

ROZDZIAŁ XIV.

KINETYKA UKŁADÓW SZTYWNYCH.

146. OBRÓT OKOŁO OSI STAŁEJ. Między $3n$ współzrędnymi prostokątnymi układu sztywnego, składającego się z n punktów, zachodzi $3n - 6$ związków, określających jego sztywność, które zatym nie zależą ani od jego ruchu, ani od sił przyłożonych. Zadanie więc kinetyki układów sztywnych polega na tym, aby z danych sił, tudzież z warunków, określających swobodę układu i jego stan początkowy, wyznaczyć sześć współzrędných ruchu (art. 42), koniecznych i wystarczających do rozpoznania ruchu każdego punktu takiego układu. Jeżeli układ posiada swobodę rzędu 1-go, a zatym najmniejszą, to między 6-ciu współzrędnymi jego ruchu zachodzi 5 związków, od sił niezależnych, a zasady ogólne służą do wyznaczenia jedynéj współzrędnéj ruchu, która jest funkcją sił przyłożonych. Ten przypadek stanowi zatym najprostsze zagadnienie kinetyki układów sztywnych. Swoboda rzędu 1-go zachodzi, jeżeli układ obraca się około osi stałej. Obierając tę oś za oś x i używając znakowania, użytego w kinematyce, mamy w tym przypadku bez względu na siły $H = 0, Z = 0, \Lambda = 0, M = 0, N = 0$; jedyną przeto niewiadomą jest $\Xi = \omega$, t. j. prędkość kątowna obrotu około danéj osi.

Oznaczmy przez L moment układu sił przyłożonych (ciągłych) względem osi obrotu. Aby zastosować zasadę d'Alembert'a, wyznaczmy w każdym punkcie m_i te siły, któreby mu nadały obrót około osi z prędkością kątowną ω , gdyby był swobodny. Jeżeli ρ_i jest odległością punktu m_i od osi, to $\omega \rho_i$ jest jego prędkością, a zatym $\rho_i \frac{d\omega}{dt}$ jego przyspieszeniem stycznym, a $\rho_i \omega^2$ przyspieszeniem dośrodkowym. Do punktu należy zatym przyłożyć siłę styczną $m_i \rho_i \frac{d\omega}{dt}$, i siłę dośrodkową $m_i \rho_i \omega^2$, aby mu nadać powyższe przyspieszenia. Te siły, wzięte w kierunku wprost przeciwnym, i siły przyłożone, równoważą się ze względu na warunek, że układ obraca się

około osi stałej; do równowagi więc potrzeba i wystarcza, żeby suma momentów tych sił względem osi była równa zeru. Moment siły stycznej, wziętej w kierunku przeciwnym, względem osi, jest $-m_i \rho_i^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}$, suma zaś tym momentów sił stycznych wynosi $-\frac{d\omega}{dt} \cdot \Sigma m_i \rho_i^2 = -A \cdot \frac{d\omega}{dt}$, gdzie A oznacza moment bezwładności układu masyjnego względem osi. Siła odśrodkowa $-m_i \rho_i \omega^2$ przecina oś, jej więc moment jest równy zeru. Z zasady d'Alemberta zatem wynika równanie

$$(1) \quad L - A \frac{d\omega}{dt} = 0, \text{ czyli } \frac{d\omega}{dt} = \frac{L}{A},$$

z którego przez całkowanie otrzymamy

$$(2) \quad \omega = \frac{1}{A} \int L \cdot dt + c.$$

Znając L w funkcji czasu, tudzież warunek początkowy, możemy obliczyć ω . Równanie (1) okazuje, że przyspieszenie kątowe jest proporcjonalne względem momentu układu sił i odwrotnie proporcjonalne względem momentu bezwładności układu względem osi obrotu. Jeżeli m jest masą układu, k jego ramieniem bezwładności względem osi, to będzie także

$$(3) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{L}{mk^2}.$$

Dla sił stałych lub takich, których moment L nie zmienia się, otrzymamy

$$(4) \quad \omega = \omega_0 + \frac{Lt}{A},$$

z czego się okazuje, że obrót będzie jednostajnie przyspieszony.

Aby rozwiązać zadanie o obrocie w przypadku sił chwilowych, oznaczmy przez ω_0 prędkość kątową obrotu przed przyłożeniem sił, a przez ω prędkość bezpośrednio po ich przyłożeniu. Przyrost ilości ruchu punktu m_i wynosi $m_i \rho_i (\omega - \omega_0)$, a ta wielkość przedstawia zarazem siłę chwilową, która punktowi udziela tego przyrostu ilości ruchu. Suma momentów tych sił chwilowych, wziętych w kierunkach przeciwnych, względem osi obrotu, wynosi $-(\omega - \omega_0) \Sigma m_i \rho_i^2 = -A (\omega - \omega_0)$; z zasady d'Alembert'a otrzymamy przeto następujące równanie równowagi sił straconych:

$$(5) \quad L = A (\omega - \omega_0) \text{ skąd } \omega = \omega_0 + \frac{L}{A},$$

gdzie L oznacza moment układu przyłożonych sił chwilowych. Jeżeli przykładamy siły do układu masyjnego w spoczynku, to $\omega = L : A$.

Obliczywszy według (5) prędkość kątową obrotu w pierwszej chwili po przyłożeniu sił chwilowych, należy prędkość w następujących elementach czasu

obliczać według (2), podstawiając za L moment układu sił ciągłych, działających na ciało podczas obrotu. Jeżeli na ciało nie działają żadne siły podczas obrotu, wtedy będzie $L = 0$, a zatem $\frac{d\omega}{dt} = 0$; ciało więc będzie się obracało jednostajnie z prędkością, udzieloną mu przez siły chwilowe.

