

## ROZDZIAŁ XI.

### DOKOŃCZENIE STATYKI I ZAGADNIENIA STATYCZNE.

**113. RODZAJE RÓWNOWAGI.** Jeżeli do układu punktów masyjnych jest przyłożony układ sił, a rzuty prostokątne każdej siły na osi współrzędnych są odpowiednio równe pochodnym cząstkowym pewnej funkcji, wziętym względem współrzędnych punktu przyłożenia tej siły, natenczas tę funkcję nazywamy potencjałem układu sił. Oznaczmy przez  $x_i, y_i, z_i$  współrzędne punktu  $m_i$ , a przez  $U$  potencjał układu sił; natenczas powyższe określenie wyraża się przez równania następujące:

$$(1) \quad U = F(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n); \quad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

a stąd

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i,$$

więc

$$(2) \quad \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \delta U.$$

*Praca przygotowana układu sił, mającego potencjał, jest równa wariacji tego potencjału.* Gdyby potencjał zawierał czas wyraźnie i gdybyśmy  $\delta U$  obliczali przy stałej wartości czasu, wówczas zachodziłoby równanie (2). Z równania (2) wynika, że  $\delta U = 0$  wyraża warunek konieczny i wystarczający równowagi układu sił, którego potencjałem jest  $U$ . Dodając do  $\delta U$  sumę  $\Sigma \lambda_k \cdot \delta L_k$ , gdzie  $L_k = 0$  jest wiadomym równaniem warunkowym, a  $\lambda_k$  współczynnikiem nieoznaczonym, możemy według wiadomego sposobu (art. 103) otrzymać równania równowagi.

Jeżeli  $U$  nie zawiera czasu wyraźnie, wtedy  $\delta U$  jest wariacją zupełną potencjału, a równowaga, niezależna od czasu, zachodzić będzie w tym położeniu układu masyjnego, dla którego ta wariacja jest równa zeru.

Wiadomo, że skoro w funkcji  $U$  wszystkie zmienne doznają nieskończone małych przyrostów, odpowiednich danym między nimi związkom, to  $\delta U = 0$  wyraża warunek konieczny, aby funkcja  $U$  przybrała wartość największą lub najmniejszą. Przypuśćmy, że w pewnym położeniu układu zachodzi maximum potencjału  $U$ ; możemy okazać, że jeżeli układowi udzielimy z takiego położenia bardzo małego ruchu, dając każdemu punktowi bardzo małą prędkość początkową, i następnie zostawimy ten układ pod działaniem danych sił, to każdy punkt będzie z położenia równowagi opisywał bardzo małe drogi, a jego prędkość zostanie ciągle bardzo mała. Taką równowagę układu materjalnego nazywamy równowagą stałą. Badając, czy równowaga jest stała, należałoby, według tego określenia, rozważać bardzo mały ruch układu po zniesieniu równowagi, a zatem należałoby to dochodzenie umieścić w kinetyce. Podając je w statyce, musimy wyjść z pewnej zasady, która w kinetyce dowiedziona zostanie (art. 143). Niech  $m_i$  będzie masą,  $v_i$  prędkością punktu układu materjalnego; wielkość  $T = \Sigma \frac{m_i v_i^2}{2}$ , to znaczy sumę energii kinetycznych wszystkich punktów układu materjalnego, nazywamy energią kinetyczną tego układu. Jeżeli siły przyłożone mają potencjał  $U$ , nie zawierający czasu wyraźnie, a warunki są także niezależne od czasu, wtedy  $T = U + H$ , przyczem  $H$  jest stałą dowolną. Ostatnie równanie służy, według Lejeune-Dirichlet'go, do wykazania, że równowaga jest stała, gdy  $U$  ma wartość największą.

**114.** Gdy między  $3n$  spółrzednymi  $n$  punktów układu zachodzi  $3n - s$  związków, to możemy z nich  $3n - s$  spółrzednych wyrazić przez  $s$  spółrzednych niezależnych  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , które są dowolne. Wyrażmy podobnie  $U$  przez te zmienne, i niech  $U = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ , to

$$(1) \quad T = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_s) + H.$$

Możemy zawsze przyjąć, że funkcja  $\varphi$  przybiera wartość największą dla  $q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_s = 0$ , a z powodu dowolności stałej  $H$  możemy jeszcze założyć, że największa wartość funkcji  $\varphi$  jest równa zeru. Oznaczmy przez  $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{s0}$  wartości początkowe zmiennych  $q_1, \dots, q_s$ , a przez  $v_{i0}$  prędkość początkową punktu  $m_i$  i przyjmijmy  $T_0 = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2$ , wtedy

$$(2) \quad T = \varphi(q_1, \dots, q_s) - \varphi(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{s0}) + T_0.$$

Ponieważ  $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$  jest największą wartością funkcji  $\varphi$ , przeto możemy zawsze obrać tak małe wielkości dodatne  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ , iżby dla każdego układu wartości  $q_i$ , które nie przekraczają odpowiednich granic  $Q_i$ , funkcja  $\varphi(q_1, \dots, q_s)$  była ciągle ujemna, wyjąwszy przypadek, kiedy wszystkie  $q_i$  są jednocześnie równe zeru. Skoro jednak będziemy rozważali tylko takie układy wartości  $q_i$ , iżby przynajmniej jedna z tych zmiennych, bez względu na znak, stawała się równa swjej granicy  $Q_i$ , to powyższy wyjątkowy przypadek zostanie wykluczonym. Niech  $-\Phi$ , bez względu na znak, będzie

najmniejszą wartością, jaką funkcja  $\varphi$  może przyjąć przy powyższym założeniu; skoro zmiennym  $q_i$  damy wartości liczebnie mniejsze od odpowiednich  $Q_i$ , i uczynimy zadość warunkowi

$$(3) \quad -\varphi(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{s0}) + T_0 < \Phi,$$

natenczas po odchyleniu układu z położenia równowagi żadna zmienna  $q_i$  nie dosięgnie swęj granicy odpowiedniej  $Q_i$ . Gdybyśmy bowiem przypuścili, że tak nie będzie, to zważywszy, że wartości początkowe  $q_{i0}$  czynią zadość warunkowi (3), a wielkości  $q_i$  zmieniają się w sposób ciągły, widzielibyśmy, że po pewnym czasie jedna lub więcej zmiennych  $q_i$  stawałyby się równymi swoim granicom  $Q_i$ , podczas gdy pozostałe zmienne nie przekroczyłyby jeszcze swoich granic. W téj chwili przyjęłaby funkcja  $-\varphi(q_1, \dots, q_s)$  wartość liczebnie większą niż  $\Phi$ , a prawa strona równania (2) stałaby się ujemną, co być nie może, gdyż  $T$  jest wielkością dodatnią. Ponieważ granicom  $Q_i$  zmiennych  $q_i$  możemy dać wartości dowolnie małe, przeto odchylenie każdego punktu z położenia równowagi daje się uczynić dowolnie małym. Ponieważ w końcu  $T \leq T_0$  —  $-\varphi(q_{10}, \dots, q_{s0})$ , a energija zależy od prędkości  $v_i$ , przeto prędkość każdego punktu pozostanie ciągle mniejszą od dowolnie małej wartości, jeżeli była na początku bardzo mała. *Jeżeli siły, przyłożone do układu masyjnego, mają potencjał, niezależny od czasu, i warunki są także od czasu niezależne, to równowaga układu będzie stała w takim jego położeniu, dla którego potencjał sił ma wartość największą.*

Równowagę nazywamy niestałą, jeżeli po bardzo małym odchyleniu układu z położenia równowagi i pozostawieniu go pod działaniem sił, drogi punktów i ich prędkości nie pozostają w granicach bardzo małych, lecz mogą przybrać z czasem wartości dowolnie wielkie. Równowaga jest niestała, jeżeli potencjał  $U$  przybiera wartość najmniejszą.

