

łożonych jest równoważny z parą sił, wtedy środek masy porusza się także jednostajnie po linii prostej.

**141. ZASADA PÓŁ.** Niech ustrój układu będzie taki, że warunki  $L_k=0$  pozwalają, aby zachodził dowolny obrót chwilowy układu około każdej osi układu współrzędnych. Ten przypadek zajdzie np. wtenczas, gdy punkty układu są swobodne i bez żadnych połączeń, lub także, gdy układ jest sztywny i swobodny. Jeżeli więc  $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$  oznaczają odpowiednio odchylenia nieskończenie małych obrotów przygotowanych około osi współrzędnych, to równaniu d'Alembert'a stanie się zadość, jeżeli przyjmiemy (art. 104)

$$(1) \quad \delta x_i = z_i \delta \eta - y_i \delta \zeta, \quad \delta y_i = x_i \delta \zeta - z_i \delta \xi, \quad \delta z_i = y_i \delta \xi - x_i \delta \eta.$$

Zasada d'Alembert'a prowadzi wtedy do następującego równania:

$$\delta \xi \Sigma \left\{ (Z_i y_i - Y_i z_i) - m_i \left( y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \right\} + \delta \eta \Sigma \left\{ (X_i z_i - Z_i x_i) - m_i \left( z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \right\} + \delta \zeta \Sigma \left\{ (Y_i x_i - X_i y_i) - m_i \left( x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \right\} = 0;$$

a ponieważ odchylenia są dowolne, przeto należy współczynnik każdego z tych odchyżeń przyrównać do zera; otrzymamy następujące równania:

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma m_i \left( y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = \Sigma (Z_i y_i - Y_i z_i), \\ \Sigma m_i \left( z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = \Sigma (X_i z_i - Z_i x_i), \\ \Sigma m_i \left( x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i). \end{cases}$$

Przypuśćmy, że siły przyłożone zadość czynią ciągle warunkowi

$$(3) \quad \Sigma (Z_i y_i - Y_i z_i) = 0,$$

że zatem suma momentów tych sił względem osi  $x$ , gdy ich punkty przyłożenia uważać będziemy za sztywnie z sobą połączone, jest równa zeru. Wtedy 1-sze równanie (2) daje się całkować; wynika z niego

$$(4) \quad \Sigma m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = C_1,$$

gdzie  $C_1$  jest stałą dowolną. Aby rozpoznać, kiedy zachodzi warunek (3), zredukujmy siły do początku osi  $O$ ; otrzymamy wogólności siłę wypadkową i parę wypadkową. Moment siły wypadkowej względem osi  $x$  jest równy zeru. A ponieważ suma momentów obu sił, stanowiących parę wypadkową, względem osi  $x$ , równa się rzutowi momentu tej pary na tę oś, przeto warunek (3) zachodzić będzie, jeżeli moment pary wypadkowej jest w każdej chwili prostopadły do tej osi. Jeżeli siły stanowią układ sił 1-go rodzaju, wtedy warunek (3) wymaga, żeby ich wypadkowa przecinała oś  $x$ . W przypadku, gdy te siły stanowią układ 2-go rodzaju, moment pary wypadkowej jest prostopadły do tej osi. Warunek (3) zawsze zachodzi, jeżeli na

punkty układu działają same siły wewnętrzne, lub jeżeli siły zewnętrzne ciagle się równoważą.

Połączmy punkt  $m_i$ ,  $(x_i, y_i, z_i)$ , z początkiem układu współrzędnych  $O$ ; wyrażenie  $(y_i dz_i - z_i dy_i)$  przedstawia podwójny rzut na płaszczyznę  $yOz$  tego pola, które promień  $Om_i$  opisuje w elemencie czasu  $dt$ , a stosunek wielkości tego rzutu do czasu  $dt$ , przedstawia prędkość wycinkową rzutu punktu  $m_i$  na tej płaszczyźnie. Równanie (4) zatem wyraża następujące twierdzenie: *jeżeli punkty układu są swobodne, lub jeżeli między nimi zachodzą takie połączenia, że układ może się obracać około każdej prostej, przechodzącej przez pewien punkt stały, a suma momentów sił względem pewnej prostej, przez ten punkt przechodzącej, jest ciągle równa zeru, natenczas suma iloczynów mas tych punktów i rzutów ich prędkości wycinkowych na płaszczyznę, prostopadłą do tej prostej, jest stała.* To twierdzenie wyraża tak zwaną zasadę pól dla układów materysjalnych.

Jeżeli siły przyłożone zadość czynią prócz (3) jeszcze warunkom

$$(5) \quad \Sigma (X_i z_i - Z_i x_i) = 0 \text{ i } \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i) = 0,$$

to otrzymamy jeszcze dwa inne równania

$$(6) \quad \Sigma m_i \left( z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) = C_2, \quad \Sigma m_i \left( x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = C_3,$$

wyrażające, że zasada pól zachodzi w tym przypadku także względem rzutów na płaszczyzny  $zOx$  i  $xOy$ . Z tego wynika, że w tym przypadku zachodzi powyższa zasada względem każdej płaszczyzny w przestrzeni, to znaczy, że suma iloczynów mas tych punktów i rzutów ich prędkości wycinkowych na każdą płaszczyznę jest stała. Wielkość tej sumy zależy od warunków początkowych i od kierunku płaszczyzny. Warunkom (3) i (5) stanie się zawsze zadość, jeżeli na punkty układu działają same siły wewnętrzne, lub jeżeli siły zewnętrzne równoważą się w każdej chwili. Dla takich układów zachodzi więc zasada pól względem każdej płaszczyzny.

