

ROZDZIAŁ XX.

KINETYKA CIECZY. (DOKOŃCZENIE).

215. RUCH TRWAŁY CIECZY MATERYSJALNÉJ. Przyjmijmy, że siły przyłożone (X, Y, Z) mają potencjał U, niezawierający czasu wyraźnie, i że ruch cieczy jest trwały. Przy tych założeniach możemy całkować równania ruchu bez względu na to, czy zachodzi potencjał prędkości, czy nie. Równania ruchu będą

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z},$$

gdzie $\frac{du}{dt} = u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$ i podobnie $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$. Całkujemy te równania po linii prądu, którą cząstka opisuje, mnożąc je odpowiednio przez dx , dy , dz i dodając je następnie, to wypadnie nam przyjąc $dx = u \cdot dt$, $dy = v \cdot dt$, $dz = w \cdot dt$. Otrzymamy tym sposobem równanie

$$u \cdot du + v \cdot dv + w \cdot dw = dU - \frac{dp}{\sigma},$$

a jeżeli V jest prędkością cząstki, gdzie $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$, to całka tego równania będzie

$$(2) \quad \frac{V^2}{2} - U + \frac{p}{\sigma} = C,$$

gdzie C jest stałą dla każdej cząstki z osobna, której wartość zmienia się jednak od cząstki do cząstki. To równanie przedstawia całkę pierwszą równań ruchu, niezależną od istnienia potencjału prędkości, i pozwala obliczyć prędkość ruchu postępowego cząstki, jeżeli znamy stałą C. Ponieważ jednak nie znamy wartości u , v , w , przeto nie możemy wyznaczyć ani kierunku ruchu

cząstki, ani odpowiedniej linii prądu, ani rozstrzygnąć, czy ruch będzie wirowy, czy niewirowy.

Jeżeli zachodzi ruch niewirowy w całej cieczy, to stała C będzie ta sama dla wszystkich linii prądu. Jakoż, mamy wtedy $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$; ponieważ zaś $V^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$, przeto równanie (3) art. 210-go, odnoszące się do całej przestrzeni, przez ciecz zajętej, wyznacza w tym przypadku $\frac{V^2}{2} - U + \frac{p}{\sigma} = \text{stałej}$, przyczym stała jest ta sama dla całej cieczy.

Niech na cząstki cieczy działają tylko siły ciężkości. Obierzmy płaszczyznę xy poziomo, oś z pionowo w górę; wtedy $U = -gz$ (bez stałej, bo ona mieści się w stałej całkowania), otrzymamy więc

$$(3) \quad \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\sigma} = C \quad \text{czyli} \quad z + \frac{p}{\sigma g} + \frac{V^2}{2g} = \lambda,$$

gdzie λ jest stałą dla tej samej cząstki.

Wielkość $p : \sigma g$ przedstawia wysokość słupa cieczy o podstawie równej jednostce, którego ciężar jest równy ciśnieniu p ; nazywamy ją wysokością odpowiednią ciśnieniu, albo krócej wysokością ciśnienia. Lewa więc strona równania (3) jest sumą trzech wysokości, mianowicie: wysokości z , w której cząstka znajduje się nad pewną, stale obraną płaszczyzną poziomą; wysokości ciśnienia i wysokości, odpowiedniej prędkości V . Sumę tych trzech wysokości nazywamy ciążeniem cząstki cieczy. Według równania (3) *ciążenie jest stałe dla tej samej cząstki cieczy* (twierdź. D. Bernoulli'ego). Gdy poprowadzimy w odległości λ od płaszczyzny xy płaszczyznę poziomą, którą nazywamy płaszczyzną ciążenia, to każdej cząstce odpowiada pewna stała płaszczyzna ciążenia, bez względu na to, czy ruch cząstki jest wirowym czy nie, i bez względu na przebieg linii prądu.

Znając z, p, V dla jednego położenia cząstki, możemy wyznaczyć λ , a płaszczyznę xy możemy zawsze tak obrać, żeby λ było dodatnie. Ponieważ ciągłość cieczy wymaga, żeby było $p \geq 0$, przeto widzimy, że $\frac{V^2}{2g} + z \leq \lambda$, inaczej musiałoby nastąpić rozprysnięcie się cieczy. Prędkość ma zatem pewną granicę, po za którą ciecz rozpryskuje się, i podane równanie nie może być stosowane.

Niech ciecz będzie w naczyniu, w którego ścianie znajduje się mały otwór o polu f ; do naczynia dopływa tyle cieczy, ile jęj wypływa przez otwór; wtedy ruch będzie trwały. Obierzmy płaszczyznę xy w poziomej powierzchni cieczy, i liczymy z na dół; oznaczmy przez p_0 ciśnienie środka otaczającego (np. powietrza) na powierzchnię cieczy, a przez V_0 prędkość cząstki na tej powierzchni; dla $z = 0$ będzie $p = p_0$, $V = V_0$, a zatem $\lambda = \frac{p_0}{\sigma g} + \frac{V_0^2}{2g}$. Otrzymamy zatem z (3)

$$(4) \quad -z + \frac{p}{\sigma g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\sigma g} + \frac{V_0^2}{2g}.$$

Przypuśćmy, że V_0 jest stałe na powierzchni; wtedy λ będzie także samo dla wszystkich cząstek, z czego wnosić można, że ruch cieczy będzie niewirowy. Przypuśćmy dalej, że wszystkie strugi, zbiegające się w otworze ściany naczynia, są prostopadłe do jego pola i do powierzchni górnej cieczy, oznaczmy przez F pole wierzchniego poziomu cieczy w naczyniu, a przez V prędkość wypływu, t. zn. prędkość każdej cząstki, gdy ona przechodzi przez mały otwór w ścianie naczynia, wówczas $V : V_0 = F : f$. Jeżeli środek masy otworu znajduje się w głębokości h pod powierzchnią, to z równania (4) otrzymamy

$$-h + \frac{p}{\sigma g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\sigma g} + \frac{V^2}{2g} \left(\frac{f}{F} \right)^2,$$

skąd wynika prędkość wypływu

$$(5) \quad V = \sqrt{\frac{2gh\sigma + 2(p_0 - p)}{\sigma \left[1 - \left(\frac{f}{F} \right)^2 \right]}}.$$

W tym wzorze oznacza p ciśnienie środka otaczającego na jednostkę pola otworu. Jeżeli f jest bardzo małe w porównaniu z F , a różnica ciśnień p_0 i p także nieznaczna, ze względu na niewielkie rozmiary naczynia, wtedy możemy pominąć odpowiednie wyrazy i otrzymamy w przybliżeniu

$$(6) \quad V = \sqrt{2gh}.$$

Jest to wzór E. Torricelli'ego, według którego prędkość wypływu z dostatecznie małego otworu równa się prędkości, odpowiedniej głębokości środka masy otworu pod powierzchnią cieczy.