Do układów sił, mających potencjał, należą siły ciężkości. Obierzmy płaszczyznę  $xy$  poziomo, a oś  $z$  pionowo na dół; dla punktu o masie  $m_i$  będą rzuty siły ciężkości odpowiednio  $X_i = 0$ ,  $Y_i = 0$ ,  $Z_i = m_i g$ ; jeżeli więc  $\zeta$  oznacza odległość środka ciężkości ciała od płaszczyzny  $xy$ , to potencjał układu sił ciężkości jest

$$(4) \quad U = g \sum m_i z_i + C = M g \zeta + C,$$

gdzie  $M$  jest masą ciała, a  $C$  stałą dowolną. Z tego wyrażenia potencjału wynika następujące twierdzenie: *równowaga ciała masyjnego pod wpływem sił ciężkości jest stała lub niestała według tego, czy jego środek ciężkości zajmuje położenie możebnie najniższe, czy możebnie najwyższe (twierdzenie Torricelli'ego).* Jeżeli środek ciężkości pozostaje po odchyleniu na tym samym poziomie, to  $U$  będzie wielkością stałą, a równowaga będzie zachodziła w każdym położeniu środka ciężkości na tym poziomie. Taką równowagę nazywamy obojętną.

**115. REAKCYJE LINII I POWIERZCHNI.** Zasada prac przygotowanych pozwala wyznaczyć związki między siłami a współrzędnymi ich punktów przyłożenia w przypadku równowagi. Ponieważ jednak przez rozważanie przesunięć przygotowanych rugujemy siły połączeń, przeto wyznaczenie tych sił jest

przedmiotem osobnego rozważania. Warunki, ograniczające swobodę punktów układu, wyrażają, że pewne punkty mają się poruszać na danych liniach lub powierzchniach, że pewne powierzchnie mają być styczne do innych powierzchni i t. p. W takich przypadkach nazywamy siły połączeń także reakcjami czyli oddziaływaniami tych linii lub powierzchni materalnych na układ; biorąc te reakcje w kierunkach przeciwnych, otrzymujemy ciśnienia, których te linie lub powierzchnie doznają w przypadku równowagi.

Reakcje powierzchni czyli podpór gładkich mają kierunek normalny do tych powierzchni w punkcie odpowiednim. Jakoż, gdy  $F(x, y, z) = 0$  jest równaniem takiej powierzchni, to między przesunięciami punktu  $(x, y, z)$  będzie zachodził związek  $\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0$ , a składowe reakcji będą odpowiednio równe  $\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$ , z czego wynika, że reakcja jest normalna do powierzchni. Podobnie zachowuje się reakcja linii gładkiej. Kierunek reakcji należy więc wogólności uważać za wiadomy, wyjąwszy punkty osobliwe, krawędzi, wierzchołki i t. p., w których kierunek normalnej nie jest określony. Zastąpiwszy dane warunki przez odpowiednie reakcje, możemy układ materalny uważać za swobodny, a zatem zastosować do niego wiadome równania równowagi; otrzymujemy tym sposobem związki między siłami przyłożonymi, reakcjami i spółrzednymi punktów tego układu. Rugując z tych równań reakcje, otrzymamy warunki równowagi sił przyłożonych, a rozwiązując te równania względem reakcji, możemy wyznaczyć ciśnienia na podpory. Taki sposób postępowania pozwala w bardzo wielu zagadnieniach najłatwiej dojść do celu. Może się wydarzyć, że ilość niewiadomych jest większa od ilości równań; wtedy reakcje nie dają się oddzielnie obliczyć, lecz można tylko wyznaczyć układ sił, równoważny z reakcjami.

Reakcje razem z siłami przyłożonymi dają układ sił w równowadze. Jeżeli przeto każdą siłę przyłożoną rozłożymy na siły, działające wzdłuż normalnych do powierzchni podpierających, to te składowe, wzięte w kierunkach przeciwnych, wyznaczają odpowiednie reakcje wzdłuż tych normalnych. Z tego łatwo wynioskować, kiedy reakcje będą nieoznaczone. Nastąpi to wtenczas, kiedy promienie działania reakcyj są zależne (art. 112), to znaczy, mają takie położenie, że można wyznaczyć siły, wzdłuż nich działające, które są w równowadze. Ponieważ więc więcej niż sześć prostych są wogólności zależne, przeto okazuje się, że reakcje nie dają się oddzielnie obliczyć, jeżeli pojawiają się w więcej niż w sześciu punktach.

Jeżeli układ, w jednym punkcie podparty, jest w równowadze, natenczas siły przyłożone stanowią układ 1-go rodzaju, a ich wypadkowa działa wzdłuż normalnej do podpory. Reakcja podpory jest przeto równa i wprost przeciwna tej wypadkowej. Ciało ciężkie jest w równowadze, jeżeli spoczywa na podstawie poziomej, dotykając się jój w tym punkcie, w którym pion, poprowadzony przez środek ciężkości, spotyka tę podstawę. Jeżeli ciało

podpieramy w dwu punktach, w których normalne są skośne względem siebie, to siły stanowią układ 3-go rodzaju, a normalne są dwiema prostymi, z sobą sprzężonymi względem tego układu (art. 35). Gdyby siły stanowiły układ 1-go lub 2-go rodzaju, wówczas równowaga byłaby niemożliwa. Podpierając ciało ciężkie w trzech punktach, w których normalne do powierzchni są pionowe, można sprowadzić równowagę; reakcja w każdym punkcie jest tu dokładnie oznaczona. Jeżeli zaś takie ciało dotyka się podstawy poziomej w więcej niż w trzech punktach, wówczas reakcje są nieoznaczone, dopóki ciało uważamy za sztywne. Równowaga będzie zachodziła, jeżeli pion, przez środek ciężkości przechodzący, przecina podstawę ciała wewnątrz wielokąta wypukłego, którego wierzchołkami są skrajne punkty podpierające (art. 97). Jeżeli ściana bryły ciężkiej spoczywa na podstawie poziomej, to nie możemy podać ciśnienia, którego ta podstawa doznaje w każdym punkcie. Podpierając ciało ciężkie w trzech punktach, w których normalne do podpór przecinają pion środka ciężkości w tym samym punkcie, sprowadzamy równowagę, a reakcje będą dokładnie oznaczone. Potencjał sił przyłożonych nie zależy od reakcyj, atoli wariacje jego są funkcjami przesunięć, zależnych od podparcia układu. Z tego wynika, że równowaga zależy od połączeń zachodzących. Jeżeli ciało merytalne jest podparte w jednym punkcie, to należy uwzględnić powierzchnię tego ciała, aby ocenić, czy równowaga będzie stała. Podpierając np. elipsoidę jednorodną w wierzchołku, odpowiednim osi najdłuższej, dajemy środkowi ciężkości położenie najwyższe, równowaga przeto będzie niestała; podpierając ją zaś w wierzchołku, odpowiednim osi najkrótszej, otrzymamy równowagę stałą. Ciało ciężkie, obracające się około stałej osi poziomej, jest w równowadze stałej lub niestałej, według tego, czy środek ciężkości znajduje się pod osią, czy nad osią.