Poprowadźmy przez punkt  $O$  dowolną płaszczyznę, której dostawy kierunkowe niech będą  $a, b, c$ . Jeżeli  $C$  jest podwójną sumą iloczynów mas i rzutów prędkości wycinkowych na tę płaszczyznę, natenczas

$$(7) \quad C = a C_1 + b C_2 + c C_3.$$

Z tego wyrażenia możemy wyznaczyć płaszczyznę  $(a, b, c)$ , dla której  $C$  przybierze wartość największą. Kładąc  $\Gamma \equiv C + \lambda (a^2 + b^2 + c^2 - 1)$ , gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem nieoznaczonym, otrzymamy, jak wiadomo, następujące warunki dla szukanej płaszczyzny:  $\frac{\partial \Gamma}{\partial a} = 0, \frac{\partial \Gamma}{\partial b} = 0, \frac{\partial \Gamma}{\partial c} = 0$ , z których wynika

$$C_1 + 2\lambda a = 0, \quad C_2 + 2\lambda b = 0, \quad C_3 + 2\lambda c = 0,$$

a zatem

$$(8) \quad \frac{a}{C_1} = \frac{b}{C_2} = \frac{c}{C_3};$$

równanie więc szukanej płaszczyzny, przez  $O$  przechodzącej, będzie  $C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$ . Obierzmy ją za płaszczyznę  $yOz$ , wtedy  $C_2 = 0, C_3 = 0$ ,

a z równania (7) wynika dla każdej innej płaszczyzny:  $C = aC_1$ , gdzie  $a$  jest dostawą kąta, który ta płaszczyzna tworzy z płaszczyzną  $yOz$ . Ponieważ  $a < 1$ , przeto  $C < C_1$ , z czego wynika, że suma powyższych iloczynów, odniesionych do płaszczyzny (8), jest największa. Tę płaszczyznę, względem której suma iloczynów mas i rzutów prędkości wycinkowych wszystkich punktów poruszającego się układu jest największa, nazywamy według Laplace'a płaszczyzną niezmienną tego układu. Ta płaszczyzna nie zmienia swego kierunku w przestrzeni wskutek pojawienia się jakichkolwiek sił wewnętrznych między punktami układu. Wystarczy przeto znać jej kierunek dla jakiegokolwiek czasu, np. dla  $t = 0$ , aby z sumy  $C_1$  rozważanych wyżej iloczynów względem tej płaszczyzny obliczyć odpowiednią sumę  $C$  dla każdej innej płaszczyzny. Z zasady pól, zastosowanej do samych sił wewnętrznych, wynika zasada zachowania pól, która wyraża, że suma iloczynów mas i rzutów prędkości wycinkowych jest też sama t. j. „zachowuje się”, jakiejkolwiek siły wewnętrzne pojawiłyby się podczas ruchu układu.

Dla układów swobodnych (sztywnych lub niesztynnych) zachodzi zasada pól przy pewnych warunkach także wtenczas, gdy spólny wiérzchołek tych pól jest punktem układu, a zatym porusza się razem z nim. Aby to okazać, obierzmy w układzie dowolny punkt  $A$ , którego spólrzędne względem układu osi  $Oxyz$  niech będą  $x_0, y_0, z_0$ , i wystawmy w tym punkcie trzy osi  $A\xi, A\eta, A\zeta$ , odpowiednio równoległe do osi  $Ox, Oy$  i  $Oz$ , a które podczas ruchu pozostają ciągle równoległe do tych osi. Jeżeli  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  są spólrzędnymi punktu  $m$  względem tych nowych osi, to  $x_i = x_0 + \xi_i, y_i = y_0 + \eta_i, z_i = z_0 + \zeta_i$ , a zatym  $\delta x_i = \delta x_0 + \delta \xi_i$  i podobnie  $\delta y_i$  i  $\delta z_i$ . Otrzymamy więc z zasady d'Alembert'a następujące równanie:

$$(9) \quad \delta x_0 \Sigma \left( X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) + \delta y_0 \Sigma \left( Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) + \delta z_0 \Sigma \left( Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) + \\ + \Sigma \left\{ \left( X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta \xi_i + \left( Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta \eta_i + \left( Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta \zeta_i \right\} = 0.$$

Jeżeli zaś uwzględnimy zasadę ruchu środka masy, to będziemy mieli

$$(10) \quad \Sigma \left\{ \left( X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta \xi_i + \left( Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta \eta_i + \left( Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta \zeta_i \right\} = 0.$$

Wstawiwszy  $\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{d^2 \xi_i}{dt^2}$  i podobnie dla  $y_i$  i  $z_i$ , otrzymamy z ostatniego równania

$$(11) \quad - \frac{d^2 x_0}{dt^2} \Sigma m_i \delta \xi_i - \frac{d^2 y_0}{dt^2} \Sigma m_i \delta \eta_i - \frac{d^2 z_0}{dt^2} \Sigma m_i \delta \zeta_i + \\ + \Sigma \left\{ \left( X_i - m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} \right) \delta \xi_i + \left( Y_i - m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} \right) \delta \eta_i + \left( Z_i - m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} \right) \delta \zeta_i \right\} = 0.$$

Jeżeli przyjmiemy

$$(12) \quad \frac{d^2 x_0}{dt^2} \Sigma m_i \delta \xi_i + \frac{d^2 y_0}{dt^2} \Sigma m_i \delta \eta_i + \frac{d^2 z_0}{dt^2} \Sigma m_i \delta \zeta_i = 0,$$

natenczas otrzymamy równania różniczkowe ruchu układu względem ruchomych osi  $A\xi\eta\zeta$  z następującego równania:

$$(13) \quad \Sigma \left\{ \left( X_i - m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} \right) \delta \xi_i + \left( Y_i - m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} \right) \delta \eta_i + \left( Z_i - m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} \right) \delta \zeta_i \right\} = 0.$$

Warunek (12) zachodzić będzie, jeżeli punktem  $A$  jest środek masy układu, lub punkt taki, który porusza się jednostajnie po linii prostej. W pierwszym bowiem przypadku będzie ciągle  $\Sigma m_i \xi_i = 0$ ,  $\Sigma m_i \eta_i = 0$ ,  $\Sigma m_i \zeta_i = 0$ , w drugim zaś będzie  $\frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0$ ,  $\frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0$ ,  $\frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0$ . Ponieważ w każdym z tych przypadków układ swobodny może się jeszcze obracać około dowolnej osi, poprowadzonej przez punkt  $A$ , przeto z równania (13), mającego taką postać, jak gdyby osi układu  $A\xi\eta\zeta$  były nieruchome, okazuje się, że zasada pól będzie zachodziła dla każdej płaszczyzny, przesuniętej przez ruchomy początek, jeżeli siły zadość czynią nieustannie warunkom

$$(14) \quad \Sigma (Z_i \eta_i - Y_i \zeta_i) = 0, \Sigma (X_i \zeta_i - Z_i \xi_i) = 0, \Sigma (Y_i \xi_i - X_i \eta_i) = 0.$$

Miedzy innymi przypadkami możemy tę zasadę stosować do środka masy układu swobodnego, na który działają bądź same siły wewnętrzne, bądź siły zewnętrzne, równoważące się nieustannie. Zasada pól zachodzi także wtenczas, gdy punkty układu doznają przyciągań od punktu stałego lub od punktu, poruszającego się jednostajnie po linii prostej. Środek przyciągania należy wtenczas obrać za wierzchołek pól opisywanych.

