z trzech praw Keplera i uczynił je podstawą mechaniki ciał niebieskich. Newton nie poprzestał jednak na powyższym prawie ruchu planet względem słońca, lecz okazał, że także samo prawo stosuje się także do ruchu księżyca względem ziemi, będącego również ruchem centralnym. Każdy punkt ciała, spadającego na ziemię, posiada przyspieszenie w kierunku spadania, a zatem ku środkowi ziemi; ruch jego prostoliniowy jest zatem centralny, a środek ziemi jest środkiem tego ruchu. Przypuśćmy, że prawo przyspieszenia, wyrażone zapomocą równania (4), stosuje się także do spadku ciał na ziemię, jak również do przyspieszenia ruchu księżyca względem ziemi. W pierwszym przybliżeniu możemy tor księżyca względem ziemi przyjmować za koło, którego środkiem jest środek ziemi, i przyjąć prócz tego, że ruch księżyca jest jednostajny. Przyspieszenie zatem tego ruchu będzie normalne i stałe. Jeżeli  $g$  jest przyspieszeniem spadku w małej odległości od powierzchni ziemi, a  $\gamma$  przyspieszeniem ruchu księżyca, to według powyższego prawa

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{r^2}{R^3},$$

gdzie  $r$  oznacza promień ziemi, a  $R$  odległość środka księżyca od środka ziemi. Ponieważ  $R = 60,2703 \cdot r$ , przeto

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{(60,2703)^2}, \text{ a gdy średnio } g = 9,81 \text{ m, przeto}$$



$$\gamma = \frac{9,81}{3632,51} = 0,0027 \text{ m},$$

czyli około 2,7 mm na sekundę. To przyspieszenie możemy jednak obliczyć z elementów ruchu księżyca. Promień ziemi wynosi  $r = 6378 \cdot 10^3 \text{ m}$ , będzie więc  $R = 385 \cdot 10^6 \text{ m}$ ; obwód zatem toru księżyca wynosi  $24 \cdot 10^8 \text{ m}$ . Czas obiegu gwiazdowego księżyca około ziemi  $= 236 \cdot 10^4$  sekund, prędkość więc księżyca na sekundę jest

$$v = \frac{24 \cdot 10^8}{236 \cdot 10^4} \text{ m} = 1017 \text{ m}.$$

Przyspieszenie zatem ruchu księżyca, według tych danych, wynosi

$$\gamma = \frac{v^2}{R} = \frac{1017^2}{385 \cdot 10^6} \text{ m} = 0,0027 \text{ m}.$$

Widzimy przeto, że przyspieszenie ruchu księżyca, obliczone według powyższej hipotezy, zgadza się z rzeczywistością, a ta zgodność stwierdza prawo ogólne, że przyspieszenie ruchu centralnego w układzie słonecznym i w układzie każdej planety jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu odległości od środka ruchu. To prawo stosuje się także do przyspieszenia ciał, spadających pionowo na powierzchnię ziemi. Ponieważ wysokość najwyższej góry na ziemi wynosi 8840 metrów, przeto stosunek przyspieszenia  $g_1$  na szczycie tej góry do przyspieszenia  $g$  u poziomym morza wynosi

$$\frac{g_1}{g} = \frac{6366^2}{6374^2} = 0,9974;$$

jest więc  $g_1 = 9,782 \text{ m}$ . Jeżeli ciało spada na ziemię z małych wysokości, to możemy z dostatecznym przybliżeniem przyjmować przyspieszenie tego ruchu jako stałe, a tym sposobem otrzymamy wzory przybliżone Galileusza, podane w art. 8-ym.

**17.** Twierdzenie odwrotne względem twierdzenia Newton'a jest następujące: jeżeli przyspieszenie ruchu centralnego ma kierunek ku środkowi tego ruchu i jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu odległości od środka, natenczas tor punktu jest krzywą stopnia 2-go, której ogniskiem jest środek ruchu.

Niech bowiem będzie

$$(1) \quad \gamma = -\frac{k^2}{r^2},$$

gdzie  $k$  jest spółczynnikiem wiadomym, wyrażającym przyspieszenie w odległości od środka równiej jednostce. Równanie Binet'go daje w tym przypadku

$$(2) \quad \frac{4a^2}{r^2} \left[ \frac{d^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right] = \frac{k^2}{r^2}, \text{ czyli}$$

$$\frac{d^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{k^2}{4a^2}.$$

Kładąc

$$(3) \quad \lambda^2 = \frac{k^2}{4a^2}, \quad \zeta = \frac{1}{r} - \lambda^2,$$

gdzie  $\zeta$  jest nową zmienną, mamy między  $\zeta$  i  $\varphi$  równanie różniczkowe liniowe rzędu 2-go

$$(4) \quad \frac{d^2 \zeta}{d\varphi^2} + \zeta = 0,$$

którego całką ogólną jest, jak wiadomo,

$$(5) \quad \zeta = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi,$$

gdzie stałe  $C_1$ ,  $C_2$  wynikają z warunków początkowych. Przywracając tu wartość na  $\zeta$ , otrzymamy

$$(6) \quad r = \frac{1}{\lambda^2 + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi}.$$

