

jeżeli ϵ dąży do zera. Mamy zatem $\frac{dV}{dn} = \frac{dV_2}{dn}$; a ponieważ $\frac{dV_2}{dn}$ dąży do granicy skończonej, przeto pochodna potencjału V , wzięta względem dowolnego przesunięcia punktu μ , dąży także do granicy skończonej. Nadajmy przesunięciu punktu μ wartość ϵ , wtedy $\frac{dV}{\epsilon} = \frac{dV_2}{\epsilon}$, a ponieważ $k\mu \cdot \frac{dV_2}{\epsilon}$ jest rzutem przyciągania ciała o potencjale V_2 na punkt zewnętrzny, przeto widzimy, że pochodna potencjału wyraża przyciąganie bez względu na to, czy punkt przyciągany znajduje się zewnątrz, czy wewnątrz ciała.

Wyniki powyższego dochodzenia możemy streścić w twierdzeniu następującym: *jeżeli gęstość ciała jest funkcją ciągłą współrzędnych, natenczas potencjał i pierwsze pochodne jego względem współrzędnych punktu przyciąganego są funkcjami ciągłymi tych współrzędnych, bez względu na położenie tego punktu. Pochodne potencjału są proporcjonalne względem przyciągania punktu.*

Jeżeli potencjał przybiera w punkcie μ wartość C , to $V - C = 0$ jest równaniem powierzchni potencjalnej, t. j. miejsca tych punktów, względem których potencjał ciała posiada stałą wartość C (art. 83). Dwie powierzchnie potencjalne nie przecinają się, potencjał bowiem posiada w każdym punkcie w przestrzeni tylko jedną, dokładnie oznaczoną wartość. Przyciąganie punktu jest normalne do powierzchni potencjalnej, przez tenże punkt przechodzącej.

126. TWIERDZENIA LAPLACE'A I POISSON'A. Załóżmy dla uproszczenia rachunku $k=1$, $\mu=1$, to $U=V$ i otrzymamy w każdym punkcie

$$(1) \quad X = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}.$$

Niech punkt μ znajduje się zewnątrz ciała przyciągającego; wtedy odległość $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ będzie miała zawsze skończone wartości. Aby obliczyć drugie pochodne potencjału, które, według wzorów, wynikających z (1),

$$(2) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},$$

przedstawiają pochodne sił X, Y, Z względem współrzędnych punktu μ , należy w wyrażeniu funkcji V różniczkować dwukrotnie względem ξ, η, ζ pod znakiem całkowania. Tym sposobem otrzymamy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \int \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{r} \right) dm, \quad \text{podobnie} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2};$$

a ponieważ $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x-\xi}{r^3} = \frac{-r^3 + 3r(x-\xi)^2}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}$
i podobnie

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5},$$

przeto

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = 0;$$

ponieważ nadto

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} = \int \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dm,$$

przeto dla punktu (ξ, η, ζ) , znajdującego się w odległości skończonej od każdego punktu przyciągającego, otrzymamy następujące ważne równanie:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = 0.$$

Powyższe równanie wyraża twierdzenie Laplace'a dla punktu, znajdującego się zewnątrz masy ciała przyciągającego.

Jeżeli punkt μ znajduje się wewnątrz masy tego ciała lub nieskończenie blisko jego powierzchni, to dla punktów sąsiednich będzie $r = 0$, a przeto różniczkowanie pod znakiem całki, zawierającej elementy nieskończenie wielkie, nie jest dozwolone. Aby w tym przypadku obliczyć sumę drugich pochodnych potencjału, obierzmy prostokątny układ osi współrzędnych, poprowadźmy przez μ osi równoległe i oznaczmy przez r, ϕ, ϑ współrzędne biegunowe punktu (x, y, z) ciała przyciągającego względem tych ostatnich osi. Wtedy

$$(4) \quad x = \xi + r \cos \phi, \quad y = \eta + r \sin \phi \cos \vartheta, \quad z = \zeta + r \sin \phi \sin \vartheta,$$

a siły X, Y, Z będą wyrażone zapomocą równań (2) art. 123-go, przyczem 0 i 2π będą krańcowymi wartościami kąta ϑ , zaś 0 i π kąta ϕ . Z powodu stałości tych krańców otrzymamy

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \xi} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \phi \sin \phi \cdot d\vartheta \cdot d\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{r_1} \sigma \cdot dr, \\ \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{r_1} \sigma \cdot dr, \\ \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \phi \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^{r_1} \sigma \cdot dr, \end{cases}$$

gdzie r_1 jest promieniem wodzącym powierzchni ciała, wyprowadzonym z punktu μ pod kątami ϕ i ϑ . Ponieważ nie tylko gęstość σ , ale także

wyższy kraniec r_1 każdej całki zależy od ξ , η , ζ , przeto, stosując znany wzór *), otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{r_1} \sigma \cdot dr = \int_0^{r_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \cdot dr + \sigma_1 \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \xi},$$

gdzie $\sigma = \sigma_1$ dla $r = r_1$, a zatem σ_1 jest gęstością na powierzchni ciała. Postępując podobnie z drugim i trzecim wyrazem w (5) i dodając je, otrzymamy

$$(6) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \psi d\vartheta d\psi \left\{ \int_0^{r_1} \left(\cos \psi \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \sin \psi \cos \vartheta \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \sin \psi \sin \vartheta \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \right) dr + \right. \\ \left. + \sigma_1 \left(\cos \psi \frac{\partial r_1}{\partial \xi} + \sin \psi \cos \vartheta \frac{\partial r_1}{\partial \eta} + \sin \psi \sin \vartheta \frac{\partial r_1}{\partial \zeta} \right) \right\} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A \sin \psi d\vartheta d\psi,$$

gdzie dla krótkości oznaczyliśmy przez A sumę wyrazów w nawiasie. Mamy

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}, \text{ a ponieważ } \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1, \text{ przeto } \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \text{ podobnie } \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \text{ i } \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = \frac{\partial \sigma}{\partial z};$$

nadto mamy

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \psi \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \sin \psi \cos \vartheta \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \sin \psi \sin \vartheta \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta}.$$