147. Aby oś obrotu była stała, należy dwa punkty tej osi ustalić; ponieważ siły stracone równoważą się wskutek tego ustalenia, przeto w obudwu punktach będzie oś doznawała pewnych reakcyj, przedstawiających właśnie te siły, z którymi siły stracone są w równowadze.

Obierzmy na osi dwa punkty stałe p' i p'' , których odległości od początku współrzędnych, obranego na tej osi, niech będą odpowiednio δ' i δ'' , a $X', Y', Z'; X'', Y'', Z''$ niech oznaczają składowe prostokątne reakcyj w tych punktach. Składowe przyspieszenia stycznego punktu $m_i (x_i, y_i, z_i)$ w kierunkach osi x, y, z są: $0, -z_i \frac{d\omega}{dt}, y_i \frac{d\omega}{dt}$; a składowe przyspieszenia dośrodkowego są: $0, -y_i \omega^2, -z_i \omega^2$, przyczem przyjmujemy obrót około osi x w kierunku od osi y ku osi z . Sumy więc rzutów sił stycznych, wziętych w kierunkach przeciwnych, będą odpowiednio: $0, \frac{d\omega}{dt} \sum m_i z_i, -\frac{d\omega}{dt} \sum m_i y_i$, a sumy ich momentów: $-A \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \sum m_i x_i y_i, \frac{d\omega}{dt} \sum m_i x_i z_i$; sumy rzutów sił odśrodkowych wynoszą odpowiednio: $0, \omega^2 \sum m_i y_i, \omega^2 \sum m_i z_i$; a sumy ich momentów: $0, -\omega^2 \sum m_i x_i z_i, \omega^2 \sum m_i x_i y_i$. Oznaczając więc przez X, Y, Z, L, M, N współrzędne układu sił przyłożonych, mamy, przy uwzględnieniu reakcyj, następujące równania równowagi:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' + X'' + X = 0, \\ Y' + Y'' + Y + \frac{d\omega}{dt} \sum m_i z_i + \omega^2 \sum m_i y_i = 0, \\ Z' + Z'' + Z - \frac{d\omega}{dt} \sum m_i y_i + \omega^2 \sum m_i z_i = 0, \\ L - A \frac{d\omega}{dt} = 0, \\ -Z' \delta' - Z'' \delta'' + M + \frac{d\omega}{dt} \sum m_i x_i y_i - \omega^2 \sum m_i x_i z_i = 0, \\ Y' \delta' + Y'' \delta'' + N + \frac{d\omega}{dt} \sum m_i x_i z_i + \omega^2 \sum m_i x_i y_i = 0. \end{array} \right.$$

Z tych równań możemy wyznaczyć reakcje. Z 1-go równania obliczymy ciśnienie, którego oś doznaje w jej kierunku, a podstawiawszy wyrażenia na $\frac{d\omega}{dt}$ i ω w pozostałe równania (1), otrzymamy resztę składowych i momentów każdej reakcji.

Poprowadźmy płaszczyznę xy przez środek masy; wtedy $\sum m_i z_i = 0$. Przypuśćmy nadto, że oś obrotu jest osią bezwładności układu względem punktu O ; wtedy (art. 100) $\sum m_i x_i y_i = 0$, i $\sum m_i x_i z_i = 0$. Równaniami (1) będą tu więc równania:

$$(2) \quad \begin{cases} X' + X'' + X = 0, Y' + Y'' + Y + \omega^2 \sum m_i y_i = 0, Z' + Z'' + Z - \frac{d\omega}{dt} \sum m_i y_i = 0, \\ L - A \frac{d\omega}{dt} = 0, -Z' \delta' - Z'' \delta'' + M = 0, Y' \delta' + Y'' \delta'' + N = 0. \end{cases}$$

Jeżeli układ obraca się około osi głównej, wtedy możemy środek masy obracać jako początek; wówczas otrzymamy $\sum m_i y_i = 0$. Siły styczne redukują się wtedy do pary sił o momencie $-A \frac{d\omega}{dt}$, której płaszczyzna jest prostopadła do osi głównej; a sumy rzutów i sumy momentów sił odśrodkowych będą równe zeru, z czego wynika ważne twierdzenie: *jeżeli układ sztywny obraca się około jednej z osi głównych, natenczas siły odśrodkowe wzajemnie się znoszą*. Widzimy zarazem, że siły odśrodkowe tylko wtedy znosić się będą, jeżeli jedna z osi głównych jest osią obrotu układu.

Niech ξ, η, ζ oznaczają współrzędne środka masy układu; redukując siły odśrodkowe do początku osi współrzędnych, otrzymamy siłę wypadkową, której rzuty wynoszą odpowiednio $0, \omega^2 \sum m_i y_i = \omega^2 \eta \sum m_i, \omega^2 \sum m_i z_i = \omega^2 \zeta \sum m_i$. Z tych równań wynika, że *wypadkowa sił odśrodkowych, zredukowanych do punktu dowolnego, równa się sile odśrodkowej środka masy układu, w którym skupiono całą jego masę*.