Oznaczywszy przez Φ pole naczynia w głębokości z , możemy prędkość V_z w tej głębokości obliczyć z proporcji $V_z : V_0 = F : \Phi$. Otrzymamy więc ciśnienie w tej głębokości

$$(7) \quad p = p_0 + \sigma g z + \frac{\sigma V_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{F}{\Phi} \right)^2 \right].$$

Gdyby ciecz była w spoczynku, to $P = p_0 + \sigma g z$ byłoby ciśnieniem w głębokości z (art. 196), wskutek czego

$$(8) \quad p = P + \sigma \cdot \frac{V_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{F}{\Phi} \right)^2 \right].$$

Nazywamy P ciśnieniem hydrostatycznym, zaś p ciśnieniem hydrokinetycznym w głębokości z . Ostatni wzór pokazuje, że ciśnienie hydrokinetyczne różni się w ogólności od ciśnienia hydrostatycznego, a różnica zależy od gęstości cieczy, od jej prędkości na powierzchni i od stosunku między polem wierzchniego poziomu cieczy w naczyniu a polem w głębokości rozważanej. Gdzie $F = \Phi$, tam obadwa ciśnienia są równe; dla $F \geq \Phi$ będzie $p \leq P$; atoli powyższe równanie (8) może być tylko tam zastosowane, gdzie $p \geq 0$.

Rozprysnięcie się cieczy nastąpi w tym przekroju naczynia, w którym prawa strona równania (8) staje się ujemną; to zjawisko wymaga znacznego zwężenia naczynia w porównaniu z polem wierzchniego w nim poziomu cieczy.

Powyższy rachunek opiera się na przypuszczeniu, że ciecz jest doskonała, tudzież na kilku założeniach wątpliwéj wartości. Otrzymane wyniki należy przeto uważać za zbliżone do prawdy, a doświadczenia okazują, że prędkość rzeczywista wypływu różni się od téj, która wynika z powyższego rachunku. Tę różnicę należy w pierwszym rzędzie przypisać lepkości cieczy.

216. RUCH CIECZY RÓWNOLEGŁY DO PŁASZCZYZNY. Załóżmy, jak w art. 211-ym, że dla każdéj cząstki cieczy prędkość $w = 0$ i że u i v są tylko funkcjami współrzędnych x, y ; wtedy cząstki cieczy poruszają się równolegle do płaszczyzny xy . W tym przypadku dostateczne będzie rozważanie ruchów cząstek, znajdujących się na płaszczyźnie xy , a to co zajdzie na krzywéj, wykręślonéj na téj płaszczyźnie, to zachodzić będzie na każdéj krzywej równoległéj na powierzchni walca prostego, którego podstawą jest owa krzywa na płaszczyźnie xy . Jeżeli φ jest potencjałem prędkości, to $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, potencjał zaś czyni zadość równaniu

$$(1) \quad \Delta_2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Równania $\varphi = \text{stała}$ przedstawia tak zwane linie potencyjalne; na każdéj z nich posiada stałą inną wartość. Własności tych linii wynikają bezpośrednio z własności powierzchni potencyjalnych w przypadku ogólnym, dla tego nie widzimy tu potrzeby zastanawiania się nad nimi.

Równanie różniczkowe linii prądu jest $u \cdot dy - v \cdot dx = 0$; każda linia prądu przecina prostokątnie linie potencyjne i rozciąga się na wskroś pola, przez ciecz zajętego, nie będąc zamkniętą. Jeżeli ruch jest trwały, wtedy cząstka cieczy bieży wzdłuż linii prądu w takim kierunku, że z punktu o mniejszym potencjale prędkości przechodzi do punktu o większym potencjale.

Lewa strona równania linii prądu jest różniczką zupełną pewnéj funkcji współrzędnych x, y w obrębie przestrzeni, przez ciecz zajętej. Jakoż $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ jest, jak wiadomo, warunkiem, żeby $u \cdot dy - v \cdot dx$ było różniczką zupełną, a ten warunek wyraża właśnie ciągłość płynu. Funkcją, której różniczką zupełną jest powyższy wyraz, nazywamy potencjałem prądu. Oznaczając ją przez $\psi(x, y)$, mamy równania, określające tę funkcję:

$$(2) \quad d\psi = u \cdot dy - v \cdot dx, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

Z tego określenia wynika, że $\psi = \text{stała}$ jest równaniem układu linii prądu, przecinających prostokątnie układ linii potencyjalnych $\varphi = \text{stała}$. Między potencjałami φ i ψ zachodzi równanie

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

wyrażające właśnie powyższy związek geometryczny, a drugie pochodne funkcji ϕ zadość czynią warunkowi

$$(4) \quad \Delta_2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

wynikającemu z równania ciągłości.

Łatwo okazać znaczenie potencjału prądu. Poprowadźmy na płaszczyźnie xy dowolną krzywą, nie będącą linią prądu, w punkcie m , (x, y) tej krzywej wystawmy normalną wewnętrzną (ku środkowi krzywizny), i rzućmy prędkość (u, v) , z którą cząstka cieczy przechodzi przez punkt m , na tę normalną; wówczas, oznaczwszy przez ds element krzywej, otrzymamy $u \cdot \frac{dy}{ds} -$

$- v \cdot \frac{dx}{ds}$ jako wielkość rzutu tej prędkości. Mnożąc ten wyraz przez ds ,

otrzymamy $u \cdot dy - v \cdot dx$ jako ilość cieczy, która w jednostce czasu przechodzi przez powierzchnię walca prostego o podstawie ds i o wysokości $= 1$,

a całka $\int (u \cdot dy - v \cdot dx)$, wzdłuż krzywej między dwoma punktami, przedstawia ilość cieczy, która w jednostce czasu przechodzi przez odpowiednią powierzchnię walca. Przepływ przez element walca jest różniczką potencjału prądu, a obliczenie tego potencjału polega na tych samych zasadach, co wyznaczenie funkcji φ . Ponieważ kierunek prędkości jest styczny do linii prądu, przeto będzie $d\phi = 0$ dla każdego elementu tej linii.

Linie prądu istnieją bez względu na φ , a zatem także w tych częściach cieczy, w których zachodzi ruch wirowy. Istnieje więc także potencjał prądu, chociaż ma w tym przypadku inne własności. Dla ruchu wirowego mamy w przypadku rozważanym

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right),$$

a zatem

$$(5) \quad \Delta_2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\omega.$$

Zajmiemy się przeważnie ruchem niewirowym. Równania (2), które dla tego ruchu możemy napisać w postaci

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

wyrażają dwa zasadnicze związki między obydwojema potencjałami, które mają ważne znaczenie kinematyczne. Okazuje się z nich, że prędkość w danym punkcie można obliczyć bądź z potencjału prędkości bądź z potencjału prądu. Wiadomo, że rzut prędkości na kierunek ds wyraża się wzorem (art. 82)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Gdy zaś weźmiemy kierunek $d\sigma$, normalny do ds , to będzie

$$\frac{dx}{d\sigma} = -\frac{dy}{ds}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{dx}{ds};$$

otrzymamy więc z (6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma},$$

t. j., że *prędkość w danym kierunku wyraża się bądź przez pochodną potencyjału prędkości w tym kierunku, bądź przez pochodną potencyjału prądu w kierunku prostopadłym.*

