

## ROZDZIAŁ XVIII.

### STATYKA CIECZY (HYDROSTATYKA).

---

**193. POJĘCIE CIECZY DOSKONAŁEJ.** W mechanice ciał stałych utworzyliśmy pojęcie oderwane ciała sztywnego, jako najprostsze, aby uzyskać podstawę do poznania w pierwszym przybliżeniu najważniejszych praw równowagi i praw ruchu ciała stałego w ogólności. Następnie wprowadziliśmy pojęcie sprężystości, które pozwoliło w dalszym przybliżeniu poznać owe prawa ze względu na własności rzeczywiste tych ciał, które za stałe uważamy. Podobnie postępujemy w mechanice cieczy. Tworzymy naprzód pojęcie cieczy doskonałej, które jest również oderwane, jak pojęcie ciała sztywnego; z niego wyprowadzamy prawa równowagi i prawa ruchu, stosując się w pierwszym przybliżeniu do cieczy rzeczywistych; następnie zaś dopiero wprowadzamy pewne cechy, odróżniające ciecz rzeczywistą od doskonałej, aby dokładniej zbadać zachowywanie się cieczy względem sił, działających na jej cząstki.

Najwybitniejszymi cechami cieczy, odróżniającymi ją od ciała stałego, są: popierwsze, znakomita ruchliwość jej cząstek, powtórze, bardzo mała jej ściśliwość. Ruchliwość cieczy objawia się tym, że, aby dwie cząstki cieczy, dotykające się wzajemnie, przesunąć względem siebie na płaszczyźnie styczności, potrzeba siły bardzo małej; mała zaś ściśliwość cieczy polega na tym, że potrzeba bardzo wielkiej siły, aby dwie cząsteczki, z których jedna znajduje się w jednej, a druga w drugiej z dwu dotykających się, cząstek cieczy, zbliżyć do siebie. Rozmaite stopnie ruchliwości przypisujemy rozmaitej lepkości cieczy, wskutek której dwie cząstki, dotykające się przylegają do siebie i podczas ruchu cieczy pojawia się tarcie wewnętrzne między tymi cząstkami, które należy uważać za siłę styczną, mającą kierunek przeciwny kierunkowi prędkości względnej w punkcie styczności. Ciecz idealną, pozbawioną lepkości i ściśliwości, nazywamy cieczą doskonałą.

Określenie siły wewnętrznej, odpowiedniej nieskończonej małemu elementowi, jest także samo dla cieczy, jakie podaliśmy w art. 176-ym dla ciała

sprężystego. Ponieważ ciecz doskonała, jako pozbawiona lepkości, nie ma kształtu samoistnego, lecz musi się znajdować w naczyniu, którego ściany stanowią jej powierzchnią, przeto wnosimy popiérwsze, że natężenie w cieczy, odpowiadające sile wewnętrznej, jest zawsze ciśnieniem, a nigdy ciągnieniem być nie może, dopóki ciecz nie przestaje być ciągłą; powtóre, że żaden element cieczy doskonałej nie doznaje natężenia stycznego. A ponieważ wiadomo z art. 182-go, że, jeżeli elementy nieskończenie małe, przez tenże sam punkt przechodzące, doznają samych tylko natężeń normalnych, natenczas te natężenia są równe we wszystkich kierunkach, przeto *w każdym punkcie cieczy doskonałej zachodzi toż samo ciśnienie we wszystkich kierunkach*. Z tego powodu określamy ciecz doskonałą w każdym punkcie pod względem sił wewnętrznych przez ciśnienie w tymże punkcie. Powierzchnia, którą dla ciał sprężystych nazywaliśmy elipsoidą natężeń, przybiera kształt kuli dla cieczy doskonałej. W punktach, gdzie ciecz dotyka się ścian naczynia, zachodzi ciśnienie normalne na elementy tych ścian, a na powierzchni może ciecz doznawać ciśnienia środka otaczającego. Pojęcie stanu naturalnego, w którym ciśnienie byłoby równe zeru w każdym punkcie, nie istnieje dla cieczy doskonałej.

Z nieściśliwości cieczy doskonałej wynika, że każdy element cieczy zajmuje ciągle tęż samą objętość, a ponieważ jego masa nie może się zmieniać, przeto gęstość cieczy doskonałej w każdym punkcie jest stała. Jeżeli ciecz jest niejednorodna, natenczas zachodzi zmiana gęstości tylko w tych punktach powierzchni, które oddzielają dwie ciecze rozmaite.

**194. RÓWNIANIA RÓWNOWAGI.** Odnieśmy cząstki cieczy do nieruchomego układu prostokątnych osi spółrzędnych, oznaczmy przez  $X, Y, Z$  składowe siły, przyłożonej do jednostki masy cieczy w punkcie  $x, y, z$ , a przez  $p$  ciśnienie w tym punkcie. Równania równowagi elementu otrzymamy z art. 183-go, kładąc według danych określeń  $p_{23} = 0, p_{31} = 0, p_{12} = 0, p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p$ , i pisząc  $\sigma X, \sigma Y, \sigma Z$  zamiast  $X, Y, Z$ , jeżeli  $\sigma$  oznacza gęstość cieczy. Otrzymamy takim sposobem następujące równania równowagi cieczy:

$$(1) \quad X - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad Y - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad Z - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Te równania stosują się także do cieczy lepkiéj; jeżeli bowiem cząstki cieczy nie mają ruchu względnego, natenczas nie ma tarcia wewnętrznego.

Z równań tych wynika

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right),$$

a ponieważ  $p$  jest tylko funkcją spółrzędnych, przeto czynnik po prawej stronie jest różniczką zupełną  $dp$ , a zatem

$$(2) \quad \frac{dp}{\sigma} = X dx + Y dy + Z dz.$$

To równanie, w którym, jak widzimy, gęstość jest stała, wyraża ważne twierdzenie: *ciecz może być w równowadze tylko przy działaniu sił, mających potencyjał*.

Jeżeli  $U$  oznacza potencjał sił, to

$$(3) \quad dp = \sigma dU, \quad p = \sigma U + \text{stała},$$

a ponieważ  $p$  ma w każdym punkcie tylko jedną wartość, przeto potencjał jest funkcją jednowartościową spółrzędnych. Wiadomo, (art. 83), że  $dU=0$  jest równaniem powierzchni potencyjalnój; na takiej więc powierzchni jest  $dp=0$ , a zatem w każdym punkcie  $p = \text{stałej}$ . *Powierzchnie potencyjne, odpowiednie siłom przyłożonym, są powierzchniami stałego ciśnienia w cieczy. Wypadkowa sił przyłożonych jest normalna w każdym punkcie do powierzchni stałego ciśnienia. Takie dwie powierzchnie nie mogą się przecinać* (art. 83).

Jeżeli na masę cieczy nie działają żadne siły, wtedy ciśnienie jest także samo we wszystkich punktach i równa się stałemu ciśnieniu na powierzchni cieczy.