**116. RÓWNOWAGA NICI NIEROZCIĄGLIWÉJ.** Niech będzie nica, zupełnie giętka lecz nierozciągliwa, utwierdzona w dwu końcach  $A$  i  $B$  (fig. 47),

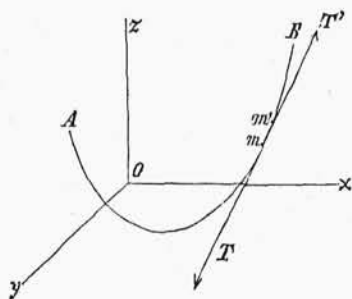


Fig. 47.

do której są przyłożone wiadome siły, i niech te siły będą w równowadze: mamy wyznaczyć kształt nici. Obierzmy na nici punkt dowolny  $(x, y, z)$ , który nazwijmy  $m$  i licząc łuki od końca  $A$ , oznaczmy łuk  $Am = s$ ; a  $ds$  niech przedstawia element  $mm'$  tego łuku. Siły, przyłożone do punktów elementu  $ds$ , są nieskończenie małymi tegoż samego rzędu, co długość tego elementu; redukując przeto te siły do punktu  $m$  (art. 111), otrzymamy siłę wypadkową nieskończenie małą tego rzędu, co  $ds$  i parę sił, której tak wielkość siły, jak

i ramię będą nieskończenie małymi tegoż rzędu, co  $ds$ . Moment zatem tej pary będzie nieskończenie małą rzędu tego, co  $ds^2$ , można więc działanie tej pary pominąć. Oznaczmy przez  $Pds$  wypadkową siłę zredukowanych;

możemy  $P$  uważać za siłę, odpowiadającą jednostce długości nici. Z warunku nierozciągłości nici wynika, że dla każdego elementu nici jest  $\delta ds = 0$ ; stanowi to jedyny warunek dla przesunięcia przygotowanego. Rozłóżmy siłę  $P \cdot ds$  na trzy siły  $Xds$ ,  $Yds$ ,  $Zds$  w kierunkach osi współrzędnych, to z zasady prac przygotowanych otrzymamy następujące równanie równowagi:

$$(1) \quad \int [(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) ds + \lambda \delta ds] = 0,$$

w którym  $\lambda$  oznacza współczynnik nieoznaczony. Ponieważ  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ , przeto, biorąc wariacje, otrzymamy

$$(2) \quad \delta ds = \frac{dx \cdot \delta dx + dy \cdot \delta dy + dz \cdot \delta dz}{ds}, \text{ a zatem}$$

$$\int [(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) ds + \lambda \left( \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right)] = 0.$$

Całkując częściowo, otrzymamy

$$\int \lambda \frac{dx}{ds} \delta dx = \int \lambda \frac{dx}{ds} d\delta x = \lambda \frac{dx}{ds} \delta x - \int d \left( \lambda \frac{dx}{ds} \right) \delta x.$$

Podobne będą dwa inne wyrazy. Stąd zaś, według (2), mamy

$$(3) \quad \lambda \cdot \left( \frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) + \int \left\{ \left[ X \cdot ds - d \left( \lambda \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x + \right. \\ \left. + \left[ Y \cdot ds - d \left( \lambda \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y + \left[ Z \cdot ds - d \left( \lambda \frac{dz}{ds} \right) \right] \delta z \right\} = 0,$$

przyczem obadwa wyrażenia po lewej stronie tego równania mają być wzięte między danymi krańcami nici. Ponieważ punkty skrajne są utwierdzone, przeto dla punktów  $A$  i  $B$  będzie  $\delta x = 0$ ,  $\delta y = 0$ ,  $\delta z = 0$ ; pierwszy wyraz w (3) jest tedy z założenia równy zeru. W wyrażeniu pod znakiem całkowania wariacje  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  są dowolne; otrzymamy zatem dla każdego elementu nici następujące równania równowagi:

$$(4) \quad \begin{cases} X \cdot ds - d \left( \lambda \frac{dx}{ds} \right) = 0, \\ Y \cdot ds - d \left( \lambda \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ Z \cdot ds - d \left( \lambda \frac{dz}{ds} \right) = 0. \end{cases}$$

Możemy te równania także otrzymać, rozważając bezpośrednio równowagę każdego elementu nici. Przetnijmy nić w punktach  $m$  i  $m'$ , i przyłożmy



w tych punktach stosowne siły, które zastępują połączenia nici z częściami  $mA$  i  $m'B$ ; wówczas możemy element  $mm'$  uważać za swobodny. Te siły przedstawiają widocznie nateżenia  $T$  i  $T'$  nici w punktach  $m$  i  $m'$ ; one przeto mają przeto kierunki stycznych w tych punktach. Rzuty nateżenia  $T$  są odpowiednio:  $-T \frac{dx}{ds}$ ,  $-T \frac{dy}{ds}$ ,  $-T \frac{dz}{ds}$ ; a rzuty nateżenia  $T' = T + dT$  będą  $\left[T \frac{dx}{ds} + d\left(T \frac{dx}{ds}\right)\right]$ ,  $\left[T \frac{dy}{ds} + d\left(T \frac{dy}{ds}\right)\right]$ ,  $\left[T \frac{dz}{ds} + d\left(T \frac{dz}{ds}\right)\right]$ ; sumy zatem rzutów tych sił wynoszą odpowiednio  $d\left(T \frac{dx}{ds}\right)$ ,  $d\left(T \frac{dy}{ds}\right)$ ,  $d\left(T \frac{dz}{ds}\right)$ . Jeżeli element  $ds$  zdąża nieograniczenie do zera, to siły  $T$ ,  $T'$  i  $Pds$  będą miały spólny punkt przyłożenia; równowaga więc elementu będzie wyrażona przez następujące trzy równania:

$$(5) \quad \begin{cases} X \cdot ds + d\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) = 0, \\ Y \cdot ds + d\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) = 0, \\ Z \cdot ds + d\left(T \cdot \frac{dz}{ds}\right) = 0. \end{cases}$$

Z porównania równań (4) i (5) okazuje się, że współczynnik nieoznaczony —  $\lambda$  przedstawia w każdym punkcie nateżenie nici. Całkując równania (5) między końcami  $s'$  i  $s''$  łuku  $s$ , otrzymamy

$$(6) \quad \begin{cases} \int_{s'}^{s''} X \cdot ds + \left| T \cdot \frac{dx}{ds} \right|_{s'}^{s''} = 0, \\ \int_{s'}^{s''} Y \cdot ds + \left| T \cdot \frac{dy}{ds} \right|_{s'}^{s''} = 0, \\ \int_{s'}^{s''} Z \cdot ds + \left| T \cdot \frac{dz}{ds} \right|_{s'}^{s''} = 0, \end{cases}$$

a mnożąc 3-cie równanie przez  $y$ , 2-gie przez —  $z$ , dodając i całkując

$$(7) \quad \int_{s'}^{s''} (Zy - Yz) ds + \left| y \cdot \left(T \cdot \frac{dz}{ds}\right) - z \cdot \left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) \right|_{s'}^{s''} = 0,$$

i podobnie otrzymamy dwa inne równania. Równania (6) i (7) wyrażają, że nateżenia w dwu dowolnych punktach nici równoważą siły, przyłożone między tymi punktami, jakgdyby nie była sztywna (art. 104). Całki ogólne równań (5) są

$$(8) \quad \begin{cases} T \cdot \frac{dx}{ds} = - \int X \cdot ds + C_1, \\ T \cdot \frac{dy}{ds} = - \int Y \cdot ds + C_2, \\ T \cdot \frac{dz}{ds} = - \int Z \cdot ds + C_3; \end{cases}$$

jeżeli z tych całek wyrugujemy natężenia, to otrzymamy równania różniczkowe krzywej, wyznaczającą kształt nici, mianowicie:

$$(9) \quad \frac{dx}{dz} = \frac{- \int X \cdot ds + C_1}{- \int Z \cdot ds + C_3}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{- \int Y \cdot ds + C_2}{- \int Z \cdot ds + C_3},$$

w których  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  oznaczają stałe dowolne. Powtórne całkowanie ostatnich dwu równań prowadzi do wyrażenia  $x$  i  $y$  w funkcji  $z$  i dwu nowych stałych. Kształt nici zależy więc od pięciu warunków, bez względu na siły zachodzić mających. Ponieważ założenie, że nie przechodzi przez punkty A i B, prowadzi do dwu warunków dla każdego z tych punktów, przeto możemy dać jeszcze długość nici jako piąty warunek, poczym jej kształt będzie dokładnie oznaczony. Według równań (5), mamy,

$$(10) \quad \begin{cases} X \cdot ds + T \cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dx}{ds} \cdot dT = 0, \\ Y \cdot ds + T \cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} \cdot dT = 0, \\ Z \cdot ds + T \cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} \cdot dT = 0. \end{cases}$$