Nadto wynika z powyższych równań, że wszelkie zagadnienia o ruchu niewirowym, równoległym do płaszczyzny, można rozwiązać na podstawie teorii funkcji zmiennej zespolonej. Jakoż, gdy $i = \sqrt{-1}$, to wiadomo, że równania (6) wyrażają warunki konieczne i wystarczające, żeby wielkość zespolona $\varphi + i\psi$ była funkcją zmiennej zespolonej $x + iy$. Używając znakowania B. Riemann'a, przyjmijmy $w = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$; każdy związek analityczny $w = F(z)$ wyznaczać będzie ruch cieczy z odpowiednimi linijami potencyjalnymi i linijami prądu. (Ponieważ nie używamy w i z w znaczeniu prędkości i spółrzędnej, przeto możemy użyć powyższego znakowania). Równania (6) nie zmieniają się, jeżeli zamiast φ weźmiemy $-\psi$, a zamiast ψ weźmiemy φ , to znaczy, że każdy związek $w = F(z)$ wyznacza dwa możebne ruchy cieczy, które nazywamy ruchami sprzężzonymi. Dla jednego z nich przedstawia równanie $\varphi = C$ układ linii potencyjalnych, a $\psi = C'$ układ linii prądu; dla drugiego zaś $\psi = C$ są linijami potencyjalnymi, a $\varphi = C'$ linijami prądu. Kierunek ruchu ma być wzięty odpowiednio w każdym z tych przypadków, stosownie do przebiegu linii potencyjalnych.

Pole ruchu na płaszczyźnie xy ma łączność pojedynczą, jeżeli niema w nim cząstek wirujących; w każdym innym przypadku łączność jego będzie wielokrotną. W pierwszym przypadku linie potencyjalne nie mogą być zamknięte; jeżeli taka linia jest zamknięta, to wewnątrz jęj obwodu zachodzi ruch wirowy. Jeżeli w cieczy zachodzą wiry, natenczas linie prądu mogą być zamknięte, a jeżeli ruch jest trwały, to może zająć przypadek, że cząstki niewirujące krążą po liniach zamkniętych około wirów. Dowodzenie tych twierdzeń zostawiamy czytelnikowi.

217. ZAGADNIENIA. W zagadnieniach o ruchu, równoległym do płaszczyzny, można wziąć jeden z układów linii $\varphi = C$ i $\psi = C'$, szukając drugiego układu, i wyznaczyć potem prawo ruchu, albo przyjąć funkcję $w = F(z)$ i badać ruch wynikający. Z podanych własności jednowartościowych potencyjałów prędkości wynika, że mając dany ruch niewirowy na obwodzie pola, można wyznaczyć ruch każdej cząstki wewnątrz tego pola, atoli takie zadania przedstawiają wielkie trudności w rozwiązaniu.

W tych zagadnieniach można z korzyścią używać spółrzędnych biegunowych. Oznaczmy przez r promień wodzący, przez θ kąt biegunowy; niech ρ będzie prędkością w punkcie (r, θ) w kierunku promienia wodzące-

go, τ prędkością w kierunku rosnącego kąta θ , prostopadłym do pierwszego; wtedy $u = \rho \cos \theta - \tau \sin \theta$, $v = \rho \sin \theta + \tau \cos \theta$. Ponieważ $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta$, $r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\sin \theta$, $r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \cos \theta$, przeto otrzymamy $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \rho) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right]$; równanie ciągłości jest zatem

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial r} (r \rho) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} = 0.$$

Jeżeli φ jest potencjałem prędkości, to $\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\tau = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$; będzie więc

$$(2) \quad \Delta_2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Dla φ otrzymamy stąd równanie $\Delta_2 \varphi = 0$, a dla potencjału prądu podobnie $\Delta_2 \psi = 0$.

1). Wyznaczyć taki ruch niewirowy, żeby linie prądu stanowiły wiązkę prostych, wychodzących z jednego punktu. Mamy więc $\psi = a\theta + b$, z czego wynika $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = a$, $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$; ze związków między φ i ψ wypada, że $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$.

Wstawiając tę wartość w (2), otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \text{ całkując zaś, } \varphi = A \log r + B.$$

Krzywe więc potencjalne są kołami spółśrodkowymi, wykreślonymi około bieżąca układu. Z warunku (6) art. poprzedzającego wynika $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a}{r}$, a zatem $A = a$, skąd $\varphi = a \log r + B$. Jedynym punktem osobliwym funkcji φ jest punkt $r = 0$; kręśląc około tego punktu nieskończenie małe koło i wyliczając jego pole, możemy z potencjału φ obliczyć prędkość w każdym punkcie na pozostałej płaszczyźnie. Otrzymamy $\rho = \frac{a}{r}$, $\tau = 0$; prędkość ma

przeto kierunek promienia i jest odwrotnie proporcjonalna względem odległości od środka. Jeżeli $a > 0$, to φ rośnie dla rosnącego r , cząstki cieczy poruszają się więc od środka na zewnątrz; dla $a < 0$ odbywa się prąd w kierunku przeciwnym. W pierwszym przypadku należy w środku przyjąć źródło, z którego ciecz się rozchodzi; w drugim zaś przyjąć otwór, którym ona odpływa, aby otrzymane wyniki miały znaczenie fizyczne.

2). Gdy linie prądu są kołami spółśrodkowymi, wyznaczyć odpowiedni ruch niewirowy. Tu mamy $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$, a z równania (6) art. poprzedzającego $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$, więc $\varphi = a\theta + b$, $\psi = a \log r + B$, skąd $\rho = 0$, $\tau = \frac{a}{r}$. Cząstka w środku obraca się około osi, przechodzącej przez jej środek masy; w środku

cieczy znajduje się więc wir, a zresztą w żadnym innym punkcie. Prędkość każdej cząstki niewirującej ma kierunek prostopadły do promienia i jest odwrotnie proporcjonalna względem jego długości; chociaż więc cząstki na tym samym kole mają tę samą prędkość, to przecież ruch cieczy różni się od ruchu ciała sztywnego, i nie należy twierdzić, jakoby ciecz obracała się około osi. Przyjmijmy, że ciecz znajduje się w naczyniu walcowym, i podzielmy ją na warstwy walcowe spłósiowe; prędkość warstwy jest tym mniejsza, im dalej warstwa znajduje się od osi. Taki ruch nie może zachodzić w ciele sztywnym i nie może być nazwany obrotem około osi naczynia. Linije prądu są zamknięte, bo w środku znajduje się wir, a potencjał prędkości jest funkcją wielowartościową; we współrzędnych bowiem prostokątnych mamy $\varphi = a \cdot \arctg \frac{y}{x} + b$. Poprowadźmy, wychodząc z dowolnego punktu, krzywą zamkniętą, otaczającą środek; krążenie po niej będzie

$$\int \tau \cdot ds = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} \cdot r \cdot d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a.$$

Jeżeli krzywa okrąży środek n razy, to $2\pi na$ będzie krążeniem cieczy, z czego się okazuje, że dwie wartości potencjału różnią się o $2\pi na$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Gdy poprowadzimy ze środka przekrój i uwzględnimy same jego własności, to wielowartościowość ustanie, ale potencjały w dwu punktach sąsiednich po przeciwnych stronach przekroju różnić się będą o $2\pi a$.