W przypadku sił chwilowych, sprawiających obrót około osi stałej, otrzymamy zamiast (1) następujące równania:

$$(3) \quad \begin{cases} X' + X'' + X = 0, Y' + Y'' + Y + (\omega - \omega_0) \cdot \sum m_i z_i = 0, \\ Z' + Z'' + Z - (\omega - \omega_0) \sum m_i y_i = 0, \\ L - A(\omega - \omega_0) = 0, -Z' \delta' - Z'' \delta'' + M + (\omega - \omega_0) \sum m_i x_i y_i = 0, \\ Y' \delta' + Y'' \delta'' + N + (\omega - \omega_0) \sum m_i x_i z_i = 0, \end{cases}$$

z których obliczymy reakcje w punktach p' i p'' , zachodzące w chwili przyłożenia danych sił. Jeżeli siły chwilowe wprawiają układ ze spoczynku w ruch obrotowy, to $\omega_0 = 0$.

148. ŚRODEK UDERZENIA. Przypuśćmy, że na układ działa tylko jedna siła chwilowa, lub też, że siły chwilowe stanowią układ 1-go rodzaju. Wtedy można tę siłę tak wyznaczyć, żeby oś obrotu nie doznawała żadnej reakcji, żeby zatem $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ były równe zeru. Aby to okazać, obierzmy płaszczyznę, przechodzącą przez oś i środek masy, za płaszczyznę xy , wtedy $\sum m_i z_i = 0$, a z równań (3) art. poprzedzającego otrzymamy następujące warunki dla wyznaczenia siły szukanéj:

$$(1) \quad \begin{cases} X = 0, Y = 0, Z = (\omega - \omega_0) \sum m_i y_i, \\ L = A(\omega - \omega_0), M = -(\omega - \omega_0) \sum m_i x_i y_i, N = -(\omega - \omega_0) \sum m_i x_i z_i. \end{cases}$$

Jeżeli na ciało działa tylko jedna siła, natenczas dwa pierwsze równania okazują, że szukana siła jest prostopadła do płaszczyzny, przechodzącej przez oś i środek masy. Oznaczmy przez m masę ciała, przez η odległość jego środka masy od osi obrotu, a przez η_s odległość tego punktu, w którym szukana siła przecina płaszczyznę xy , od téjże osi. Wtedy z trzeciego równania (1) otrzymamy wielkość siły, $Z = m\eta(\omega - \omega_0)$. A ponieważ $L = Z\eta_s$, przeto będzie z czwartego równania

$$(2) \quad \eta_s = \frac{A}{m\eta} = \frac{k^2}{\eta},$$

gdzie k oznacza ramię bezwładności względem osi obrotu. Ponieważ siła Z jest równoległa do osi z , przeto jest $N = 0$, a zatem $\sum m_i x_i z_i = 0$, inaczej z warunków (1) nie wypadłoby $XL + YM + ZN = 0$, jak być powinno. Warunek $\sum m_i x_i z_i = 0$ zachodzi wtedy, kiedy oś obrotu jest osią bezwładności w punkcie O , a wtedy otrzymamy także $M = 0$. (Ob. zadanie 22. w rozdz. IX). Widzimy więc, że oś obrotu jest osią bezwładności układu przynajmniej w jednym swoim punkcie. Gdy to ma miejsce, poprowadźmy w tym punkcie płaszczyznę, jedną prostopadłą do osi, a drugą przez oś i środek masy; uderzając wtedy w to ciało z dowolną siłą, której kierunek przypada w pierwszej płaszczyźnie, jest prostopadły do drugiej płaszczyzny, i przecina ją w odległości η_s od osi, nie wywołamy na oś żadnej reakcji. W przypadku, gdy na ciało wywartych jest jednocześnie więcej uderzeń chwilowych, stosując się warunki właśnie co okazane dla uderzenia wypadkowego.

Punkt, w którym promień działania siły chwilowej przecina płaszczyznę, przechodzącą przez oś obrotu i środek masy układu, w przypadku, kiedy oś nie doznaje żadnej reakcji, nazywamy środkiem uderzenia ciała. Równanie (2) wyznacza odległość tego środka od osi obrotu i okazuje zarazem, że ten środek znajduje się po téj samej stronie osi, co środek masy.

149. OSI SWOBODNE OBROTU. Obliczywszy według (3) art. 147-go reakcje, których oś doznaje w chwili przyłożenia sił popędowych, należy według tego art. obliczać reakcje na oś, pojawiające się podczas dalszego obrotu wskutek działania sił ciągłych, tudzież sił stycznych i odśrodkowych. Załóżmy, że podczas obrotu żadne siły ciągle nie działają, wtedy $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, a ponieważ $\frac{d\omega}{dt} = 0$, przeto niema sił stycznych. Załóżmy nadto, że ciało obraca się około jednej z osi głównych, wtedy siły odśrodkowe będą się znosiły. Z równań (1) art. 147-go zatem wynika, że oś nie będzie doznawała żadnej reakcji podczas obrotu, że przeto ciało obracać się będzie jednostajnie około téj osi tak, jakgdyby ta oś nie była wcale ustalona. Z powodu téj ważnej własności nazywamy osi główne ciała masyjnego osiami swobodnymi, albo także osiami trwałymi obrotu tego ciała. W pierwszej chwili działania sił chwilowych doznaje oś swobodna pewnej reakcji; jeżeli zaś ciało samemu sobie zostawimy, nie przykładając do niego żadnych sił podczas obrotu, to dalsze ustalenie osi jest zbędne, a ciało obraca się swobodnie i jednostajnie około takiej osi.