Równania (1) stosują się także do równowagi cieczy rozmaitych, nie mieszających się wzajemnie. W tym przypadku gęstość  $\sigma$  jest stała w obrębie każdej cieczy, a jej wartość zmienia się tylko wtedy, gdy przechodzimy przez powierzchnię, rozdzielającą dwie ciecze. Przypuśćmy, że potencjał sił przyłożonych wyraża się przez tę samą funkcję spółrzędnych w całej przestrzeni, przez dwie ciecze zajętej. Ciśnienie  $p$  i potencjał  $U$  doznają wtedy tych samych przyrostów  $dp$  i  $dU$ , z jakiegokolwiek punktu odpowiedniej powierzchni potencyjalnój przejdziemy do punktu nieskończenie bliskiego sąsiedniej powierzchni potencyjalnój. Stosunek  $dp : dU$  jest przeto stały w warstwie, ograniczonej dwiema powierzchniami potencyjalnymi, nieskończenie bliskimi; a ponieważ według (3) ten stosunek jest równy gęstości cieczy, przeto *gęstość cieczy jest stała na powierzchni potencyjalnój*. Z tego wynika, że powierzchnia potencjalna nie może przecinać powierzchni, rozdzielającej dwie ciecze w równowadze, a zatem *powierzchnia rozdzielająca, dwie ciecze, jest powierzchnią potencyjalną i powierzchnią stałego ciśnienia*.

195. Możemy równania równowagi wyprowadzić także z zasady prac przygotowanych. Gdy  $\delta x, \delta y, \delta z$  oznaczają przesunięcia przygotowane punktu  $(x, y, z)$ , to  $\sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dx dy dz$  będzie pracą przygotowaną sił, przyłożonych do elementu nieskończenie małego, którego granicą jest ten punkt. Jedynym warunkiem geometrycznym, określającym ciecz, jest jej nieściśliwość, która wyraża się przez równanie  $\delta (dx dy dz) = 0$ , orzekające, że objętość elementu nie zmienia się. Zasada więc prac przygotowanych prowadzi do następującego równania równowagi:

$$(1) \quad \iiint [\sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \lambda \cdot \delta (dx dy dz)] dx dy dz = 0,$$

w którym czynnik nieoznaczony  $\lambda$  jest funkcją spółrzędnych. Waryjacyjną objętości elementu znajdziemy według prawideł rozdz. XVII, kładąc odpowiednio nieskończenie małe drogi przygotowane  $\delta x, \delta y, \delta z$  zamiast przesunięć  $u, v, w$ . Otrzymamy więc według (4) art. 177-go,

$$(2) \quad \delta(dx dy dz) = \left( \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) dx dy dz, \text{ a stąd}$$

$$(3) \quad \iiint \left[ \sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \right. \\ \left. + \lambda \left( \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz = 0,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całą objętość cieczy. Całkując częściowo, otrzymamy

$$\iiint \lambda \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx dy dz = \iint dy dz \int \lambda \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx = \\ = \iint [\lambda \delta x] dy dz - \iiint \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x dx dy dz,$$

gdzie  $[\lambda \delta x]$  oznacza różnicę wartości, jakie funkcja  $\lambda \delta x$  przybiera w dwu po sobie następujących punktach, w których prosta, równoległa do osi  $x$ , a przechodząca przez punkt  $(y, z)$ , przecina powierzchnią cieczy (art. 185). Postępując podobnie z dwiema pozostałymi całkami, otrzymamy równanie równowagi

$$\iiint \left[ \left( \sigma X - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta x + \left( \sigma Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \delta y + \left( \sigma Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \delta z \right] dx dy dz + \\ + \iint [\lambda \delta x] dy dz + \iint [\lambda \delta y] dz dx + \iint [\lambda \delta z] dx dy = 0,$$

w którym całkowanie potrójne rozciąga się na objętość cieczy, a całkowania podwójne rozciągają się na jej powierzchnię. Obracwszy na tej powierzchni element  $d\omega$  i oznaczywszy przez  $a, b, c$  dostawy kierunkowe jego normalnej zewnętrznej, otrzymamy, według art. 185-go,

$$\iint [\lambda \delta x] dy dz + \iint [\lambda \delta y] dz dx + \iint [\lambda \delta z] dx dy = \int \lambda (a \delta x + b \delta y + c \delta z) d\omega,$$

gdzie funkcja  $\lambda$  i przesunięcia stosują się do punktów na powierzchni cieczy; stąd:

$$(5) \quad \iiint \left[ \left( \sigma X - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta x + \left( \sigma Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \delta y + \right. \\ \left. + \left( \sigma Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \delta z \right] dx dy dz + \int \lambda (a \delta x + b \delta y + c \delta z) d\omega = 0.$$

Ponieważ po uwzględnieniu warunku nieściśliwości przesunięcia elementu cieczy są dowolne, przeto każdy wyraz pod znakiem całkowania potrójnego jest równy zeru, skąd wynikają równania równowagi elementu wewnątrz cieczy

$$(6) \quad \sigma X = \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \sigma Y = \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad \sigma Z = \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Z porównania tych wzorów z równaniami (1) art. poprzedzającego okazuje się, że  $\lambda = p$ . Warunek krańcowy będzie według (5) po wstawieniu wartości  $\lambda$ ,

$$(7) \quad \int p (a \delta x + b \delta y + c \delta z) d\omega = 0,$$

gdzie  $p$  oznacza ciśnienie w punkcie  $(x, y, z)$  na powierzchni cieczy.

Jeżeli powierzchnia cieczy jest swobodna, natenczas przesunięcia w (7) są dowolne, jest przeto w każdym punkcie takiej powierzchni  $p = 0$ . Jeżeli część powierzchni cieczy stanowią ściany naczynia i  $A \delta x + B \delta y + C \delta z = 0$  jest równaniem różniczkowym powierzchni ściany, to cząstka cieczy może się przesuwać tylko na płaszczyźnie stycznej do tej powierzchni, jest przeto  $A \delta x + B \delta y + C \delta z = 0$ , przyczem  $a : b : c = A : B : C$ . Odpowiednie więc wyrazy w równaniu (7) będą równe zeru, a przeto nie prowadzą do żadnego warunku; równowaga więc zachodzić będzie bez względu na ciśnienie, jeżeli tylko ciągłość cieczy nie doznaje przerwy.