Jeżeli promień wodzący z ogniska krzywej stopnia 2-go tworzy z promieniem, idącym ku bliższemu wierzchołkowi, kąt  $\psi$ , a dowolny promień, przyjęty jako oś biegunowa, tworzy z owym promieniem, przechodzącym przez wierzchołek, kąt  $\phi_0$ , i jeżeli nazwiemy  $\psi - \phi_0 = \varphi$ , to równanie biegunowe krzywej będzie

$$(7) \quad r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \phi_0 \cos \varphi - e \cdot \sin \phi_0 \sin \varphi}.$$

Z zestawienia zaś wzorów (6) i (7) jest widoczne, że torem punktu jest krzywa stopnia 2-go, której ogniskiem jest środek ruchu, c. n. d. — Parametr téj krzywej jest  $p = \frac{1}{\lambda^2}$ , a z równań  $\lambda^2 e \cos \phi_0 = C_1$  i  $-\lambda^2 e \sin \phi_0 = C_2$  otrzymamy  $e = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  i  $\operatorname{tg} \phi_0 = -\frac{C_2}{C_1}$ . Aby wyznaczyć stałe  $\lambda$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , musimy dla pewnego kąta biegunowego  $\varphi = \varphi_0$  znać miejsce punktu, tudzież kierunek i wielkość jego prędkości. Niechaj  $\alpha$  będzie kątem, który prędkość tworzy z promieniem wodzącym; wówczas ogólnie

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{r \cdot \frac{d\varphi}{dr}}{\frac{r}{r'}} = \frac{r}{r'},$$

jeżeli oznaczymy  $\frac{dr}{d\varphi} = r'$ . Niechaj dla  $\varphi = \varphi_0$  będą dane wartości  $\alpha = \alpha_0$ ,

$r = r_0$ ,  $v = v_0$ ; wtedy  $r'_0 = \frac{r_0}{\operatorname{tang} \alpha_0}$ . Równanie zaś (9) art. 15-go dla  $\varphi = \varphi_0$  daje

$$v_0^2 = \frac{4a^2}{r_0^4} (r_0'^2 + r_0'^2),$$

z którego wynika

$$(8) \quad a = \frac{v_0 r_0'^2}{2 \sqrt{r_0'^2 + r_0'^2}}, \quad \text{a stąd } \lambda^2 = k^2 \cdot \frac{r_0'^2 + r_0'^2}{v_0^2 r_0'^4}.$$

Kładąc  $\frac{d\zeta}{d\varphi} = \zeta'$  i oznaczając przez  $\zeta_0$  i  $\zeta'_0$  wartości zmiennej  $\zeta$  i jej pochodnej przy  $\varphi = \varphi_0$ , z równania (5) i jego pochodnej względem  $\varphi$  otrzymamy

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= C_1 \cos \varphi_0 + C_2 \sin \varphi_0, \\ \zeta'_0 &= -C_1 \sin \varphi_0 + C_2 \cos \varphi_0;\end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned}C_1 &= \zeta_0 \cos \varphi_0 - \zeta'_0 \sin \varphi_0, \\ C_2 &= \zeta_0 \sin \varphi_0 + \zeta'_0 \cos \varphi_0;\end{aligned}$$

ponieważ zaś  $\zeta_0 = \frac{1}{r_0} - \lambda^2$ ,  $\zeta'_0 = -\frac{r'_0}{r_0^2}$ , przeto

$$(9) \quad \begin{cases} C_1 = \left( \frac{1}{r_0} - \lambda^2 \right) \cos \varphi_0 + \frac{r'_0}{r_0^2} \sin \varphi_0, \\ C_2 = -\frac{r'_0}{r_0^2} \cos \varphi_0 + \left( \frac{1}{r_0} - \lambda^2 \right) \sin \varphi_0, \end{cases}$$

a stąd

$$(10) \quad e^2 = 1 + \frac{v_0^2 r_0^3}{k^2 (r_0^2 + r_0'^2)} \left( \frac{v_0^2 r'_0}{k^2} - 2 \right).$$

Tor punktu będzie elipsą, parabolą lub hiperbolą, według tego, czy  $e < 1$ ,  $e = 1$ , lub  $e > 1$ , czyli, na mocy wyrażenia (10), według tego, czy

$$(11) \quad v_0^2 < \frac{2k^2}{r_0}, \quad v_0^2 = \frac{2k^2}{r_0}, \quad v_0^2 > \frac{2k^2}{r_0}.$$

Żeby punkt zakreślił koło, potrzeba, aby  $e = 0$ , a zatem, aby

$$r_0^2 (v_0^2 r_0 - k^2)^2 + k^4 r_0'^2 = 0,$$

z czego wynikają następujące dwa warunki:

$$(12) \quad r'_0 = 0 \quad \text{ i } \quad v_0^2 = \frac{k^2}{r_0},$$

które oznaczają, że prędkość początkowa jest prostopadła do promienia wodzącego i taką posiada wielkość, jaka odpowiada przyspieszeniu przy  $r = r_0$  dla ruchu po kole.

Spółrzędne bieżące hodografu ruchu centralnego po krzywej stopnia 2-go są, według wzorów (16) art. 15-go,

$$\xi = -\frac{2a}{p} \sin \varphi, \quad \eta = \frac{2a}{p} (\cos \varphi + e).$$

Rugując z tych równań kąt  $\varphi$ , otrzymamy równanie hodografu

$$(13) \quad \frac{p^2}{4a^2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{pe}{a} \eta + e^2 = 1;$$

widzimy zatem, że hodograf jest kołem, którego jednak środek nie przypada w biegunie układu spółrzędnych.