**142. INNE WYRAŻENIA POWYŻEJ PODANYCH ZASAD.** Okazane wyżej zasady można inaczej przedstawić, rozważając ilości ruchu punktów układu. Niech zachodzi zasada ruchu środka masy; wtedy otrzymamy dla każdej prostej w przestrzeni, biorąc ją za oś  $x$ , wiadome równanie (art. 140)

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i,$$

które możemy tak napisać:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \Sigma m_i \frac{dx_i}{dt} = \Sigma X_i.$$

Ponieważ  $\frac{dx_i}{dt}$  jest rzutem prędkości punktu  $m_i$  na rozważaną prostą, przeto  $m_i \frac{dx_i}{dt}$  przedstawia rzut ilości ruchu tego punktu na tę prostą, a  $\Sigma m_i \frac{dx_i}{dt}$  jest sumą algebriczną rzutów ilości ruchu wszystkich punktów układu na tę prostą. Nazywamy tę sumę ilością ruchu czyli momentem ruchu układu względem prostej. Całkując równanie (1) względem czasu między kranicami  $t_1$  i  $t_2$ , otrzymamy

$$(2) \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma m_i \frac{dx_i}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma X_i dt = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} X_i dt.$$

$X_i$  przedstawia rzut siły  $P_i$ , przyłożonej do punktu  $m_i$ , na powyższą prostą; iloczyn  $X_i dt$  tego rzutu i elementu czasu nazywamy popędem chwilowym, albo impulsem lub też popędem elementarnym siły  $P_i$  względem

prostej (art. 69). Całka  $\int_{t_1}^{t_2} X_i dt$  popędów elementarnych siły, brana między dwoma krańcami czasu, nazywa się popędem siły względem prostej rozważanej w przedziale czasu  $t_2 - t_1$ . Popęd siły można uważać za siłę chwilową, któraby na punkt, będący w spoczynku, działać musiała w kierunku prostej, aby mu nadać taką ilość ruchu, o jaką zmienia się ilość ruchu tego punktu w danym czasie. Na podstawie tych określeń otrzymujemy z (2) następujące twierdzenie: *jeżeli zachodzi zasada ruchu środka masy, natenczas zmiana ilości ruchu układu względem dowolnej prostej, w jakimkolwiek czasie, równa się sumie popędów sił przyłożonych (zewnątrznych) względem tej prostej w tymże samym czasie.*

Jeżeli na układ działają same siły wewnętrzne, wtedy  $\Sigma X_i = 0$  dla każdej prostej, z czego wynika, że ilość ruchu układu względem jakiegokolwiek prostej nie zmienia się, czyli zostaje zachowana. Wtym znaczeniu rozumiemy zachowanie ilości ruchu układu masyjnego względem jakiegokolwiek prostej.

Niech co do połączeń zachodzą warunki, z których wynika zasada pól; natenczas równanie (2) artykułu poprzedzającego możemy tak napisać:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \Sigma m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \Sigma (Z_i y_i - Y_i z_i),$$

a stąd otrzymamy:

$$(4) \quad \int_1^{t_2} \Sigma m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) dt = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} (Z_i y_i - Y_i z_i) dt.$$

Podobnie otrzymamy dwa inne równania, odnoszące się do osi  $y$  i do osi  $z$ . Aby punktowi  $m_i$ ,  $(x_i, y_i, z_i)$  udzielić ilości ruchu  $m_i v_i$ , gdzie  $v_i$  oznacza prędkość punktu, na to potrzeba siły chwilowej, której składowymi w kierunkach osi są odpowiednio  $m_i \frac{dx_i}{dt}$ ,  $m_i \frac{dy_i}{dt}$ ,  $m_i \frac{dz_i}{dt}$ . Wyraz pod znakiem sumy po lewej stronie równania (4) przedstawia moment tej siły chwilowej względem osi  $x$ , który nazywamy także momentem ilości ruchu (momentem momentu ruchu) punktu względem prostej. Sumę momentów ilości ruchu wszystkich punktów układu masyjnego względem pewnej prostej, nazywamy momentem ilości ruchu układu względem prostej. Tę sumę przedstawia lewa strona równania (4). Prawa zaś strona przedstawia sumę momentów popędów wszystkich sił przyłożonych, a przeto mamy twierdzenie: *zmiana momentu ilości ruchu układu swobodnego względem dowolnej prostej w jakimkolwiek czasie, równa się sumie momentów popędów sił przyłożonych (zewnątrznych) względem tej prostej w tymże samym czasie.*

Przyłożmy do punktu  $(x_i, y_i, z_i)$  siły chwilowe  $m_i \frac{dx_i}{dt}$ ,  $m_i \frac{dy_i}{dt}$ ,  $m_i \frac{dz_i}{dt}$  i zredukujmy te siły do początku osi współrzędnych; otrzymamy pewną parę sił o momencie  $G$ , który przedstawia właśnie moment ilości ruchu układu względem tego punktu. Przyjmijmy:

$$G_x = \sum m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right), G_y = \sum m_i \left( z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right), G_z = \sum m_i \left( x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right);$$

wówczas  $G^2 = G_x^2 + G_y^2 + G_z^2$ . Odejmijmy na osiach współrzędnych odpowiednio momenty  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $G_z$ , i dokonajmy ich składu wiadomym sposobem, otrzymamy odcinek prostoliniowy, przedstawiający właśnie moment  $G$ , a  $G_x$ ,  $G_y$  i  $G_z$  będą współrzędnymi punktu końcowego tego odcinka. Mamy więc według (3)

$$(5) \quad \frac{dG_x}{dt} = \sum (Z_i y_i - Y_i z_i), \frac{dG_y}{dt} = \sum (X_i z_i - Z_i x_i), \frac{dG_z}{dt} = \sum (Y_i x_i - X_i y_i).$$