Wstawiając te wartości w (6), widzimy, że pierwsza część wielomianu A , znajdująca się pod znakiem całkowania, posiada wartość

$$(7) \quad \int_0^{r_1} \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr = \left| \sigma \right|_0^{r_1} = \sigma_1 - \sigma_0,$$

gdzie σ_0 oznacza gęstość ciała w punkcie μ , a zatem dla $r = 0$. Aby obliczyć drugą część sumy A , załóżmy, że

$$F(x, y, z) = F(\xi + r_1 \cos \psi, \eta + r_1 \sin \psi \cos \vartheta, \zeta + r_1 \sin \psi \sin \vartheta) = 0$$

*) T. j. wzór

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_a^b f(x, \xi) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} dx - f(x, a) \frac{\partial a}{\partial \xi} + f(x, b) \frac{\partial b}{\partial \xi}.$$

W naszym przypadku $a = 0$, $b = r_1$, więc $\frac{\partial a}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial b}{\partial \xi} = \frac{\partial r_1}{\partial \xi}$.

jest równaniem powierzchni ciała. Z tego równania wypada

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \xi} = 0, \text{ a zatem}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \xi} = - \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial r_1},$$

gdzie

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r_1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r_1} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r_1} = \cos \psi \frac{\partial F}{\partial x} + \sin \psi \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial y} +$$

$$+ \sin \psi \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{N}.$$

Będzie więc

$$\frac{\partial r_1}{\partial \xi} = -N \frac{\partial F}{\partial x}; \text{ podobnie } \frac{\partial r_1}{\partial \eta} = -N \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial \zeta} = -N \cdot \frac{\partial F}{\partial z};$$

jest zatem

$$(8) \quad \cos \psi \frac{\partial r_1}{\partial \xi} + \sin \psi \cos \vartheta \frac{\partial r_1}{\partial \eta} + \sin \psi \sin \vartheta \frac{\partial r_1}{\partial \zeta} = -N \cdot \frac{1}{N} = -1,$$

co przedstawia wartość drugiej części sumy A. Mamy przeto, według (7),

$$(9) \quad A = \sigma_1 - \sigma_0 - \sigma_1 = -\sigma_0,$$

z czego wynika

$$(10) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = -\sigma_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \psi d\vartheta \cdot d\psi = -4\pi\sigma_0,$$

a ponieważ

$$(11) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},$$

przeto otrzymamy dla punktu (ξ, η, ζ) , znajdującego się wewnątrz masy ciała przyciągającego,

$$(12) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = -4\pi\sigma_0.$$

W tym równaniu oznacza σ_0 wartość funkcji, wyrażającej gęstość ciała, $\sigma = \varphi(x, y, z)$, jeżeli w niej zamiast x, y, z podstawimy współrzędne ξ, η, ζ punktu przyciąganego. Równanie (12) wyraża twierdzenie D. Poisson'a o drugich pochodnych potencjału. Suma $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}$ drugich pochodnych potencjału V względem współrzędnych punktu, dla którego ten potencjał został obliczony, bywa nazywana parametrem różniczkowym rzędu drugiego tego potencjału i bywa oznaczana przez $\Delta_2 V$.

Obadwa twierdzenia, Laplace'a i Poisson'a, mogą być ujęte w jeden wzór ogólny

$$(13) \quad \Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} = -4\pi\varphi(\xi, \eta, \zeta).$$

Jeżeli bowiem punkt (ξ, η, ζ) leży poza obrysem masy ciała przyciągającego, a zatem w przestrzeni próżnej, której gęstość w każdym punkcie jest równa zeru, wówczas $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$, co przedstawia twierdzenie Laplace'a; jeżeli zaś punkt stanowi część ciała przyciągającego, to $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_0$, z czego wynika twierdzenie Poisson'a.

Dowodzenie powyższe polega na przypuszczeniu, że w bezpośrednim otoczeniu punktu μ gęstość σ nie przestaje być funkcją ciągłą, i że jej pochodne nie przybierają wartości nieskończenie wielkich, chociaż ciągłość tej funkcji nie potrzebuje koniecznie zachodzić w innych punktach masy przyciągającej. Jeżeli punkt μ znajduje się w takim miejscu, w którym ciągłość funkcji σ jest przerwana, natenczas $\Delta_2 V$ może przybierać wartości rozmaite, stosownie do przyrostów współrzędnych punktu μ ; w takim przeto miejscu osobliwym równanie (13) przestaje mieć miejsce. Wszystkie punkty na powierzchni ciała przyciągającego należą do takich punktów osobliwych, do których równanie (13) nie może być stosowane, ponieważ przejście z wnętrza ciała przez jego powierzchnię na zewnątrz sprawia przerwę w zmianie gęstości, która z wartości oznaczonej przechodzi do zera. Jeżeli punkt μ znajduje się wewnątrz ciała, nieskończenie blisko jego powierzchni, to $\Delta_2 V = -4\pi\sigma_0$; gdy zaś μ leży zewnątrz ciała, nieskończenie blisko jego powierzchni, to $\Delta_2 V = 0$; a więc na powierzchni samej nie posiada parametr różniczkowy dokładnie oznaczonej wartości.