Pomnóżmy te równania odpowiednio przez  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$ , dodajmy je i uwzględnijmy wiadome związki,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad \frac{dx}{ds} \cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} \cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} \cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0;$$

otrzymamy równanie

$$(11) \quad dT = - (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

które pozwala wyznaczyć napięcie nici w każdym punkcie, bez poprzedniego wyznaczania jej kształtu. Jeżeli siły przyłożone mają potencjał  $U$ , natenczas będzie  $dT = - dU$ , a stąd, po scałkowaniu między krańcami,

$$(12) \quad T - T_0 = - (U - U_0).$$



Jeżeli siły, do punktów nici przyłożone, mają potencyjał, natenczas natężenie nici wyraża się przez potencyjał, niezależnie od kształtu nici. Ponieważ  $Xdx + Ydy + Zdz = P \cdot ds \cos(P, ds)$ , przeto dla  $\cos(P, ds) = 0$  będzie  $dT = 0$ . Jeżeli zatem siła przyłożona jest w każdym punkcie normalna do nici, wtedy natężenie nici będzie stałe. Napięcia  $T$  i  $T'$  w dwu nieskończenie bliskich punktach  $m$  i  $m'$  mają kierunki stycznych w tychże punktach, leżą więc na płaszczyźnie ściśle stycznej w punkcie  $m$ ; a ponieważ one są w równowadze z siłą  $P \cdot ds$ , przeto widzimy, że siła przyłożona leży w każdym punkcie na płaszczyźnie ściśle stycznej do nici. Z tego wynika, że jeżeli siły przyłożone są równoległe, wtedy nie przybierze kształt krzywój płaskiej.

**117. LINIJA ŁAŃCUCHOWA.** Linią krzywą, utworzoną przez nić giętą i nierozciągliwą, będącą w równowadze przy działaniu danych sił, nazywamy wogólności linią łańcuchową. Zwykle stosujemy tę nazwę do linii krzywój, utworzonój przez nić, której elementy są tylko pod wpływem siły ciężkości, a zatem do krzywój, utworzonój przez nić materjalną, samój sobie pozostawioną. Wyznamy linią łańcuchową w tym znaczeniu ściślej.

Ponieważ siły ciężkości są równoległe, przeto, według art. 116-go, linia łańcuchowa jest płaska i znajduje się na płaszczyźnie pionowej. Niech nić będzie jednorodna o gęstości  $\sigma$ , to  $P = \sigma g = \gamma$ , gdzie  $\gamma$  oznacza ciężar jednostki długości nici. Obierzmy na płaszczyźnie nici oś  $x$ -ów poziomo, oś  $y$ -ów pionowo w górę; jest więc  $X = 0$ ,  $Y = -\gamma$ ; równania równowagi będą przeto, według (5) art. 116-go,

$$(1) \quad d\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) = \gamma \cdot ds.$$

Całkując raz, otrzymamy

$$T \cdot \frac{dx}{ds} = a, \quad T \cdot \frac{dy}{ds} = \gamma s + b.$$

Poprowadźmy oś  $y$ -ów przez punkt najniższy, czyli przez wierzchołek  $C$  krzywój, w którym styczna jest pozioma, i liczymy łuki  $s$  od tego punktu, to  $dy = 0$  dla  $s = 0$ , więc  $b = 0$ , skąd

$$(2) \quad T \cdot \frac{dx}{ds} = a, \quad T \cdot \frac{dy}{ds} = \gamma \cdot s.$$

Z 1-go równania widzimy, że składowa pozioma natężenia jest stała, a zatem równa natężeniu nici w punkcie najniższym; według 2-go równania składowa pionowa natężenia jest proporcjonalna względem długości nici, liczonój od punktu najniższego. Dzieląc obadwa równania przez siebie, otrzymamy równanie różniczkowe linii łańcuchowój

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{a} s,$$

z którego po zróżniczkowaniu go względem  $x$ , mamy  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ .

Przyjmijmy  $y' = \frac{dy}{dx}$ ; wtedy  $\frac{dy'}{dx} = \frac{\gamma}{a} \sqrt{1+y'^2}$ ; stąd całkując, otrzymamy  $\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{\gamma}{a} x$ , bez stałej, bo  $y' = 0$  dla  $x = 0$ . Jest więc  $y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{\gamma}{a} x}$ . Mnożąc i dzieląc lewą stronę przez  $y' - \sqrt{1+y'^2}$ , mieć będziemy

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -e^{-\frac{\gamma}{a} x}.$$

Z dwu ostatnich równań wynika

$$(4) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\gamma}{a} x} - e^{-\frac{\gamma}{a} x} \right);$$

a zatem

$$y = \frac{a}{2\gamma} \left( e^{\frac{\gamma}{a} x} + e^{-\frac{\gamma}{a} x} \right) + c.$$

Dla  $x = 0$  będzie  $y = \frac{a}{\gamma} + c$ . Obierzmy początek osi poniżej punktu najniższego w odległości  $\frac{a}{\gamma}$ ; dla  $x = 0$  jest  $y = \frac{a}{\gamma}$ , więc  $c = 0$ ; otrzymamy zatem, kładąc  $\varepsilon = \frac{a}{\gamma}$ ,

$$(5) \quad y = \frac{\varepsilon}{2} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right),$$

jako równanie linii łańcuchowej. Z równania (5) okazuje się, że linia łańcuchowa jest symetryczna względem osi  $y$ -ów, którą z tego powodu nazywamy jej osią; oś  $x$ -ów nazywamy kierownicą linii łańcuchowej. Ponieważ równanie (5) zawiera tylko jeden parametr, przeto wszystkie linie łańcuchowe są podobne.

Według (3) mamy

$$(6) \quad s = \varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon}{2} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right);$$

z tego zaś równania i równania (5) wynika

$$(7) \quad y^2 - s^2 = \varepsilon^2, \quad \text{skąd} \quad s^2 = y^2 - \varepsilon^2.$$

To równanie okazuje, że rzędna  $y$  w dowolnym punkcie  $m$  jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątnymi są parametr  $\varepsilon = OC$  i łuk  $Cm = s$ . Wykreśliwszy ten trójkąt prostokątny, można linię łańcuchową wyprostować. Pole figury, ograniczonej łukiem tej linii, kierownicą i dwiema rzędnymi, wynosi

$$(8) \quad \int_0^x y \cdot dx = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^x \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right) dx = \frac{\varepsilon^2}{2} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right) = \varepsilon s,$$

równa się zatem podwójnemu polu powyższego trójkąta.

