

ROZDZIAŁ IV.

RUCHY SZCZEGÓLNE UKŁADÓW NIEZMIENNYCH.

48. KRĘCENIE SIĘ OKOŁO PUNKTU. Okręśliśmy (art. 21) kręcenie się układu około punktu jako taki ruch układu, podczas którego jeden punkt tego układu, zwany środkiem kręcenia się, pozostaje w spoczynku. Jeżeli na fig. 19-tój art. 38-go punkt m_1 jest środkiem kręcenia się, to każdy z pozostałych dwu punktów, m_2 i m_3 , będzie się mógł poruszać tylko na powierzchni kuli, zakreślonej z punktu m_1 , jako środka, promieniem odpowiednio m_1m_2 lub m_1m_3 . Jeżeli więc trójkąt $m_1p_2p_3$ jest nieskończenie bliskim położeniem trójkąta $m_1m_2m_3$, to z dowodzenia, podanego w art. 38-ym, wynika, że obrót chwilowy około osi O_1 przywodzi układ z położenia, jakie on zajmuje w czasie t , do położenia nieskończenie bliskiego, odpowiadającego czasowi $t + dt$. Mamy przeto twierdzenie: *ruch chwilowy układu niezmiennego, kręcącego się około punktu, jest obrotem około pewnej osi, przechodzącej przez środek kręcenia się*, które możemy także tak wysłowić: *jeżeli w układzie znajduje się jeden punkt w spoczynku, to w każdej chwili znajduje się w tym układzie pewna prosta w spoczynku, która przechodzi przez ów punkt*.

Z tego twierdzenia wynika, że *płaszczyzny normalne do torów, które punkty kręcącego się układu jednocześnie opisują, przecinają się podług osi chwilowej obrotu*.

Obierzmy środek kręcenia się za spólny początek dwu układów współrzędnych x, y, z i ξ, η, ζ , z których pierwszy niech będzie w przestrzeni nieruchomy, a drugi niech się kręci wraz z poruszającym się układem niezmiennym. Wtedy, stosownie do znakowania art. 43-go, będzie $X = 0, Y = 0, Z = 0; X' = 0, Y' = 0, Z' = 0$, z czego wynika, że $\Lambda = 0, M = 0, N = 0$. Współrzędne ruchu postępowego są równe zeru, a pozostają tylko współrzędne Ξ, H, Z obrotu chwilowego. Ponieważ z sześciu współrzędnych ruchu trzy mają wartości naprzód określone, przeto możemy powiedzieć (art. 42), że *układ niezmienny, kręcący się około punktu, ma swobodę rzędu 3-go*.

Równania osi chwilowej ruchu układu są

$$(1) \quad \frac{x}{E} = \frac{y}{H} = \frac{z}{Z}.$$

Osi chwilowe w przestrzeni są tworzącymi stożka [O], który zwiemy stożkiem centralnym w przestrzeni, a miejscem geometrycznym tych prostych kręcącego się układu, które stają się kolejno osiami jego obrotu chwilowego, jest drugi stożek [o], zwany stożkiem centralnym układu. Środek kręcenia się jest wierzchołkiem wspólnym obu stożków. A więc: *ruch ciągły układu, kręcącego się około punktu, może być wywołany przez toczenie się stożka centralnego układu po nieruchomym stożku centralnym w przestrzeni.* Obadwa stożki są do siebie w każdej chwili styczne wzdłuż osi chwilowej obrotu układu.

Przetnijmy obadwa stożki centralne powierzchnią dowolnej kuli, mającej środek w środku kręcenia się, np. powierzchnią kuli o promieniu równym jednostce; otrzymamy na tej kuli dwie krzywe, do siebie styczne, z których, podczas ruchu układu, jedna toczy się po drugiej. Takie dwie krzywe kuliste nazywamy centrodyjami ruchu rozważanego. Stożek [O] daje centrodyję w przestrzeni, a stożek [o] centrodyję układu. Jeżeli obie centrodyje są wiadome, to ruch układu jest określony ze względu na przestrzeń; tocząc bowiem centrodyję układu po nieruchomej centrodyi w przestrzeni, nadajemy układowi ten sam ruch, jaki przez toczenie się obu stożków centralnych wywołany został. Płaszczyzna, przechodząca przez punkt dowolny m , przez środek kręcenia się i przez punkt styczności obu centrodyj, jest normalna do toru punktu m ; prostopadła zaś do niej w tym punkcie wyznacza kierunek ruchu tego punktu.

Jeżeli wiadomą prędkość jednego punktu układu podzielimy przez odległość tego punktu od osi chwilowej, to otrzymamy prędkość kątową obrotu chwilowego. Z tego wynika, że *kręcenie się układu około punktu jest określone ze względu na przestrzeń i na czas, jeżeli znamy prędkość jednego jego punktu i kierunek prędkości drugiego, albo, co wychodzi na jedno, jeżeli znamy równania ruchu jednego jego punktu i tor kulisty punktu drugiego. Te dwa punkty i środek kręcenia się nie powinny leżeć na jednej prostej.*

Możemy ruch ciągły kręcącego się układu jeszcze inaczej wywołać. Niech O będzie osią chwilową w czasie t , a O' osią chwilową w czasie $t + dt$, zaś $d\epsilon$ niech oznacza kąt między tymi dwiema osiami, a $d\varphi$ niech będzie odchyleniem obrotu chwilowego około osi O. Wyprowadziwszy ze środka kręcenia się prostopadłą L do prostych O i O', obróćmy naprzód układ niezmienny około osi O o kąt $d\varphi$, a następnie oś O około prostopadłej L o kąt $d\epsilon$, tak iż oś O przyjmie położenie O'. Jeżeli O'' jest następną osią chwilową, $d\epsilon'$ kątem między O' i O'', a $d\varphi'$ odchyleniem obrotu około O', to wyprowadziwszy ze środka kręcenia się prostopadłą L' do O' i O'', obróćmy układ około O' o kąt $d\varphi'$, a następnie oś O' około L' o kąt $d\epsilon'$, tak iż O' zejdzie się razem z O''. I t. d. Takim sposobem także wywołamy ruch żądany układu. Miej-

scem geometrycznym prostych L jest powierzchnia stożkowa, której tworzące są odpowiednio prostopadłe do płaszczyzn stycznych stożka centralnego w przestrzeni.

49. Spółrzędne Ξ , H , Z obrotu chwilowego, odniesione do układu współrzędnych o początku w środku kręcenia się, mogą być innym sposobem obliczone, niż w art. 43-im, sposobem, który w późniejszych zagadnieniach z kinetyki okaże się bardzo przydatnym.

Niech M (fig. 23) będzie środkiem kręcenia się, Mx , My , Mz osiami nieruchomego układu współrzędnych, a $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ osiami układu współrzędnych, kręcącego się razem z układem rozważanym. Niech nadto $M\xi_1$ będzie śladem ruchomej płaszczyzny $M\xi\eta$ na stałej płaszczyźnie Mxy , a φ kątem tego śladu $M\xi_1$ z osią x ów, liczonym w kierunku obrotu dodatniego około osi Mz . Kąt osi $M\xi$ ze śladem $M\xi_1$ oznaczmy przez ψ , licząc go w kierunku obrotu dodatniego około osi $M\zeta$, a kąt płaszczyzny $M\xi\eta$ z płaszczyzną Mxy , równy kątowi, który dodatnia oś $M\zeta$ tworzy z dodatnią Mz , nazwijmy θ . Przyjmujemy przytym, że obadwa układy prostokątne osi są zgodne (art. 43), przez co sposób liczenia

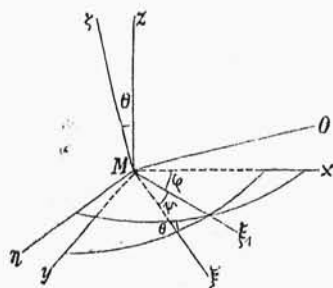


Fig. 23.