**196. CIŚNIENIE CIECZY MATERJALNÉJ.** Niech na cząstki cieczy działa tylko siła ciężkości; jeżeli wielkość tej siły dla jednostki masy przyjmujemy jako stałą, natenczas będziemy mogli badać równowagę cieczy materjalnej, w niewielkiej ilości nagromadzonej. Powierzchniami potencjalnymi dla siły ciężkości są płaszczyzny poziome (art. 84), a przeto ciśnienie cieczy, będącej w spoczynku, jest stałe na płaszczyznach poziomych. Powierzchnia swobodna takiej cieczy oddziela ją od innej cieczy lub od środka otaczającego, jest więc powierzchnią stałego ciśnienia czyli powierzchnią potencjalną, a zatem płaszczyzną poziomą. Stosując pojęcie poziomu do przypadku ogólnego cieczy w równowadze, nazywamy powierzchnią stałego ciśnienia ogólnie także powierzchnią poziomą cieczy, jakimikolwiek byłoby siły rozważane (art. 83).

Niech powierzchnia cieczy będzie płaszczyzną  $xy$ ; obierzmy oś  $z$  pionowo na dół; wtedy  $U = gz + a$ ,  $p = \sigma gz + b$ , gdzie  $a$  i  $b$  oznaczają stałe. Niech  $p_0$  będzie ciśnieniem stałym na powierzchni cieczy, wtedy  $p = p_0$  dla  $z = 0$ , więc  $b = p_0$ , skąd

$$(1) \quad p = \sigma gz + p_0.$$

W przypadku, gdy  $p_0 = 0$ , co najczęściej przyjmować będziemy, będzie  $p = \sigma gz$ . Ciśnienie cieczy w każdym punkcie jest równe ciężarowi słupa cieczy, którego podstawa jest równa jednostce, a którego wysokość jest równa odległości tego punktu od powierzchni cieczy.

Niech dno płaskie naczynia, zawierającego ciecz, będzie poziome, i niech  $h$  będzie wysokością cieczy nad dnem. Jeżeli  $P$  jest całkowitym

ciśnieniem cieczy na dno, którego pole jest  $F$ , natenczas  $P = pF = \sigma g h F$ , t. j. całkowite ciśnienie cieczy w spoczynku na dno poziome naczynia jest równe ciężarowi słupa cieczy, wystawionego na dnie i sięgającego do powierzchni cieczy (twierdz. Stevin'a). To ciśnienie więc nie zależy ani od ścian naczynia, ani od objętości cieczy.

Ciśnienie całkowite, które ciecz wywiera na dane pole zamknięte ścian płaskiej naczynia, nazywamy ciśnieniem bocznym cieczy na to pole. Aby obliczyć to ciśnienie dla pola  $F$ , podzielmy pole układem nieskończenie bliskich prostych poziomych na elementy; wtedy na element  $dF$ , znajdujący się w głębokości  $z$  pod powierzchnią cieczy, przypadnie ciśnienie  $dP = \sigma g z \cdot dF$ , prostopadłe do ściany. Ponieważ ciśnienia  $dP$  są równo-

ległe, przeto ciśnienie boczne jest  $P = \sigma g \int z dF$ , gdzie całkowanie rozciąga się na całe pole ciśnione. Niech  $Z$  oznacza głębokość środka masy pola  $F$  pod powierzchnią cieczy, wtedy  $Z \cdot F = \int z \cdot dF$ , a stąd

$$(2) \quad P = \sigma g Z F.$$

*Ciśnienie boczne cieczy w spoczynku jest równe ciężarowi słupa cieczy, którego podstawą jest pole ciśnione, a którego wysokość jest równa odległości środka masy tego pola od powierzchni cieczy.*

Punkt przyłożenia ciśnienia bocznego nazywamy środkiem ciśnienia pola rozważanego. Niech prosta, podług której powierzchnia cieczy przecina ścianę, będzie osią  $x$ , a w dowolnym punkcie tej prostej przyjmijmy na ścianie oś  $\zeta$  prostopadłe do  $x$ . Jeżeli  $\zeta$  oznacza odległość elementu  $dF$  od osi  $x$ , zaś  $\alpha$  kąt, który ściana tworzy z pionem, natenczas moment ciśnienia  $dP$  względem osi  $x$  jest  $\zeta \cdot dP$  czyli  $\sigma g z \zeta \cdot dF = \sigma g \cos \alpha \cdot \zeta^2 dF$ , ponieważ  $z = \zeta \cos \alpha$ . Moment więc ciśnienia bocznego  $P$  względem osi  $x$

jest  $\sigma g \cos \alpha \int \zeta^2 \cdot dF = \sigma g I_x \cos \alpha$ , gdzie  $I_x$  oznacza moment bezwładności pola względem osi  $x$ . Niech  $I$  oznacza moment bezwładności pola względem prostej, równoległej do osi  $x$ , i przechodzącej przez środek jego masy,  $Z_s$  odległość środka masy pola od osi  $x$ ; wtedy  $I_x = I + F \cdot Z_s^2$ . Jeżeli więc  $Z_c$  oznacza odległość środka ciśnienia od osi  $x$ , natenczas

$$P \cdot Z_c = \sigma g (I + F Z_s^2) \cos \alpha,$$

a stąd, po wstawieniu wartości  $P$ ,

$$(3) \quad Z_c = Z_s + \frac{I}{F Z_s},$$

z czego się okazuje, że  $Z_c > Z_s$ , że zatem *środek ciśnienia znajduje się poniżej środka masy pola ciśnionego*. Jeżeli przedstawimy sobie, że pole ciśnione waha się około osi  $x$ , natenczas z art. 162-go wynika, że *środek ciśnienia jest zarazem środkiem wahań pola rozważanego*.



Jeżeli ścianę naczynia stanowi powierzchnia krzywa, natenczas ciśnienia, które ciecz wywiera na elementy téj ściany w kierunkach normalnych nie będą równoległe, a przeto stanowią układ sił 3-go rodzaju. Wtedy więc nie istnieje ani wypadkowa ciśnień elementarnych, ani środek ciśnienia.

**197. ZASADA ARCHIMEDESA.** Rozważajmy działanie cieczy materyjalnej na ciało sztywne, w niej zanurzone. Przypuściwszy, że ciało jest częściowo zanurzone czyli pływa na cieczy, obierzmy powierzchnią cieczy za płaszczyznę  $xy$ , a oś  $z$  pionowo na dół. Element  $d\omega$ , obrany w punkcie  $(x, y, z)$  na powierzchni zanurzonej ciała, doznaje w kierunku normalnej wewnętrznej ciśnienia  $dP = \sigma g z \cdot d\omega$ . Jeżeli  $a, b, c$  oznaczają dostawy kierunkowe téj normalnej, wówczas  $a \cdot dP, b \cdot dP, c \cdot dP$  będą odpowiednio składowymi, zaś  $(cy - bz) dP, (az - cx) dP, (bx - ay) dP$  momentami tego ciśnienia względem osi współrzędnych. Wstawiając wartość  $dP$  i całkując na powierzchni zanurzonej ciała, otrzymamy

$$(1) \quad \begin{cases} X = \sigma g \int az \cdot d\omega, & Y = \sigma g \int bz \cdot d\omega, & Z = \sigma g \int cz \cdot d\omega \\ L = \sigma g \int (cy - bz) z d\omega, & M = \sigma g \int (az - cx) z d\omega, & N = \sigma g \int (bx - ay) z d\omega. \end{cases}$$

Wielkości  $X, Y, Z, L, M, N$  przedstawiają całkowite działanie cieczy na ciało zanurzone.