127. POTENCJAŁ KULI. Rozważymy naprzód warstwę jednorodną nieskończenie cienką, ograniczoną kulami o promieniach ρ i $\rho + d\rho$. Aby wyznaczyć potencjał tej warstwy względem punktu μ , leżącego zewnątrz powierzchni zewnętrznej, użyjemy figury i znakowania art. 125-go. Objętość elementu warstwy wynosi $\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$; mnożąc ją przez gęstość σ i dzieląc przez $r = \sqrt{\delta^2 + \rho^2 - 2\delta\rho \cos \theta}$, gdzie δ oznacza odległość punktu μ od środka kul, otrzymamy potencjał tego elementu. Całkując między odpowiednimi krańcami, otrzymamy stąd potencjał dV tej warstwy

$$\begin{aligned} dV &= \sigma \cdot \rho^2 \cdot d\rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{\delta^2 + \rho^2 - 2\delta\rho \cos \theta}}, \text{ czyli} \\ dV &= 2\pi\sigma\rho^2 \cdot d\rho \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\delta^2 + \rho^2 - 2\delta\rho \cos \theta}}, \text{ czyli także} \\ (1) \quad dV &= \frac{2\pi\sigma\rho d\rho}{\delta} \bigg|_0^\pi \sqrt{\delta^2 + \rho^2 - 2\delta\rho \cos \theta}. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości krańcowe i zważając, że dla punktu zewnętrznego długość $\delta + \rho$ jest największą, a długość $\delta - \rho$ najmniejszą odległością punktu μ od powierzchni zewnętrznej, otrzymamy

$$(2) \quad dV = \frac{2\pi\sigma\rho d\rho}{\delta} [(\delta + \rho) - (\delta - \rho)] = \frac{4\pi\sigma\rho^2 \cdot d\rho}{\delta}.$$

A ponieważ $dM = 4\pi\sigma\rho^2 \cdot d\rho$ jest masą warstwy, przeto

$$(3) \quad dV = \frac{dM}{\delta}.$$

Potencjał kuli jest sumą potencjałów jej warstw. Jeżeli więc M jest masą kuli jednorodnej o promieniu R lub składającej się z warstw jednorodnych i spółśrodkowych, potencjał téj kuli względem punktu zewnętrznego będzie, według (3),

$$(4) \quad V = \frac{M}{\delta},$$

a stąd dla kuli jednorodnej o gęstości σ

$$(5) \quad V = \frac{4}{3} \frac{\pi\sigma R^3}{\delta}.$$

Potencjał kuli jednorodnej lub składającej się z warstw jednorodnych i spółśrodkowych, względem punktu zewnętrznego oblicza się tak, jakgdyby masa téj kuli była skupiona w środku.

Przyjmijmy punkt μ w wydrążeniu uważanej poprzednio warstwy, a zatem $\delta < \rho$, wtedy $\rho + \delta$ i $\rho - \delta$ przedstawiają odpowiednio największą i najmniejszą odległość punktu μ od warstwy, będzie przeto, według (1),

$$(6) \quad dV = \frac{2\pi\sigma\rho \cdot d\rho}{\delta} [(\rho + \delta) - (\rho - \delta)] = 4\pi\sigma \cdot \rho \cdot d\rho,$$

z czego wnosimy, że potencjał jednorodnej warstwy kulistej względem punktu, znajdującego się wewnątrz jej mniejszej powierzchni, ma wartość stałą, albowiem dV jest niezależne od δ . Dla warstwy więc kulistej, której powierzchnia wewnętrzna ma promień R_1 , a zewnętrzna promień R_2 , będzie potencjał względem punktu, leżącego wewnątrz powierzchni o promieniu R_1 ,

$$(7) \quad V = 4\pi\sigma \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot d\rho = 2\pi\sigma(R_2^2 - R_1^2).$$

Potencjał ma przeto wielkość stałą, gdziekolwiek punkt μ oberzemy w wydrążeniu powyższej warstwy.

Jeżeli punkt znajduje się wewnątrz masy warstwy, ograniczonej powierzchniami kulistymi o promieniach R_1 i R_2 , a zatem $R_1 < \delta < R_2$, to możemy przyjąć $V = V_1 + V_2$, gdzie V_1 jest potencjałem warstwy,

ograniczonej kulami o promieniach R_1 i δ , zaś V_2 jest potencjałem warstwy, ograniczonej kulami o promieniach δ i R_2 . Ponieważ, według (5) i (7),

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi \sigma \frac{\delta^3 - R_1^3}{\delta}, \quad V_2 = 2 \pi \sigma (R_2^2 - \delta^2),$$

przeto

$$(8) \quad V = \frac{2}{3} \pi \sigma \frac{3 R_2^2 \delta - 2 R_1^3 - \delta^3}{\delta}.$$

Z tego otrzymamy potencjał kuli jednorodnej o promieniu R względem punktu wewnętrznego, kładąc $R_1 = 0$, $R_2 = R$,

$$(9) \quad V = \frac{2}{3} \pi \sigma (3 R^2 - \delta^2).$$

Pochodna $\frac{dV}{d\delta}$ daje w każdym przypadku przyciąganie punktu μ w kierunku prostej δ , które wyraża całkowite przyciąganie tego punktu przez kulę lub warstwę kulistą. Oznaczywszy przyciąganie przez P , mamy z (5), biorąc $k=1$, $\mu=1$,

$$(10) \quad P = \frac{dV}{d\delta} = -\frac{4}{3} \pi \sigma \frac{R^3}{\delta^2} = -\frac{M}{\delta^2};$$

w przypadku punktu, leżącego wewnątrz wydrążenia warstwy kulistej, mamy, według (7),

$$(11) \quad P = \frac{dV}{d\delta} = 0;$$

dla punktu, leżącego wewnątrz masy warstwy będzie, według (9),

$$(12) \quad P = \frac{dV}{d\delta} = -\frac{4}{3} \pi \sigma \cdot \frac{\delta^3 - R_1^3}{\delta^2},$$

a na koniec dla kuli pełnej

$$(13) \quad P = \frac{dV}{d\delta} = -\frac{4}{3} \pi \sigma \cdot \delta.$$

Równania od (10) do (13) wyrażają twierdzenia Newton'a o przyciąganiu kuli, dowiedzione innym sposobem w art. 123-im.