3). Niech będzie $\varphi + i\psi = \mu \cdot \log(x - a + iy)(x + a + iy)$: wyznaczyć odpowiedni ruch cieczy. Obierzmy dwa punkty $P_1(x = a, y = 0)$ i $P_2(x = -a, y = 0)$ na osi x , oznaczmy przez r_1, r_2 promienie wodzące z tych punktów do punktu $m(x, y)$, a przez θ_1, θ_2 kąty, które te promienie tworzą z dodatnim kierunkiem osi x , i przyjmijmy $\xi_1 = x - a, \xi_2 = x + a$; mieć będziemy

$$\log(\xi_1 + iy)(\xi_2 + iy) = \log(\xi_1 + iy) + \log(\xi_2 + iy) = \log r_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2),$$

a więc

$$(4) \quad \varphi = \mu \cdot \log r_1 \cdot r_2, \quad \psi = \mu(\theta_1 + \theta_2).$$

Ruch jest niewirowy; równanie linii potencjalnej jest $r_1 r_2 = A$, a równanie linii prądu $\theta_1 + \theta_2 = B$, gdzie A i B są dwiema stałymi. Linije potencjalne więc są lemniskatami, których ogniskami są punkty P_1 i P_2 . Dla linii prądu mamy, wstawiwszy wartości θ_1 i θ_2 :

$$\arctg \frac{y}{x-a} + \arctg \frac{y}{x+a} = \arctg \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} = B,$$

skąd wynika, że

$$(5) \quad x^2 - y^2 - 2Cxy - a^2 = 0,$$

gdzie C jest stałą dowolną, jest równaniem takiej linii. Linije prądu są więc

hiperbolami równobocznymi, przechodzącymi przez punkty P_1 i P_2 , dla których jednak osi współrzędnych nie są osiami głównymi. Stąd wynika, że istnieje ruch sprzężony, dla którego linijami potencyjalnymi są hiperbole równoboczne, a linijami prądu lemniskaty.

Mamy $r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos \theta$, $r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos \theta$, a zatem $A^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \theta$. Obliczywszy stąd ρ i τ , otrzymamy $V = \sqrt{\rho^2 + \tau^2} = \frac{2\mu}{A} \cdot r$, co pozwala obliczyć prędkość każdej cząstki cieczy.

Ponieważ A jest stałe na tej samej lemniskacie, przeto prędkość jest proporcjonalna względem odległości punktu na lemniskacie od środka.

Jeżeli μ i a są stałymi bezwzględными, natenczas ruch będzie trwały; gdyby zaś te wielkości były funkcjami czasu, to układ linij potencjalnych i linij prądu zmieniałby się ciągle. W pierwszym przypadku porusza się każda cząstka cieczy po tej hiperboli, która przedstawia jej linię prądu (zależną od stałej C), w drugim przypadku tory cząstek są stycznymi do chwilowych linij prądu. Dla ruchu trwałego otrzymamy, według (4) art. 210-go,

$$\frac{V^2}{2} - U + \frac{p}{\sigma} = \text{stały}, \quad \text{czyli} \quad \frac{2\mu^2}{A^2} r^2 - U + \frac{p}{\sigma} = \text{stały},$$

gdzie stała jest ta sama dla wszystkich cząstek. Znając potencjał sił i stan początkowy cieczy, możemy z tego wzoru obliczyć ciśnienie p w każdym punkcie, które będzie tylko funkcją współrzędnych r i θ . Jeżeli żadne siły nie działają podczas ruchu, to $U = 0$, i powyższy wzór wyznacza ciśnienie. Jedynymi punktami osobliwymi funkcji ϕ są ogniska P_1 i P_2 ; dla których $A = 0$; należy więc około ognisk zakreślić koła o nieskończenie małych promieniach, a wtedy można rachunek stosować do całej płaszczyzny, z wyjątkiem pól tych kół. Z powodu istnienia punktu osobliwego linie potencjalne są zamknięte (art. 213).

Czytelnik przerobi to zadanie, gdy lemniskaty są linijami prądu, a hiperbole linijami potencyjalnymi; wtedy w ogniskach należy przyjąć wiry i potencjał będzie wielowartościowy. Krążenie po danej krzywej zależy od tego, czy krzywa otacza tylko jedno ognisko, czy obadwa ogniska.

4). Ciecz znajduje się w naczyniu walcowym prostym, obracającym się jednostajnie z prędkością kątową ω około prostej, równoległej do tworzących walca: wyznaczyć ruch niewirowy cieczy, równoległy do podstawy. W tym zadaniu znamy warunek krańcowy dla potencjału ϕ , albowiem podstawa walca ma być linią prądu. Obierzmy oś obrotu za oś z , a obrót ω niech ma kierunek od dodatnich x ku dodatnim y ; wówczas składowe prędkości punktu (x, y) na podstawie walca będą odpowiednio $-\omega y$ i ωx . Gdy $d\sigma$ jest elementem podstawy walca, to $dy : d\sigma$ i $-dx : d\sigma$ będą dostawami kierunkowymi normalnej wewnętrznej w punkcie (x, y) ; prędkość w kierunku normalnej będzie przeto, według art. 216-go,

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = -\left(\omega y \cdot \frac{dy}{d\sigma} + \omega x \cdot \frac{dx}{d\sigma}\right), \quad \text{a więc} \quad d\phi = -\omega(x \cdot dx + y \cdot dy);$$

całkując, otrzymamy

$$\phi = A - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2),$$

gdzie A jest stałą. Wyznaczenie kształtu funkcji ϕ , stosownie do warunku krańcowego, nie daje się uskutecznić ogólnie; można jednak założyć pewien kształt tej funkcji, szukając następnie odpowiedniej podstawy walca, podobnie, jak to czyniliśmy w zadaniach o odkształceniu ciał sprężystych. Przyjmijmy $\phi = B(x^2 - y^2)$, gdzie B jest stałą. Wstawiając tę wartość w równanie poprzednie, mieć będziemy

$$(6) \quad x^2 \left(B + \frac{\omega}{2} \right) + y^2 \left(-B + \frac{\omega}{2} \right) = A$$

jako równanie linii prądu. Niech podstawą walca będzie elipsa $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, a walec niech obraca się około swój osi; można wtedy równanie (6) i równanie elipsy przywieść do tego samego kształtu, biorąc

$$\alpha^2 = \frac{2A}{\omega + 2B}, \quad \beta^2 = \frac{2A}{\omega - 2B},$$

z czego wynika $B = -\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$, a zatem

$$(7) \quad \phi = -\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} (x^2 - y^2)$$

jako odpowiedni potencjał prądu. Nadając stałej A w (6) odpowiednią wartość, otrzymamy teraz w układzie linii prądu także podstawę walca; możemy więc rozpoznać ruch niewirowy cieczy w walcu eliptycznym, obracającym się jednostajnie około swój osi. Każdej wartości stałej A odpowiada pewna linia prądu, która, jak widzimy, jest zawsze krzywą rzędu 2-go. Z wiadomych związków między φ i ϕ otrzymamy

$$d\varphi = \omega \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} (x \cdot dy + y \cdot dx), \text{ skąd}$$

$$(8) \quad \varphi = \omega \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} xy.$$

Każda wartość stała φ wyznacza linię potencyjną. Łatwo więc obliczyć prędkość w każdym punkcie, a znając siły, można wyznaczyć ciśnienie. Dla $\alpha = \beta$ będzie $\varphi = 0$, $\phi = 0$, co oznacza, że ruch niewirowy nie może zachodzić w walcu obrotowym, który obraca się około swój osi.