Każdą z powyższych całek podwójnych możemy zamienić na całkę potrójną, rozciągającą się na objętość zanurzonej ciała. W tym celu rozważajmy całkę następującą:

$$\Gamma_x = \iiint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz,$$

rozciągającą się na pewną ograniczoną część przestrzeni; funkcja  $F$  i jój pochodne jest ciągłą i jednowartościową w każdym punkcie  $(x, y, z)$  wewnątrz danej przestrzeni i na powierzchni ograniczającej. Aby wykonać całkowanie względem  $x$ , rzucmy tę powierzchnię ograniczającą na płaszczyznę  $yz$ , obierzmy wewnątrz rzutu punkt  $(y, z)$ , poprowadźmy przezeń prostą, równoległą do osi  $x$ , i oznaczmy przez  $F_1, F_2, \dots, F_{2n-1}, F_{2n}$  wartości funkcji  $F$  w punktach  $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ , w których owa prosta przecina powierzchnią daną. Ilość tych punktów jest parzysta. Wtedy

$$\Gamma_x = \iint (F_2 - F_1 + F_4 - F_3 + \dots + F_{2n} - F_{2n-1}) dy dz.$$

Niech  $a_i, b_i, c_i$  oznaczają dostawy kątów, które normalna wewnętrzna do powierzchni ograniczającej w punkcie  $(x_i, y_i, z_i)$  tworzy z osiami, a  $d\omega_i$  niech oznacza w tym punkcie pole elementu téj powierzchni, którego rzutem na  $yz$  jest prostokąt  $dy dz$ . Wtedy

$$dy dz = a_1 d\omega_1 = -a_2 d\omega_2 = a_3 d\omega_3 = -a_4 d\omega_4 = \dots = a_{2n-1} d\omega_{2n-1} = -a_{2n} d\omega_{2n}, \text{ więc}$$

$$\Gamma_x = \iint (-a_2 F_2 d\omega_2 - a_1 F_1 d\omega_1 - \dots - a_{2n} F_{2n} d\omega_{2n} - a_{2n-1} F_{2n-1} d\omega_{2n-1}),$$

czyli króćej

$$\Gamma_x = - \iint a F \cdot d\omega,$$

przyczem całkowanie rozciąga się na powierzchnię ograniczającą. Twierdzenie, przez to równanie wyrażone, możemy, kładąc  $dV = dx dy dz$ , tak przedstawić:

$$(2) \quad \begin{cases} \int \frac{\partial F}{\partial x} dV = - \int a F \cdot d\omega, \text{ podobnie } \int \frac{\partial F}{\partial y} dV = - \int b F \cdot d\omega, \\ \int \frac{\partial F}{\partial z} dV = - \int c F \cdot d\omega. \end{cases}$$

Stosując równania (2) do całek (1), otrzymamy  $\int az d\omega = - \int \frac{\partial z}{\partial x} dV$ , a ponieważ  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  wewnątrz ciała zanurzonego, przeto  $\int az d\omega = 0$ . Podobnie  $\int bz d\omega = - \int \frac{\partial z}{\partial y} dV = 0$ ;  $\int cz d\omega = - \int dV = -V$ , gdzie  $V$  oznacza objętość zanurzonego ciała. Podobnym sposobem otrzymamy

$$\int (cy - bz) z d\omega = - \int y dV, \int (az - cx) z d\omega = \int x dV, \int (bx - ay) z d\omega = 0.$$

Niech  $\xi, \eta, \zeta$  oznaczają współrzędne środka masy  $S$  tej części ciała, która jest zanurzona; wówczas  $\int y \cdot dV = \eta \cdot V$ ,  $\int x \cdot dV = \xi V$ , a więc

$$(3) \quad \begin{cases} X = 0, & Y = 0, & Z = -\sigma g V; \\ L = -\sigma g V \eta, & M = \sigma g V \xi, & N = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez  $\xi', \eta', \zeta'$  współrzędne środka masy  $S'$  całego ciała, przez  $V'$  całą objętość ciała, przez  $\sigma'$  jego gęstość średnią; wtedy  $\sigma' g V'$  jest ciężarem ciała. Redukując ciężar ciała do początku współrzędnych, otrzymamy następujące siły i momenty:

$$(4) \quad \begin{cases} X' = 0, & Y' = 0, & Z' = \sigma' g V'; \\ L' = \sigma' g V' \eta', & M' = -\sigma' g V' \xi', & N' = 0. \end{cases}$$

Z równań (3) okazuje się, że na ciało zanurzone ciecz nie wywiera żadnego działania poziomego, tudzież że ciśnienia cieczy na ciało nie mają momentu względem pionu. Żeby ciało zanurzone, samemu sobie zostawione,





około poziomej osi chwilowej, według której przecinają się płaszczyzny pływania ciała w dwu sąsiednich jego położeniach.

Niech  $AB$  (fig. 67) przedstawia płaszczyznę pływania w położeniu pierwotnym, a  $A_1B_1$  jej położenie względem ciała po bardzo małym odchyleniu w kierunku strzałki; prosta  $C$ , według której przecinają się obie płaszczyzny, będzie osią obrotu chwilowego o kąt bardzo mały  $\alpha$ . Punkt  $S$  przedstawia środek masy części zanurzonej, a  $S'$  środek masy całego ciała; do tych punktów przyłożone są siły odpowiednio  $\sigma g V$  i  $\sigma' g V'$ . Wskutek ruchu chwilowego zanurzy się część ciała  $BCB_1$ , a część  $ACA_1$  wynurzy się; parcie cieczy wzrośnie więc o siłę  $P_1$ , z jaką ciecz działa na  $BCB_1$ , a zmniejszy się o siłę  $P_2$ , odpowiednią części  $ACA_1$ . Aby obliczyć  $P_1$ , oberzmy prostą  $CB$  za oś  $x$ , a oś chwilową za oś  $y$ ; wtedy pole elementu figury  $BCB_1$  będzie  $x \sin \alpha \cos \alpha dx$ . A jeżeli przez  $y$  rozumieć będziemy szerokość tej figury, według której płaszczyzna  $AB$  przecina ciało, wziętą w kierunku osi  $y$ , to  $xy \sin \alpha \cos \alpha dx$  będzie objętością elementu klina  $BCB_1$ . Parcie cieczy na

ten element będzie  $\sigma g xy \sin \alpha \cos \alpha dx$ , a więc  $P_1 = \sigma g \sin \alpha \cos \alpha \int xy \cdot dx$ , gdzie całkowanie rozciąga się na przekrój ciała od  $C$  do  $B$ . Moment parcia