Ponieważ  $\frac{dG_x}{dt}$  i t. d. oznaczają rzuty prędkości punktu końcowego odcinka  $G$ , przeto otrzymujemy następujące twierdzenie: *moment układu sił zewnętrznych względem dowolnej prostej, równa się co do wielkości i kierunku rzutowi na tę prostą prędkości punktu końcowego odcinka, przedstawiającego moment ilości ruchu układu materjalnego.*

Poprowadźmy przez środek masy  $(\xi, \eta, \zeta)$  układu trzy osi prostokątne, równoległe do osi  $x, y, z$ , i podczas ruchu układu poruszające się równoległe do siebie. Jeżeli  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  oznaczają współrzędne punktu  $m_i$  względem tych osi, to  $x_i = \xi + \xi_i, y_i = \eta + \eta_i, z_i = \zeta + \zeta_i$ , przyczem  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  są zmienne, gdyż układ zmienia swoje położenie względem tych osi, mających ruch postępowy. Ponieważ  $\sum m_i \xi_i = 0, \sum m_i \frac{d\xi_i}{dt} = 0$  i podobnie  $\sum m_i \eta_i = 0, \sum m_i \frac{d\eta_i}{dt} = 0, \sum m_i \zeta_i = 0, \sum m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = 0$ , przeto wyrażeniu  $G_x$  możemy nadać taką postać:

$$(6) \quad G_x = M \left( \eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right) + \sum m_i \left( \eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt} \right),$$

i podobne otrzymać wyrażenia dla  $G_y$  i  $G_z$ , gdzie  $M$  jest masą układu. Mamy zatem ważne twierdzenie: *moment ilości ruchu układu materjalnego względem prostej jest sumą dwu momentów, mianowicie momentu względem tej prostej ilości ruchu jego masy, skupionej w środku masy układu, tudzież momentu ilości ruchu tego układu względem prostej, poprowadzonej równoległe przez środek masy.*

Jeżeli  $\sum (Z_i y_i - Y_i z_i) = 0, \sum (X_i z_i - Z_i x_i) = 0$  i  $\sum (Y_i x_i - X_i y_i) = 0$ , natenczas z równania (4) wynika, jak wiadomo,  $\sum m_i \left( y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = C_1$ ; podobnie otrzymamy dwa inne równania. Każde z tych równań wyraża, że moment ilości ruchu względem odpowiedniej osi współrzędnych jest stały. Niech  $a, b, c$  oznaczają dostawy kierunkowe dowolnej prostej, przechodzącej przez początek osi, to  $aC_1 + bC_2 + cC_3$  będzie momentem ilości ruchu układu wzglę-

dem tej prostej, z czego się okazuje, że ten moment jest stały dla każdej prostej, przechodzącej przez początek osi.

Przyłożmy do każdego punktu odpowiednią siłę chwilową  $m_i v_i$  w kierunku prędkości, i zredukujmy te siły do początku osi współrzędnych  $O$ ; otrzymamy siłę wypadkową i parę wypadkową. Jeżeli zachodzi zasada pól, to moment  $p$  tej pary wypadkowej będzie

$$(7) \quad p = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2},$$

a jego dostawy kierunkowe będą odpowiednio proporcjonalne względem  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Okazuje się zatem, że płaszczyzna niezmienna (art. 141) jest prostopadła do momentu  $p$ , czyli, że *płaszczyznę niezmienną jest płaszczyzną pary wypadkowej ilości ruchu układu masyjnego*. Jakiegokolwiek położenie zajmie układ podczas ruchu, para wypadkowa sił chwilowych, zredukowanych do punktu  $O$ , nie zmienia się ani co do wielkości, ani co do kierunku.

**143. ZASADA PRACY I ZASADA ENERGII.** Założmy, że równania warunkowe  $L_k = 0$  nie zawierają czasu wyraźnie, wtedy możemy w równaniu d'Alembert'a zamiast przesunięć przygotowanych podstawić przesunięcia rzeczywiste punktów w elemencie czasu  $dt$  (art. 85). Czyniąc to, wyrazimy w tym przypadku zasadę d'Alembert'a przez następujące równanie:

$$(1) \quad \Sigma \left\{ \left( X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) dx_i + \left( Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) dy_i + \left( Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) dz_i \right\} = 0,$$

czyli

$$(2) \quad \Sigma m_i \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} dx_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} dy_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} dz_i \right) = \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Niech  $v_i$  będzie prędkością punktu  $m_i$ , wtedy

$$\frac{1}{2} d(v_i^2) = \frac{d^2 x_i}{dt^2} dx_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} dy_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} dz_i,$$

możemy zatem równanie (2) napisać także w postaci

$$(3) \quad d \Sigma \frac{m_i v_i^2}{2} = \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Ponieważ strona lewa tego równania przedstawia różniczkę energii kinetycznej układu masyjnego, a suma po stronie prawej przedstawia pracę elementarną układu sił przyłożonych, przeto mamy twierdzenie: *jeżeli warunki ruchu są od czasu niezależne, natenczas różniczka energii kinetycznej układu masyjnego równa się pracy elementarnej układu sił przyłożonych*. Znając prawo działania każdej siły i drogę jej punktu przyłożenia, możemy równanie (3) scałkować między dwoma danymi położeniami układu, i otrzymujemy twierdzenie: *zmiana energii kinetycznej układu masyjnego między dwoma jego położeniami równa się odpowiedniej pracy układu sił przyłożonych*. To twierdzenie wyraża tak zwaną zasadę pracy dla układów masyjnych. Ta zasada zawsze zachodzi dla układów swobodnych, bez względu na siły i na połączenia punktów z sobą. Praca układu sił przyłożonych zależy od obudwu położen

układu materjalnego i od drogi, którą każdy punkt opisał między tymi położeniami. Zmiana energii zależy więc od dróg oddzielnych punktów układu materjalnego między danymi położeniami; jeżeli zaś siły nie są funkcjami czasu, to owa zmiana zależy będzie tylko od dróg opisanych.