218. RUCH CIAŁA SZTYWNEGO W CIECZY. W cieczy, której ograniczenie jest wiadome, porusza się ciało sztywne w sposób określony; mamy wyznaczyć ruch cieczy, wywołany przez ruch tego ciała. Aby pokazać metodę, służącą do rozwiązywania takich zagadnień, założymy, że ciecz rozciąga się we wszystkie strony w nieskończoność i że jej ruch spowodowany jest wyłącznie przez

ruch ciała, że zatym nie ma sił osobnych, na cząstki cieczy działających. Ponieważ w tym przypadku ruch cieczy ze spoczynku może być wywołany przez ciśnienia chwilowe, przeto możemy przyjąć, że ten ruch jest niewirowy (art. 210), a nadto widzimy, że cząstki cieczy w nieskończoności są w spoczynku, gdyż siły skończone, poruszające ciałem i pobudzające ciecz do ruchu, nie mogą punktom nieskończenie dalekim udzielić żadnej prędkości.

Dla wyznaczenia więc potencjału φ mamy następujące warunki: 1) w każdym punkcie na powierzchni ciała jest pochodna $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ równa prędkości tego punktu w kierunku normalnej do powierzchni, wziętym ku cieczy; 2) pochodne $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ potencjału zdążają do zera dla punktów w nieskończoności. Okażemy, że te warunki określają potencjał φ , pozostawiając jednak nieoznaczoną stałą dowolną, że przeto ruch niewirowy cieczy jest przez takie warunki określony pod względem kinematycznym.

W przestrzeni, przez ciecz zajętej, co do której przyjmujemy, że ma łączność pojedynczą, obierzmy punkt dowolny μ , zatoczmy około niego kulę o dowolnym promieniu ρ , otaczającą ciało sztywne, i zastosujmy do cieczy, w tej kuli zawartej, równanie (14) art. 212-go. Oznaczywszy przez df element powierzchni ciała, a przez dF element powierzchni tej kuli, mieć będziemy

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df + \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF = 0,$$

biorąc wszędzie kierunek normalnej ku cieczy. Kładąc $\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = -4\pi M$, możemy M obliczyć, albowiem znamy $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ na powierzchni ciała; będzie więc

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF = 4\pi M.$$

Jeżeli $d\omega$ oznacza rzut centralny elementu dF na powierzchnię kuli o promieniu jedności, to $dF = \rho^2 \cdot d\omega$; wstawmy tę wartość w ostatnie równanie i zważmy, że $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$; mieć będziemy

$$-\rho^2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\omega = 4\pi M, \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\omega = -\frac{4\pi M}{\rho^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \int \varphi \cdot d\omega = -\frac{4\pi M}{\rho^2},$$

a całkując

$$\int \varphi \cdot d\omega = C + \frac{4\pi M}{\rho}.$$

Wstawiając ponownie wartość $d\omega$, otrzymamy stąd

$$(1) \quad \frac{1}{4\pi\rho^2} \int \varphi \cdot dF = C_1 + \frac{M}{\rho}.$$

Lewa strona tego równania przedstawia wartość średnią potencjału φ na powierzchni kuli o promieniu ρ , wewnątrz której znajduje się przestrzeń zamknięta ciała, która nie zawiera cieczy; stała C_1 zależy od położenia środka kuli, a jest niezależna od ρ . Gdyby w każdym punkcie na powierzchni ciała było $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, natenczas byłoby $M = 0$, a zatem wartość średnia potencjału byłaby niezależna od promienia kuli, a zależałaby tylko od położenia jej środka.

Równanie (1) pozwala dowieść następującego twierdzenia pomocniczego: jeżeli $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ jest równe zero w każdym punkcie na powierzchni ciała, znajdującego się w cieczy, której cząstki w nieskończoności mają prędkość zero, natenczas φ jest stałą w całym obrębie cieczy. Jakoż, w tym przypadku można w cieczy poprowadzić taką powierzchnią zamkniętą F , otaczającą powierzchnią f ciała, iżby zewnątrz powierzchni F prędkość cieczy była wszędzie mniejsza od dowolnie małej wielkości ϵ . Obierzmy w cieczy taki punkt μ , iżby rzut centralny powierzchni F na kulę o promieniu jedności, około tego punktu zatoczoną, był nieskończenie mały, co jest możebne, ponieważ ciecz rozciąga się we wszystkie strony do nieskończoności. Około μ jako środka zatoczmy dwie kule, z których jedna jest styczna do powierzchni f zewnątrz, druga wewnątrz, i poprowadźmy dowolny promień, który te kule spotyka w punktach m i n . Jeżeli promień μmn spotyka powierzchnią F , to różnica wartości funkcji φ w punktach m i n wywoła nieskończenie małą różnicę w wartościach średnich téj funkcji na obu kulach, ponieważ różnica rzutów powierzchni F na tych kulach jest nieskończenie mała; jeżeli zaś promień μmn znajduje się zewnątrz powierzchni F , to potencjały φ w m i n różnić się będą o wielkość mniejszą, niż $\epsilon \cdot mn$, ponieważ ϵ jest większe, niż prędkość w punkcie m lub n , a mn jest grubością warstwy między obiema kulami. A zatem różnica średnich wartości potencjału na obu kulach wynosi zawsze mniej, niż $\epsilon \cdot mn$; te przeto wartości średnie zdążają do równości dla $\epsilon = 0$. Dla kuli, stycznej do powierzchni f wewnątrz, będzie według (1) średnia wartość funkcji φ wielkością stałą, albowiem $M = 0$, z czego wynika, że φ dąży do wartości stałej w każdym punkcie nieskończenie dalekim. Z tego wnosimy na podstawie własności funkcji doskonałej, że φ jest stałe w całym obrębie cieczy.

Teraz możemy okazać, że potencjał prócz jego stałej dowolnej jest określony, jeżeli znamy $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ na powierzchni ciała i wiemy, iż jego pochodne są równe zero w punktach nieskończenie oddalonych. Jakoż przypuśćmy, że

dwie funkcje φ_1, φ_2 czynią zadość danym warunkom; natenczas $\frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n}$ jest równa zero w każdym punkcie na powierzchni ciała, a pochodne funkcji $\varphi_1 - \varphi_2$ zbiegają do zera w punktach nieskończenie oddalonych. Z tego wynika, że $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{stała}$, co dowodzi właśnie prawdziwości naszego twierdzenia. Wnosimy stąd, że każda pochodna potencjału ma w każdym punkcie jedną wartość, że więc ruch niewirowy cieczy jest dokładnie oznaczony.