$P_1$  względem osi  $y$  będzie  $\sigma g \sin \alpha \cos^2 \alpha \int x^2 y \cdot dx$  czyli  $\sigma g I_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha$ , gdzie

$I_1$  oznacza moment bezwładności przekroju  $CB$  względem osi chwilowej. Podobnie będzie  $\sigma g I_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha$  momentem siły  $P_2$  względem tejże osi, względem której  $I_2$  oznacza moment bezwładności przekroju  $CA$ . Przyjmijmy, że  $S'$  znajduje się powyżej  $S$ , wtedy ciężar ciała  $\sigma' g V'$  tudzież siły  $P_1$  i  $P_2$  obracają ciało około osi chwilowej w przeciwnym kierunku odchylenia, a parcie  $\sigma g V$  obraca w kierunku odchylenia. Jeżeli przeto suma momentów pierwszych trzech sił względem osi chwilowej jest większa od momentu parcia, wtenczas ciało zdążać będzie do położenia pierwotnego. Niech prostopadłe z  $S'$  i  $S$  na płaszczyznę  $A_1B_1$  spotykają tę płaszczyznę odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ ; wtedy warunek, aby równowaga ciała pływającego była stała, wyrazi się przez nierówność

$$\sigma' g V' \cdot CD + \sigma g (I_1 + I_2) \sin \alpha \cos^2 \alpha > \sigma g V \cdot CE;$$

mieć więc będziemy, kładąc  $I = I_1 + I_2$ ,

$$\sigma I \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha > \sigma V \cdot CE - \sigma' V' \cdot CD.$$

Ponieważ z założenia  $\sigma V = \sigma' V'$ , przeto:

$$I \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha > V (CE - CD).$$

Gdy przyjmijmy  $\delta = SS'$ , to  $CE - CD = \delta \sin \alpha$ ; mamy więc

$$I \cdot \cos^2 \alpha > V \delta.$$

Ponieważ  $\alpha$  jest kątem bardzo małym przeto otrzymamy

$$(1) \quad I > V \delta, \text{ czyli } \delta < \frac{I}{V},$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności tej figury, według której płaszczyzna pływania przecina ciało, względem osi chwilowej. Osią chwilową może być jakakolwiek prosta na tej płaszczyźnie, a  $I$  będzie najmniejsze względem jednej z osi głównych tej figury. Jeżeli przeto w (1) podstawimy zamiast  $I$  jego wartość najmniejszą, a powyższa nierówność zachodzi, to ciało pływające będzie w równowadze stałej, jakimkolwiek byłby ruch chwilowy, ciało udzielony. A zatem: *jeżeli środek masy całego ciała znajduje się powyżej środka masy jego części zanurzonej, natenczas równowaga będzie stała, jeżeli odległość wzajemna tych obudwu środków jest mniejsza od ilorazu z podzielenia najmniejszego momentu bezwładności figury, według której płaszczyzna pływania przecina ciało, przez objętość części zanurzonej tego ciała.*

Gdyby punkt  $S$  leżał powyżej  $S'$ , wtedy warunkiem równowagi stałej byłoby  $I \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha > V \cdot (CE - CD)$ . Ponieważ w tym przypadku  $CE - CD = -\delta \sin \alpha$ , przeto otrzymalibyśmy  $I \cos^2 \alpha > -V \cdot \delta$ . Temu warunkowi zawsze stanie się zadość, ponieważ  $I$  jest wielkością dodatnią. *Jeżeli środek masy ciała znajduje się poniżej środka masy jego części zanurzonej, natenczas równowaga ciała pływającego jest stała.* W przypadku całkowitego zanurzenia punkt  $S$  razem się zejdzie z punktem  $S'$ , a wtedy zachodzi równowaga w każdym położeniu ciała. Taki stan równowagi ciała pływającego zowiemy obojętnym. Nazywamy zaś równowagę ciała pływającego niestalą, jeżeli ona nie jest ani stałą, ani obojętną; wtedy nie wraca ciało po odchyleniu do pierwotnego położenia równowagi.

Powyższe roztrząsanie jest o tyle dokładne, o ile pomijamy ruch cieczy, wywołany przez odchylenie ciała, tudzież wpływ tego ruchu na oscylacje ciała. Żeby więc podane twierdzenia miały zastosowanie, potrzeba przyjąć, że prędkość każdej cząstki cieczy jest nieskończenie mała w porównaniu z prędkościami punktów ciała, i ciągle taką pozostaje.

**199. KSZTAŁT RÓWNOWAGI OBRACAJĄCJ SIĘ CIECZY.** Ciecz, której cząstki przyciągają się wzajemnie według prawa Newton'a, obraca się jednostajnie około danej osi: mamy wyznaczyć kształt jej powierzchni. — Ciecz przybierze pewien kształt oznaczony wskutek równowagi względnej sił, przyłożonych do jej cząstek. Tymi siłami są: przyciągania i siły odśrodkowe, które, jak wiadomo, (art. 145) są jedynymi siłami pozornymi, dającymi pracę elementarną. Biorąc sumę potencjałów sił przyciągania i sił odśrodkowych, i przyrównyując tę sumę do stałej dowolnej, otrzymamy według (3) art. 194-go równanie każdej powierzchni stałego ciśnienia, a zatem także równanie powierzchni cieczy.

Niech  $X, Y, Z$  oznaczają składowe prostokątne przyciągania, którego jednostka masy w punkcie  $(x, y, z)$  doznaje od cieczy;  $\omega$  niech oznacza stałą prędkość kątową obrotu około prostej, którą przyjmiemy za oś  $z$ ; natenczas  $\int (Xdx + Ydy + Zdz)$  jest potencjałem sił przyciągających, zaś  $\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$  jest potencjałem siły odśrodkowej dla jednostki masy (art. 145). Równanie więc powierzchni cieczy będzie

$$(1) \quad \int (X dx + Y dy + Z dz) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = a,$$

gdzie  $a$  oznacza stałą. Potencjał sił przyciągających zależy od krańców całkowania, a zatem od powierzchni cieczy, a ponieważ ta powierzchnia jest właśnie niewiadomą, przeto ten potencjał nie może być obliczony. Podane zatem zagadnienie nie daje się bezpośrednio rozwiązać; pozostaje tylko droga pośrednia, mianowicie należy po przyjęciu pewnego ograniczenia cieczy badać warunki, pod którymi to ograniczenie jest możliwe.

Przyjmijmy, że ciecz jest ograniczoną powierzchnią elipsoidy obrotowej lub trójosiowej, i wyznaczmy warunki, przy których mogą zachodzić takie kształty równowagi.