Niech układ sił przyłożonych posiada potencjał  $U$ , nie zawierający czasu wyraźnie, wtedy

$$(4) \quad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad \text{a stąd}$$

$$(5) \quad \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dU,$$

a zatem *praca elementarna układu sił równa się różnicy potencjału*. Całkując to równanie między krańcami, otrzymamy twierdzenie, że *praca układu sił między dwoma położeniami układu materjalnego równa się odpowiedniej zmianie potencjału sił*. Oznaczając przez  $T$  energję kinetyczną układu, otrzymamy przeto z (3)  $dT = dU$ , a całkując i oznaczając przez  $T_0$  i  $U_0$  wartości  $T$  i  $U$  w położeniu początkowym, mieć będziemy

$$(6) \quad T - T_0 = U - U_0$$

czyli ogólnie

$$(7) \quad T = U + H,$$

gdzie  $H$  jest stałą. *Jeżeli warunki ruchu są niezależne od czasu, a siły przyłożone posiadają potencjał, nie zawierający czasu wyraźnie, natenczas energja kinetyczna układu materjalnego różni się od potencjału sił o wielkość stałą. Zmiana energii między dwoma położeniami układu materjalnego równa się wtedy odpowiedniej zmianie potencjału sił*. To twierdzenie wyraża zasadę energii dla układów materjalnych, której szczególny przypadek dla jednego punktu podaliśmy w art. 83-cim.

Jeżeli ta zasada zachodzi, to układ przybiera zawsze tę samą energję, ilekroć podczas ruchu wraca do tego samego położenia, a praca sił między wyjściem z pewnego położenia a powrotem do niego jest równa zeru, jakkolwiek drogę każdy punkt opisał i w jakimkolwiek czasie powrót nastąpił. Zmiana energii kinetycznej i praca sił są więc tylko funkcjami spółrzednych punktów układu, a nie zależą wcale od czasu. Do zachowania energii kinetycznej nie potrzeba, żeby każdy punkt wrócił do swego pierwotnego położenia, lecz wystarcza, żeby tylko potencjał odzyskał wartość pierwotną.

Energję kinetyczną układu można wyrazić przez spółrzedne jego punktów względem osi ruchomych. Obierzmy w tym celu dowolny punkt układu  $(x_0, y_0, z_0)$ , wystawmy w nim układ osi równoległych do  $x, y, z$  i posuwających się równolegle do siebie, i oznaczmy przez  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  spółrzedne punktu  $m_i$  względem tych osi (art. 141). Wtedy  $x_i = x_0 + \xi_i$ ,  $y_i = y_0 + \eta_i$ ,  $z_i = z_0 + \zeta_i$ , a zatem  $x'_i = x'_0 + \xi'_i$  i podobnie  $y'_i$  i  $z'_i$ , skąd

$$T = \Sigma \frac{m_i}{2} [(x'_0 + \xi'_i)^2 + (y'_0 + \eta'_i)^2 + (z'_0 + \zeta'_i)^2],$$

a rozwijając kwadraty i kładąc

$$v_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2, v_{i0}^2 = \xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2, M = \sum m_i,$$

otrzymamy

$$(8) \quad T = \frac{M v_0^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{i0}^2}{2} + x_0' \sum m_i \xi_i' + y_0' \sum m_i \eta_i' + z_0' \sum m_i \zeta_i'.$$

Niech punktem  $(x_0, y_0, z_0)$  będzie środek masy układu, wtedy będzie  $\sum m_i \xi_i = 0$ ,  $\sum m_i \eta_i = 0$ ,  $\sum m_i \zeta_i = 0$ , otrzymamy zatem

$$(9) \quad T = \frac{M v_0^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{i0}^2}{2}.$$

Ponieważ  $v_0$  jest wtedy prędkością środka masy, zaś  $v_{i0}$  prędkością punktu  $m_i$  względem tego środka, przeto ostatnie równanie wyraża następujące twierdzenie E. König'a: *Energija kinetyczna układu masyjnego równa się sumie dwu wielkości, z których jedna przedstawiałaby energiją kinetyczną środka masy, gdyby w nim była skupiona masa układu, a druga przedstawia energiją kinetyczną układu, odpowiednią prędkościom jego punktów względem środka masy.*

**144. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII.** Przez odpowiednią interpretacyją równania (6) art. poprzedzającego możemy otrzymać pewną zasadę, która w nowszych czasach wyniesiona została do rzędu najważniejszych praw przyrody.

Rozważajmy układ masyjny w dwu położeniach A i  $A_0$ , i niech T i U,  $T_0$  i  $U_0$  oznaczają odpowiednio energiją kinetyczną układu i potencyjał sił w tych położeniach. Według równania (6) mamy

$$(1) \quad T - U = T_0 - U_0 \text{ czyli } T + (U_0 - U) = T_0.$$

Niech  $A_0$  będzie pewnym, zresztą dowolnie obranym, położeniem układu, do którego wszelkie inne położenia A odnosimy. Różnica  $U_0 - U$  oznacza pracę, którą siły przyłożone wykonać mają, aby układ z położenia A przywieść do stale obranego położenia  $A_0$ , w którym układ posiada energiją kinetyczną  $T_0$ . Ta praca zależy tylko od obudwu położeń rozważanych, a jest niezależna od czasu i od dróg opisanych, tudzież od rozmaitych ruchów, które układ przechodzi, przenosząc się przy działaniu sił z jednego położenia do drugiego. Obierzmy położenie  $A_0$  tak, żeby  $U_0 - U$  było dodatnie, wtedy będzie  $T_0 > T$ ; różnica  $U_0 - U$  przedstawiać zatem będzie przyrost energii kinetycznej układu, jeżeli on z położenia A zostanie przeniesiony przez siły do położenia  $A_0$ .