219. Ponieważ znamy ruch bezwzględny ciała, przeto do rozpoznania ruchu cieczy wystarczy zbadać ruch każdej jej cząstki względem ciała; dodawszy do tego ruch unoszenia, otrzymamy ruch bezwzględny każdej cząstki cieczy. W dowolnym punkcie O ciała wystawmy osi współrzędnych x, y, z , oznaczmy przez U, V, W prędkości punktu O w kierunkach tych osi, a przez P, Q, R prędkości kątowe obrotów chwilowych ciała około tych osi. Prędkości unoszenia cząstki (x, y, z) cieczy będą odpowiednio, jak wiadomo z kinematyki ciał sztywnych (art. 24), $U + Qz - Ry, V + Rx - Pz, W + Py - Qx$; jeżeli więc u, v, w oznaczają składowe prędkości tej cząstki względem ciała, to otrzymamy

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (U + Qz - Ry), & v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - (V + Rx - Pz), \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (W + Py - Qx). \end{aligned}$$

Oznaczywszy przez a, b, c dostawy kierunkowe normalnej do powierzchni ciała, wyprowadzonej z punktu x, y, z ku cieczy, mamy warunek na granicy

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= a(U + Qz - Ry) + b(V + Rx - Pz) + c(W + Py - Qx), \text{ czyli} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= aU + bV + cW + (cy - bz)P + (az - cx)Q + (bx - ay)R, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Funkcja φ czyni w każdym punkcie zadość równaniu różniczkowemu liniowemu o pochodnych cząstkowych $\Delta_2 \varphi = 0$; jeżeli przeto $\varphi_i = 0$ jest rozwiązaniem szczególnym tego równania, to $\varphi = \Sigma C_i \varphi_i$, gdzie wielkości C_i nie zależą od współrzędnych, mogą być jednak funkcjami czasu. Możemy więc dla φ przyjąć kształt następujący:

$$(4) \quad \varphi = U \cdot \varphi_1 + V \cdot \varphi_2 + W \cdot \varphi_3 + P \cdot \varphi_4 + Q \cdot \varphi_5 + R \cdot \varphi_6,$$

biorąc jako φ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) rozwiązania szczególne równania $\Delta_2 \varphi = 0$,

czyniące zadość warunkom, iżby pochodne $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}$ przybierały dane wartości na powierzchni ciała, iżby pochodne funkcji φ_i względem x, y, z były skończonymi i jednowartościowymi w obrębie cieczy i przybierały wartość równą zero

w punktach nieskończenie oddalonych. Z takich funkcji możemy według (4) utworzyć potencjał φ . Ponieważ w φ_i pozostaje stała dowolna, przeto możemy jeszcze przyjąć warunek, żeby $\varphi_i = 0$ dla punktów w nieskończoności, co wyznacza stałą równą zeru i pozwala użyć kształtu (4) dla tej funkcji, albowiem będzie $\varphi = 0$ dla punktów nieskończenie oddalonych.

Z ostatniego równania wynika

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = U \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + V \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + W \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} + P \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} + Q \cdot \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} + R \cdot \frac{\partial \varphi_6}{\partial n};$$

otrzymamy więc według (2) szukane warunki na powierzchni ciała dla funkcji φ_i :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = a, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = b, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = c, \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = cy - bz, & \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = az - cx, & \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = bx - ay. \end{cases}$$

Te warunki określają dokładnie każdą funkcję φ_i i okazują, że ona zależy tylko od powierzchni ciała sztywnego, a jest niezależna od jego ruchu. Ponieważ wiemy, że tylko jedna funkcja φ odpowiada zadaniu, a okazało się, że funkcja (4) czyni istotnie zadość wszystkim warunkom, przeto owa funkcja jest potencjałem prędkości. Ten potencjał jest więc funkcją liniową współrzędnych chwilowego ruchu ciała i zawiera w sobie takie funkcje, które zależą od kształtu i położenia jego powierzchni.

Wyznaczywszy według opisaney metody potencjał prędkości, otrzymamy z równań (1) prędkość każdej cząstki cieczy względem ciała. Znając położenie ciała względem stałego układu osi, możemy przez prostą zmianę współrzędnych wyznaczyć ruch bezwzględny cieczy.

Podana metoda stosuje się także do ruchu cieczy, wypełniającej wydrążenie w ciele sztywnym, które porusza się w sposób wiadomy. Jakoż wtedy znamy pochodną $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ w każdym punkcie na powierzchni wydrążenia, biorąc normalną w kierunku cieczy, a to wystarcza do wyznaczenia ruchu (art. 213), jeżeli tylko wydrążenie ma łączność pojedynczą. (Warunki, żeby pochodne potencjału φ względem x, y, z były równe zeru w nieskończoności, odpadają oczywiście). W tym przypadku widzimy z pierwszych trzech równań (6), że $\varphi_1 = x, \varphi_2 = y, \varphi_3 = z$, gdzie x, y, z są współrzędnymi punktu na powierzchni wydrążenia. Takich wartości nie mogliśmy otrzymać w poprzednim zagadnieniu, bo warunki (6) nie były jedynymi dla funkcji φ_i . Otrzymamy więc dla cieczy, odbywającej ruch niewirowy w wydrążeniu ciała sztywnego,

$$(7) \quad \varphi = Ux + Vy + Wz + P \cdot \varphi_4 + Q \cdot \varphi_5 + R \cdot \varphi_6;$$

a pozostaje tylko wyznaczyć funkcje $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ stosownie do powierzchni wydrążenia. Gdyby $P = 0, Q = 0, R = 0$, to pochodne potencjału względem x, y, z byłyby niezależne od współrzędnych t. j. *jeżeli ciecz znajduje się w wy-*

drażeniu ciała sztywnego, mającego ruch postępowy, to ona porusza się, jak ciało sztywne, albowiem wszystkie jej cząstki mają prędkość spólną.

Wyznaczwszy ruch cieczy, należy obliczyć ciśnienie, którego powierzchnia ciała doznaje od cieczy w każdym punkcie. Do tego celu służy równanie (3) art. 210-go, w którym stosownie do założenia należy potencjałowi sił, działających na masę cieczy, nadać wartość zero. Wstawiwszy odpowiednie wartości pochodnych funkcji φ na powierzchni ciała, otrzymamy ciśnienia, których składu następnie dokonać należy, aby rozpoznać działanie cieczy na ciało.