Ponieważ  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right)$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2\varepsilon} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right)$ , przeto promień krzywizny jest

$$(9) \quad \rho = - \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = - \frac{\varepsilon}{4} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right)^2;$$

jeżeli  $N$  oznacza długość normalnej od punktu na linii łańcuchowej do kierunku, to

$$N = y \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{y}{2} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right) = \frac{\varepsilon}{4} \left( e^{\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right)^2,$$

więc  $N = -\rho$ , to znaczy, że promień krzywizny linii łańcuchowej równa się długości normalnej, wziętej w kierunku przeciwnym.

Z równań (2) otrzymamy

$$(10) \quad T^2 = a^2 + \gamma^2 s^2 = a^2 + \gamma^2 (y^2 - \varepsilon^2) = \gamma^2 y^2,$$

skąd wynika, że *natężenie nici równa się ciężarowi nici, której długość jest równa rzędnej punktu odpowiedniego na linii łańcuchowej.*

**118. RÓWNOWAGA WRAZIE, GDY UWZGLĘDNIAMY TARCIE.** Rozważając w art. 115-ym reakcję powierzchni, na której opiera się ciało, pozostające w równowadze, przyjmowaliśmy, że ta powierzchnia jest zupełnie gładka, wskutek czego reakcja miała w każdym punkcie kierunek normalny do powierzchni. W rzeczywistości niema jednak takiej powierzchni. Ciało materialne może się tylko opierać na powierzchni innego ciała, przedstawiającej nierówności, a przeto chropowatą, wskutek czego zachodzi reakcja także w kierunku płaszczyzny stycznej do tej powierzchni.

Niech ciało materialne dotyka się w pewnym punkcie powierzchni  $F$  innego ciała. Jeżeliby ta powierzchnia była zupełnie gładka, zasłaby równowaga, gdyby siła  $P$ , do punktu przyłożona, była normalna do  $F$ . Doświadczenie okazuje jednak, że siła  $P$  może z normalną tworzyć pewien kąt  $\alpha > 0$ , a pomimo tego równowaga nie przestanie zachodzić, jeżeli tylko kąt  $\alpha$  nie przekroczy pewnej wartości. Rozłożmy siłę  $P$  na dwie składowe:  $P_n = P \cos \alpha$  w kierunku normalnym, i  $P_t = P \sin \alpha$  w kierunku stycznym do powierzchni, natenczas z równowagi wynika, że reakcją powierzchni można także rozłożyć na dwie siły, mianowicie na siłę  $-P_n$  w kierunku normalnym, i na siłę  $-P_t$  w kierunku stycznym do tej powierzchni. Jeżeli kąt  $\alpha$  wzrasta i osiąga pewną wartość  $\varphi$ , wtedy ciało zaczyna się ślizgać na

powierzchni w kierunku siły  $P_t$ , i odtąd równowaga ustaje; dla  $\alpha < \varphi$  równowaga zachodzi dla każdego kierunku siły  $P$ ; dla  $\alpha > \varphi$  równowaga jest niemożliwa, a wartość  $\alpha = \varphi$  jest krańcową pośród wartości odpowiadających równowadze.

Reakcją powierzchni materyjalnej w punkcie rozważanym, w kierunku stycznym do tej powierzchni, nazywamy tarcie na powierzchni w tym punkcie. Tarcie możemy zawsze uważać za siłę, co do wielkości równą, a co do kierunku przeciwną, składowej stycznej siły przyłożonej. Tarcie razem z reakcją normalną przedstawia całkowitą reakcją powierzchni materyjalnej. Kierunek reakcji normalnej jest dokładnie określony; kierunek tarcia nie jest jednak określony, lecz zależy od kierunku siły stycznej, a zatem także od kierunku siły przyłożonej. Tarcie przyczynia się wtedy do równowagi, kiedy kąt nachylenia całkowitej reakcji powierzchni względem normalnej nie przekracza pewnej wartości; wartość tę wyznacza kąt  $\varphi$  nachylenia siły  $P$  względem normalnej, od którego rozpoczyna się ślizganie na powierzchni. Ten kąt nazywamy kątem tarcia w punkcie rozważanym na powierzchni. Jego wielkość zależy od własności fizycznych obudwu ciał, dotykających się wzajemnie, od stopnia chropowatości ich powierzchni, a wreszcie od ruchu względnego tych dwu ciał, jakiby zachodził po zniesieniu równowagi.

Znając wielkość kąta tarcia, wyobraźmy sobie stożek obrotowy, którego wierzchołkiem jest punkt rozważany na powierzchni, osią normalna do tej powierzchni, a tworzące są do normalnej nachylone pod kątem, równym kątowi tarcia. Taki stożek nazywamy stożkiem tarcia w rozważanym punkcie na powierzchni. Na podstawie tego określenia możemy w tym przypadku, gdy siły, do ciała przyłożone, mają wypadkową, wypowiedzieć twierdzenie następujące: *do równowagi danego ciała na powierzchni innego ciała materyjalnego potrzeba i wystarcza, żeby wypadkowa sił przyłożonych znajdowała się wewnątrz lub na powierzchni stożka tarcia w tym punkcie, w którym owa wypadkowa przecina powierzchnią rozważaną.*

**119.** Z twierdzenia poprzedzającego wynika różnica zasadnicza między równowagą na powierzchni gładkiej a równowagą na powierzchni niegładkiej. Aby wykazać tę różnicę, rozważajmy przypadek najprostszy równowagi punktu na powierzchni, przyjmując siłę przyłożoną, równoległą do osi  $z$ . Jeżeli  $F = 0$  jest równaniem powierzchni, którą przyjmujemy za zupełnie gładką, wtedy równowaga punktu zajdzie w tych punktach na powierzchni, w których normalna jest równoległa do osi  $z$ ; punkty zatem owe oprócz warunkowi  $F = 0$  czynią jeszcze zadość warunkom  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  i  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ . Ponieważ dla wyznaczenia takich punktów mamy trzy równania, przeto te punkty będą na powierzchni odosobnione, a ich ilość będzie wogólności skończona. Jeżeli zaś uwzględnimy tarcie i przyjmiemy  $N = 1$ :  $\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$ , otrzymamy

$$N \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \cos \varphi = 0$$

jako równanie warunkowe dla tych punktów na powierzchni, w których normalna tworzy z siłą kąt tarcia  $\varphi$ . To równanie wyznaczy na powierzchni, mówiąc w ogólności, linie krzywe zamknięte; w każdym punkcie wewnątrz obwodu takiej linii tworzy normalna z siłą kąt  $\alpha < \varphi$ , a między dwiema takimi linijami będzie  $\alpha > \varphi$ . Otrzymamy zatem części powierzchni, ograniczone linijami krzywymi, w obrębie których w każdym punkcie równowaga zachodzić może, z czego się okazuje, że na powierzchni niegładkiej będzie nieskończenie wiele miejsc równowagi punktu, podczas gdy na powierzchni gładkiej istnieje tylko skończona ilość takich miejsc.

W przypadku, gdy punkt jest połączony z punktami innymi, należy te połączenia zastąpić siłami połączeń, a następnie badać równowagę przy uwzględnieniu tarcia, jakgdyby punkt był swobodny. Wypadkowa sił przyłożonych i sił połączeń znajdzie się wewnątrz lub na powierzchni stożka tarcia.