128. PRZYCIĄGANIE ELIPSOJDY. Do najważniejszych i najciekawszych zagadnień tego rozdziału należy rzecz o przyciąganiu punktu przez elipsoidę jednorodną lub składającą się z warstw jednorodnych. Wiadomo z pomiarów geodezyjnych, że ziemia może być uważana z wielkim przybliżeniem za elipsoidę obrotową spłaszczoną (sferoidę); a ponieważ każdy element masy ziemi przyciąga punkt materyjalny według prawa Newton'a, przeto zagadnienia o sile ciężkości na ziemi polegają przedewszystkiem na prawach przyciągania elipsoidy. Rozwiążemy to zagadnienie naprzód dla elipsoidy trójosiowej, a następnie dla obrotowej.

Jeżeli $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ jest równaniem elipsoidy, to równanie powierzchni spółogniskowej jest, jak wiadomo *),

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1.$$

Niech a_1, b_1, c_1 oznaczają połowy osi głównych téj powierzchni; wtedy równania

$$(2) \quad a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2 - c^2 = u,$$

określające dwie powierzchnie spółogniskowe, wyrażają, że ich przekroje główne mają wspólne ogniska. Przez punkt dany można poprowadzić trzy powierzchnie spółogniskowe stopnia 2-go, z których jedna jest elipsoidą, druga hiperboloidą jednopowłokową, trzecia zaś hiperboloidą dwupowłokową. Pierwiastki równania stopnia 3-go (1) wyznaczają osi główne tych trzech powierzchni, gdy zamiast x, y, z podstawimy współrzędne punktu danego. Dwie elipsoidy spółogniskowe nie mogą się wzajemnie przecinać. Jeżeli trzy powierzchnie spółogniskowe przechodzą przez ten sam punkt, wtedy normalne do tych powierzchni w tym punkcie są wzajemnie prostopadłe. Osi główne stożka, stycznego do powierzchni stopnia drugiego, są normalne do trzech powierzchni, z daną powierzchnią spółogniskowych i przechodzących przez wierzchołek stożka. Jeżeli $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 1$ przedstawiają dwie elipsoidy spółogniskowe, to dwa punkty $m, (x, y, z)$, i $\mu, (\xi, \eta, \zeta)$, z których m znajduje się na pierwszej, μ zaś na drugiej elipsoidzie, posiadające tę własność, iż stosunek ich współrzędnych równoległych jest równy stosunkowi do nich równoległych osi tych powierzchni, t. j., iż $\frac{x}{\xi} = \frac{a}{\alpha}$, $\frac{y}{\eta} = \frac{b}{\beta}$, $\frac{z}{\zeta} = \frac{c}{\gamma}$, nazywamy punktami odpowiednimi. Jeżeli m i μ , tudzież n i ν oznaczają dwie pary punktów odpowiednich, to $m\nu = n\mu$.

Dwie elipsoidy, podobne i podobnie leżące, nazywają się elipsoidami homotetycznymi. Jeżeli a, b, c są osiami pewnej elipsoidy, zaś $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ odpowiednimi osiami spółśrodkowej elipsoidy homotetycznej, to równania tych powierzchni są $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = \lambda^2$, gdzie λ jest wiadomym stosunkiem osi. —

Podajemy naprzód twierdzenie Newton'a, przez Laplace'a uogólnione: *nieskończenie cienka warstwa jednorodna, ograniczona powierzchniami dwu elipsoid homotetycznych, nie przyciąga punktu, znajdującego się wewnątrz ićj powierzchni mniejszćj.* Tego twierdzenia dowodzi się podobnie, jak twierdzenia dla warstwy kulistćj w art. 123-im. Stosując to twierdzenie do warstwy

*) Zobacz *Geometrięj analityczną* W. Zajączkowskiego, str. od 432 do 440.

o grubości skończonej, ograniczonej dwiema elipsoidami homotetycznymi, a następnie do elipsoidy pełnej, otrzymamy twierdzenie: *przyciąganie punktu wewnątrz elipsoidy jednorodnej jest równe przyciąganiu, jakie na punkt wywiera ta część elipsoidy, którą ogranicza powierzchnia homotetyczna, przechodząca przez punkt dany*. Podane twierdzenie sprowadza przyciąganie punktu, znajdującego się wewnątrz elipsoidy, do przyciągania punktu, leżącego na powierzchni elipsoidy homotetycznej. Okażemy, że do podobnego zadania można także sprowadzić przyciąganie punktu, znajdującego się zewnątrz elipsoidy.