Niech oś obrotu będzie osią bezwładności w punkcie O, i uczynimy znowu powyższe założenie, że podczas ruchu nie ma żadnych sił. Wtedy z trzech ostatnich równań (1) art. 147-go wynika, że sumy momentów reakcyj są równe zeru dla każdej osi współrzędnych, że przeto reakcje redukują się do jednej siły, przyłożonej do punktu O i prostopadłej do osi obrotu. Wielkość i kierunek tej siły wynikają z drugiego i trzeciego równania (1) art. 147-go. W tym więc przypadku wystarczy ustalić tylko punkt O, aby znieść reakcję na oś, a zresztą oś może być swobodna; ciało nie przestanie obracać się około tej osi tak, jakgdyby ona w dwu punktach była utwierdzona. Z powodu tej własności nazywamy oś bezwładności ciała w pewnym punkcie osią swobodnego albo także trwałego obrotu względem punktu tego. Oś swobodna ciała jest osią trwałego obrotu względem każdego z jej punktów.

Niech osią obrotu będzie jakakolwiek prosta, przechodząca przez punkt O, i niech na ciało żadne siły nie działają podczas ruchu. Jeżeli oś obrotu obierzemy za oś x , a ω oznacza stałą prędkość kątową, to składowe ilości ruchu punktu m_i , (x_i, y_i, z_i) , będą: 0, $-\omega m_i z_i$, $\omega m_i y_i$, a składowe siły odśrodkowej będą: 0, $\omega m_i y_i$, $\omega m_i z_i$. Zredukujmy ilości ruchu do punktu O; otrzymamy parę sił o momencie G , którego rzuty G_x, G_y, G_z na osi współrzędnych będą odpowiednio

$$(3) \quad G_x = \omega A, \quad G_y = -\omega F, \quad G_z = -\omega E,$$

gdzie E i F mają znaczenie, podane w art. 99-ym. Odcinając G_x, G_y i G_z odpowiednio na osiach współrzędnych i dokonywając składu tych odcinków, otrzymamy moment ilości ruchu względem punktu O. Wystawmy elipsoidę bezwładności ciała w punkcie O, której równanie jest

$$(4) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1;$$

$Ax - Fy - Ez = 0$ będzie równaniem płaszczyzny, sprzężonej z osią obrotu (osią x) względem tej elipsoidy. Ponieważ według (3) $G_x : G_y : G_z = A : -F : -E$, przeto otrzymujemy twierdzenie, stosujące się do każdego punktu O na osi obrotu: *płaszczyzna pary wypadkowej ilości ruchu jest sprzężona z osią obrotu względem elipsoidy bezwładności*. Moment tej pary jest prostopadły do tej płaszczyzny sprzężonej. Jeżeli moment G tworzy z osią obrotu kąt i , to:

$$(5) \quad G = \omega \sqrt{A^2 + F^2 + E^2}, \quad \cos i = \frac{A}{\sqrt{A^2 + F^2 + E^2}}, \quad G = \frac{G_x}{\cos i} = \frac{\omega A}{\cos i}.$$

Zredukujmy podobnie siły odśrodkowe do punktu O. Oznaczmy przez Γ moment otrzymanej pary sił, a przez $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ jego rzuty na osi współrzędnych; wtedy

$$(6) \quad \Gamma_x = 0, \quad \Gamma_y = -\omega^2 E, \quad \Gamma_z = \omega^2 F, \quad \Gamma = \omega^2 \sqrt{E^2 + F^2}.$$

Ponieważ $\Gamma_x = 0$, przeto Γ jest prostopadły do osi obrotu; że zaś $\Gamma_x G_x + \Gamma_y G_y + \Gamma_z G_z = 0$, przeto mamy twierdzenie: *moment pary wypadkowej sił odśrodkowych jest prostopadły do osi obrotu i do momentu wypadkowego pary ilości ruchu*. Z tego twierdzenia wynika, że *płaszczyzna pary wy-*

padkowej sił odśrodkowych przechodzi przez oś obrotu i przez moment pary wypadkowej ilości ruchu.

150. KRĘCENIE SIĘ CIAŁA SZTYWNEGO OKOŁO PUNKTU. Ciało sztywne, kręcące się około punktu, ma swobodę rzędu 3-go (art. 48), a dla określenia jego ruchu należy wyznaczyć rzuty prostokątne prędkości kątowej obrotu ciała około osi chwilowej, przechodzącej przez środek kręcenia się. Poprowadźmy przez środek kręcenia się O trzy osi bezwładności ciała, obierając je za osi współrzędnych; podobnie, jak w art. 49-ym, oznaczmy odpowiednio przez p, q, r rzuty prędkości kątowej ω obrotu chwilowego na te osi, dalej przez L, M, N momenty sił przyłożonych, na koniec przez A, B, C momenty bezwładności ciała względem tychże osi. Wielkości p, q, r przedstawiają współrzędne ruchu ciała; ponieważ one odnoszą się do układu współrzędnych, poruszającego się razem z ciałem, przeto otrzymamy odpowiednie równania ruchu, stosując wiadome zasady ruchu względnego.

Ponieważ osi bezwładności poruszają się razem z ciałem, przeto prędkość względna każdego punktu ciała jest równa zeru; otrzymamy zatem równania ruchu, przyjmując w każdym punkcie oprócz siły przyłożonej jeszcze siłę odśrodkową, odpowiednią obrotowi chwilowemu. Jeżeli a, b, c oznaczają dostawy kierunkowe osi chwilowej, to siła odśrodkowa punktu $m_i (x_i, y_i, z_i)$, którego odległość od osi chwilowej jest równa ρ_i , wynosi $\omega^2 m_i \rho_i$, a dostawy kierunkowe tej siły są odpowiednio: $[x_i - a(ax_i + by_i + cz_i)] : \rho_i, [y_i - b(ax_i + by_i + cz_i)] : \rho_i, [z_i - c(ax_i + by_i + cz_i)] : \rho_i$; momenty zatem tej siły są odpowiednio: $\omega^2 m_i (ax_i + by_i + cz_i)(bz_i - cy_i), \omega^2 m_i (ax_i + by_i + cz_i)(cx_i - az_i), \omega^2 m_i (ax_i + by_i + cz_i)(ay_i - bx_i)$. Wstawmy w te wyrażenia $a = p : \omega, b = q : \omega, c = r : \omega$ i weźmy sumę wyrażen, odpowiadających różnym wartościom wskaźnika i ; wtedy otrzymamy sumy $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ momentów sił odśrodkowych względem osi bezwładności,