Obierzmy osi główne  $A, B, C$  elipsoidy za osi współrzędnych, (elipsoida obraca się zatem około osi  $C$ ) oznaczmy przez  $\sigma$  gęstość cieczy, a przez  $k$  wielkość przyciągania dwu jednostek masy w odległości równej jednostce; wówczas potencjał sił przyciągania w punkcie  $(x, y, z)$  elipsoidy będzie według (15) art. 132-go,

$$U = \pi k \sigma \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{A^2 + s} - \frac{y^2}{B^2 + s} - \frac{z^2}{C^2 + s} \right) \frac{ds}{D},$$

gdzie  $D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{B^2}\right) \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)}$ . Gdy przyjmiemy

$$(2) \quad \Xi = \int_0^\infty \frac{ds}{D(A^2 + s)}, H = \int_0^\infty \frac{ds}{D(B^2 + s)}, Z = \int_0^\infty \frac{ds}{D(C^2 + s)}, \Delta = \int_0^\infty \frac{ds}{D},$$

to będzie  $U = \pi k \sigma (\Delta - \Xi x^2 - H y^2 - Z z^2)$ ; równanie więc powierzchni cieczy będzie

$$\pi k \sigma (\Delta - \Xi x^2 - H y^2 - Z z^2) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = a,$$

czyli, gdy przyjmiemy  $\mu = 2\pi k \sigma$ ,

$$(3) \quad \left( \frac{\omega^2}{\mu} - \Xi \right) x^2 + \left( \frac{\omega^2}{\mu} - H \right) y^2 - Z z^2 = a - \Delta.$$

Żeby to równanie odpowiadało elipsoidzie  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ , jak tego żądamy, zachodzić powinny następujące związki:

$$(4) \quad \frac{\omega^2}{\mu} - \Xi = \frac{a - \Delta}{A^2}, \quad \frac{\omega^2}{\mu} - H = \frac{a - \Delta}{B^2}, \quad Z = -\frac{a - \Delta}{C^2},$$

które wyrażają szukane warunki zagadnienia. Mamy pięć niewiadomych  $A, B, C, \omega, a$ , z których trzy pierwsze określają powierzchnię elipsoidy; a ponieważ między tymi wielkościami zachodzą tylko trzy związki (4), przeto dwie

niewiadome mogą być dowolnie obrane. Rugując z tych związków  $a - A$ , otrzymamy dwa równania

$$(5) \quad \frac{\omega^2}{\mu} - E = -\frac{C^2}{A^2} Z, \quad \frac{\omega^2}{\mu} - H = \frac{C^2}{B^2} Z,$$

z których po ponownym wprowadzeniu całek, wypada

$$(6) \quad \frac{\omega^2}{\mu} = \frac{1}{A^2 B^2} \int_0^\infty \frac{s \cdot ds}{D \left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{B^2}\right)} = \\ = \frac{A^2 - C^2}{A^4 C^2} \int_0^\infty \frac{s \cdot ds}{D \left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)} = \frac{B^2 - C^2}{B^4 C^2} \int_0^\infty \frac{s \cdot ds}{D \left(1 + \frac{s}{B^2}\right) \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)}.$$

Odejmując od siebie pierwsze dwa równania (4), wyrugujemy  $\omega^2$  i otrzymamy po łatwych redukcjach

$$(7) \quad (B^2 - A^2) \left\{ \int_0^\infty \frac{ds}{D \left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{B^2}\right)} - \int_0^\infty \frac{ds}{D \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)} \right\} = 0$$

jako jedyny związek, mający zachodzić między osiami elipsoidy, której kształt ma przyjąć obracająca się ciecz.

Z ostatniego równania wynika, że ciecz może przyjąć kształty nieskończenie wielu elipsoid rozmaitych. Którekolwiek z równań (6) pozwala dla każdej elipsoidy obliczyć odpowiednią prędkość kątową obrotu.

Równaniu (7) możemy uczynić zadość, biorąc  $A = B$ ; ciecz może zatem przyjąć kształt elipsoidy obrotowej, której osią jest oś obrotu cieczy. Biorąc którekolwiek z dwu ostatnich równań (6), widzimy, że wyrazy pod znakami całkowania są dodatnie, a więc całki są także wielkościami dodatnimi; żeby więc  $\omega$  miało wartość rzeczywistą, powinno być dla elipsoidy obrotowej  $A > C$ . *Ciecz może przybrać kształt sferoidy, której osią jest oś obrotu.* Elipsoida obrotowa wydłużona, jest niemożliwa.

**200.** Zastanówmy się bliżej nad kształtem sferoidalnym cieczy. Weźmy  $\varepsilon = \frac{\sqrt{A^2 - C^2}}{C}$ ; wówczas  $\varepsilon$  oznacza mimośród elipsy, która przez obrót około mniejszej osi  $C$  tworzy sferoidę; gdy podstawimy  $s = C^2 u$ , gdzie  $u$  jest nową zmienną, to z równania ogólnego

$$\frac{\omega^2}{\mu} = \frac{A^2 - C^2}{A^4 C^2} \int_0^\infty \frac{s \cdot ds}{D \left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)}$$

otrzymamy dla sferoidy

$$\frac{\omega^2}{\mu} = \varepsilon^2 \int_0^\infty \frac{u \, du}{(u + \varepsilon^2 + 1)^2 (u + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$



Podstawivszy  $u + 1 = z$ , otrzymamy

$$\int \frac{u \cdot du}{(u + \varepsilon^2 + 1)^2 (u + 1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}} (z + \varepsilon^2)^2} - \int \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}} (z + \varepsilon^2)^2},$$

a następnie używając w każdej z tych całek podstawienia  $z^{\frac{1}{2}} = \zeta$ , otrzymamy:

$$\int \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}} (z + \varepsilon^2)^2} = 2 \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + \varepsilon^2)^2} = \frac{\zeta}{\varepsilon^2 (\zeta^2 + \varepsilon^2)} + \frac{1}{\varepsilon^3} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\varepsilon},$$

$$\int \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}} (z + \varepsilon^2)^2} = 2 \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 (\zeta^2 + \varepsilon^2)^2} = -\frac{2}{\varepsilon^4 \zeta} - \frac{\zeta}{\varepsilon^4 (\zeta^2 + \varepsilon^2)} - \frac{3}{\varepsilon^5} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\varepsilon}.$$

Wprowadzając na nowo zmienne pierwotne i biorąc całkę oznaczoną, mieć będziemy

$$\frac{\omega^2}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon^3} \left\{ (\varepsilon^2 + 3) \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon} \right) - 3\varepsilon \right\}.$$

Ponieważ  $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon} = \operatorname{arctg} \varepsilon$ , przeto będzie

$$(1) \quad \frac{\omega^2}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon^3} \left\{ (\varepsilon^2 + 3) \operatorname{arctg} \varepsilon - 3\varepsilon \right\}.$$