129. Niech W (fig. 54) oznacza jednorodną warstwę nieskończenie cienką o gęstości σ , ograniczoną zewnątrz elipsoidą E o osiach a, b, c ,

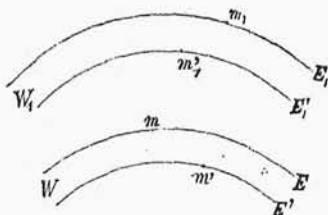


Fig. 54.

wewnątrz zaś elipsoidą homotetyczną E' o osiach $a' = a(1 - \varepsilon)$, $b' = b(1 - \varepsilon)$, $c' = c(1 - \varepsilon)$, gdzie ε jest nieskończenie małe. Przez punkt $m_1, (x_1, y_1, z_1)$, zewnątrz E obrany, poprowadźmy elipsoidę E_1 o osiach a_1, b_1, c_1 , spółogniskową z E , dla której zatem $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, $b_1^2 - c_1^2 = b^2 - c^2$, $c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2$, i niech punkt $m, (x, y, z)$ na E będzie punktem odpowiednim, więc $x_1 : x = a_1 : a$, $y_1 : y = b_1 : b$, $z_1 : z = c_1 : c$. Na E' obierzmy punkt dowolny $m', (x', y', z')$, i wyznaczmy taki punkt $m'_1, (x'_1, y'_1, z'_1)$, żeby

$$x'_1 : x' = a_1(1 - \varepsilon) : a(1 - \varepsilon) = a_1 : a, \quad y'_1 : y' = b_1 : b, \quad z'_1 : z' = c_1 : c,$$

to gdy przez punkt m'_1 poprowadzimy elipsoidę E'_1 , spółogniskową z E' , której zatem osi będą odpowiednio $a'_1 = a_1(1 - \varepsilon)$, $b'_1 = b_1(1 - \varepsilon)$, $c'_1 = c_1(1 - \varepsilon)$, natenczas elipsoida E'_1 będzie homotetyczną z E_1 . Elipsoidy E_1 i E'_1 utworzą warstwę W_1 . Grubość D_x warstwy W na osi x -ów wynosi $D_x = a - a' = \varepsilon a$, zaś grubość $D_x^{(1)}$ warstwy W_1 będzie $D_x^{(1)} = a_1 - a'_1 = \varepsilon a_1$, a zatem $D_x : D_x^{(1)} = a : a_1$. Podobne związki będą zachodziły między odpowiednimi grubościami w kierunkach osi y i z , z czego wynika, że stosunek grubości obu warstw, mierzonych na osiach głównych, jest równy stosunkowi odpowiednich osi głównych ich powierzchni zewnętrznych. Stosunek podobieństwa elipsoid E_1 i E'_1 , to jest stosunek długości ich odpowiednich osi, równa się stosunkowi podobieństwa elipsoid E i E' .

Obierzmy na E dowolny punkt μ , a μ_1 niech oznacza punkt odpowiedni na E_1 ; szukajmy potencjału V warstwy W względem μ_1 , i potencjału V_1 warstwy W_1 względem μ . Masa elementu warstwy W , którego krawędziem jest

punkt m , wynosi $\sigma dx dy dz$, potencjał więc tego elementu względem μ_1 będzie $dV = \frac{\sigma \cdot dx dy dz}{m \mu_1}$. Gdy oznaczymy przez σ_1 gęstość warstwy W_1 , to $\sigma_1 dx_1 dy_1 dz_1$ będzie masą elementu tej warstwy, którego krańcem jest punkt m_1 ; otrzymamy zatem $dV_1 = \frac{\sigma_1 dx_1 dy_1 dz_1}{m_1 \mu_1}$. Z tego wynika

$$\frac{dV}{dV_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{dx dy dz}{dx_1 dy_1 dz_1} \cdot \frac{m_1 \mu_1}{m \mu_1},$$

a ponieważ $dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{a_1 b_1 c_1}{abc} dx dy dz$, a $m_1 \mu_1 = m \mu_1$, przeto

$$\frac{dV}{dV_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}, \text{ a więc } V_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma} \cdot \frac{a_1 b_1 c_1}{abc} V + C,$$

gdzie C jest stałą. Ponieważ dla $V=0$ także $V_1=0$, przeto $C=0$; otrzymamy więc

$$(1) \quad \frac{V}{V_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}.$$

Potencjały więc obu warstw względem dwu punktów odpowiednich na ich powierzchniach zewnętrznych są wprost proporcjonalne względem mas tychże warstw. Warstwa W znajduje się wewnątrz W_1 , a zatem punkt μ nie doznaje żadnego przyciągania od W_1 , z czego wynika, że pochodne cząstkowe potencjału V_1 względem współrzędnych punktu μ są równe zeru, więc potencjał V_1 ma wartość stałą, gdziekolwiek obierzemy punkt μ na powierzchni E . Z równania (1) przeto okazuje się, że V ma także wartość stałą względem każdego punktu μ_1 , obranego na E_1 , że zatem E_1 jest powierzchnią potencjalną warstwy W . *Powierzchniami potencyjalnymi nieskończenie cienkiej i jednorodnej warstwy elipsoidalnej, ograniczonej dwiema powierzchniami homotetycznymi, są elipsojdy, spółogniskowe z jej powierzchnią zewnętrzną.* Kierunek przyciągania jest normalny do powierzchni potencjalnej, mamy przeto nowe twierdzenie: *nieskończenie cienka warstwa elipsoidalna, ograniczona dwiema powierzchniami homotetycznymi, przyciąga punkt zewnętrzny w kierunku osi stożka, stycznego do jej powierzchni zewnętrznej, którego wierzchołkiem jest punkt przyciągany* (twierdzenie Poisson'a).

Wyobraźmy sobie trzecią warstwę W_2 nieskończenie cienką, leżącą zewnątrz W i W_1 , i ograniczoną powierzchnią E_2 , spółogniskową z E i E_1 , tudzież powierzchnią E'_2 , spółogniskową z E' i E'_1 ; E_2 i E'_2 będą homotetyczne. Stosując powyższe twierdzenie, widzimy, że E_2 jest powierzchnią potencjalną warstw W i W_1 , że zatem obie warstwy przyciągają punkt, zewnątrz tych obu warstw leżący, w tym samym kierunku, a potencjały tychże warstw względem tego punktu są wprost proporcjonalne względem ich mas.