$$(1) \quad \Gamma_x = qr(B - C), \Gamma_y = rp(C - A), \Gamma_z = pq(A - B).$$

Ponieważ ciało obraca się około osi bezwładności, jakgdyby ta oś była ustalona (art. 149), przeto według art. 146-go otrzymamy następujące wyrażenia odpowiednich przyspieszeń kątowych:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{L + \Gamma_x}{A}, \frac{dq}{dt} = \frac{M + \Gamma_y}{B}, \frac{dr}{dt} = \frac{N + \Gamma_z}{C},$$

a stąd, po wstawieniu wyrażen,

$$(2) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr = L, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp = M, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq = N, \end{cases}$$

jako szukane równania ruchu. Te równania nazywamy równaniami Eulera. One pozwalają wyznaczyć w każdej chwili położenie, tudzież oś i prędkość.

kość kątową obrotu ciała, jeżeli z nimi połączymy równania (3) art. 49-go, określające położenie osi bezwładności względem trzech nieruchomych osi współrzędnych, za pomocą trzech kątów φ , ψ i θ . Wstawiwszy bowiem wartości p , q , r z równań (3) art. 49-go w powyższe równania (2), otrzymamy trzy równania różniczkowe rzędu 2-go między φ , ψ , θ i t , z których możemy te trzy kąty obliczyć jako funkcje czasu, sił przyłożonych i parametrów A , B , C , a wskutek tego poznajemy położenie ciała; wstawiwszy następnie wartości tych kątów w równania (2), otrzymujemy prędkości p , q i r , a stąd prędkość kątową i oś obrotu chwilowego.

Równania (2) określają ruch ciała przy działaniu sił ciągłych. Jeżeli do ciała przykładamy siły popędowe, wówczas równania odpowiednie, określające jego ruch w pierwszej chwili po przyłożeniu tych sił, otrzymamy w sposób następujący. Według równań (3) art. 142-go pochodna momentu ilości ruchu ciała względem prostej dowolnej, poprowadzonej przez środek kręcenia się, jest równa momentowi układu sił popędowych względem téjże prostej. Obierzmy znowu osi bezwładności, odpowiednie środkowi kręcenia się, za osi współrzędnych; natenczas rzuty x'_i , y'_i , z'_i prędkości punktu (x_i, y_i, z_i) na te osi będą, według art. 43-go,

$$(3) \quad x'_i = qz_i - ry_i, \quad y'_i = rx_i - pz_i, \quad z'_i = py_i - qx_i,$$

a stąd

$$(4) \quad \sum m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) = Ap, \quad \sum m_i (z_i x'_i - x_i z'_i) = Bq, \quad \sum m_i (x_i y'_i - y_i x'_i) = Cr.$$

Z tych równań okazuje się, że iloczyny Ap , Bq i Cr przedstawiają odpowiednio momenty ilości ruchu ciała względem osi bezwładności. Jeżeli zatem do ciała, obracającego się z prędkościami p_0 , q_0 i r_0 około odpowiednich osi bezwładności, przyłożymy siły popędowe, których momenty względem tychże osi są odpowiednio L , M i N , natenczas otrzymamy następujące równania ruchu:

$$(5) \quad A(p - p_0) = L, \quad B(q - q_0) = M, \quad C(r - r_0) = N,$$

z których można wyznaczyć składowe p , q , r prędkości kątowej obrotu w pierwszej chwili po przyłożeniu sił popędowych. Gdyby ciało było poprzednio w spoczynku, wtedyby $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, $r_0 = 0$.

151. Załóżmy, że do ciała, będącego w spoczynku, przykładamy siły popędowe, i że podczas ruchu żadne siły nie działają na to ciało; natenczas podane równania pozwolą dokładnie zbadać przebieg ruchu.

Z równań (5) art. 150-go otrzymamy

$$(1) \quad p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C}.$$

jako składowe prędkości kątowej ω obrotu w pierwszej chwili po przyłożeniu sił. Odetnijmy te prędkości na odpowiednich osiach bezwładności i dokonajmy ich składu; otrzymamy oś chwilową, tudzież prędkość kątową

$$(2) \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\frac{L^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{N^2}{C^2}}.$$