220. ZAGADNIENIA. 1) Ruch cieczy w wydrążeniu elipsoidalnym. Niech A, B, C oznaczają połowy osi głównych wydrążenia, które obieramy za osi współrzędnych. Jeżeli przyjmiemy $q = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2}$, to dostawmy kierunkowe normalnej wewnętrznej będą

$$a = -\frac{x}{A^2\sqrt{q}}, \quad b = -\frac{y}{B^2\sqrt{q}}, \quad c = -\frac{z}{C^2\sqrt{q}};$$

skąd

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = \frac{yz}{\sqrt{q}} \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right); \text{ i podobnie otrzymamy wyrażenia } \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} \text{ i } \frac{\partial \varphi_6}{\partial n}.$$

Według (4) art. poprzedzającego mamy więc dla φ_4 :

$$yz \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right) = - \left(\frac{x}{A^2} \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} + \frac{y}{B^2} \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + \frac{z}{C^2} \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} \right).$$

Rozwiązanie tego równania przedstawia funkcja $\varphi_4 = A_4 yz$, w której A_4 jest stałą, a po wstawieniu tej wartości w równanie poprzednie otrzymamy $A_4 = (B^2 - C^2) : (B^2 + C^2)$. Podobnie otrzymamy φ_5 i φ_6 przez przestawienie kołowe liter; będą więc żądane funkcje

$$\varphi_4 = \frac{B^2 - C^2}{B^2 + C^2} yz, \quad \varphi_5 = \frac{C^2 - A^2}{C^2 + A^2} zx, \quad \varphi_6 = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} xy,$$

a zatem potencjał prędkości

$$(1) \quad \varphi = Ux + Vy + Wz + P \cdot \frac{B^2 - C^2}{B^2 + C^2} yz + \\ + Q \cdot \frac{C^2 - A^2}{C^2 + A^2} zx + R \cdot \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} xy.$$

Dla kuli będzie $\varphi = Ux + Vy + Wz$, z czego wynika, że w wydrążeniu kulistym ruch niewirowy cieczy względem ciała jest ruchem postępowym.

2) Ruch elipsoidy w cieczy nieskończonej. Zanim rozwiążemy zadanie o ruchu cieczy, rozciągającej się do nieskończoności, względem elipsoidy sztywnej, która w niej się porusza, okażemy pewną własność potencjału sił, przyciągających według prawa Newton'a. Wiadomo z art. 126-go, że jeżeli z punktu μ , znajdującego się nieskończenie blisko zewnątrz powierzchni ciała

przyciągającego, przejdziemy przez tę powierzchnię do punktu v , leżącego nieskończenie blisko wewnątrz tej powierzchni, natenczas parametr różniczkowy $\Delta_2 V$ zmienia się o $-4\pi\sigma$, jeżeli σ jest gęstością ciała w punkcie v . Możemy to inaczej wyrazić, obierając odpowiednio punkty μ i v . Obierzmy początek osi współrzędnych na powierzchni ciała w punkcie O , a normalną zewnętrzną Op_μ za oś x ; punkt v obierzmy nieskończenie blisko po przeciwnej stronie punktu μ na normalnej wewnętrznej. Wtedy możemy powyższe twierdzenie tak wyrazić, że pochodna funkcji $\frac{\partial V}{\partial n}$ zmienia się o $-4\pi\sigma$, jeżeli z punktu μ przechodzimy do v przez powierzchnię ciała w kierunku normalnej wewnętrznej.

Oznaczywszy przez a , b , c dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej względem jakichkolwiek osi układu prostokątnego, z równań $\frac{\partial V}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$, $\frac{\partial V}{\partial y} = b \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$, $\frac{\partial V}{\partial z} = c \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$ dojdziemy do wniosku, że pochodne funkcji $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ zmieniają się odpowiednio o $-4\pi a\sigma$, $-4\pi b\sigma$, $-4\pi c\sigma$, jeżeli z μ przechodzimy do v . Niech dn_z oznacza element normalnej zewnętrznej Op_μ , dn_w element normalnej wewnętrznej Ov ; wtedy powyższe twierdzenie wyrazimy zapomocą równania

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial n_z} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial n_w} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right) = -4\pi a\sigma, \text{ czyli } \frac{\partial^2 V}{\partial n_z \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial n_w \partial x} = -4\pi a\sigma;$$

podobne związki otrzymamy dla y i z .

Zastosujemy to równanie do elipsoidy jednorodnej o gęstości $\sigma = 1$, używając znakowania art. 132-go. Gdy przyjmiemy

$$(3) \quad \alpha = 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{D(A^2 + s)}, \quad \beta = 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{D(B^2 + s)}, \quad \gamma = 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{D(C^2 + s)},$$

to przyciągania punktu wewnątrz lub na powierzchni elipsoidy będą

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = -\alpha x, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} = -\beta y, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\gamma z;$$

stąd otrzymamy

$$\frac{\partial X}{\partial n_w} = a \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial X}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial X}{\partial z} = -a\alpha, \text{ podobnie } \frac{\partial Y}{\partial n_w}, \frac{\partial Z}{\partial n_w},$$

a zatem według (3)

$$\frac{\partial X}{\partial n_z} = a(\alpha - 4\pi), \quad \frac{\partial Y}{\partial n_z} = b(\beta - 4\pi), \quad \frac{\partial Z}{\partial n_z} = c(\gamma - 4\pi),$$

gdzie a , b , c określają normalną wewnętrzną. Stosując zaś a , b , c do normalnej zewnętrznej, otrzymalibyśmy

$$(4) \quad \frac{\partial X}{\partial n_z} = a(4\pi - \alpha), \quad \frac{\partial Y}{\partial n_z} = b(4\pi - \beta), \quad \frac{\partial Z}{\partial n_z} = c(4\pi - \gamma).$$

Jeżeli w cieczy nieskończonej porusza się elipsoida, której połowy osi wynoszą A, B, C , i jej osi obierzemy za osi współrzędnych, to mamy $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ tak wyznaczyć, żeby $\Delta_2 \varphi_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) w całej cieczy, żeby zachodziły warunki (6) art. poprzedzającego na powierzchni elipsoidy, i żeby te funkcje i ich pochodne były równe zeru w nieskończoności. Łatwo okazać, że funkcje

$$(5) \quad \varphi_1 = \frac{X}{4\pi - \alpha}, \quad \varphi_2 = \frac{Y}{4\pi - \beta}, \quad \varphi_3 = \frac{Z}{4\pi - \gamma}$$

zadłość czynią wszystkim podanym warunkom, jeżeli zamiast X, Y, Z wstawimy wartości składowych przyciągania według art 132-go dla odpowiedniego punktu na powierzchni lub zewnątrz elipsoidy (w cieczy), a zamiast α, β, γ wstawimy wartości stałe (3). Jakoż mamy

$$\Delta_2 X = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right),$$

a więc $\Delta_2 X = \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 V = 0$ w całej cieczy, skąd $\Delta_2 \varphi_1 = 0$. Dla punktów w nieskończoności stają się równe zeru X i jego pochodne, a z równania (4) widoczna, że φ_1 zadość czyni warunkowi (6) art. poprzedzającego na powierzchni elipsoidy. Podobne własności mają φ_2 i φ_3 .