130. Niech będą dane dwie elipsojdy jednorodne, ograniczone powierzchniami spółogniskowymi E i E_1 , i niech będzie dany punkt μ , zewnątrz

nich leżący. Gdy podzielimy każdą elipsoidę na warstwy elipsoidalne, ograniczone dwiema powierzchniami homotetycznymi, i stosować będziemy do tych warstw poprzednie twierdzenia, to otrzymamy następujące twierdzenie główne: *potencjały dwu elipsoid, ograniczonych powierzchniami spółogniskowymi, względem punktu, zewnątrz nich leżącego, są wprost proporcjonalne względem mas tych elipsoid.*

Wracając do warstw W i W_1 , których masy oznaczymy odpowiednio przez dM i dM_1 , a których potencjały względem punktu zewnętrznego niech będą odpowiednio V i V_1 , otrzymamy $V : V_1 = dM : dM_1$. Poprowadziwszy przez μ normalną do powierzchni potencyjalnój, obierzmy na niej punkt dowolny, którego odległość od punktu μ oznaczymy przez n . Przesuńmy μ wzdłuż tej normalnej o długość nieskończenie małą dn aż do punktu μ' ; wówczas stosunek potencjałów tych warstw względem punktu μ' będzie

$$(1) \quad \left(V + \frac{dV}{dn} dn \right) : \left(V_1 + \frac{dV_1}{dn} dn \right) = dM : dM_1,$$

a zatem

$$(2) \quad \frac{dV}{dn} : \frac{dV_1}{dn} = dM : dM_1.$$

Ponieważ pochodne potencjałów wyrażają przyciągania punktu μ , przeto mamy twierdzenie: *dwie nieskończenie cienkie warstwy elipsoidalne, których powierzchnie zewnętrzne i powierzchnie wewnętrzne przedstawiają pary powierzchni spółogniskowych, przyciągają punkt zewnętrzny z siłami, proporcjonalnymi względem ich mas.* Wystawmy w μ układ prostokątny osi spółrzędnych, i niech dX , dY , dZ oznaczają rzuty przyciągania punktu μ przez warstwę W , zaś dX_1 , dY_1 , dZ_1 rzuty przyciągania warstwy W_1 ; wtedy

$$(3) \quad dX : dX_1 = dY : dY_1 = dZ : dZ_1 = dM : dM_1.$$

Rozważajmy znowu dwie elipsoidy jednorodne, ograniczone powierzchniami spółogniskowymi E i E_1 , podzielmy je na warstwy, ograniczone elipsoidami homotetycznymi; składowe przyciągań P i P_1 , punktu zewnętrznego μ elipsoidy, będą według (3)

$$\frac{X}{X_1} = \frac{Y}{Y_1} = \frac{Z}{Z_1} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}} = \frac{M}{M_1},$$

a zatem

$$(4) \quad P : P_1 = M : M_1.$$

Dwie elipsoidy jednorodne, ograniczone powierzchniami spółogniskowymi, przyciągają punkt zewnętrzny w tym samym kierunku z siłami, proporcjonalnymi względem ich mas. W takiej postaci ogólniej podał Laplace to twierdzenie, lecz przedtem tak dla elipsoid obrotowych, jak i dla elipsoid trójosiowych w przypadku, gdy μ znajduje się na osi elipsoidy, okazał je Maclaurin.

Powyższe twierdzenie niezupełnie słusznie nazywają ogólnie twierdzeniem Maclaurin'a, bo dopiero Laplace dał mu powyższą postać ogólną.

To twierdzenie stosuje się do każdego punktu, nie znajdującego się wewnątrz elipsoidy przyciągającej, a więc odnosi się także do przypadku, gdy punkt μ znajduje się na powierzchni elipsoidy. Widzimy zatem, że twierdzenie Laplace'a sprowadza rzecz o przyciąganiu punktu zewnętrznego do kwestyi przyciągania punktu, znajdującego się na powierzchni elipsoidy. Wypada nam teraz bezpośrednio rozwiązać to zagadnienie.

131. Obierzmy punkt μ na zewnętrznej powierzchni warstwy W , i poprowadźmy z tego punktu stożek elementarny, który na kuli o promieniu 1 wycina powierzchnią $d\omega$. Masa elementu tego stożka będzie $\sigma\rho^2 d\omega d\rho$, przyciąganie zatem punktu μ przez ten element, wynosi $\sigma d\omega d\rho$. Niech tworząca ρ stożka przecina wewnętrzną powierzchnią warstwy w punkcie N i Q (fig. 55), a zewnętrzną powierzchnią po raz wtóry w punkcie P ; całkując w kierunku tworzącej ρ , otrzymamy $\sigma d\omega (\mu N + QP) = 2\sigma d\omega \cdot \mu N$ jako wielkość przyciągania punktu μ przez stożek w kierunku tej tworzącej. Gdy poprowadzimy normalną wewnętrzną $\mu\nu$ do elipsoidy, to przyciąganie w kierunku tej normalnej będzie $2\sigma d\omega \cdot \mu N \cdot \cos(\mu N, \mu\nu) = 2\sigma d\omega \cdot \mu S$, gdzie μS jest grubością warstwy W w kierunku normalnej. Całkując to wyrażenie w obrębie półkuli, której środkiem jest punkt μ , otrzymamy

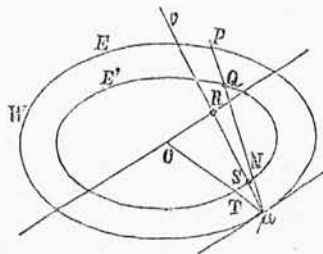


Fig. 55.