Odetnijmy podobnie na osiach bezwładności momenty L , M i N sił popędowych, natenczas wypadkowa G tych odcinków, mianowicie

$$(3) \quad G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

przedstawiać będzie moment układu sił popędowych względem środka kręcenia się. Gdybyśmy siły popędowe zredukowali do tego punktu, otrzymalibyśmy pewną siłę i pewną parę sił; ponieważ zaś owa siła zostaje zniesiona przez ustalenie tego punktu, przeto para sił o momencie G , którą nazywamy parą popędową, sprawia wyłącznie kręcenie się ciała. Równanie płaszczyzny tej pary, przechodzącej przez punkt stały O , jest $Lx + My + Nz = 0$. Wykreślmy elipsoidę bezwładności ciała, odpowiednią punktowi O ; jej równanie jest, według art. 100-go, $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$. Poprowadźmy płaszczyznę styczną do tej elipsoidy, równoległą do płaszczyzny pary popędowej, i oznaczmy przez x_1, y_1, z_1 współrzędne odpowiedniego punktu styczności; natenczas $Axx_1 + Byy_1 + Czz_1 = 1$ będzie równaniem tej płaszczyzny stycznej; otrzymamy zatem

$$(4) \quad x_1 : y_1 : z_1 = \frac{L}{A} : \frac{M}{B} : \frac{N}{C} = p : q : r,$$

z czego wynika twierdzenie następujące: *osią obrotu ciała, wywołanego przez parę popędową, jest średnica sprzężona z płaszczyzną tej pary względem odpowiedniej elipsoidy bezwładności* (tw. Poinso). Z tego ważnego twierdzenia okazuje się, że ciało nie obraca się, mówiąc wogólności, około tej prostej, na której przedstawiamy geometrycznie moment G pary popędowej, chyba, że płaszczyzną pary popędowej jest jedna z płaszczyzn głównych elipsoidy, bezwładności. Jeżeli elipsoida bezwładności przybiera kształt kuli, wtedy każda para popędowa wprawia ciało w ruch obrotowy około prostej prostopadłej do tej płaszczyzny.

Oznaczmy przez T energiją kinetyczną, której ciało nabywa wskutek działania sił popędowych; według równań (3) art. 150-go otrzymamy

$$(5) \quad 2T = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}.$$

Przypuśćmy, że ciało nie kręci się swobodnie, t. j. pod wyłącznym wpływem sił popędowych, lecz ma obracać się około pewnej osi danej, przechodzącej przez punkt O , a której wiadome dostawy kierunkowe są a_1, b_1, c_1 , i że para popędowa udziela ciału wskutek tego obrotu energii T_1 . Jeżeli G_1 oznacza moment sił popędowych, I_1 moment bezwładności ciała względem tej osi, wówczas

$$G_1 = La_1 + Mb_1 + Nc_1, \quad I_1 = Aa_1^2 + Bb_1^2 + Cc_1^2;$$

prędkość więc kątowna obrotu około tej osi będzie

$$\omega_1 = \frac{G_1}{I_1} = \frac{La_1 + Mb_1 + Nc_1}{Aa_1^2 + Bb_1^2 + Cc_1^2}, \text{ a stąd}$$

$$2T_1 = I_1 \omega_1^2 = \frac{(La_1 + Mb_1 + Nc_1)^2}{Aa_1^2 + Bb_1^2 + Cc_1^2}, \text{ skąd}$$

$$(6) \quad 2(T - T_1) = \frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} - \frac{(La_1 + Mb_1 + Nc_1)^2}{Aa_1^2 + Bb_1^2 + Cc_1^2}.$$

Oznaczmy przez x'_i, y'_i, z'_i składowe prędkości punktu (x_i, y_i, z_i) przy obrocie swobodnym około osi chwilowej, a przez $\bar{x}'_i, \bar{y}'_i, \bar{z}'_i$ składowe jego prędkości przy obrocie nieswobodnym około prostej (a_1, b_1, c_1) , natenczas otrzymamy łatwo

$$x'_i - \bar{x}'_i = \frac{M}{B} z_i - \frac{N}{C} y_i + \frac{La_1 + Mb_1 + Nc_1}{Aa_1^2 + Bb_1^2 + Cc_1^2} (c_1 y_i - b_1 z_i),$$

i podobne wyrażenia dla $y_i - \bar{y}'_i$ i $z_i - \bar{z}'_i$; a stąd

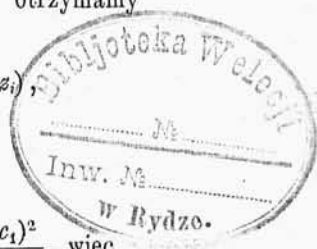
$$(7) \quad 2T_s = \sum m_i [(x'_i - \bar{x}'_i)^2 + (y'_i - \bar{y}'_i)^2 + (z'_i - \bar{z}'_i)^2] = \\ = \frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} - \frac{(La_1 + Mb_1 + Nc_1)^2}{Aa_1^2 + Bb_1^2 + Cc_1^2}, \text{ więc}$$

$$(8) \quad T - T_1 = T_s.$$

T_s przedstawia widocznie energiją ciała, odpowiadającą różnicy prędkości jego punktów przy obrocie swobodnym około osi chwilowej i przy obrocie nieswobodnym około osi danej; ponieważ $T_s > 0$, przeto $T > T_1$. Mamy więc twierdzenie następujące: *siły popędowe udzielają kręcącemu się ciału największej energii kinetycznej, jeżeli ciało kręci się swobodnie; każde ograniczenie swobody sprawia stratę energii, równą tej energii, która odpowiada różnicy dwu prędkości, jednej przy kręceniu się swobodnym, drugiej przy kręceniu się nieswobodnym. Oś obrotu ciała po przyłożeniu sił popędowych jest ta prosta, względem której siły udzielają ciału największej energii kinetycznej.*

152. Wyznaczywszy oś, około której ciało obraca się w pierwszej chwili po przyłożeniu sił popędowych, możemy dalszy przebieg ruchu rozpoznać bądź na podstawie zasad ogólnych, bądź z równań Euler'a. Wiemy (art. 48), że w ciele znajduje się w każdej chwili pewna prosta, przechodząca przez środek kręcenia się, około której ciało obraca się tak, jakgdyby ta prosta była nieruchoma. Zadanie więc nasze polega na wyznaczeniu owej prostej i odpowiedniej prędkości obrotu w każdej chwili.