Pracę, którą siły przyłożone wykonać mają, aby układ masyjny z pewnego położenia A przywieść do innego położenia  $A_0$ , nazywamy energiją potencyjalną układu w położeniu A względem położenia  $A_0$ . Przymiotnik „potencyjalna” ma oznaczać, że energija kinetyczna układu w położeniu A może przyrość właśnie o wielkość, równą tej pracy. Sumę energii kinetycznej i energii potencyjalmj układu nazywamy energiją całkowitą tego układu. W tych określeniach przyjmujemy oczywiście, że siły i warunki

ruchu są tego rodzaju, iż zasada energii zachodzi. Korzystając z określenia sił zachowujących, danego w art. 83-cim, możemy twierdzenie, wyrażone równaniem (1), wypowiedzieć, jak następuje: *jeżeli na układ materyjalny działają siły zachowujące, a warunki ruchu są od czasu niezależne, natenczas energia całkowita układu zachowuje podczas ruchu wartość stałą.* W każdym bowiem położeniu A energia całkowita równa się tej energii kinetycznej, która odpowiada położeniu  $A_0$ , stale obranemu. W tej postaci przedstawia podane twierdzenie zasadę zachowanie energii.

Siły zewnętrzne, działające na punkty układu, przedstawiają działanie nań innego układu, a powyższa zasada zachodzi, jeżeli te siły zależą tylko od położenia wzajemnego obudwu układów. Gdy obierzemy pewne położenie  $A_0$ , jako położenie odniesienia, to wystarcza znajomość energii kinetycznej układu w tym położeniu, aby bez względu na wszelkie inne okoliczności obliczyć energiją potencyjalną układu w każdym innym położeniu, znając jego energiją kinetyczną w tym położeniu. Jeżeli energija kinetyczna wzrasta wskutek pracy sił, wtedy energija potencyjalna zmniejsza się o tyle, o ile pierwsza przyrosła; jeżeli układ przyjmie położenie  $A_0$ , wtedy energija potencyjalna staje się równa zeru, a energija całkowita sprowadza się do energii kinetycznej.

Rozważajmy ciało, spadające na ziemię przy wyłącznym działaniu siły ciężkości. Przyjmijmy dowolną płaszczyznę poziomą za płaszczyznę  $xy$ , i oznaczmy przez  $z_i$  pionową odległość punktu  $m_i$  od tej płaszczyzny, licząc dodatnie  $z_i$  w górę. Rozkładając siły na składowe poziome i pionowe, otrzymamy  $X_i = 0$ ,  $Y_i = 0$ ,  $Z_i = -m_i g$ , a więc

$$(2) \quad \int \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = -\Sigma m_i g z_i + c = -Mg\zeta + c,$$

gdzie  $\zeta$  oznacza odległość środka masy od tej płaszczyzny,  $M$  masę ciała,  $c$  stałą dowolną. Potencjał więc sił ciężkości wynosi  $U = -Mg\zeta + c$ , a wyznaczając  $c$  tak, żeby dla  $\zeta = 0$  było  $U = 0$ , otrzymamy  $c = 0$ , a więc  $U = -Mg\zeta$ . *Praca sił ciężkości, działających na punkty ciała materyjalnego, równa się pracy ciężaru ciała, przyłożonego do jego środka masy.* Niech ciało spada ze spoczynku, a środek masy niech będzie w wysokości  $h$  nad powyższą płaszczyznę poziomą, określającą położenie  $A_0$ . Jeżeli środek masy spadnie do  $A_0$ , będzie  $U_0 = 0$ , (wyznaczyliśmy bowiem  $c$  z tego warunku), więc  $T_0 = Mg h$ . W jakimkolwiek innym położeniu, gdy środek masy leży ponad  $A_0$ , będzie  $\zeta < h$ ,  $U = -Mg\zeta$ ; z zasady przeto powyższej wynika równanie  $T + Mg\zeta = Mg h$ . Wielkość  $Mg\zeta$  wyobraża energiją potencyjalną, a  $Mg h$  energiją całkowitą ciała w położeniu rozważanym. Podczas spadku zbliża się ciało do  $A_0$ , energija kinetyczna  $T$  wzrasta wskutek pracy sił ciężkości, a energija potencyjalna zmniejsza się, tak, iż przybiera wartość 0 na poziomie  $A_0$ . Gdy ciało podnosi się, wtedy wzrasta jego energija potencyjalna, a energija kinetyczna zmniejsza się, tak iż, gdy pierwsza osiągnie wartość największą, druga stanie się równa zeru w najwyższym położeniu, jakie ciało zajmie nad poziomem  $A_0$ .

Powyższa zasada jest szczególnie ważna w tym przypadku, gdy na punkty układu działają same siły wewnętrzne, będące funkcjami odległości dwu punktów. Niech  $m_i, m_k$  oznaczają masy dwu punktów,  $r_{ik}$  ich wzajemną odległość; siły wewnętrzne, działające w kierunku prostej  $m_i m_k$ , wyrażają się wtedy wzorem  $m_i m_k \varphi(r_{ik})$ , w którym  $\varphi(r_{ik})$  oznacza funkcję odległości. Otrzymamy wtedy:

$$(3) \quad \begin{cases} X_i = -X_k = \mp m_i m_k \varphi(r_{ik}) \cdot \frac{x_i - x_k}{r_{ik}} \\ Y_i = -Y_k = \mp m_i m_k \varphi(r_{ik}) \cdot \frac{y_i - y_k}{r_{ik}} \\ Z_i = -Z_k = \mp m_i m_k \varphi(r_{ik}) \cdot \frac{z_i - z_k}{r_{ik}}; \end{cases}$$

$$X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i + X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k = \\ = \mp m_i m_k \frac{\varphi(r_{ik})}{r_{ik}} [(x_i - x_k)(dx_i - dx_k) + (y_i - y_k)(dy_i - dy_k) + (z_i - z_k)(dz_i - dz_k)],$$

gdzie znak — odnosi się do przyciągania, a znak + do odpychania. Ponieważ  $r_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2$ , a stąd

$$r_{ik} dr_{ik} = (x_i - x_k)(dx_i - dx_k) + (y_i - y_k)(dy_i - dy_k) + (z_i - z_k)(dz_i - dz_k),$$

przeto:

$$X_i dx_i + \dots + Z_k dz_k = \mp m_i m_k \varphi(r_{ik}) \cdot dr_{ik};$$

kładąc zatem

$$(4) \quad \int \mp \varphi(r_{ik}) dr_{ik} = \Phi(r_{ik}),$$

otrzymamy

$$(5) \quad U = \Sigma \Sigma m_i m_k \Phi(r_{ik}) + c,$$

jako potencjał układu sił wewnętrznych. Sumowanie rozciąga się na wszystkie kombinacje różnych wskaźników po dwa. Funkcją  $U$ , według (5) obliczyć się dającą, której wartość zależy od funkcji  $\varphi$ , nazywamy funkcją potencyjalną albo także potencjałem układu masyjnego względem siebie samego. Potencjał układu zależy tylko od wzajemnego położenia punktów tego układu, a nie zależy od położenia, które układ zajmuje w przestrzeni.