Aby wyznaczyć $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$, rozważajmy funkcję $\Omega_4 = Zy - Yz$, tudzież funkcje Ω_5 i Ω_6 , utworzone z niej przez przestawienia kołowe liter. Na powierzchni elipsoidy otrzymamy

$$\frac{\partial \Omega_4}{\partial n_z} = y \cdot \frac{\partial Z}{\partial n_z} - z \cdot \frac{\partial Y}{\partial n_z} + bZ - cY,$$

gdzie a, b, c oznaczają dostawy kierunkowe normalnej zewnętrznej do elipsoidy. Po wstawieniu wartości mieć będziemy

$$\frac{\partial \Omega_4}{\partial n_z} = cy(4\pi - \gamma) - bz(4\pi - \beta) + bZ - cY, \text{ czyli}$$

$$\frac{\partial \Omega_4}{\partial n_z} = cy(4\pi - \gamma + \beta) - bz(4\pi - \beta + \gamma),$$

z czego wynika,

$$\frac{\partial \Omega_4}{\partial n_z} : (cy - bz) = \frac{cy}{cy - bz} (4\pi - \gamma + \beta) - \frac{bz}{cy - bz} (4\pi - \beta + \gamma).$$

Dla elipsoidy $cy : bz = B^2 : C^2$, a zatem

$$\frac{\partial \Omega_4}{\partial n_z} : (cy - bz) = \frac{4\pi(B^2 - C^2) + (\beta - \gamma)(B^2 + C^2)}{B^2 - C^2}, \text{ więc}$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial n_z} \left(\Omega_4 \cdot \frac{B^2 - C^2}{4\pi(B^2 - C^2) + (\beta - \gamma)(B^2 + C^2)} \right) = cy - bz.$$

Funkcja pod znakiem różniczkowania po lewej stronie tego równania zadość

czyni warunkowi na powierzchni elipsoidy, który według (6) art. poprzedzającego ma zachodzić dla φ_4 . Prócz tego mamy dla każdego punktu w cieczy

$$\Delta_2 \Omega_4 = y \cdot \Delta_2 Z - z \cdot \Delta_2 Y + 2 \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = 0;$$

dla punktów nieskończenie oddalonych będą Ω_4 i pochodne téj funkcyi równe zeru. Okazuje się przeto, że

$$(7) \quad \varphi_4 = \frac{B^2 - C^2}{4\pi(B^2 - C^2) + (\beta - \gamma)(B^2 + C^2)} \cdot (Zy - Yz),$$

a φ_5 i φ_6 otrzymamy z tego wzoru przez przestawienia kołowe liter. Z (5) i (7) otrzymamy potencyjał prędkości φ według (4) art. poprzedzającego, wstawiając zamiast X, Y, Z, D wiadome wartości (art. 132)

$$(8) \quad X = -2\pi x \int_{\tau}^{\infty} \frac{ds}{D(A^2 + s)}, \quad Y = -2\pi y \int_{\tau}^{\infty} \frac{ds}{D(B^2 + s)},$$

$$Z = -2\pi z \int_{\tau}^{\infty} \frac{ds}{D(C^2 + s)},$$

$$(9) \quad D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{B^2}\right) \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)},$$

i biorąc jako τ pierwiastek dodatni równania

$$(10) \quad \frac{x^2}{A^2 + u} + \frac{y^2}{B^2 + u} + \frac{z^2}{C^2 + u} = 1.$$

Dla kuli o promieniu R będzie $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$, a zatem $\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + W\varphi_3$, z czego się okazuje, że *ruch cieczy nie zależy od kręcenia się kuli około jéj środka, lecz tylko od jéj ruchu postępowego*. Otrzymamy wtedy $\alpha = \beta =$

$$= \gamma = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{R^3 ds}{(s + R^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{3}\pi, \text{ skąd } \varphi_1 = \frac{3}{8\pi} X, \text{ a ponieważ } X = -\frac{4}{3} R^3 \pi \cdot \frac{x}{r^3},$$

a Y i Z podobne mają wartości, gdzie r jest odległością cząstki cieczy od środka kuli, przeto będzie

$$(11) \quad \varphi_1 = -\frac{R^3}{2} \cdot \frac{x}{r^3}, \quad \varphi_2 = -\frac{R^3}{2} \cdot \frac{y}{r^3}, \quad \varphi_3 = -\frac{R^3}{2} \cdot \frac{z}{r^3}, \text{ a więc}$$

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^3} (Ux + Vy + Wz), \text{ gdzie } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Gdy obierzemy oś x w kierunku ruchu środka kuli, to U będzie prędkością jéj ruchu postępowego; $V = 0, W = 0$. Jeżeli r tworzy z osią x kąt θ , to we współrzędnych biegunowych będzie

$$(12) \quad \varphi = -\frac{UR^3}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Z tego równania można w każdej chwili obliczyć prędkość względną cząstki cieczy o współrzędnych (r, θ) . Potencjał prędkości jest ten sam dla punktów, znajdujących się na kole, którego płaszczyzna jest w środku prostopadła do kierunku ruchu środka kuli.

Nadajmy kuli wraz z cieczą prędkość U ; wtedy kula przyjdzie do spoczynku (kręcąc się zresztą około środka) i możemy z (12) otrzymać potencjał prędkości cieczy nieskończonej, której cząstki poruszają się w strugach równoległych, podczas gdy kula jest w spoczynku. Prędkości U w kierunku osi x odpowiada potencjał $Ux = -Ur \cos \theta$; dodając ten wyraz do (12), otrzymamy

$$(13) \quad \varphi = -U \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta.$$

To równanie pozwala rozpoznać ruch cząstek płynącej wody względem kuli spoczywającej.

221. RUCH FALOWY CIECZY. Niech ciecz materyjalna zajmuje kanał prosty o szerokości stałej, a na powierzchni cieczy niech postępuje fala wzdłuż kanału, zajmująca całą jego szerokość; wtedy każda cząstka, do której fala przybywa, zostanie pobudzona do ruchu. Jeżeli fala postępuje w kierunku poziomym, prostopadłym do szerokości kanału, to ruch cząstki cieczy da się rozłożyć w dwu kierunkach, pionowym i poziomym, prostopadłym do szerokości, a odchylenia cząstki w obu kierunkach będą bardzo małe. Figura 72-ga przedstawia pionowy przekrój podłużny kanału; obierzmy dowolnie stałą prostą poziomą Ox w kierunku ruchu postępowego fali; linia DD niech przedstawia przekrój dna kanału, prosta pozioma MN niech przedstawia powierzchnią cieczy w spoczynku, linia FF przekrój fali, a oś y obierzmy pionowo w górę. Punkt m , którego współrzędne w spoczynku są x, y , odchyli się odpowiednio o ξ i η w kierunkach osi i przybędzie po upływie czasu t , liczonego od dowolnej chwili początkowej, do miejsca m' , którego współrzędne będą $x + \xi, y + \eta$. Odchylenia ξ, η , które przyjmiemy jako dostatecznie małe, będą funkcjami x, y, t .

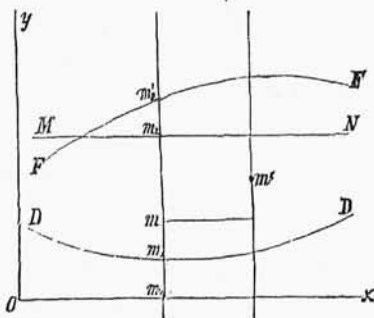


Fig. 72.

Należy dokładnie odróżnić prędkość, z jaką porusza się cząstka, od prędkości, z jaką postępuje ruch falowy, a którą nazywamy prędkością przewodnictwa fali, albo krótko prędkością fali. Jeżeli c jest prędkością fali, to punkt n , którego współrzędna pozioma jest $x + ct$, przesunie się w kierunku poziomym w czasie $t + \tau$ o tę samą długość ξ z miejsca spoczynku, o jaką punkt m posunął się w czasie t , i ten związek między odchyleniami dwu punktów służy właśnie do określenia prędkości fali. Jeżeli więc ξ uwa-