W zagadnieniach o równowadze ciał przy uwzględnieniu tarcia zajmujemy się głównie tymi przypadkami, gdy siła  $P$ , w artykule poprzedzającym rozważana, ma właśnie położenie krańcowe, a zatem tworzy z normalną do powierzchni kąt tarcia. W tym przypadku będzie  $P_t = P_n \cdot \tan \varphi$ , a jeżeli oznaczymy  $f = \tan \varphi$ , otrzymamy  $P_t = f \cdot P_n$ . Ponieważ tarcie jest równe  $P_t$ , a  $P_n$  przedstawia ciśnienie normalne na powierzchnię, przeto tarcie jest proporcjonalne względem tego ciśnienia. Liczbę  $f$ , wyrażającą stosunek tarcia do ciśnienia normalnego, nazywamy współczynnikiem tarcia odpowiedniego. Ten współczynnik jest równy stycznej trygonometrycznej kąta tarcia. Wyznaczenie tego współczynnika jest rzeczą doświadczenia; dla drzewa, metali, kamieni i t. p. okazało się  $f < 1$ , a zatem  $\varphi < \frac{\pi}{4}$ , dla sukna zaś  $f > 1$ , a zatem  $\varphi > \frac{\pi}{4}$ .

W zagadnieniach statycznych, w których reakcją powierzchni przyjmujemy na powierzchni stożka tarcia, możemy stosować zasadę prac przygotowanych. Niech będzie dany układ  $n$  punktów masy  $m_i$  o współrzędnych  $x_i$ ,  $y_i$  i  $z_i$ , pozostających na danych powierzchniach  $F_i = 0$ , a między ich współrzędnymi niech zachodzi nadto  $s$  związków  $L_k = 0$ . Jeżeli  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  oznaczają składowe prostokątne siły przyłożonej, a  $X'_i$ ,  $Y'_i$ ,  $Z'_i$  składowe reakcji powierzchni  $F_i$ , natenczas równania równowagi dla punktu  $m_i$  będą

$$(1) \quad \begin{cases} X_i + X'_i + \sum_k \lambda_k \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x_i} = 0, \\ Y_i + Y'_i + \sum_k \lambda_k \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y_i} = 0, \\ Z_i + Z'_i + \sum_k \lambda_k \cdot \frac{\partial L_k}{\partial z_i} = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez  $a'_i$ ,  $b'_i$ ,  $c'_i$  dostawy kierunkowe reakcji, przez  $\varphi_i$  odpowiedni kąt tarcia, i nadto

$$N_i = 1 : \sqrt{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_i}\right)^2};$$

wtedy

$$(2) \quad a_i' \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + b_i' \frac{\partial F_i}{\partial y_i} + c_i' \frac{\partial F_i}{\partial z_i} = N_i \cos \varphi_i,$$

$$(3) \quad a_i' : b_i' : c_i' = X_i' : Y_i' : Z_i'.$$

Obierzmy przesunięcia przygotowane odpowiednie warunkom następującym:

$$(4) \quad \Sigma \left( \frac{\partial L_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial L_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \text{ i } a_i' \delta x_i + b_i' \delta y_i + c_i' \delta z_i = 0,$$

pomnóżmy równania (1) odpowiednio przez te przesunięcia i dodajmy iloczyny; wtedy otrzymamy

$$(5) \quad \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

jako równanie, wyrażające zasadę prac przygotowanych dla równowagi danego układu punktów. Równania (4) wyrażają, że kierunek przesunięcia przygotowanego punktu  $m_i$  jest prostopadły do reakcji powierzchni  $F_i$  i do odpowiedniej siły połączeń.

## PRZYKŁADY I ĆWICZENIA.

(1). Pręt jednorodny AB (fig. 48) opiera się w punkcie A na osi  $x$ , a w punkcie B na osi  $y$ , w punkcie E zaś jest przymocowany linką do punktu O: wyznaczyć

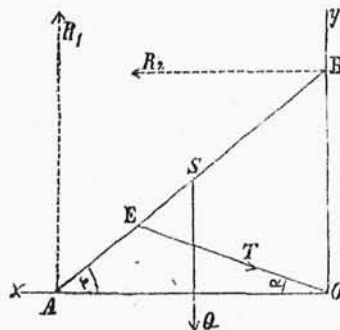


Fig. 48.



natężenie téj linki. Rozłóżmy natężenie  $T$  na składowe —  $T \cos \alpha$ , —  $T \sin \alpha$ , gdzie  $\alpha$  oznacza kąt EOA, a  $Q$  niech będzie ciężarem pręta, przyłożonym do środka masy  $S$  o współrzędnych  $\xi$ ,  $\eta$ . Jeżeli  $x$ ,  $y$ , są współrzędnymi punktu E, to zasada prac przygotowanych prowadzi do następującego równania:

$$- T \cos \alpha \delta x - T \sin \alpha \delta y - Q \delta \eta = 0,$$



Niech pręt tworzy z osią  $x$  kąt  $\varphi$  i przyjmijmy  $a = AE$ ,  $b = EB$ , to

$$\begin{aligned} x &= b \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad 2\eta = (a+b) \sin \varphi, \\ \delta x &= -b \sin \varphi \delta \varphi, \quad \delta y = a \cos \varphi \delta \varphi, \quad 2\delta \eta = (a+b) \cos \varphi \delta \varphi, \quad \text{więc} \\ 2T(b \sin \varphi \cos \alpha - a \cos \varphi \sin \alpha) &= Q(a+b) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Mamy warunek  $b \tan \alpha = a \tan \varphi$ ; obliczywszy stąd  $\cos \alpha$  i  $\sin \alpha$  i podstawivszy w ostatnie równanie, otrzymamy

$$T = \frac{Q}{2(b-a)} \cdot \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi},$$

jako szukane napięcie dla danego kąta  $\varphi$ . Gdyby było  $a = b$ , otrzymalibyśmy  $T = \infty$ ; dla  $b < a$  będzie  $T < 0$ ; trzeba zatem użyć podpory sztywnej zamiast linki.

Możemy zadanie to rozwiązać także przez wprowadzenie odpowiednich reakcyj  $R_1$ ,  $R_2$  w punktach  $A$  i  $B$ , uważając pręt za swobodny. Wówczas, jako warunki równowagi, mamy:  $R_2 - T \cos \alpha = 0$  (rzuty sił na oś  $x$ ),  $R_1 - T \sin \alpha - Q = 0$  (rzuty sił na oś  $y$ ), a nadto  $R_1 \cdot AO - R_2 \cdot BO - Q \cdot O\eta = 0$  (momenty względem  $O$ ), czyli  $(2R_1 - Q) \cos \varphi - 2R_2 \cdot \sin \varphi = 0$ . Z tych równań wynika

$$\begin{aligned} T \cos \alpha &= R_2, \quad T \sin \alpha = R_1 - Q, \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} \tan \varphi = \frac{R_1 - Q}{R_2}, \\ a R_2 \tan \varphi &= b(R_1 - Q), \quad 2R_2 \tan \varphi = 2R_1 - Q, \\ R_1 &= Q \cdot \frac{a - 2b}{2(a-b)}, \quad R_2 = \frac{Q}{2} \frac{b}{(b-a) \tan \varphi}, \end{aligned}$$

z czego możemy na koniec obliczyć  $T$ .