każdego z trzech kątów φ , ψ , θ jest dokładnie określony. Wiadomo z geometrii, że położenie układu współrzędnych o osiach $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ względem układu o osiach Mx , My , Mz może być określone przez powyższe trzy kąty; można zatem współrzędne obrotu chwilowego i ich pochodne względem czasu wyrazić w funkcjach tych kątów. Układ osi $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ możemy przywieść do nieskończenie bliskiego położenia, które mu nadaje obrót około osi chwilowej, obracając go o kąt $d\theta$ około $M\xi_1$, następnie o kąt $d\varphi$ około osi Mz , a na koniec o kąt $d\psi$ około osi $M\zeta$. Prędkości katowe tych trzech obrotów są odpowiednio: $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, a one przedstawiają składowe obroty chwilowego, brane odpowiednio w kierunku prostych $M\xi_1$, Mz , $M\zeta$. Ponieważ Ξ , H , Z są składowymi tego samego obrotu względem osi Mx , My , Mz , przeto

$$\begin{aligned}\Xi &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\xi_1, x) + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos(z, x) + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos(\zeta, x), \\ H &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\xi_1, y) + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos(z, y) + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos(\zeta, y), \\ Z &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\xi_1, z) + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos(z, z) + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos(\zeta, z).\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\cos(\xi_1, x) &= \cos \varphi, & \cos(\xi_1, y) &= \sin \varphi, & \cos(\xi_1, z) &= 0, \\ \cos(z, x) &= 0, & \cos(z, y) &= 0, & \cos(z, z) &= 1, \\ \cos(\zeta, x) &= \sin \varphi \sin \theta, & \cos(\zeta, y) &= -\cos \varphi \sin \theta, & \cos(\zeta, z) &= \cos \theta,\end{aligned}$$

przeto, po wstawieniu tych wartości w równania (1), otrzymamy

$$(2) \quad \begin{cases} \Xi = \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \theta \sin \varphi, \\ H = \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin \varphi - \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \theta \cos \varphi, \\ Z = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \theta. \end{cases}$$

Możemy podobnie obliczyć współrzędne obrotu chwilowego w kierunkach osi układu ruchomego, $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$, które oznaczmy odpowiednio przez p , q , r . Otrzymamy bowiem

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\xi_1, \xi) + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos(z, \xi) + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos(\zeta, \xi), \\ q &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\xi_1, \eta) + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos(z, \eta) + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos(\zeta, \eta), \\ r &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\xi_1, \zeta) + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos(z, \zeta) + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos(\zeta, \zeta), \end{aligned}$$

a ponieważ

$$\begin{aligned} \cos(\xi_1, \xi) &= \cos \psi, \quad \cos(\xi_1, \eta) = -\sin \psi, \quad \cos(\xi_1, \zeta) = 0, \\ \cos(z, \xi) &= \sin \theta \cdot \sin \psi, \quad \cos(z, \eta) = \sin \theta \cdot \cos \psi, \quad \cos(z, \zeta) = \cos \theta, \\ \cos(\zeta, \xi) &= 0, \quad \cos(\zeta, \eta) = 0, \quad \cos(\zeta, \zeta) = 1, \end{aligned}$$

przeto

$$(3) \quad \begin{cases} p = \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos \psi + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \theta \sin \psi, \\ q = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \sin \psi + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \theta \cos \psi, \\ r = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos \theta. \end{cases}$$

50. Aby obliczyć przyspieszenie dowolnego punktu układu kręcącego się, obierzmy środek kręcenia się za początek osi współrzędnych, oś chwilową O za oś z -ów, przyjmując kierunek odciętej na tej osi prędkości kątowej Ω obrotu chwilowego jako kierunek dodatni tej osi, a prostopadłą L (art. 48) do osi O i O' obierzmy za oś x -ów. Stosownie do znakowania art. 44-ego, pochodna $\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$ oznacza teraz prędkość kątową obrotu osi O około prostej L . Dla kręcenia się mamy $\frac{d\delta}{dt} = 0$, $V = 0$; składowe więc x'' , y'' , z'' przyspieszenia punktu (x, y, z) , według równań (5) art. 44-go, są

$$(1) \quad \begin{cases} x'' = -\Omega^2 x - \Omega' y + \Omega \omega z, \\ y'' = \Omega' x - \Omega^2 y, \\ z'' = -\Omega \omega x. \end{cases}$$

Wypadkowa Γ przyspieszeń x'' i y'' przedstawia rzut przyspieszenia punktu rozważanego na płaszczyznę, prostopadłą do osi chwilowej. Jeżeli więc ρ oznacza odległość tego punktu od osi chwilowej, a zatem $\rho^2 = x^2 + y^2$, to otrzymamy

$$(2) \quad \Gamma^2 = x''^2 + y''^2 = \Omega^2 \omega^2 z^2 - 2\Omega\omega z(\Omega^2 x + \Omega' y) + \rho^2(\Omega^4 + \Omega'^2),$$

a kwadrat przyspieszenia tego punktu wyrazi się wzorem

$$(3) \quad \gamma^2 = \Gamma^2 + z''^2 = (x^2 + z^2)\Omega^2\omega^2 - 2\Omega\omega z(\Omega^2 x + \Omega' y) + \rho^2(\Omega^4 + \Omega'^2).$$

Jeżeli ϕ oznacza kąt, który przyspieszenie Γ tworzy z promieniem ρ , wystawionym w punkcie (x, y, z) prostopadle do osi chwilowej, to z powyższych wzorów wynika

$$(4) \quad \tan \phi = \frac{\Omega\omega \cdot zy - \Omega'\rho^2}{\Omega\omega \cdot zx - \Omega^2\rho^2}.$$

Dla punktów, leżących na płaszczyźnie, przechodzącej przez dwie sąsiednie osi chwilowe, a zatem na płaszczyźnie stycznej do stożka centralnego w przestrzeni, jest $x = 0$, a zatem $z'' = 0$; przyspieszenie γ tych punktów jest więc równoległe do płaszczyzny xy . Dla każdego innego punktu otrzymamy przyspieszenie, którego rzut z'' na oś chwilową nie jest równy zeru.

Rozłożmy Γ na dwie składowe, Γ_ρ w kierunku promienia ρ i Γ_π w kierunku prostopadłym do tego promienia; wówczas

$$(5) \quad \begin{cases} \Gamma_\rho = \Gamma \cdot \cos \phi = \frac{1}{\rho} (\Omega\omega zx - \Omega^2\rho^2), \\ \Gamma_\pi = \Gamma \cdot \sin \phi = \frac{1}{\rho} (\Omega\omega zy - \Omega'\rho^2). \end{cases}$$

Tym sposobem rozkładamy przyspieszenie każdego punktu na trzy przyspieszenia wzajemnie prostopadłe, Γ_ρ , Γ_π i z'' , z których dwa pierwsze są prostopadłe do osi chwilowej, a ostatnie jest do téjże osi równoległe. Podane wzory pozwalają rozwiązać wszelkie zagadnienia, dotyczące się krzywizny torów kulistych, przez punkty układu opisywanych.

51. RUCH POSUWISTY. Okazaliśmy (art. 45), że gdy trzy punkty układu niezmiennego, nie leżące na jednej prostej, poruszają się równoległe do téjże samej płaszczyzny, to wówczas każdy punkt układu porusza się równoległe do téjsamej płaszczyzny. Taki ruch nazwaliśmy (art. 21) ruchem posuwistym. Wyobraźmy sobie układ, który takiego ruchu dokonywa, przecięty płaszczyzną kierującą (art. 21); wtedy punkty układu, leżące na téj płaszczyźnie, utworzą pewną figurę, którą jako przekrój układu uważać możemy. Podczas tego ruchu owa figura będzie się posuwała na swojej płaszczyźnie, i nawzajem, jeżeli taki przekrój płaski układu niezmiennego posuwa się na swojej płaszczyźnie, to ruch całego układu jest posuwisty. Ruch posuwisty można także uważać jako kręcenie się około punktu, znajdującego się nieskończenie daleko w kierunku prostopadłym do płaszczyzny kierującej (art. 21), a przeto ten ruch jest określony geometrycznie, jeżeli

znany tory dwu punktów układu, posuwających się na płaszczyźnie kierującej.

Niech m_1 i m_2 (fig. 24) oznaczają położenia dwu punktów, ruch wyznaczających, na płaszczyźnie kierującej w czasie t , a m'_1 i m'_2 niech będą odpowiednimi położeniami tych punktów w czasie $t + dt$. Wyprowadźmy ze środka α prostą $m_1m'_1$ do niej prostopadłą i podobnie ze środka β prostą $m_2m'_2$ prostopadłą do téjże prostej, a te dwie prostopadłe niech się przecinają w punkcie O . Z równości trójkątów Om_1m_2 i $Om'_1m'_2$ wynika, że kąty m_1Om_2 i $m'_1Om'_2$ są sobie równe, wskutek czego kąt $m_1Om'_1$ jest równy kątowi $m_2Om'_2$. Jeżeli przeto z punktu O wyprowadzimy prostopadłą do płaszczyzny i obrócimy układ około téj prostej o kąt $d\varphi = m_1Om'_1 = m_2Om'_2$, to przywieziemy układ do położenia, które on ma zająć po upływie czasu dt . Gdy dt staje się nieskończenie małą, granicami prostych $m_1m'_1$ i $m_2m'_2$ będą styczne do odpowiednich torów punktów m_1 i m_2 , a granicami prostopadłych αO i βO będą normalne do tych torów w tychże samych punktach; granicą więc punktu O będzie punkt przecięcia się tych dwu normalnych. Mamy zatem następujące twierdzenia, jedno: *ruch chwilowy układu, poruszającego się równolegle do płaszczyzny, może być wywołany przez obrót około prostej, prostopadłej do téj płaszczyzny; ta prosta jest osią chwilową obrotu tego układu*; drugie: *płaszczyzny normalne do torów, które podczas ruchu posuwistego punkty układu jednocześnie opisują, przecinają się podług osi chwilowej obrotu*.