(1)

$$dP = 4\pi\sigma \cdot \mu S$$

jako przyciąganie, punktu μ przez warstwę W ; kierunek tego przyciągania jest normalny do E . Okazuje się zatem, że przyciąganie jest proporcjonalne względem grubości warstwy w punkcie rozważanym. Poprowadźmy przez środek O warstwy płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny stycznej w μ ; normalna $\mu\nu$ przecina ową płaszczyznę średnicową w punkcie R , a promień $O\mu$ przecina elipsoidę E' w punkcie T . Z podobieństwa trójkątów $OR\mu$ i $TS\mu$ wynika, że $\mu S : \mu R = \mu T : \mu O$, a jeżeli a, b, c i $a - da, b - db, c - dc$ oznaczają odpowiednio połowy osi głównych elipsoid E i E' , to z powodu homotetyczności mamy

(2)

$$\begin{aligned} \mu T : \mu O &= da : a = db : b = dc : c, \text{ więc} \\ \mu S &= \frac{da}{a} \mu R = \frac{db}{b} \mu R = \frac{dc}{c} \mu R, \end{aligned}$$

gdzie μR oznacza odległość punktu μ od płaszczyzny średnicowej, równoległej do płaszczyzny stycznej w punkcie μ . Niech $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ będzie

równaniem elipsojdy E; wtedy $\frac{\xi x'}{a^2} + \frac{\eta y'}{b^2} + \frac{\zeta z'}{c^2} - 1 = 0$ jest równaniem płaszczyzny stycznej w μ , skąd

$$(3) \quad \mu R = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}} = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \text{gdzie } p = \frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4},$$

a zatem

$$(4) \quad dP = 4\pi\sigma \cdot \frac{da}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} = 4\pi\sigma \cdot \frac{db}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} = 4\pi\sigma \cdot \frac{dc}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej w punkcie μ są odpowiednio $-\frac{\xi}{a^2\sqrt{p}}$, $-\frac{\eta}{b^2\sqrt{p}}$, $-\frac{\zeta}{c^2\sqrt{p}}$; mnożąc przeto (4) przez te dostawy, otrzymamy składowe przyciągania, wzięte w kierunkach osi głównych,

$$(5) \quad dX = -4\pi\sigma \frac{da}{a^3} \frac{\xi}{p}, \quad dY = -4\pi\sigma \frac{db}{b^3} \frac{\eta}{p}, \quad dZ = -4\pi\sigma \frac{dc}{c^3} \frac{\zeta}{p}.$$

Obierzmy teraz punkt μ zewnątrz elipsojdy E, poprowadźmy przezeń elipsojdę E_1 , spółogniskową z E, poprowadźmy wewnątrz E_1 drugą elipsojdę E'_1 , nieskończenie bliską i spółogniskową z E' , to E_1 i E'_1 utworzą warstwę W_1 , która według (4) przyciąga punkt μ z siłą

$$(6) \quad dP_1 = 4\pi\sigma \cdot \frac{da_1}{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_1}} = 4\pi\sigma \cdot \frac{db_1}{b_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_1}} = 4\pi\sigma \cdot \frac{dc_1}{c_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_1}},$$

gdzie a_1, b_1, c_1 oznaczają osi elipsojdy E_1 ; a $a_1 - da_1, b_1 - db_1, c_1 - dc_1$ oznaczają osi elipsojdy E'_1 , przyczym, według art. 128-go,

$$(7) \quad \frac{da_1}{a_1} = \frac{da}{a}, \quad \frac{db_1}{b_1} = \frac{db}{b}, \quad \frac{dc_1}{c_1} = \frac{dc}{c}, \quad p_1 = \frac{\xi^2}{a_1^4} + \frac{\eta^2}{b_1^4} + \frac{\zeta^2}{c_1^4}.$$

Jeżeli warstwa W przyciąga punkt μ , zewnątrz niej leżący, z siłą dP , to

$$(8) \quad dP : dP_1 = abc : a_1b_1c_1.$$

Podstawiając przeto dP_1 z (6), obliczymy, według (8), przyciąganie punktu μ , zewnątrz W leżącego. Dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej w μ do E_1 będą odpowiednio $-\frac{\xi}{a_1^2\sqrt{p_1}}$, $-\frac{\eta}{b_1^2\sqrt{p_1}}$, $-\frac{\zeta}{c_1^2\sqrt{p_1}}$, otrzymamy więc składowe przyciągania dP

$$(9) \quad \begin{cases} dX = -4\pi\sigma \frac{abc}{a_1b_1c_1} \cdot \frac{da_1}{a_1^3} \cdot \frac{\xi}{p_1}, \\ dY = -4\pi\sigma \frac{abc}{a_1b_1c_1} \cdot \frac{db_1}{b_1^3} \cdot \frac{\eta}{p_1}, \\ dZ = -4\pi\sigma \frac{abc}{a_1b_1c_1} \cdot \frac{dc_1}{c_1^3} \cdot \frac{\zeta}{p_1}, \end{cases}$$

albo

$$(10) \quad \begin{cases} dX = -4\pi\sigma \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{da}{a} \cdot \frac{\xi}{a_1^2 p_1}, \\ dY = -4\pi\sigma \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{db}{b} \cdot \frac{\eta}{b_1^2 p_1}, \\ dZ = -4\pi\sigma \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{dc}{c} \cdot \frac{\zeta}{c_1^2 p_1}. \end{cases}$$

Podane wzory pozwalają obliczyć przyciąganie punktu μ , znajdującego się zewnątrz elipsoidy o osiach A, B, C . Podzielmy tę elipsoidę na warstwy nieskończenie cienkie, ograniczone powierzchniami homotetycznymi z jej powierzchnią zewnętrzną, a stosunek podobieństwa niech zmienia się od warstwy do warstwy. Jeżeli przez a, b, c oznaczymy osi powierzchni zewnętrznej, zaś przez $a - da, b - db, c - dc$ osi powierzchni wewnętrznej takiej warstwy, to

$$(11) \quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}, \quad \frac{da}{A} = \frac{db}{B} = \frac{dc}{C}.$$