(2). Parabolojda obrotowa o pionowej osi spoczywa na dwu płaszczyznach, jednakowo do poziomu nachylonych: wyznaczyć największy stosunek długości osi

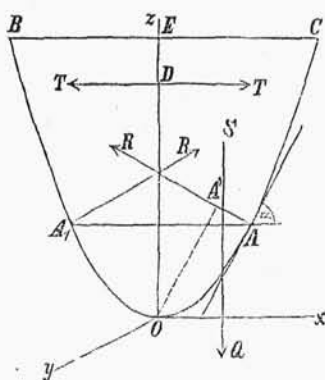


Fig. 49.

parabolojdy do jej parametru, tak, żeby po rozcięciu parabolojdy płaszczyzną, przechodzącą przez oś i prostą przecięcia obu płaszczyzn podpierających, obie części bryły mogły pozostawać w równowadze. Niech  $x^2 + y^2 - 2az = 0$  będzie równaniem parabolojdy względem układu osi  $Oxyz$ . W punktach podparcia  $A$  i  $A_1$  (fig. 49) wprowadźmy reakcje  $R$ ; wtedy, rozcinając bryłę płaszczyzną  $yOz$ , potrzeba dla każdej połowy przyjąć w niewiadomym punkcie  $D$  na  $Oz$  reakcją  $T$ , aby sprowadzić równowagę. Jeżeli  $S$  jest środkiem masy połowy  $OCE$  parabolojdy, to siły  $T$ ,  $R$  i  $Q$  działają na płaszczyźnie  $xOz$ . Styczna w  $A$  tworzy z osią  $x$ -ów kąt  $\alpha$ , więc współ-

rzędne punktu  $A$  są:  $x = a \tan \alpha$ ,  $z = \frac{a}{2} \tan^2 \alpha$ .

Dla równowagi każdej połowy mamy następujące równania:

$$T - R \sin \alpha = 0, \quad R \cos \alpha - Q = 0, \quad R \cdot OA' - T \cdot OD - Q \cdot \xi = 0,$$



gdzie prosta  $OA'$  jest prostopadła do  $R$ , a  $\xi$  i  $\zeta$  oznaczają współrzędne punktu  $S$ . Z tych równań wynika

$$T = Q \tan \alpha, \quad R = Q \sec \alpha, \quad OD \cdot \sin \alpha = OA' - \xi \cos \alpha.$$

Z figury zaś mamy  $OA' = x \cos \alpha + z \sin \alpha = a \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$ ; więc

$$2 OD \cdot \sin^2 \alpha = a(1 + \sin^2 \alpha) - 2 \xi \sin \alpha \cos \alpha.$$

Przyjmijmy  $h = OE$ , a  $V = \frac{\pi a h^2}{2}$  niech będzie objętością połowy paraboloidy, to

$$V \xi = \frac{4}{3\pi} \int_0^h x \cdot dV, \quad dV = \frac{\pi x^2}{2} dz, \quad \text{więc}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2^9}}{15\pi} \sqrt{ah}, \quad \text{z czego wypada}$$

$$2 OD \sin^2 \alpha = a(1 + \sin^2 \alpha) - \frac{2\sqrt{2^9}}{15\pi} \sqrt{ah} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Z tego widzimy, że  $OD$  ubywa wraz z rosnącym  $h$ , a ponieważ granicą malejącego  $OD$  jest zero, przeto otrzymamy granicę rosnącego  $h$ , kładąc  $OD = 0$  i obliczając stąd maximum  $h = H$ . Czyniąc to i kładąc  $\frac{H}{a} = \mu$ , otrzymamy

$$\mu = \frac{(15\pi)^2}{2^{11}} \cdot \frac{(1 + \sin^2 \alpha)^2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha},$$

co przedstawia rozwiązanie zagadnienia.

(3). Nić giętka i nierozciągliwa, której ciężar własny pomijamy, tworzy na walec chropowatym linią śrubową: wyznaczyć krok tej śruby. Niech  $mm'$  (fig. 50) będzie elementem nici; w punktach  $m$  i  $m'$  działają w kierunkach stycznych odpowiednie natężenia  $T$  i  $T' = T + dT$ . Poprowadźmy płaszczyznę rysunku przez obie styczne, przecinając się w punkcie  $M$ , następnie wykreślmy normalną główną do linii śrubowej i prostopadłą do niej w punkcie  $M$ . Ponieważ linia śrubowa jest linią geodezyjną na walec, przeto normalna główna jest zarazem normalną do powierzchni walca. Rozkładając  $T$  i  $T'$  wzdłuż powyższych prostych odpowiednio na siły  $T_n, T_t$ ;  $T_n', T_t'$ , widzimy, że  $T_n + T_n'$  jest ciśnieniem normalnym elementu  $mm'$  na walec, które sprawia tarcie  $f \cdot (T_n + T_n')$ , gdzie  $f$  oznacza współczynnik tarcia. Tarcie zniesie siłę  $T_t' - T_t$ , aby zaszła równowaga, jest przeto dla każdego elementu

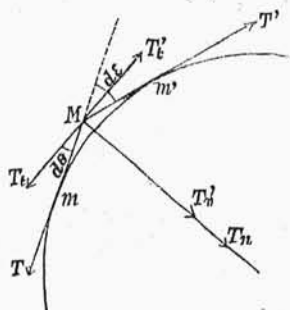


Fig. 50.

$$(1) \quad T_t' - T_t = f(T_n + T_n').$$



wnania równowagi dla każdego walca zosobna. Rozkładając siły równoległe i prostopadłe do AB, i biorąc momenty względem środków S i S', otrzymamy następujące równania:

$$\begin{aligned} Q \sin \alpha - T \cos \beta - R &= 0, & Q' \sin \alpha + T \cos \beta - R' &= 0, \\ Q \cos \alpha + T \sin \beta - N &= 0, & Q' \cos \alpha - T \sin \beta - N' &= 0, \\ T &= R = R'. \end{aligned}$$

Z pierwszych dwu równań wynika

$$(1) \quad \begin{aligned} Q \sin \alpha &= T(1 + \cos \beta), & Q' \sin \alpha &= T(1 - \cos \beta), & \text{a stąd} \\ \frac{Q}{Q'} &= \cotg^2 \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

co jest pierwszym warunkiem równowagi. Stąd wypada

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{Q}{Q+Q'}}, & \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{Q'}{Q+Q'}}, & \sin \beta &= 2 \frac{\sqrt{QQ'}}{Q+Q'}, \\ T = R = R' &= \frac{Q+Q'}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$(3) \quad \begin{aligned} N &= Q \cos \alpha + \sqrt{QQ'} \sin \alpha = \sqrt{Q} (\sqrt{Q} \cos \alpha + \sqrt{Q'} \sin \alpha), \\ N' &= Q' \cos \alpha - \sqrt{QQ'} \sin \alpha = \sqrt{Q'} (\sqrt{Q'} \cos \alpha - \sqrt{Q} \sin \alpha), \end{aligned}$$

a  $fN$  i  $fN'$  przedstawiają największe wartości tarcia w punktach D i E, gdzie  $f$  jest współczynnikiem tarcia, przeto mamy jeszcze warunek równowagi

$$\frac{Q+Q'}{2} \sin \alpha \leq fN, \quad \text{lub} \quad \leq fN',$$

według tego, czy N czy N' jest mniejszą reakcją normalną.

(5). Okazać, że układ sił jest w równowadze, jeżeli: 1) jego momenty względem każdego boku czworokąta skośnego są równe zeru; 2) suma rzutów sił na kierunek jednej przekątnej czworokąta jest równa zeru; 3) suma rzutów sił na kierunek prostopadły do tej przekątnej i do jednego boku, jest równa zeru.

(6). Siły, przyłożone do wierzchołków czworościanu, prostopadłe do ścian przeciwnych i proporcjonalne względem ich powierzchni, są w równowadze. Z tego wynika, że cztery wysokości czworościanu są tworzącymi hiperboloidy jednopowłokowej.

(7). Wyznaczyć warunki, żeby składowe sił danego układu, wzięte w kierunku danej prostej, równoważyły się. Siły układu nie równoważą się przytym.