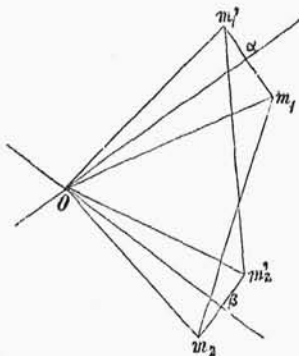


Fig. 24.

Jeżeli rozważamy ruch figury płaskiej na swojej płaszczyźnie, to punkt O , w którym przecinają się normalne jednocześnie do torów dwu punktów, ruch wyznaczających, nazywamy *środkiem chwilowym obrotu téj figury*. Obróciwszy figurę w jęj płaszczyźnie około tego środka, wywołujemy jęj ruch chwilowy, przez dane warunki określony. *Normalne do torów, które opisują jednocześnie punkty figury płaskiej, poruszającej się na swęj płaszczyźnie, przecinają się w środku chwilowym*. *Prędkość ruchu każdego punktu figury jest proporcjonalna względem odległości tego punktu od środka chwilowego*. Z ostatniego twierdzenia wynika, że ruch posuwisty jest zupełnie określony pod względem przestrzeni i czasu, jeżeli znamy wielkość i kierunek prędkości jednego punktu układu, oraz kierunek prędkości punktu drugiego.

Oberzmy płaszczyznę kierującą jako płaszczyznę xy , a z dowolnego punktu stałego A téj płaszczyzny wyprowadźmy do niej prostopadłe oś z . Ponieważ ruch chwilowy układu jest obrotem około prostej, równoległej do osi z , przeto spółrzedne Ξ , H i N ruchu chwilowego będą ciągle równe zero, z czego wnosimy, podobnie jak w art. 48-ym, że *układ niezmienny, poruszający*

się równolegle do płaszczyzny, ma swobodę ruchu rzędu 3-go. Ten ruch należy więc, pod względem rzędu jego swobody, do ruchów tegoż samego rodzaju, co kręcenie się około punktu.

52. Oś chwilowa jest jedyną prostą w układzie, która w chwili uważanej pozostaje w spoczynku. W każdej chwili znajduje się w układzie taka prosta, która nieustannie zmienia miejsce swoje i w przestrzeni i w poruszającym się układzie. Miejscem geometrycznym osi chwilowych w przestrzeni jest walec, którego tworzące są prostopadłe do płaszczyzny kierującej. Jeżeli ślad tego walca na płaszczyźnie kierującej przyjmiemy jako jego podstawę, to możemy wywołać ciągły ruch posuwisty układu, nieustannie obracając układ około tworzącej tego walca, podczas gdy ta tworząca posuwa się równolegle do siebie wzdłuż podstawy walca. Walec [O], którego tworzące są kolejno chwilowymi osiami obrotu układu, nazywamy walcem centralnym w przestrzeni.

Oś chwilowa atoli zmienia jednocześnie położenie swoje względem układu, t. j. coraz inna prosta układu staje się kolejno jego osią chwilową. Miejscem geometrycznym tych prostych o w układzie, które stają się jego osiami chwilowymi, jest drugi walec [o], który zwiemy walcem centralnym układu. Obadwa walce są do siebie styczne wzdłuż osi chwilowej. Jakoż, skoro prosta O jest w czasie t osią chwilową, z którą razem się schodzi prosta o w układzie, to sąsiednia tworząca o' walca [o] wskutek obrotu około O razem się zejdzie z sąsiednią tworzącą O' walca [O], aby w następnej chwili stać się osią obrotu. Obadwa więc walce mają wspólne dwie sąsiednie tworzące O i O' , są przeto styczne wzdłuż prostej O , będącej właśnie osią chwilową. A zatem *ruch ciągły układu, poruszającego się równolegle do płaszczyzny, może być wywołany przez toczenie się walca centralnego układu na walcu centralnym w przestrzeni.*

Jeżeli rozważać będziemy ruch ciągły figury płaskiej na płaszczyźnie, to zamiast powyższych walców otrzymamy dwie linie krzywe na płaszczyźnie, cechujące ruch tej figury. Miejscem geometrycznym środków chwilowych na płaszczyźnie (uważanej za nieruchomą), na której ruch zachodzi, będzie pewna linia krzywa [O], którą nazywamy centrodyją w płaszczyźnie figury; a miejscem geometrycznym tych punktów o posuwającej się figury, które stają się kolejno jej środkami chwilowymi, będzie druga linia krzywa [o], którą nazywamy centrodyją figury. Obie krzywe są do siebie w każdej chwili styczne w tym punkcie, który jest właśnie środkiem chwilowym, a *ruch ciągły figury, poruszającej się na płaszczyźnie, może być wywołany przez toczenie się centrodyi tej figury po centrodyi w płaszczyźnie figury.* Prosta, łącząca dowolny punkt m figury z punktem styczności obu centrodyj, jest normalna do toru (m) tego punktu w punkcie m .

Okręślenie geometryczne ruchu posuwistego figury płaskiej przez tory dwu punktów tej figury nie jest jedyne; można ten ruch także innymi sposobami określić. Niech będzie dana pewna prosta L tej figury, a na tej prostej punkt a ; ruch figury będzie określony, jeżeli mieć będziemy pewną linią

krzywą (L), do której prosta L ma być wciąż styczna, tudzież tor (a) punktu a . Jakoż, poprowadźmy w punkcie a normalną do toru (a), a w punkcie l , w którym prosta L jest styczna do linii (L), poprowadźmy normalną do krzywej (L); punkt przecięcia się tych normalnych będzie widocznie środkiem chwilowym. Niech będą dane dwie proste L_1 i L_2 téj figury, linija krzywa (L_1), do której prosta L_1 ma być wciąż styczna, i krzywa (L_2), do której L_2 ma być ciągle styczna; wskutek tego ruch posuwisty figury będzie także określony. Zamiast prostych L_1 i L_2 mogą być dane dwie linije krzywe M_1 i M_2 , mające być styczne odpowiednio do krzywych (M_1) i (M_2), a przez to ruch figury będzie określony.

53. ANALIZA RUCHU POSUWISTEGO. Możemy teorią tego ruchu rozwiniąć także sposobem analitycznym. Używać będziemy współrzędnych prostokątnych.

Przez punkt A , obrany stale na płaszczyźnie kierującej, poprowadźmy dwie nieruchome osi prostokątne Ax i Ay , a w dowolnym punkcie M poruszającej się figury (w punkcie ruch wyznaczającym) obierzmy na téj płaszczyźnie drugi układ osi współrzędnych prostokątnych $M\xi$, $M\eta$, które poruszają się razem z figurą. Jeżeli x_0 , y_0 oznaczają współrzędne punktu M względem osi Ax , Ay , zaś a_1 , b_1 i a_2 , b_2 oznaczają dostawy kierunkowe osi odpowiednio $M\xi$, $M\eta$ względem Ax i Ay , to między współrzędnymi zmiennymi x , y dowolnego punktu względem tych osi, a współrzędnymi stałymi ξ , η tegoż samego punktu względem osi $M\xi$ i $M\eta$, zachodzą związki

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 + a_1\xi + a_2\eta, \\ y = y_0 + b_1\xi + b_2\eta, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0), \\ \eta = a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0), \end{cases}$$

przyczym

$$(2) \quad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1, & a_2^2 + b_2^2 = 1, & a_1^2 + a_2^2 = 1, & b_1^2 + b_2^2 = 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 = 0, & a_1b_1 + a_2b_2 = 0. \end{cases}$$

Oznaczając pochodne względem czasu zapomocą krósek u góry, kładąc

$$(3) \quad \Omega = a_1b'_1 + a_2b'_2 = -(a'_1b_1 + a'_2b_2),$$

i różniczkując równania (1) względem czasu, otrzymamy

$$(4) \quad x' = x'_0 - \Omega(y - y_0), \quad y' = y'_0 + \Omega(x - x_0).$$

Kładąc zaś jeszcze

$$(5) \quad \Lambda = x'_0 + \Omega y_0, \quad M = y'_0 - \Omega x_0,$$

mieć będziemy

$$(6) \quad x' = -\Omega y + \Lambda, \quad y' = \Omega x + M.$$

Przy $x' = 0$ i $y' = 0$ otrzymamy współrzędne X_0 , Y_0 środka chwilowego,

$$(7) \quad X_0 = -\frac{M}{\Omega}, \quad Y_0 = \frac{\Lambda}{\Omega}.$$

Wyrażmy z tych równań Λ i M przez X_0 i Y_0 i wstawmy te wartości w równania (6) otrzymamy

$$(8) \quad x' = -\Omega(y - Y_0), \quad y' = \Omega(x - X_0).$$

Z ostatnich równań okazuje się (art. 24), że każdy punkt układu obraca się około osi, przechodzącej przez punkt (X_0, Y_0) i prostopadłej do płaszczyzny kierującej, oraz że Ω jest prędkością kątową tego obrotu. Wielkości Λ , M i Ω przedstawiają spółrzedne obrotu chwilowego względem osi Ax , Ay i prostej Az , poprowadzonej przez punkt A prostopadle do płaszczyzny xy .