Układ będzie w równowadze stałej co do sił wewnętrznych, jeżeli potencjał  $U$  przybierze wartość największą (art. 114). Obierzmy to położenie układu, w którym zachodzi największa wartość potencjału, za położenie, do którego inne położenia odnosić będziemy, i nazwijmy je  $A_0$ . Stałą  $c$  w równaniu (5) możemy zawsze tak wyznaczyć, żeby największa wartość potencjału  $U_0$  była równa zeru; a wtedy potencjał w każdym położeniu  $A$  będzie ujemny. Energija potencjalna  $U_0 - U = -U = V$  przedstawia wtedy pracę, którą siły wewnętrzne wykonać mają, aby układ z danego położenia  $A$  przywieść do położenia równowagi stałej, dokładnie oznaczonego. W równowadze stałej

energija kinetyczna układu jest największa (art. 114), równanie przeto  $T - U = T + V = T_0$  określa energiją całkowitą jako największą energiją kinetyczną, którą układ wskutek działania sił wewnętrznych przybrać może. W każdym innym położeniu energija kinetyczna jest mniejsza od téj, którą układ posiada w położeniu równowagi stałej, a różnica przedstawia właśnie energiją potencyjalną, t. j. tę energiją, której siły wewnętrzne układowi jeszcze udzielić mogą, aby go przywieść do owego położenia. Przywodząc układ z położenia  $A_0$  do  $A$ , wykonamy wbrew siłom wewnętrznym pracę  $-V = U$ , przez co o tęż pracę  $-V = U$  wzrasta energija potencyjalna układu przy równym ubytku energii kinetycznej, a suma obudwu energij pozostaje ciągle też sama.

**145. RUCH WZGLĘDNY.** Badanie ruchu każdego punktu układu względem innego układu ruchomego sprowadza się do rozważania ruchu tego punktu względem układu nieruchomego, jeżeli oprócz sił przyłożonych wprowadzimy w rachunek siły pozorne, temu punktowi odpowiednie (art. 88). Znając przeto ruch układu odniesienia, wystawmy w tym układzie w dowolnym punkcie trzy prostokątne osi spółrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$ , poruszające się razem z nim; wówczas możemy otrzymać równania ruchu każdego punktu układu względem tych osi. Niech  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  oznaczają składowe siły, przyłożonej do punktu  $m_i$  ( $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ), wzięte w kierunkach osi ruchomych;  $X_{iu}, Y_{iu}, Z_{iu}$  niech będą składowymi siły unoszenia, a  $\Lambda_k = 0$  niech będą równaniami warunkowymi ruchu, wyrażonymi przez spółrzędne względne, przyczem  $k = 1, 2, \dots (3n - s)$ , gdzie  $n$  jest ilością punktów układu. Biorąc prędkości  $p, q, r$  w znaczeniu, podanym w art. 62-im, otrzymamy według art. 137-go następujące równania ruchu punktu  $m_i$ :

$$(1) \quad \begin{cases} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = X'_i - X_{iu} - 2m_i \left( q \frac{d\zeta_i}{dt} - r \frac{d\eta_i}{dt} \right) + \Sigma \lambda_k \frac{d\Lambda_k}{d\xi_i} \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = Y'_i - Y_{iu} - 2m_i \left( r \frac{d\xi_i}{dt} - p \frac{d\zeta_i}{dt} \right) + \Sigma \lambda_k \frac{d\Lambda_k}{d\eta_i} \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = Z'_i - Z_{iu} - 2m_i \left( p \frac{d\eta_i}{dt} - q \frac{d\xi_i}{dt} \right) + \Sigma \lambda_k \frac{d\Lambda_k}{d\zeta_i} \end{cases}$$

Podstawiawszy za  $i$  wartości  $1, 2, \dots n$ , otrzymamy  $3n$  równań ruchu względnego układu. Mnożąc je odpowiednio przez  $\delta \xi_i, \delta \eta_i, \delta \zeta_i$  i biorąc przesunięcia odpowiednio do warunków  $\delta \Lambda_k = 0$ , możemy otrzymać równanie, wyrażające zasadę d'Alembert'a dla ruchu względnego, z którego naodwrot wszystkie powyższe równania wynikają. Jeżeli siły przyłożone mają potencjał, wyrażony w funkcji spółrzędnych względnych, to zamiast  $X'_i, Y'_i, Z'_i$  należy podstawić pochodne potencjału względem tych spółrzędnych.