Dla każdego  $\varepsilon$  można z tego równania obliczyć  $\omega$ , to znaczy dla sferoidy o danym mimośrodku można wyznaczyć odpowiednią prędkość kątową obrotu. Jeżeli zważymy, że  $\varepsilon$  jest wielkością dodatnią, to nietrudno okazać, że każdej wartości  $\varepsilon$  odpowiada dodatnie  $\omega^2$ , a więc rzeczywiste  $\omega$ . Jakoż, gdy przyjmujemy

$$\frac{\omega^2}{\mu} = \frac{\varepsilon^2 + 3}{\varepsilon^3} \cdot \varphi(\varepsilon), \text{ gdzie } \varphi(\varepsilon) = \operatorname{arctg} \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon^2 + 3},$$

$$\text{to } \frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{4\varepsilon^4}{(\varepsilon^2 + 3)^2 (\varepsilon^2 + 1)}.$$

Dla  $\varepsilon > 0$  mamy ciągle  $\varphi'(\varepsilon) > 0$ , a zatem  $\varphi(\varepsilon)$  wzrasta dla rosnących  $\varepsilon$ , a ponieważ  $\varphi(\varepsilon)$  ma bardzo małą wartość dodatnią dla bardzo małego dodatniego  $\varepsilon$ , przeto  $\varphi(\varepsilon) > 0$  dla  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ pierwszy czynnik jest także dodatni, przeto  $\frac{\omega^2}{\mu}$  jest dodatnie dla każdego dodatniego  $\varepsilon$ . Każdej sferoidzie odpowiada pewna prędkość kątowa obrotu, a kształt równowagi nie zależy od kierunku, w którym obracamy.

Gdy  $f(\varepsilon) = \frac{7\varepsilon^3 + 9\varepsilon}{(\varepsilon^2 + 9)(\varepsilon^2 + 1)} - \operatorname{arctg} \varepsilon$ , to

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\omega^2}{\mu} \right) = \frac{\varepsilon^2 + 9}{\varepsilon^4} f(\varepsilon), \quad \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{8\varepsilon^4 (3 - \varepsilon^2)}{(\varepsilon^2 + 9)^2 (\varepsilon^2 + 1)^2}.$$

Znak pochodnej  $\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\omega^2}{\mu} \right)$  zależy od znaku funkcji  $f(\varepsilon)$ . Dla bardzo małych i dodatnich  $\varepsilon$  jest funkcja  $f(\varepsilon)$  dodatnia, a ponieważ  $f'(\varepsilon) = 0$  dla  $\varepsilon = \sqrt[3]{3}$ , przeto funkcja  $f(\varepsilon)$  pozostaje dodatnią i rośnie od  $\varepsilon = 0$  do  $\varepsilon = \sqrt[3]{3}$ . Odtąd jest  $f'(\varepsilon) < 0$ , więc  $f(\varepsilon)$  ubywa, a ponieważ dla  $\varepsilon = \infty$ ,  $f(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2}$ , przeto istnieje pewna wartość  $\varepsilon$ , większa niż  $\sqrt[3]{3}$ , dla której  $f(\varepsilon) = 0$ . Jedynym pierwiastkiem równania  $f(\varepsilon) = 0$ , zawsze zadość czyniącym temu warunkowi, jest  $\varepsilon = 2,5293$ , jak rachunkiem przekonać się można. Dla tej wartości  $\varepsilon$  będzie  $\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\omega^2}{\mu} \right) = 0$ , a więc największe  $\frac{\omega^2}{\mu}$ , które dla sferoidy zachodzić może, Wstawiwszy powyższą wartość  $\varepsilon$  w równaniu (1), otrzymamy  $\max. \frac{\omega^2}{\mu} = 0,2246$ .

Linija krzywa, przedstawiająca  $\frac{\omega^2}{\mu}$  w funkcji  $\varepsilon$ , podnosi się od zera aż do powyższej wartości, następnie zniża się ku osi  $\varepsilon$ -ów, która jest jej asymptotą, bo dla nieskończonego wielkiego  $\varepsilon$  będzie pochodna tej funkcji nieskończenie mała. Prosta, równoległa do osi  $\varepsilon$ -ów, której rzędna jest mniejsza od 0,2246, przecina tę krzywą w dwu punktach; dla jednego z tych punktów będzie  $\varepsilon < 2,5293$ , dla drugiego  $\varepsilon > 2,5293$ ; równanie (8) posiada więc dwa pierwiastki dodatnie  $\varepsilon$  dla każdej wartości  $\omega$ , leżącej poniżej wartości wymienionej. *A zatem, żeby ciecz przybrała kształt sferoidy, potrzeba, aby  $\frac{\omega^2}{\mu} \leq 0,2246$ ; dla każdej prędkości obrotu, czyniąc zadość warunkowi  $\frac{\omega^2}{\mu} < 0,2246$ , otrzymamy dwie sferoidy jako kształty równowagi, a dla  $\frac{\omega^2}{\mu} = 0,2246$  tylko jedną sferoidę.* Dla  $\frac{\omega^2}{\mu} > 0,2246$  nie może ciecz przybrać kształtu sferoidalnego.

Z przebiegu powyższej krzywej wynika, że z równania (1) otrzymamy dla bardzo małego  $\omega$  dwie wartości  $\varepsilon$ , z których jedna bardzo mała, a druga bardzo wielka. Dla pierwszej możemy użyć szeregu  $\arctg \varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^5}{5} - \dots$ , po wstawieniu którego w (1) otrzymujemy, zatrzymując tylko najniższą potęgę mimośrodu,  $\frac{\omega^2}{\mu} = \frac{4}{15} \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{15}{\mu}}$ . Dla drugiego pierwiastka biorąc  $\arctg \varepsilon = \frac{\pi}{2}$ , otrzymamy  $\varepsilon = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mu}{\omega^2}$ . Jeżeli przyjmiemy następnie  $\omega = 0$ , to otrzymamy 0 i  $\infty$  jako odpowiadające wartości mimośrodu. Granicami więc sferoid są kula (dla  $\varepsilon = 0$ ) i płaszczyzna do nieskończoności (dla  $\varepsilon = \infty$ ).