Oznaczmy przez ξ_0 i η_0 spółrzedne względem osi $M\xi$ i $M\eta$ tego punktu na płaszczyźnie, który jest środkiem chwilowym. Z równań (1) i (7) otrzymamy

$$(9) \quad \xi_0 = \frac{1}{\Omega}(b_1x'_0 - a_1y'_0), \quad \eta_0 = \frac{1}{\Omega}(b_2x'_0 - a_2y'_0).$$

Gdy w równaniach (7) wyrazimy spółrzedne X_0 i Y_0 w funkcji czasu (z wiadomych ruchów dwu punktów ruch wyznaczających) i z tych równań wyrugujemy czas, to otrzymamy $F(X_0, Y_0) = 0$, jako równanie centrody $[O]$ w płaszczyźnie kierującej. Jeżeli podobnie wyrazimy wielkości po prawych stronach równań (9) jako funkcje czasu i wyrugujemy z nich czas, to otrzymamy równanie $\Phi(\xi_0, \eta_0) = 0$ centrody $[o]$ figury. Sprawdzenie tego, że obie centrodyje są do siebie styczne w środku chwilowym, pozostawiamy czytelnikowi.

54. W celu obliczenia przyspieszenia dowolnego punktu, obierzmy środek chwilowy o jako początek osi spółrzednych, styczną spólną do centrodyj $[O]$ i $[o]$ w kierunku od środka chwilowego O do środka sąsiedniego O' , jako oś x , a normalną spólną do tych krzywych, braną w takim kierunku, żeby oś x po obrocie o kąt prosty około punktu O w kierunku prędkości Ω zajęła położenie tej normalnej, obierzmy jako oś y . Wtedy z równań (4) art. 44-go otrzymamy następujące składowe x' i y' prędkości punktu (x, y) w kierunkach powyższych osi:

$$(1) \quad x' = -\Omega y, \quad y' = \Omega x.$$

W równaniach (5) art. 44-go $d\delta$ oznacza najkrótszą odległość dwu sąsiednich osi chwilowych; w naszym więc przypadku $d\delta$ przedstawia długość elementu OO' centrody $[O]$. Jeżeli długość tego elementu oznaczmy tu przez $d\sigma$, i nazwiemy $V = \frac{d\sigma}{dt}$, to możemy z przytoczonych równań otrzymać składowe przyspieszenia punktu (x, y) , kładąc V zamiast $\frac{d\delta}{dt}$ i biorąc odpowiednio do warunków ruchu posuwistego, $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, $\varepsilon'' = 0$. Tym sposobem otrzymamy składowe przyspieszenia,

$$(2) \quad x'' = -\Omega^2 x - \Omega' y, \quad y'' = \Omega' x - \Omega^2 y - V\Omega.$$

Kładąc $x'' = 0$ i $y'' = 0$, otrzymamy na płaszczyźnie kierującej pewien punkt, którego przyspieszenie w chwili uważanej jest równe zeru, który zatem podczas dwu elementów czasu, po sobie następujących, posuwa się na tej płaszczyźnie z tą samą prędkością. Ten punkt nazywamy środkiem przyspieszenia. Oznaczywszy jego współrzędne w tymże układzie przez X_1 i Y_1 , otrzymamy z równań (2), kładąc $x'' = 0$ i $y'' = 0$,

$$(3) \quad X_1 = \frac{\Omega \Omega' V}{\Omega^4 + \Omega'^2}, \quad Y_1 = -\frac{\Omega^3 V}{\Omega^4 + \Omega'^2}.$$

Poprowadźmy przez środek przyspieszenia osi nowego układu współrzędnych, równoległe do poprzednich, i oznaczmy przez x_1 i y_1 współrzędne punktu (x, y) w tym układzie; wówczas $x = X_1 + x_1$, $y = Y_1 + y_1$. Podstawiając te wartości w równaniu (2), otrzymamy inne wyrażenia x_1'' , y_1'' składowych przyspieszenia uważanego punktu,

$$(4) \quad \begin{cases} x_1'' = -\Omega^2 x_1 - \Omega' y_1, \\ y_1'' = \Omega' x_1 - \Omega^2 y_1. \end{cases}$$

Kwadrat zatem przyspieszenia γ tego punktu będzie

$$(5) \quad \gamma^2 = x_1''^2 + y_1''^2 = (\Omega^4 + \Omega'^2)(x_1^2 + y_1^2) = (\Omega^4 + \Omega'^2)\delta_1^2,$$

gdzie δ_1 oznacza odległość tego punktu od środka przyspieszenia. Z tego równania okazuje się, że miejscem geometrycznym punktów, posiadających w pewnej chwili toż samo (co do wielkości, a nie co do kierunku) przyspieszenie, jest koło, którego środkiem jest środek przyspieszenia. *Przyspieszenie każdego punktu jest proporcjonalne względem odległości tego punktu od środka przyspieszenia.*

Jeżeli przypuścimy, że punkt (x_1, y_1) obraca się chwilowo około środka przyspieszenia z taką samą prędkością kątową Ω , z jaką obraca się rzeczywiście około środka chwilowego, to składowe \bar{x}_1' , \bar{y}_1' jego prędkości wskutek tego obrotu byłyby, według (1),

$$(6) \quad \bar{x}_1' = -\Omega y_1, \quad \bar{y}_1' = \Omega x_1.$$

Niech punkt obraca się także w następnym elemencie czasu około środka przyspieszenia z taką samą prędkością kątową $\Omega + \Omega' dt$, z jaką obraca się rzeczywiście około środka chwilowego, temu elementowi czasu odpowiedniego; składowe jego przyspieszenia \bar{x}_1'' i \bar{y}_1'' otrzymamy, różniczkując równania (6) względem czasu. Będzie więc:

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1'' &= -\Omega \bar{y}_1' - \Omega' y_1 = -\Omega^2 x_1 - \Omega' y_1, \\ \bar{y}_1'' &= \Omega \bar{x}_1' + \Omega' x_1 = \Omega^2 x_1 - \Omega^2 y_1. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem $\bar{x}_1'' = x_1''$, $\bar{y}_1'' = y_1''$. To wyraża następujące twierdzenie: *każdy punkt otrzymuje takie przyspieszenie, jak gdyby podczas dwu elementów czasu obracał się około środka przyspieszenia z takimiż samymi prędkościami kątowymi, z jakimi obraca się około środków chwilowych, tym elementom czasu odpowiednich.*

Jeżeli przez Γ oznaczymy przyspieszenie punktu, brane w kierunku promienia δ_1 ku środkowi przyspieszenia, a przez Γ_1 oznaczymy przyspieszenie tego punktu, brane w kierunku prostopadłym do δ_1 , to powyższe równania dają

$$(8) \quad \Gamma = -\Omega^2 \delta_1, \quad \Gamma_1 = \Omega' \delta_1.$$

Znak mniej w pierwszym równaniu oznacza, że składowa Γ jest skierowana ku środkowi przyspieszenia. Jeżeli przez (γ, δ_1) oznaczymy kąt, który przyspieszenie γ tworzy z prostą δ_1 , braną od środka przyspieszenia ku punktowi uważanemu, to

$$(9) \quad \tan(\gamma, \delta_1) = -\frac{\Gamma_1}{\Gamma} = \frac{\Omega'}{\Omega^2},$$

co oznacza, że przyspieszenie każdego punktu tworzy kąt stały z promieniem, łączącym ten punkt ze środkiem przyspieszenia. Ponieważ, według (3),

$$(10) \quad \frac{\Omega'}{\Omega^2} = -\frac{X_1}{Y_1},$$

przeto widzimy, że ów kąt równa się kątowi, który prosta, łącząca środek chwilowy ze środkiem przyspieszenia, tworzy z normalną spólną do centrodyj $[O]$ i $[o]$ w środku chwilowym, braną w kierunku ujemnych y -ów. Otrzymujemy zatem kierunek przyspieszenia każdego punktu podobnym sposobem za pośrednictwem środka przyspieszeń, jak prędkość za pośrednictwem środka chwilowego.