W tym celu stosujemy zasadę pól i zasadę energii, które mają miejsce dla obrotu chwilowego, ponieważ oś tego obrotu jest chwilowo nieruchoma. Zredukujmy ilości ruchu wszystkich punktów ciała do środka kręcenia się O; otrzymamy parę sił o pewnym momencie G, który jednocześnie przedstawia moment pary popędowej. Ponieważ na ciało nie działa podczas ruchu żadna siła ciągła, przeto moment G jest stały, a płaszczyzna, prostopadła do G, którą możemy poprowadzić przez punkt dowolny, np. przez punkt O, przedstawia płaszczyznę niezmienną (art. 142). Prosta, poprowadzoną przez środek kręcenia się prostopadłe do płaszczyzny niezmienną, nazywamy osią niezmienną; na niej odcinamy moment G pary popędowej. Według art. 151-go powyższa płaszczyzna jest sprzężona z osią chwilową względem elipsojdy bezwładności dla punktu O; gdybyśmy przeto znali położenie chwilowe owej elip-



sojdy, to wyznaczywszy średnicę sprzężoną z płaszczyzną niezmienną, otrzymamylibyśmy tym samym oś chwilową.

Na ciało nie działają żadne siły, a zatem jego energija jest stała; jeżeli więc I oznacza moment bezwładności ciała względem osi chwilowej, ω prędkość kątową obrotu chwilowego, to $2T = I\omega^2 = \text{stała}$. Niech oś chwilowa tworzy z osią niezmienną kąt i , wówczas według art. 149-go,

$$(1) \quad G = \frac{I\omega}{\cos i} = \frac{I\omega^2}{\omega \cos i} = \frac{2T}{\omega \cos i}, \text{ więc } \omega \cos i = \frac{2T}{G} = H = \text{stała}.$$

Rzut prędkości kątowej obrotu chwilowego na oś niezmienną jest stały.

Oznaczmy przez κ długość połowy średnicy elipsojdy bezwładności, mierzoną na osi chwilowej, wtedy (art. 100) $\kappa^2 = 1 : I$, więc

$$\omega = \frac{G \cos i}{I} = \kappa^2 G \cdot \cos i = \kappa^2 G \cdot \frac{H}{\omega}, \text{ skąd}$$

$$(2) \quad \omega^2 = \kappa^2 G H = 2T \kappa^2, \quad \omega = \kappa \cdot \sqrt{2T}.$$

Prędkość kątowa obrotu chwilowego jest proporcjonalna względem długości tej średnicy elipsojdy bezwładności, która jest osią chwilową.

Gdy x_1, y_1, z_1 oznaczają współrzędne punktu, w którym oś chwilowa przecina elipsojdę bezwładności, to

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}{\omega} = \frac{\kappa}{\omega}, \text{ więc}$$

$$x_1 = \frac{\kappa p}{\omega} = \frac{p}{\sqrt{2T}}; \text{ podobnie } y_1 = \frac{q}{\sqrt{2T}}, \quad z_1 = \frac{r}{\sqrt{2T}};$$

a zatem równanie płaszczyzny stycznej w tym punkcie jest

$$(3) \quad Ax_1x + By_1y + Cz_1z - 1 = 0 \text{ czyli } Ap x + Bq y + Cr z - \sqrt{2T} = 0.$$

Ponieważ Ap, Bq, Cr są odpowiednio proporcjonalne względem dostaw kątów, które oś niezmienna tworzy z osiami bezwładności (art. 150), przeto powyższa płaszczyzna jest prostopadła do osi niezmienną, a jej odległość h od środka kręcenia się jest stała i równa $h = \sqrt{2T} : G = H : \sqrt{2T}$. Powiedzieliśmy wyżej, że płaszczyznę niezmienną możemy poprowadzić przez dowolny punkt stały; owóż poprowadźmy płaszczyznę, prostopadłą do osi niezmienną, w odległości h od punktu O , i uważajmy tę płaszczyznę za niezmienną. Wtedy równanie (3) wyraża, że *elipsojda bezwładności dotyka się nieustannie płaszczyzny niezmienną*, a z art. 151-go wynika, że średnica elipsojdy, łącząca punkt styczności z punktem O , jest osią chwilową obrotu.

Otrzymujemy zatem następujący obraz ruchu ciała, kręcącego się około punktu stałego pod wpływem sił popędowych: *elipsojda bezwładności ciała, odpowiednia punktowi stałemu, kręci się około tego punktu, dotykając się nieustannie płaszczyzny niezmienną, czyli tocząc się po tej płaszczyźnie; średnica, przechodząca przez punkt styczności, jest osią chwilową obrotu, a długość tej*

średnicy jest proporcjonalna względem prędkości kątowej tego obrotu (twierdzenie Poinsot).

Podane rezultaty wynikają także z równań Euler'a. Ponieważ podczas ruchu $L=0$, $M=0$, $N=0$, przeto równania Euler'a będą

$$(4) \quad A \frac{dp}{dt} = (B-C)qr, \quad B \frac{dq}{dt} = (C-A)rp, \quad C \frac{dr}{dt} = (A-B)pq.$$

Pomnóżmy obie strony tych równań odpowiednio raz przez p , q , r , a drugim razem przez Ap , Bq , Cr i za każdym razem dodajmy je do siebie; natenczas

$$(5) \quad Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0; \quad A^2p \frac{dp}{dt} + B^2q \frac{dq}{dt} + C^2r \frac{dr}{dt} = 0;$$

co całkując, mieć będziemy

$$(6) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{stałej}; \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{stałej}.$$

Pierwsze równanie wyraża zasadę zachowania energii, $2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$; ponieważ Ap , Bq , Cr oznaczają odpowiednio rzuty momentu G na poruszające się osi bezwładności, a p , q , r rzuty prędkości ω na też osi, przeto z 1-go równania (6) wynika

$$\frac{2T}{G\omega} = \frac{Ap p + Bq q + Cr r}{G\omega} = \cos i, \text{ a stąd}$$

$$\omega \cos i = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{G} = \text{stałej}.$$

Drugie równanie (6) wyraża, że moment G jest stały, a z połączenia obudwu równań wynika podane wyżej twierdzenie, pozwalające wyznaczyć ω za pomocą elipsoidy bezwładności.