Poprowadźmy przez μ elipsoidę o osiach a_1, b_1, c_1 , spółogniskową z elipsoidą o osiach a, b, c , dla której zatem $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, $b_1^2 - c_1^2 = b^2 - c^2$, $c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2$; a więc

$$(12) \quad b_1^2 = b^2 - a^2 + a_1^2, \quad c_1^2 = c^2 - a^2 + a_1^2.$$

Możemy składową dX przyciągania tej warstwy wyrazić w funkcji parametru $\lambda = \frac{a}{a_1}$; mamy bowiem

$$(13) \quad b = aB : A, \quad c = aC : A,$$

a stąd, według (12)

$$(14) \quad a_1 = \frac{a}{\lambda}, \quad b_1 = \frac{a}{\lambda A} \sqrt{A^2 + \lambda^2(B^2 - A^2)}, \quad c_1 = \frac{a}{\lambda A} \sqrt{A^2 + \lambda^2(C^2 - A^2)}.$$

Podstawmy te wartości w równaniu $\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = 1$, i różniczkujmy następnie to równanie względem λ , otrzymamy

$$(15) \quad p_1 = \frac{da}{d\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{a}\right)^3.$$

Wstawiając wyrażenia (13), (14) i (15) w pierwsze równanie (10), mieć będziemy

$$(16) \quad dX = -4\pi BC \xi \frac{\sigma \lambda^2 \cdot d\lambda}{\sqrt{A^2 + \lambda^2(B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + \lambda^2(C^2 - A^2)}}.$$

Podobnie, gdy parametr λ przedstawiać będzie stosunek $b : b_1$, lub stosunek $c : c_1$, otrzymamy wyrażenia składowych dY i dZ w funkcji λ . Całkując równanie (16) w obrębie danej elipsoidy, otrzymamy X . Aby wyznaczyć

krańce całkowania, poprowadźmy przez μ elipsoidę o osiach A_1, B_1, C_1 , spółogniskową z elipsoidą A, B, C ; równanie téj elipsoidy będzie

$$(17) \quad \frac{\xi^2}{A^2+u} + \frac{\eta^2}{B^2+u} + \frac{\zeta^2}{C^2+u} = 1, \text{ więc}$$

$$(18) \quad A_1^2 = A^2 + u, \quad B_1^2 = B^2 + u, \quad C_1^2 = C^2 + u,$$

gdzie u oznacza jedyny pierwiastek dodatny równania (17). (Dwa inne pierwiastki ujemne dają obie hiperbolojdy spółogniskowe). Krańcami u są: $u=0$, $u=A$, którym odpowiadają $\lambda=0$ i $\lambda=\frac{A}{A_1}$, jako krańce λ .

Będzie więc ostatecznie

$$(19) \quad \begin{cases} X = -4\pi BC\xi \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{\sigma \lambda^2 \cdot d\lambda}{\sqrt{A^2+\lambda^2(B^2-A^2)} \sqrt{A^2+\lambda^2(C^2-A^2)}}; \text{ podobnie} \\ Y = -4\pi CA\eta \int_0^{\frac{B}{B_1}} \frac{\sigma \lambda^2 \cdot d\lambda}{\sqrt{B^2+\lambda^2(C^2-B^2)} \sqrt{B^2+\lambda^2(A^2-B^2)}}, \\ Z = -4\pi AB\zeta \int_0^{\frac{C}{C_1}} \frac{\sigma \lambda^2 \cdot d\lambda}{\sqrt{C^2+\lambda^2(A^2-C^2)} \sqrt{C^2+\lambda^2(B^2-C^2)}}. \end{cases}$$

Jeżeli punkt przyciągany znajduje się na powierzchni elipsoidy, to $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$, a wyższy kraniec każdej całki będzie równy jedności.

Możemy otrzymać stałe krańce całkowania dla punktu zewnętrznego, uważając w powyższych całkach odpowiednio

$$\lambda \cdot \frac{A_1}{A}, \quad \lambda \cdot \frac{B_1}{B} \quad \text{ i } \quad \lambda \cdot \frac{C_1}{C}$$

jako nową zmienną ρ . Stosując to podstawienie, otrzymamy

$$(20) \quad \begin{cases} X = -4\pi \frac{ABC}{A_1} \xi \int_0^1 \frac{\sigma \cdot \rho^2 \cdot d\rho}{\sqrt{A_1^2+\rho^2(B^2-A^2)} \sqrt{A_1^2+\rho^2(C^2-A^2)}}, \\ Y = -4\pi \frac{ABC}{B_1} \eta \int_0^1 \frac{\sigma \cdot \rho^2 \cdot d\rho}{\sqrt{B_1^2+\rho^2(C^2-B^2)} \sqrt{B_1^2+\rho^2(A^2-B^2)}}, \\ Z = -4\pi \frac{ABC}{C_1} \zeta \int_0^1 \frac{\sigma \cdot \rho^2 \cdot d\rho}{\sqrt{C_1^2+\rho^2(A^2-C^2)} \sqrt{C_1^2+\rho^2(B^2-C^2)}}. \end{cases}$$

132. POTENCJAL ELIPSOJDY. Kwadraty osi a_1, b_1, c_1 elipsoidy, spółogniskowej z elipsoidą (a, b, c) i przez punkt (ξ, η, ζ) przechodzącej, są $a_1^2 = a^2 + u$, $b_1^2 = b^2 + u$, $c_1^2 = c^2 + u$, gdzie u oznacza jedyny pierwiastek dodatny równania