55. WYKRĘŚLENIE ŚRODKA KRZYWIZNY. Niech krzywa $[O]$ (fig. 25) będzie centrodyją w płaszczyźnie, a krzywa $[o]$ centrodyją figury, poruszającej

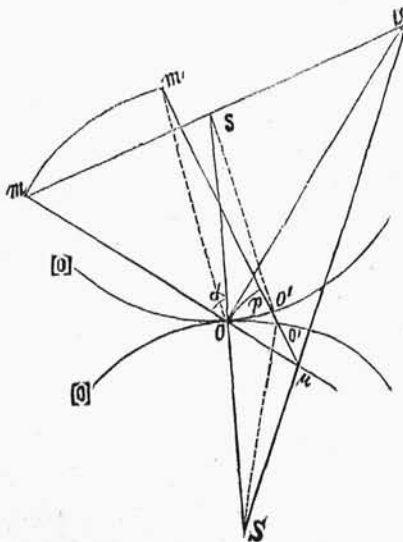


Fig. 25.

się na tej płaszczyźnie; obie krzywe są do siebie styczne w środku chwilowym O . Obierzmy w figurze punkt dowolny m ; prosta mO jest normalną do toru (m) tego punktu w punkcie m . Jeżeli O' oznacza sąsiedni środek chwilowy, a m' sąsiednie położenie punktu m , to prosta $m'O'$ jest normalną do (m) w punkcie m' , a przeto punkt p , w którym przecinają się proste mO i $m'O'$, jest środkiem krzywizny toru (m) w punkcie m . Punkt m przyjmie położenie m' wskutek obrotu chwilowego około punktu O o kąt nieskończenie mały $d\varphi = mOm'$, a ponieważ, wskutek tego obrotu, punkt o' , nieskończenie bliski punktowi O

na centrodyi figury, zejdzie się razem z punktem O' , przeto kąt obrotu $d\varphi$ około środka chwilowego O jest równy kątowi, który styczna do centrodyi figury w punkcie o' tworzy ze styczną do centrodyi w płaszczyźnie w punkcie O' . Niech S będzie środkiem krzywizny centrodyi $[O]$ w punkcie O , a s środkiem krzywizny centrodyi $[o]$ w tymże samym punkcie, a zatem sS normalną spólną do tych krzywych w punkcie O ; wtedy kąt $o'sO$ będzie kątem, który styczna do $[o]$ w punkcie o' tworzy ze styczną spólną do centrodyj w punkcie O , a $O'SO$ kątem, który styczna do $[O]$ w O' tworzy z tą samą styczną spólną. Jeżeli więc centrodyje są do siebie styczne zewnętrznie w O , to kąt $d\varphi = o'sO + O'SO$. Gdy oznaczymy przez $d\sigma$ długość elementu $OO' = Oo'$ centrodyj, przez R i r promienie krzywizny centrodyj odpowiednio $[O]$ i $[o]$ w punkcie O , to

$$(1) \quad d\varphi = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Oznaczmy przez ds długość elementu mm' toru (m) , a przez δ odległość Om punktu m od środka chwilowego; wówczas

$$(2) \quad ds = \delta \cdot d\varphi = \delta \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Zakreślmy ze środka krzywizny μ promieniem μO łuk, który normalną $m'\mu$ przecina w punkcie p , i oznaczmy przez $d\psi$ kąt krzywizny $m\mu m'$ toru (m) , a przez ρ promień krzywizny tego toru w punkcie m ; otrzymamy $Op = (\rho - \delta) \cdot d\psi$. Trójkąt nieskończenie mały $O'Op$ jest prostokątny przy p , a kąt $O'Op$ jest równy kątowi α , który normalna mO tworzy z normalną sS do obu dwu centrodyj; mamy więc z tego trójkąta $Op = d\sigma \cdot \cos \alpha$, a zatem

$$(3) \quad d\sigma \cdot \cos \alpha = (\rho - \delta) d\psi.$$

A ponieważ $ds = \rho \cdot d\psi$, przeto, według (2) i (3),

$$\delta \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) = \frac{\rho}{\rho - \delta} \cdot \cos \alpha,$$

któreto równanie możemy tak napisać:

$$(4) \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\rho - \delta} \right) \cos \alpha.$$

To równanie pozwala obliczyć promień krzywizny ρ i wyznaczyć środek krzywizny μ toru dowolnego punktu posuwającej się figury.

56. Według ostatniego wzoru można środek krzywizny wyznaczyć za pomocą wykreślenia liniowego, a to na podstawie pewnej własności prostej, przecinającej ramiona kąta, którąto własność naprzód udowodnimy. Niech będzie dany kąt $A \vee B$ (fig. 26) i między jego ramionami dowolnie obrany punkt O ; przez ten punkt prowadzimy w dowolnym kierunku poprzeczną ab , która tworzy z prostą νO kąt α' , a z prostopadłą AB do νO kąt α . Spuśmy z punktów a i b prostopadłe aa' i bb' na νO i oznaczmy odpowiednio przez α_1 i α_2 kąty $a \vee O$ i $b \vee O$. Mamy tu

$$\tan \alpha_1 = \frac{aa'}{vO + Oa'}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{bb'}{vO - Ob'}, \quad \text{a więc}$$

$$aa' \cdot \cotg \alpha_1 = vO + Oa', \quad bb' \cdot \cotg \alpha_2 = vO - Ob'.$$

Z figury wynika, że

$$Oa' = aa' \cdot \cotg \alpha', \quad Ob' = bb' \cdot \cotg \alpha', \quad \text{a zatem}$$

$$\frac{1}{aa'} = \frac{\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha'}{vO}, \quad \frac{1}{bb'} = \frac{\cotg \alpha_2 + \cotg \alpha'}{vO},$$

$$\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} = \frac{\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2}{vO}.$$

Ponieważ strona prawa ostatniego równania jest stała dla wszystkich poprzecznych, przechodzących przez punkt O , przeto strona lewa jest wielkością stałą. Ponieważ $aa' = Oa \cdot \sin \alpha'$, $bb' = Ob \cdot \sin \alpha'$, przeto

$$\left(\frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob} \right) \cdot \frac{1}{\sin \varphi'} = \text{stałej}.$$

A więc, gdy poprowadzimy przez punkt O poprzeczną AB prostopadłą do vO , to

$$\left(\frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob} \right) \cdot \frac{1}{\sin \varphi'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \left(\frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob} \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

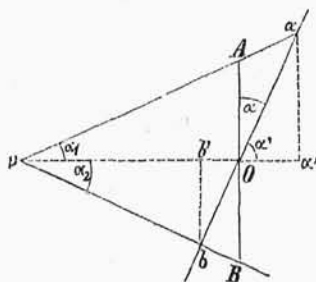


Fig. 26.

Gdyby punkt O znajdował się zewnątrz danego kąta, należałoby w obu stronach tego równania zamiast sum brać różnice odwrotności odcinków odpowiednich.