Redukując w każdej chwili siły odśrodkowe do punktu O , otrzymamy parę sił, której moment Γ jest prostopadły do momentu G i do osi chwilowej (art. 149). Siły odśrodkowe wywołują obrót około pewnej osi, przechodzącej przez O , którą łatwo wyznaczymy. Ponieważ qr ($B-C$), rp ($C-A$), pq ($A-B$) są odpowiednio rzutami momentu Γ na osi bezwładności, przeto ilorazy qr ($B-C$): A , rp ($C-A$): B , pq ($A-B$): C przedstawiają odpowiednio rzuty prędkości kątowej obrotu, wywołanego przez siły odśrodkowe, na osi bezwładności. Porównywając te ilorazy z równaniami (4), widzimy, że pochodne $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ przedstawiają właśnie rzuty powyższe, że zatem

$$\cos(\Gamma, x) : \cos(\Gamma, y) : \cos(\Gamma, z) = \frac{dp}{dt} : \frac{dq}{dt} : \frac{dr}{dt},$$

a więc według (5) $\cos(\Gamma, G) = 0$. *Oś obrotu, wywołanego przez siły odśrodkowe, jest prostopadła do momentu pary popędowej, a więc równoległa do płaszczyzny niezmiennej.*

Równania Euler'a wyrażają, że siły odśrodkowe sprawiają ciągłą zmianę położenia osi chwilowej, i że obrót ciała przy końcu elementu czasu dt jest

obrotem wypadkowym obrotu na początku tego elementu czasu i nieskończenie małego obrotu, który siły odśrodkowe wywołują. Ponieważ oś tego ostatniego obrotu jest prostopadła do G , przeto rzut prędkości ω na kierunek tego momentu jest stały. Jeżeli ciało ma się ciągle obracać około tej samej osi, to $\Gamma = 0$, a zatem, gdy A , B i C są nierówne, dwie prędkości z pomiędzy trzech p , q i r są równe zeru, więc ową oś obrotu jest jedna z osi bezwładności.

153. POŁODYJA I HERPOŁODYJA. Elipsojda bezwładności, kręcąc się około środka, jest styczna do płaszczyzny niezmiennej w coraz innym punkcie swjej powierzchni, a więc i w coraz innym punkcie owej płaszczyzny. Punkt s , w którym owa elipsojda jest styczna do płaszczyzny niezmiennej, nazywamy biegunem chwilowym obrotu; owóż należy rozważyć dwie linie krzywe, z których pierwsza jest miejscem geometrycznym tego bieguna na elipsojdzie, druga zaś jego miejscem geometrycznym na płaszczyźnie niezmiennej. Według Poinso't nazywamy pierwszą krzywą polodyją, drugą zaś herpolodyją ruchu rozważanego. Oznaczmy pierwszą przez (s) , drugą przez (σ) . Polodyja jest linią skośną, herpolodyja płaską i mają spólny punkt s . Stożek o wierzchołku O a kierownicy (σ) , przedstawia stożek centralny w przestrzeni, a stożek o tymże wierzchołku a kierownicy (s) , jest stożkiem centralnym w kręcącym się ciele (art. 48).

Przyjmijmy $A = 1 : a^2$, $B = 1 : b^2$, $C = 1 : c^2$; wtedy a , b , c oznaczają połowy osi głównych elipsojdy bezwładności; więc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ jest równaniem tej elipsojdy. Aby otrzymać równania polodyi, prowadźmy do tej elipsojdy płaszczyzny styczne w stałej odległości h od środka i szukajmy miejsca geometrycznego punktu styczności (x_1, y_1, z_1) na elipsojdzie. Ponieważ $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$ jest równaniem płaszczyzny stycznej, przeto polodyja jest określona przez następujące dwa równania

$$(1) \quad h^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4} \right) = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

Rugując stąd kolejno x_1^2 , y_1^2 i z_1^2 otrzymamy równania rzutów polodyi na płaszczyzny główne elipsojdy

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{a^2 - b^2}{b^4} y_1^2 + \frac{a^2 - c^2}{c^4} z_1^2 = \frac{a^2 - h^2}{h^2}, \\ \frac{b^2 - c^2}{c^4} z_1^2 + \frac{b^2 - a^2}{a^4} x_1^2 = \frac{b^2 - h^2}{h^2}, \\ \frac{c^2 - a^2}{a^4} x_1^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^4} y_1^2 = \frac{c^2 - h^2}{h^2}. \end{cases}$$

Niech $A > B > C$; wtedy $a < b < c$, oś x będzie przeto najkrótszą, oś z najdłuższą osią elipsojdy. Żeby płaszczyzna była styczna do elipsojdy, potrzeba, aby $a < h < c$. Przy badaniu kształtu polodyi należy rozróżnić 3 przypadki, według tego, czy $h > b$, $h = b$, $h < b$.