Niech warunki pozwalają na dowolny ruch postępowy układu przy sztywnym połączeniu jego punktów. Biorąc wtedy  $\delta \xi_1 = \delta \xi_2 = \dots = \delta \xi_i = \dots = \delta \xi_n$  i podobnie  $\delta \eta_i$  i  $\delta \zeta_i$ , pomnóżmy odpowiednio równania (1) przez tak obrane przesunięcia i dodajmy iloczyny; suma będzie równa zeru, niezależnie od warunków postawionych. Przyrównyując zatem do zera czynnik każdego przesunięcia, otrzymamy

$$(2) \quad \Sigma m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \Sigma X_i' - \Sigma X_{iu} - \Sigma 2 m_i \left( q \frac{d\zeta_i}{dt} - r \frac{d\eta_i}{dt} \right)$$

i podobnie dwa inne równania dla  $\eta$  i  $\zeta$ . Jeżeli  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  oznaczają spólrzędne względne środka masy, a  $M$  oznacza masę układu, to

$$M \frac{d\xi}{dt} = \Sigma m_i \frac{d\xi_i}{dt}, \quad M \frac{d\eta}{dt} = \Sigma m_i \frac{d\eta_i}{dt}, \quad M \frac{d\zeta}{dt} = \Sigma m_i \frac{d\zeta_i}{dt}.$$

Siła unoszenia  $X_{iu}$  jest proporcjonalna względem masy  $m_i$ , skoro bowiem  $\gamma u\xi$  oznacza rzut przyspieszenia unoszenia punktu  $m_i$  na oś  $\xi$ , to  $X_{iu} = m_i \gamma u\xi$ ; jeżeli zatem przez  $\Gamma u\xi$  oznaczymy przyspieszenie unoszenia środka masy w kierunku téj osi, to  $\Sigma X_{iu} = M \Gamma u\xi$ ; podobnie wyrazimy  $\Sigma Y_{iu}$  i  $\Sigma Z_{iu}$ . Z równania (2) więc otrzymujemy

$$(3) \quad M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma X_i' - M \Gamma u\xi - 2 M \left( q \frac{d\zeta}{dt} - r \frac{d\eta}{dt} \right),$$

i podobne równania otrzymamy dla  $\eta$  i  $\zeta$ . Z tych równań okazuje się, że *środek masy układu porusza się względem układu odniesienia tak, jak punkt swobodny, w którym skupiono całą masę układu i do którego przesunięto równolegle wszystkie siły przyłożone*. To twierdzenie wyraża więc zasadę ruchu względnego środka masy.

Przyjmijmy, że równania warunkowe nie zawierają czasu wyraźnie, wtedy możemy zamiast  $\delta \xi_i$ ,  $\delta \eta_i$ ,  $\delta \zeta_i$  brać odpowiednio  $d\xi_i$ ,  $d\eta_i$ ,  $d\zeta_i$ . Mnożąc przeto równania (1) odpowiednio przez  $d\xi_i$ ,  $d\eta_i$ ,  $d\zeta_i$  i dodając iloczyny, otrzymamy

$$(3) \quad \Sigma m_i \left( \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} d\xi_i + \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} d\eta_i + \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} d\zeta_i \right) = \Sigma \left\{ (X_i' - X_{iu}) d\xi_i + (Y_i' - Y_{iu}) d\eta_i + (Z_i' - Z_{iu}) d\zeta_i \right\},$$

czyli

$$(4) \quad d \Sigma \frac{m_i v_{ic}^2}{2} = \Sigma \left\{ (X_i' - X_{iu}) d\xi_i + (Y_i' - Y_{iu}) d\eta_i + (Z_i' - Z_{iu}) d\zeta_i \right\},$$

gdzie  $v_{ic}$  jest prędkością względną punktu  $m_i$ . Lewa strona tego równania jest różniczką energii kinetycznej ruchu względnego układu; powyższe zatem równanie wyraża, że różniczka téj energii równa się sumie prac elementarnych sił przyłożonych i sił unoszenia, wziętych w kierunku przeciwnym. Całka przeto tego równania pozwala obliczyć energiją kinetyczną, odpowiednią ruchowi względnemu.

Niech układ odniesienia obraca się jednostajnie z prędkością kątową  $\omega$  około osi  $z$ , wtedy  $p=0$ ,  $q=0$ ,  $r=\omega$ ;  $X_{iu} = -m_i \omega^2 \xi_i$ ,  $Y_{iu} = -m_i \omega^2 \eta_i$ ,  $Z_{iu} = 0$ ; równania przeto ruchu będą

$$(5) \quad \begin{cases} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = X_i' + \omega^2 m_i \xi_i + 2\omega m_i \frac{d\eta_i}{dt} + \Sigma \lambda_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \xi_i}, \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = Y_i' + \omega^2 m_i \eta_i - 2\omega m_i \frac{d\xi_i}{dt} + \Sigma \lambda_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \eta_i}, \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = Z_i' + \Sigma \lambda_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \zeta_i}. \end{cases}$$

Z równania (4) wynika w tym przypadku:

$$(6) \quad d\Sigma \frac{m_i v_{iw}^2}{2} = \Sigma (X'_i d\xi_i + Y'_i d\eta_i + Z'_i d\zeta_i) + \omega^2 d\Sigma \frac{m_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2),$$

a jeżeli siły przyłożone mają potencyjał  $U'$ , to kładąc

$$(7) \quad U = U' + \omega^2 \Sigma \frac{m_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2),$$

otrzymamy po scałkowaniu następujące równanie

$$(8) \quad \Sigma \frac{m_i v_{iw}^2}{2} = U + h,$$

które pozwala obliczyć energiją kinetyczną ruchu względnego. Wielkość  $\frac{\omega^2}{2} \Sigma m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2)$  przedstawia potencyjał układu sił odśrodkowych.

#### L i t e r a t u r a (Rozdz. XIII).

C. F. GAUSS, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Dynamik (1829; Gesammelte Werke, t. V, Göttingen, 1867). — W. R. HAMILTON: On a general method in Dynamics, by which the study of the motion of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function (Transact. of the royal society of Ireland, Dublin, 1834); Second essay on a general method in Dynamics (tamże, 1834). R. H. HELMHOLTZ, Ueber das Princip der Erhaltung der Kraft (Berlin, 1842; także: Gesammelte Werke, t. I, Leipzig, 1882). — W. J. M. RANKINE, Miscellaneous scientific papers (London, 1881; mianowicie część II, zawierająca prace z termodynamiki). — W. GOSIEWSKI, Przyczynek do teoryi sił żywych (Pam. tow. n. śc. w Paryżu t. III, 1873). — E. HABICH, O zasadzie zachowania powierzchni (tamże, t. X, 1878). — H. W. WATSON i S. H. BURBURY, A treatise on the application of generalised coordinates to the Kinetics of a material system (Oxford, 1879). — M. PLANCK, Das Princip der Erhaltung der Energie (Leipzig, 1887. Praca, uhonorowana nagrodą uniwersytetu w Getyndze). —