Porównyując wzór ostatni z równaniem (4) artykułu poprzedzającego, dostrzeżemy, że środek krzywizny μ można tak wyznaczyć. Wyprowadźmy z punktu O (fig. 25) prostą Ov do normalnej mO , i szukajmy punktu v , w którym ta prosta przecina prostą ms , łączącą punkt m ze środkiem krzywizny s centrody figury; połączmy następnie prostą punkt v ze środkiem krzywizny S centrody w płaszczyźnie. Ta prosta vS przetnie normalną mO w środku krzywizny μ toru (m) w punkcie m . Jakoż proste $m\mu$ i sS odpowiadają powyższemu poprzecznym, przecinają bowiem ramiona kąta mvS , przechodząc obie przez punkt O , a z nich prosta $m\mu$ jest prostopadłą do vO . Stosuje się więc do tych prostych tylko wyprowadzony wzór, wyznaczający, według związku (4) art. 55-go, środek krzywizny. Powyższe wykreślenie podał L. Euler, a wznowił je Savary. — W równanie (4) art. 55-go, wprowadźmy, dla krótkości,

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r};$$

wskutek tego owo równanie możemy tak pisać:

$$(1) \quad \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\rho - \delta} = \frac{1}{K \cdot \cos \alpha}.$$

Przyjmując w tym równaniu $\rho = \infty$, będziemy mogli na prostej mO wyznaczyć ten punkt, który jest punktem przecięcia swego toru. Między odległością Δ tego punktu osobliwego od środka chwilowego, a nachyleniem α té prostej względem prostej sS , zachodzi, według (1), związek

$$(2) \quad \frac{\cos \alpha}{\Delta} = \frac{1}{K}.$$

Obierzmy punkt O (fig. 27) jako początek układu osi współrzędnych; niech styczna do centrodyi w kierunku toczenia się centrodyi $[o]$ będzie osią Ox , a normalna spólna do obudwu krzywych w kierunku Os

osią Oy . Wtedy $\frac{\cos \alpha}{\Delta} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, a zatem miejsce geometryczne punktów, które w chwili uważanej są punktami przecięcia swych torów, według (2), przedstawia równanie

$$(3) \quad x^2 + y^2 - Kx = 0.$$

Jest więc ono kołem o promieniu $\frac{K}{2}$, a sty-

cznym do obudwu centrodyj w środku chwilowym. Punkt P , w którym normalna sS to koło przecina, znajduje się na téj normalnej po stronie środka krzywizny s centrodyi figury. To koło nazywamy kołem przecięcia figury, a punkt P nazywamy biegunem przyspieszenia. Punkty na kole przecięcia nie mają przyspieszenia normalnego, a prosta mP , łącząca dowolny punkt m na tym kole z biegunem przyspieszenia, wyznacza kierunek chwilowego ruchu tego punktu. Równaniu (1) możemy nadać jeszcze postać

$$(4) \quad \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\rho - \delta} = \frac{1}{\Delta}.$$

Obierzmy następnie na prostej Om (fig. 27) dowolny punkt n w odległości δ od środka chwilowego i oznaczmy przez γ_n przyspieszenie normalne tego punktu; ponieważ Ω oznacza prędkość kątową obrotu około środka chwilowego, przeto $\gamma_n = \frac{\Omega^2 \delta^2}{\rho}$. A gdy, według (4), $\delta^2 = \rho(\delta - \Delta)$, zatem

$$(5) \quad \gamma_n = \Omega^2(\delta - \Delta),$$

co wyraża następujące twierdzenie: *przyspieszenie normalne każdego punktu jest proporcjonalne względem jego odległości od tego punktu, w którym normalna do jego toru przecina koło przecięcia.*

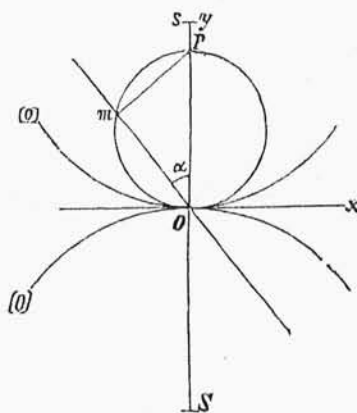


Fig. 27.

57. RUCH LINII PROSTÉJ NA PŁASZCZYŹNIE. Jeżeli L jest dowolną prostą figury, poruszającą się na płaszczyźnie, to promienie, łączące punkty tej prostej ze środkiem chwilowym O , przedstawiają pęk normalnych do torów, które te punkty jednocześnie opisują. Niech L' będzie nieskończenie bliskim (sąsiednim) położeniem prostej L ; promienie, łączące sąsiednie położenia tych samych punktów na prostej L' z sąsiednim środkiem chwilowym O' , stanowią także pęk jednoczesnych normalnych do torów tychże punktów. Ponieważ obadwa pęki normalnych są jednokręśne, a punkt, w którym przecinają się dwie sąsiednie normalne do toru tegoż samego punktu, jest środkiem krzywizny tego toru, przeto mamy twierdzenie: *środki krzywizny torów, które punkty poruszającej się prostej jednocześnie opisują, tworzą krzywą rzędu 2-go.* Ta krzywa przechodzi przez dwa sąsiednie środki chwilowe jako wierzchołki dwu pęków jednokręśnych; jest ona zatem styczna do obu dwu centrodyj w odpowiednim środku chwilowym. Ponieważ punkty, w których prosta L przecina koło przegięcia, opisują tory, których promienie krzywizny w tych punktach są nieskończenie wielkie, przeto krzywa środków krzywizny będzie elipsą, hiperbolą, lub parabolą, stosownie do tego, czy prosta L przechodzi mimo koła przegięcia, czy przecina je, czy też jest styczna do niego. Jeżeli prosta jest styczna do koła przegięcia, to promień, łączący punkt styczności ze środkiem chwilowym, będzie równoległy do osi paraboli; jeżeli ta prosta przecina koło przegięcia, to promienie, łączące punkty przecięcia ze środkiem chwilowym, będą równoległe do asymptót hiperboli. Dla każdej prostej, przechodzącej przez środek koła przegięcia, krzywa środków krzywizny będzie hiperbolą równoboczną.

Jeżeli L jest prostą w nieskończoności płaszczyzny figury, to otrzymamy pęk normalnych o wierzchołku O' , przesuwając pęk normalnych o wierzchołku O w kierunku OO' aż do punktu O' i obracając go w tym położeniu o nieskończenie mały kąt obrotu figury. Obadwa pęki normalnych będą więc przystające, z czego wynika, że odpowiednia krzywa środków krzywizny będzie kołem, stycznym do obu dwu centrodyj w środku chwilowym.

Łącząc każdy punkt m dowolnej prostej L ze środkiem chwilowym O i wystawiając w punkcie m prostopadłą do promienia mO , otrzymamy styczną do toru tego punktu; łącząc zaś punkt m ze środkiem przyspieszenia O_1 i prowadząc przez m drugą prostą, która z promieniem mO_1 tworzy takież sam kąt, jaki prosta OO_1 tworzy z normalną spólną do obu dwu centrodyj, otrzymamy kierunek przyspieszenia punktu m (art. 53). Ponieważ obwiednią jednego ramienia kąta stałego, którego wierzchołek porusza się po linii prostej, a którego drugie ramię przechodzi przez punkt stały, jest parabola (twierdzenie Maclaurin'a), przeto mamy twierdzenie: *obwiednią stycznych do torów wszystkich punktów poruszającej się linii prostej jest parabola, której ogniskiem jest środek chwilowy; a obwiednią prostych, wskazujących kierunki przyspieszenia wszystkich punktów poruszającej się linii prostej, jest także parabola, której ogniskiem jest środek przyspieszenia.*

PRZYKŁADY I ĆWICZENIA.

(1). Staw Hook'a składa się z krzyża prostokątnego i równoramiennego, którego ramiona A_1B_1 (fig. 28) i A_2B_2 są osadzone w dwu kabląkach, stałe z osiami O_1 i O_2 połączonych. Osi przecinają się w środku krzyża M . Jeżeli oś O_1 obraca się, to ramię krzyża A_1B_1 obraca się na płaszczyźnie, przechodzącej przez M prostopadle do O_1 , wprawiając ramię A_2B_2 w obrót na płaszczyźnie, przechodzącej przez M prostopadle do O_2 , wskutek czego przenosi się obrót na oś O_2 . Oś O_1 nazywamy osią pędzącą, zaś O_2 osią pędzoną. Ponieważ każda oś jest stałe osadzona w panewce, przeto płaszczyzny obrotu ramion A_1B_1 i A_2B_2 tworzą pewien kąt stały θ . Staw kręci się około punktu M , a mamy wyznaczyć stosunek prędkości kątowych ω_1 , ω_2 , z którymi obracają się odpowiednio obie osi. Obierzmy prostą, podług której przecinają się płaszczyzny obrotu ramion (fig. 29), jako oś x -ów, punkt M jako początek, płaszczyznę obrotu ramienia A_1B_1 jako płaszczyznę Mxy , a oś O_1 jako oś z -ów. Licząc odpowiednie kąty obrotu φ_1 i φ_2 osi O_1 i O_2 od osi x , mamy

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Ponieważ kąt A_1MA_2 jest prosty, przeto z trójkąta sferycznego A_1A_2C wynika

$$\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \theta = 0, \text{ czyli} \\ \text{tang} \varphi_1 \cdot \text{tang} \varphi_2 \cdot \cos \theta = -1.$$

Różniczkując to równanie względem czasu i rugując θ , otrzymamy

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1} = -\frac{\sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1}.$$

Z równania zaś poprzedzającego otrzymamy

$$\cos \varphi_2 = \frac{\cos \theta \cdot \text{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta \cdot \text{tang}^2 \varphi_1}}, \quad \sin \varphi_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta \cdot \text{tang}^2 \varphi_1}};$$

rugując przeto kąt φ_2 , mieć będziemy

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \theta}.$$

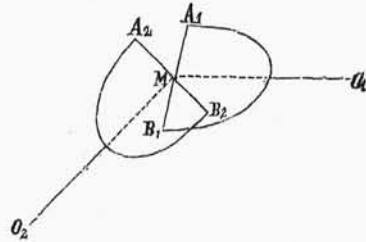


Fig. 28.