(8). Jeżeli trzy siły P, Q i R, przyłożone do środka O koła i działające wzdłuż promieni OA, OB i OC, są równoważne z trzema siłami P', Q' i R', działającymi wzdłuż boków BC, CA, AB trójkąta wpisanego ABC, okazać, że

$$\frac{P \cdot P'}{BC} + \frac{Q \cdot Q'}{CA} + \frac{R \cdot R'}{AB} = 0.$$

(9). Cztery pręty stanowią czworokąt płaski ABCD, którego wierzchołki przeciwległe A i C, tudzież B i D są połączone linkami o napięciach P i Q; okazać, że dla równowagi

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB \cdot OD \cdot AC}{OA \cdot OC \cdot BD};$$

gdzie O jest punktem przecięcia się przekątnych.

(10). Wierzchołki trójkąta przyciągają punkt materialny proporcjonalnie względem odległości; wyznaczyć położenie równowagi punktu.

(11). Dowieść twierdzenia Leibniz'a: jeżeli na kierunkach sił, mających wspólny punkt przyłożenia i znoszących się, odetniemy odpowiednio wielkości tych sił, to środkiem równych mas, umieszczonych w punktach końcowych tych odcinków, jest punkt przyłożenia sił.

(12). Dowieść twierdzenia Crofton'a: jeżeli siły, przyłożone do punktów  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ , a przedstawione przez odcinki  $m_1 n_1, m_2 n_2, \dots, m_i n_i, \dots$ , są w równowadze, to środek równych mas, skupionych w punktach  $m_i$ , jest zarazem środkiem równych mas, skupionych w punktach  $n_i$ .

(13). Siłom równoległym można dać taki kierunek, że będą równoważne z jedną siłą, przyłożoną do punktu danego. Wyznaczyć ten kierunek.

(14). Parę sił (P, — P), przyłożonych do punktów A i B, można przekształcić na trzy pary (P, — P)<sub>1</sub>, (P, — P)<sub>2</sub>, (P, — P)<sub>3</sub>, mające jedną siłę wspólną w punkcie A, przyczem drugie siły są przyłożone do takich punktów B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> i B<sub>3</sub>, że proste AB<sub>1</sub>, AB<sub>2</sub>, AB<sub>3</sub> tworzą krawędzi kąta bryłowego.

(15). To twierdzenie pozwala okazać, że układ sił jest w ogólności równoważny z czterema siłami, przyłożonymi do wierzchołków danego czworościanu.

(16). Pręt materialny jednorodny jest zawieszony na dwu linach o nierównych długościach; wyznaczyć napięcie każdej liny.

(17). Dwa walce o danych średnicach są spięte taśmą nierozciągliwą; wyznaczyć stosunek ich wzajemnego ciśnienia do napięcia taśmy.

(18). Kształtek jednorodny jest podparty w środku; wyznaczyć punkty na obwodzie, w których trzy dane ciężary mają być umieszczone, żeby kształtek był w równowadze w położeniu poziomym.

(19). Pręt materialny jednorodny jest umieszczony w półkuli pustej, której średnica jest mniejsza od długości pręta, a płaszczyzna średnicowa pozioma; wyznaczyć położenie równowagi pręta.

(20). Dwie kule chropowate znajdują się między dwiema chropowatymi płaszczyznami pochyłymi; wyznaczyć położenie równowagi, reakcje normalne i tarcia.

(21). Pręt materialny jednorodny spoczywa na dwu płaszczyznach pochyłych; zbadać, czy jego równowaga jest stała czy niestała.

(22). Końce materialnego pręta jednorodnego są oparte na dwu płaszczyznach, poziomej i pionowej, a na prostej przecięcia się tych płaszczyzn jest środek przyciągania, odwrotnie proporcjonalnego względem kwadratu odległości, który śro-

dek masy pręta przyciąga siłą  $\frac{g}{2}$ ; wyznaczyć położenie równowagi pręta i rozstrzygnąć, czy równowaga jest stała, czy niestała.

(23). Okazać, że nie matematyczna, której każdy element dźwiga ciężar, proporcjonalny względem długości rzutu poziomego elementu tej nici, tworzy parabolę. Wyznaczyć natężenie nici.

(24). Wyznaczyć linią łańcuchową, jeżeli gęstość nici materjalnej i nierozciągliwej jest odwrotnie proporcjonalna względem pierwiastka długości nici, liczonej od punktu najniższego (łańcuchowa Jana Bernoulli'ego).

(25). Wóz ma być utrzymany w spoczynku na płaszczyźnie pochylonej przez zahamowanie dwu kół; podać warunek, przy którym dogodniej hamować przednie koła niż tylne, lub przeciwnie.

(26). Jeżeli nie nierozciągliwa bez końca wisi na dwu nieskończenie małych blokach, to obie linie łańcuchowe, które ona tworzy, mają wspólną kierownicę.

(27). Wyznaczyć linią łańcuchową, jeżeli każdy punkt nici jednorodnej doznaje działania siły centralnej, odwrotnie proporcjonalnej względem kwadratu odległości od środka tej siły.

(28). Wyznaczyć kąt u wierzchołka stożka obrotowego z warunku, aby ten stożek był w każdym położeniu w równowadze wewnątrz kuli opisanej.

(29).  $n$  punktów  $(x_i, y_i, z_i)$ , przyciągających się proporcjonalnie względem odległości, jest w równowadze; okazać, że równowaga trwać będzie po każdym takim przesunięciu tych punktów, dla którego funkcja  $n \cdot \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum (x_i)^2 - \sum (y_i)^2 - \sum (z_i)^2$  nie zmienia swęj wartości.

#### Literatura statyki (Rozdz. X—XI).

L. AMPÈRE, Sur le principe des vitesses virtuelles (Journ. de l'éc. polyt., t. VI, Paris, 1806). — L. POINSON, Eléments de statique (1-sze wyd. w Paryżu, 1803). — M. CHASLES, Mémoire de géométrie pure, sur les systèmes de forces et les systèmes d'aires planes (Correspondance mathém. de QUETELET, Bruxelles, t. VI, 1830); Théorèmes généraux sur les systèmes de forces et leurs moments (Journ. des math., t. XII, 1847); Sur les six droites qui peuvent être les directions de six forces en équilibre (Comptes rendus, t. LII, 1866). — F. MINDING, Untersuchungen, betreffend die Frage nach einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte (J. v. CRELLE, t. XIV, Berlin, 1835); Ueber den Ort sämtlicher Resultanten eines, der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften (tamże, t. XV, 1836); Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet (tamże, t. XV, 1836). — A. F. MOEBIUS, Ueber den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte (tamże, t. XVI, 1837); Lehrbuch der Statik (dwa tomy, Leipzig, 1837). — L. P. LEJEUNE-DIRICHLET, Ueber die Stabilität des Gleichgewichts (J. v. CRELLE, t. XXXII, 1846). — O. J. BROCH,

Lehrbuch der Mechanik (Berlin, 1854; mianowicie rozdz. VI). — A. CAYLEY, Théorème relatif à l'équilibre des quatre forces (Cpts. r., t. II, 1865). — SPOTTISWOODE, Note sur l'équilibre des forces dans l'espace (tamże, t. LIV, 1868). — MOIGNO, Leçons de mécanique analytique, rédigées principalement d'après les méthodes d'Augustin CAUCHY (Statique, Paris, 1868). — J. H. JELLET, A treatise on the theory of friction (Dublin and London, 1872). — J. M. A. TODHUNTER, A treatise on analytical statics (London, 1874). — G. DARBOUX, Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeur et de direction constantes, appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de position dans l'espace (Bordeaux, 1877). — GOEHEL, Die wichtigsten Sätze der neueren Statik (Zürich, 1877). — J. PETERSEN, Lehrbuch der Statik fester Körper (Kopenhagen, 1882). — G. M. MINCHIN, A treatise on statics (Oxford, 1884).

---