Możemy te wyniki zastosować do ziemi. Oznaczając przez  $R$  jej promień średni, przez  $g$  średnie przyspieszenie spadku na jej powierzchni, przez



$\sigma$  gęstość średnią ziemi, mamy według równania (8) art. 135-go,  $k\sigma = \frac{3}{4} \frac{g}{R\pi}$ ,  
a więc  $\frac{\omega^2}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{R\omega^2}{g}$ , skąd

$$(2) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{R\omega^2}{g} = \frac{(\varepsilon + 3) \operatorname{arctg} \varepsilon - 3\varepsilon}{\varepsilon^3}.$$

Ponieważ  $\omega$  jest bardzo małe dla ziemi, przeto możemy zamiast prawej strony tego równania wziąć  $\frac{4}{15} \varepsilon^2$ , z czego wynika

$$\frac{2}{3} \frac{R\omega^2}{g} = \frac{4}{15} \varepsilon^2, \text{ czyli } \varepsilon^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{R\omega^2}{g}.$$

Jeżeli  $\eta$  oznacza spłaszczenie sferoidy ziemskiej, to według art. 134-go,  $\varepsilon^2 = 2\eta$ , a stąd

$$(3) \quad \eta = \frac{5}{4} \cdot \frac{R\omega^2}{g}.$$

Dla ziemi mamy  $\omega^2 = 5329 \times 10^{-12}$ ; wstawiając jeszcze wartości  $R$  i  $g$ , otrzymamy:

$$\eta = 0,004327 = \frac{1}{231}.$$

Pomiary ziemi wykazały jednak, że jej spłaszczenie wynosi  $\frac{1}{288,48}$  (art. 134), a zatem mniej, niż wypada z powyższego rachunku. Ta niezgodność tym się tłumaczy, że ziemia nie jest jednorodna, i służy zarazem na poparcie przypuszczenia, że gęstość ziemi rośnie ku środkowi.

Warunkowi (7) art. poprzedzającego, określającemu kształt równowagi cieczy, uczynimy zadość, kładąc

$$(4) \quad I = \int_0^\infty \frac{ds}{D \left(1 + \frac{s}{A^2}\right) \left(1 + \frac{s}{B^2}\right)} - \int_0^\infty \frac{ds}{D \left(1 + \frac{s}{C^2}\right)} = 0.$$

To równanie odpowiada, jak z poprzedniego dochodzenia wynika, elipsojdzie trójosiowej jako powierzchni cieczy. Użyjemy podstawienia  $s = C^2 u$ , przyjmijmy  $\alpha^2 = C^2 : A^2$ ,  $\beta^2 = C^2 : B^2$ ,  $R^2 = (1 + \alpha^2 u) (1 + \beta^2 u) (1 + u)$ ; wówczas otrzymamy po łatwych redukcjach

$$I = C^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) \cdot \int_0^\infty \frac{u du}{R^3} - C^2 \alpha^2 \beta^2 \int_0^\infty \frac{u^2 \cdot du}{R^3}.$$

Z warunku  $I = 0$ , wynika

$$(5) \quad (1 - \alpha^2 - \beta^2) \cdot \int_0^\infty \frac{u du}{R^3} - \alpha^2 \beta^2 \int_0^\infty \frac{u^2 \cdot du}{R^3} = 0.$$

Ponieważ każda z powyższych całek jest dodatna, przeto jest  $(1 - \alpha^2 - \beta^2) > 0$ , czyli

$$\frac{1}{C^2} > \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}.$$

*Ciecz obracająca się może przyjąć kształt elipsojdy trójosiowej; wtedy odwrotność kwadratu tej osi elipsojdy, która ma kierunek osi obrotu, będzie większa od sumy odwrotności kwadratów dwu innych osi téjże elipsojdy (twierdzenie Jacobi'ego). Nie wdając się w bliższy rozbiór tego przypadku, odsyłamy czytelnika do prac Mayer'a i Liouville'a, poniżej przytoczonych, które podają warunki, aby ciecz przyjęła kształt elipsojdalny.*

## Ć W I C Z E N I A.

(1). Wyprowadzić bezpośrednio równania równowagi elementu cieczy, mającego kształt prostopadłościanu, przyjmując, że ściany doznają samych tylko ciśnień normalnych.

(2). Półkole umieszczono pionowo w cieczy tak, że jego średnica przypada na powierzchni cieczy: podzielić półkole na  $n$  części, doznających jednakowego ciśnienia cieczy.

(3). Naczynie półkuliste jest wypełnione cieczą: wyznaczyć ciśnienie na czwartą część powierzchni, ograniczoną dwiema płaszczyznami, przechodzącymi przez oś pionową naczynia.

(4). Wyznaczyć położenia, w których prosty graniastosłup trójkątny pływa na wodzie przy zanurzeniu jednej lub dwu krawędzi, i podać położenia, w których jego równowaga jest stała.

(5). Okazać, że pływająca elipsojda jednorodna znajduje się w równowadze stałej, gdy jej oś najmniejsza ma kierunek pionowy.

(6). W naczyniu, mającym kształt walca obrotowego, obraca się ciecz materiałna jednostajnie około jego osi: podać równanie powierzchni cieczy.

(7). Cząstki cieczy, obracającej się jednostajnie około osi, są przyciągane według prawa Newton'a przez punkt, znajdujący się na tej osi: wyznaczyć powierzchnię cieczy. Dla małej prędkości obrotu otrzymamy sferoidę, której spłaszczenie daje się obliczyć. Stosując ten wynik do ziemi, okazać, że spłaszczenie tej sferoidy jest znacznie mniejsze od spłaszczenia ziemi, obliczonego z pomiarów geodezyjnych.

(8). Przyjąć w poprzednim zadaniu, że przyciąganie jest proporcjonalne względem odległości od punktu, znajdującego się na osi obrotu i wyznaczyć wszystkie kształty, jakie ciecz przyjąć może.

(9). Parabolojda obrotowa, której oś jest pionowa, zawiera wiadomą ilość cieczy, obracającej się jednostajnie około jej osi: wyznaczyć całkowite ciśnienie cieczy na parabolojdę.

(10). Półkula o osi pionowej zawiera ciecz, której objętość jest równa 4-tęj części objętości półkuli, a ciecz obraca się jednostajnie i dosięga krawędzi półkuli: wyznaczyć prędkość kątową obrotu.

---

#### L i t e r a t u r a (Rozdz. XVIII).

---

DUHAMEL, Observations sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants (J. de l'éc. polyt. t. XV, 1835). — C. G. I. JACOBI, Ueber die Figur des Gleichgewichts (Annalen v. Poggendorff, t. XXXIII, Leipzig, 1834). — J. LIOUVILLE, Note sur la figure d'une masse fluide homogène en équilibre et douée d'un mouvement de rotation (J. de l'éc. polyt., Cahier XXIII, 1834); Mémoire sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation (J. des math., t. XVI, 1851). — C. O. MEYER, De aequilibrii formis ellipsoidicis (J. v. CRELLE, t. XXIV, Berlin, 1842). — P. RICHELMY, Note sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants (Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino T. XV, 1855). — КОСТКА, Ueber die Auffindung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren einer homogenen, um eine feste Axe rotirenden Flüssigkeitsmasse (Monatsberichte d. Akad. d. Wiss. in Berlin, 1870). — A. MARTYNOWSKI, Teoryja ciśnienia cieczy na ściany płaskie i na ściany krzywe (Pamiętnik tow. n. śc. w Paryżu, t. III i IV, Paryż, 1873 — 74.) — L. BIRKENMAJER, O kinetycznej równowadze elipsojdy nieobrotowej pod wpływem grawitacyi i siły odśrodkowej (Pamiętnik ak. um., t. VII, Kraków, 1882). —

---