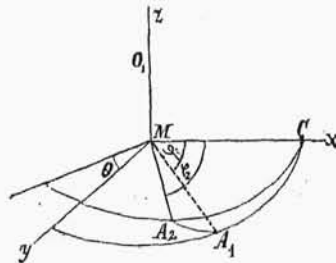


Fig. 29.

Z tego równania okazuje się, że gdy oś pędząca obraca się jednostajnie, to obrót osi pędzonej będzie niejednostajny. Dla $\varphi_1 = 0$ lub π otrzymamy $\min. \omega_2 = \omega_1 \cos \theta$; zaś dla $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$ będzie $\max. \omega_2 = \frac{\omega_1}{\cos \theta}$. Między więc tymi dwoma krańcami zmienia się prędkość kątowa obrotu osi pędzonej.

Oś chwilową obrotu tego mechanizmu jest prosta, podług której płaszczyzna, przechodząca przez ramię MA_1 prostopadłe do płaszczyzny obrotu tego ramienia, przecina płaszczyznę, przechodzącą przez ramię MA_2 prostopadłe do jego płaszczyzny obrotu. Osi chwilowe utworzą stożek centralny [O]. Niech P_1 i P_2 oznaczają odpowiednio powyższe dwie płaszczyzny, przecinające się podług osi chwilowej; równania tych płaszczyzn są

$$\begin{cases} P_1 \equiv x \sin \varphi_1 - y \cos \varphi_1 = 0, \\ P_2 \equiv -x \sin \varphi_2 + y \cos \varphi_2 \cos \theta + z \cos \varphi_2 \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Wyrażając $\cos \varphi_2$ i $\sin \varphi_2$ przez $\cos \varphi_1$ i $\sin \varphi_1$, i podstawiając te wyrażenia w 2-gim równaniu, otrzymamy

$$\begin{cases} P_1 \equiv x \sin \varphi_1 - y \cos \varphi_1 = 0, \\ P_2 \equiv x \cos \varphi_1 + (y \cos \theta + z \sin \theta) \cos \theta \sin \varphi_1 = 0, \end{cases}$$

jako równania osi chwilowej. Rugując z tych równań kąt φ_1 , otrzymamy równanie stożka centralnego w przestrzeni,

$$x^2 + y^2 \cos^2 \theta + yz \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = 0.$$

Ten więc stożek jest rzędu 2-go, a obie osi O_1 i O_2 są jego tworzącymi. Płaszczyzna, przechodząca przez ramiona MA_1 i MA_2 , jest styczna podczas ruchu do stożka rzędu 2-go

$$(x^2 + y^2) \sin^2 \theta - (y \sin \theta - 2z \cdot \cos \theta)^2 = 0.$$

Wyznaczenie stożka centralnego w układzie i obliczenie prędkości kątowej obrotu chwilowego pozostawiamy czytelnikowi.

(2). Punkty ruch wyznaczające a i b (fig. 30) posuwają się odpowiednio po dwu prostych (a) i (b), przecinających się w punkcie S i tworzących z sobą kąt φ : wyznaczyć przebieg ruchu posuwistego.

Prostopadłe aO i bO do (a) i (b) przecinają się w środku chwilowym O . Jeżeli kąt aSO oznaczmy przez α , to z trójkąta SOa mamy $SO = \frac{aO}{\sin \alpha}$, a z trójkąta $aObO$ wynika $aO : ab = \sin \alpha : \sin \varphi$, a więc $\frac{aO}{\sin \alpha} = \frac{ab}{\sin \varphi} = SO$. A zatem odległość środka chwilowego od S jest stała, centrodyją więc w płaszczyźnie będzie koło [O], zakreślone z punktu S jako środka promieniem SO . Czworobok $SaOb$ jest wpisany w koło, a opisanie na tym czworoboku koło jest centrodyją figury [o]. Jakoż widzimy, że jeżeli koło [o] toczy się wewnątrz koła [O], to punkty ruch wyznaczające posuwają się nieustannie po swych prostych kierownicach, jak tego zadanie wymaga. Ruch zatem powyższy otrzymujemy przez tożnienie się koła [o] wewnątrz 2-go koła o podwójnym promieniu. Wiadomo, że punkt dowolny, stale z kołem [o] połączony,

opisuje w tym przypadku elipsę jako szczególny przypadek hipocyklojdy; punkty prostej ab opisują elipsy, których środkiem wspólnym jest punkt S , a dla których

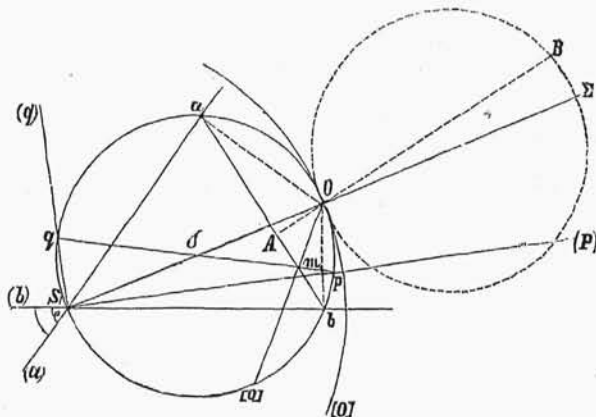


Fig. 30.

proste (a) i (b) są dwiema średnicami sprzężonymi. Z tego powodu ruch powyższy nazywamy często ruchem eliptyczno-hipocyklojdalnym. Ponieważ punkty a i b opisują tory o krzywiznie równej zero, przeto koło $[o]$ jest zarazem w każdym położeniu kołem przegięcia, a punkt S biegunem przyspieszenia. Każdy przeto punkt tego koła opisuje linią prostą, a ponieważ kierunek jego ruchu przechodzi ciągle przez punkt S , przeto każdy punkt toczącego się koła opisuje średnicę koła nieruchomego $[O]$. Torami zatem punktów posuwającej się figury są: proste dla punktów na kole $[O]$, a elipsy dla wszystkich innych punktów.

Obrawszy na ab dowolny punkt m , możemy wyznaczyć osi elipsy (m) . Jakoż prosta sm , łącząca m ze środkiem s koła $[o]$, przecina to koło w dwu punktach p i q , opisujących proste (p) i (q) , prostopadłe do siebie. Ponieważ punkt m pozostaje ciągle na prostej pq , przeto elipsa (m) może być utworzona przez posuwanie punktów p i q po prostych (p) i (q) ; a wiadomo z geometrii, że punkt na odcinku prostej, posuwany po dwu liniach prostych, do siebie prostopadłych, opisuje elipsę (m) , której osi są na tych dwu prostych. A zatem proste (p) i (q) są osiami elipsy (m) , a odcinki mp i mq wyznaczają połowy długości tych osi.

Prosta mO jest normalna do elipsy (m) w punkcie m ; a ponieważ s i S są środkami krzywizay obudwu centrodyj, przeto możemy wyznaczyć środek krzywizny μ tej elipsy zapomocą wykreślenia Euler'a. Obwiednią prostą ab jest pewna linia krzywa; prostopadła OA do ab z punktu O przecina tę obwiednię w punkcie A , w którym ta prosta jest styczna do swjej obwiedni. Jeżeli punkt a posuwa się jednostajnie, to on będzie środkiem przyspieszenia; możemy więc łatwo wyznaczyć przyspieszenie każdego punktu.

(3). Wiadomo z art. 52-go, że ruch posuwisty jest określony, gdy dla pewnej prostej L dana jest krzywa (L) , do której ta prosta ma być wciąż styczna, tudzież

tor (α) jednego punktu a téjże prostój. Zamiast krzywój (L) może być dany punkt l , przez który prosta L ma ciągle przechodzić, tudzież tor (α) punktu a téj prostój. Jeżeli wtedy wyprowadzimy z punktu l prostopadłą do L , a przez punkt a poprowadzimy normalną do toru (α), to ta normalna przetnie powyższą prostopadłą w środku chwilowym O . Dowolny punkt m prostój L opisze w tym przypadku linią krzywą, którą nazywamy wogólności konchojdą, czyli linią muszlową, a z tego powodu nazywamy ruch posuwisty, podanym sposobem określony, ruchem konchojdalnym. Jeżeli (α) jest linią prostą, to natenczas punkty prostój L opisują muszle Nikomedesa. Zbadamy bliżej ten ostatni przypadek.

Obierzmy prostą (α) (fig. 31), którą zwiemy podstawą muszli, jako oś x ; a prostopadłą do niej z punktu stałego l jako oś y . Poruszająca się prosta L niech

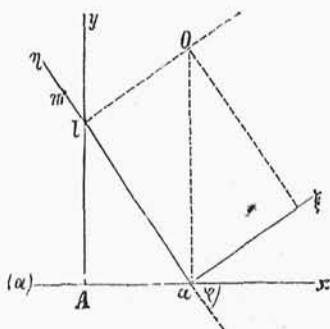


Fig. 31.

będzie osią η , punkt a początkiem, a prosta $a\xi$, prostopadła do L , osią ξ ; prosta L tworzy z kierunkiem ujemnych x kąt zmienny φ . Wyprowadźmy z punktu a prostopadłą do (α), a z punktu l prostopadłą do L ; te dwie prostopadłe przecinają się w środku chwilowym O , którego współrzędnymi są: $x = Aa$, $y = aO$. Oznaczmy przez δ odległość punktu l od podstawy (α); z figury mamy

$$x = \delta \cdot \cotg \varphi, \quad y = \frac{\delta}{\sin^2 \varphi};$$

rugując przeto kąt φ , otrzymamy równanie centrodyi w płaszczyźnie, $x^2 - \delta(y - \delta) = 0$. Ta więc centrodyja jest parabolą, której wierzchołkiem jest punkt l , a osią prosta Al ; jest ona zwrócona do podstawy stroną wypukłą. Oznaczmy przez ξ i η współrzędne punktu O względem osi $\xi a \eta$, posuwających się razem z figurą. Mamy tu

$$\xi = y \cdot \cos \varphi = \frac{\delta \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad \eta = y \cdot \sin \varphi = \frac{\delta}{\sin \varphi};$$

rugując przeto kąt φ z tych dwu równań, otrzymamy

$$\left(\frac{\partial \xi}{\eta^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^2 = 1,$$

jako równanie centrodyi [α] figury. Ta przeto centrodyja jest krzywą rzędu 4-go; tocząc ją po stronie wypukłej paraboli [O], wywołujemy ruch konchojdalny.

Miedzy współrzędnymi (ξ , η) a współrzędnymi (x , y) tegoż samego punktu mamy następujące związki

$$x = \delta \cotg \varphi + \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi, \quad y = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi.$$

Rugując z tych dwu równań kąt φ , otrzymamy równanie toru dowolnego punktu (ξ , η) posuwającej się figury. Jeżeli obierzemy punkt m na prostój L w odległości r od punktu a , to dla tego punktu będzie $\xi = 0$, $\eta = r$, a zatem $x = \delta \cotg \varphi - r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, a rugując kąt φ , mieć będziemy równanie muszli (m),

$$x^2 y^2 + (y^2 - r^2)(\delta - y)^2 = 0.$$

Koło, przechodzące przez środek chwilowy, przez punkt a i przez punkt, w którym normalna do paraboli $[O]$, wyprowadzona z O , przecina podstawę (a) , jest kołem przegięcia.

(4). Okazać, że miejscem geometrycznym punktów kręcącego się układu, których przyspieszenie styczne jest równe zeru, jest stożek rzędu 2-go, którego płaszczyzny przekrojów kołowych są prostopadłe do osi chwilowej.

(5). Jeżeli stożek obrotowy, którego wierzchołek jest nieruchomy, toczy się na płaszczyźnie, to każdy punkt, stale połączony z tym stożkiem, opisuje cykloidę sferyczną. Podać równania różniczkowe tej krzywej.

(6). Obliczyć promień krzywizny toru dowolnego punktu kręcącego się układu i okazać, że miejscem geometrycznym punktów, dla których promienie krzywizny odpowiednich torów są równoległe do osi chwilowej, jest pewien stożek rzędu 2-go.

(7). Jeden punkt a posuwającej się figury opisuje linią prostą, a drugi punkt b opisuje koło, którego środek leży na tej prostej: wyznaczyć centrodyje ruchu, obliczyć stosunek prędkości obu punktów ruch wyznaczających i okazać, że jeżeli punkt a posuwa się jednostajnie z prędkością v (między pewnymi krańcami), to prędkość średnia punktu b wynosi $\frac{2}{\pi} v$.

(8). Punkty, ruch wyznaczające, a i b , opisują koła odpowiednio (a) i (b) o równych promieniach i przecinające się pod kątami prostymi: wyznaczyć tor środka prostej ab (ruch lemniskoidalny).

(9). Dwa boki posuwającego się trójkąta są odpowiednio styczne do dwu danych kół: wyznaczyć centrodyje, tor wierzchołka, w którym te dwa boki się przecinają, tudzież obwiednię 3-go boku trójkąta.

(10). Dowieść bezpośrednio istnienia koła, o którym jest mowa w art. 57-ym, czyli tak zwanego koła granicznego, uważając je jako miejsce geometryczne środków krzywizny tych torów, jakie opisują nieskończenie dalekie punkty posuwającej się figury, i okazać, że to koło ma ten sam promień, co koło przegięcia, i leży po inną, niż to koło, stronie wspólnej stycznej do obu dwu centrodyj.

(11). Okazać na podstawie równania (4) art. 54-go, że, jeżeli parabola toczy się po linii prostej, ognisko paraboli opisuje linią łańcuchową.

(12). Zbadać analitycznie ruch eliptyczno-hipocykloidalny i wyznaczyć równanie obwiedni prostej ab , łączącej oba punkty, ruch wyznaczające.

(13). Jeden punkt a układu porusza się jednostajnie po prostej (a) , a układ obraca się jednostajnie około osi, przez a przechodzącej, prostopadłej do (a) i posuwającej się równoległe do siebie: wyznaczyć centrodyje ruchu.

(14). Jeden punkt układu spada pionowo bez prędkości początkowej, a układ obraca się jednostajnie około osi poziomej, przez ten punkt przechodzącej: okazać, że centrodyja $[O]$ jest parabolą, a centrodyja $[o]$ spiralną Archimedesza.

(15). Okazać, że, jeżeli krzywa rzędu 2-go toczy się po jakiegokolwiek krzywej płaskiej, to miejscem geometrycznym środków krzywizny torów, które punkty toczonej się krzywej opisują jednocześnie, jest pewna krzywa rzędu 2-go, styczna jednocześnie do obu dwu danych krzywych w środku chwilowym.

(16). Środkiem przyspieszenia rzędu n -go przy ruchu posuwistym nazywamy

taki punkt, którego przyspieszenie rzędu n -go jest równe zeru. Wyznaczyć ten środek przy dowolnym n i okazać, że składowe przyspieszenia rzędu n -go każdego punktu, który nie jest środkiem przyspieszenia tego rzędu, wyrażają się jako funkcje liniowe współrzędnych tego punktu.

(17). Dowieść, że środek chwilowy jest jedynym punktem rzeczywistym posuwającej się figury, który jest punktem zwrotu (promień krzywizny $\equiv 0$) swego toru.

(18). Dowieść następującego twierdzenia: jeżeli m_1 i m_2 są dwoma punktami posuwającej się figury, a μ_1 i μ_2 odpowiednio środkami krzywizny ich torów; jeżeli M_1 i M_2 oznaczają punkty, w których normalne odpowiednio Om_1 i Om_2 przecinają koło graniczne, a prosta m_1m_2 przecina prostą $\mu_1\mu_2$ w punkcie n , natenczas prosta On jest równoległa do prostej M_1M_2 . Zastosować to twierdzenie do wyznaczenia środka krzywizny muszli Nikomedesa w zadaniu (3), znając koło graniczne i środek krzywizny toru jednego punktu figury.

(19). Dowieść następującego twierdzenia: gdy centrodyja $[o]$ toczy się po pewnej krzywej $[O']$, a przytym punkt m centrodyi $[o]$ opisuje linią (m) , gdy połączymy sztywnie krzywą (m) z krzywą $[O']$, i toczyć będziemy $[O']$ po pewnej krzywej $[O]$, to krzywa (m) podczas tego ruchu będzie styczna do tej samej krzywej, do którejby była styczna, gdybyśmy centrodyją $[o]$ toczyli po krzywej $[O]$.
