

WSKAZÓWKI DO ĆWICZEŃ.

ROZDZIAŁ I.

(4). Podzielmy wysokość spadku na n części równych o długości s i oznaczmy przez t_i czas, w którym punkt spadający opisze i -ty odcinek s , a przez v_i odpowiednią prędkość końcową, wtedy z równań $v_i = v_{i-1} + gt_i$, $s = v_{i-1} t_i + g \frac{t_i^2}{2} = v_i t_{i+1} +$
 $+ g \frac{t_{i+1}^2}{2}$ przez rugowanie prędkości można otrzymać równanie następujące:

$gt_i t_{i+1} (t_i + t_{i+1}) - 2s (t_i - t_{i+1}) = 0$, a ponieważ $t_1 = \sqrt{2s/g}$, przeto równanie ostatnie możemy tak napisać: $t_i t_{i+1} (t_i + t_{i+1}) - t_1^2 (t_i - t_{i+1}) = 0$. Rugując czasy z równań poprzednich, otrzymamy $v_{i+1}^2 - v_i^2 = 2gs$, a ponieważ $v_1^2 = 2gs$, przeto $v_{i+1}^2 - v_i^2 = v_1^2$, skąd $v_{i+1}^2 = (i+1) v_1^2$. Podane dwa równania pozwalają obliczyć stosunki $t_1 : t_2 : t_3 : \dots$ i $v_1 : v_2 : v_3 : \dots$.

(6). Jeżeli środek A koła o promieniu r porusza się jednostajnie po danej prostej z prędkością v , a punkt m porusza się jednostajnie po tym kole, to prędkość punktu m możemy wyrazić przez iloczyn $r\omega$, w którym ω oznacza stałą; tor (m) będzie cyklojdą, gdy $v = r\omega$.

(7). Punkt m porusza się jednostajnie z prędkością $r\omega$ po kole (r) o promieniu r , podczas gdy środek A tego koła porusza się jednostajnie z prędkością $R\Omega$ po kole (R) o promieniu R ; poprowadźmy osi współrzędnych x i y przez środek koła (R), wtedy równania ruchu punktu m będą: $x = R \cos(\alpha_0 + \Omega t) + r \cos(\beta_0 + \omega t)$, $y = R \sin(\alpha_0 + \Omega t) + r \sin(\beta_0 + \omega t)$, gdzie α_0 i β_0 oznaczają stałe. Jeżeli $R = r$ i $\Omega = -\omega$, wtedy ruch punktu m będzie prostoliniowym.

(8). Niech x', y', z' oznaczają rzuty prędkości punktu m na kierunki osi współrzędnych, wtedy z założenia $x' = \alpha \cdot yz$, $y' = \beta \cdot zx$, $z' = \gamma \cdot xy$, gdzie α, β i γ są stałe. Z tych równań otrzymamy $\beta \cdot xx' - \alpha \cdot yy' = 0$, $\gamma \cdot yy' - \beta \cdot zz' = 0$, $\alpha \cdot zz' - \gamma \cdot xx' = 0$, a całki tych równań przedstawiają rzuty toru punktu na płaszczyzny współrzędnych. Różniczkując równania pierwotne, można obliczyć przyspieszenie.

(9). Obrówszy układ prostokątny osi współrzędnych z pionową osią z , oznaczmy przez x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 współrzędne punktów m_1 i m_2 , natenczas równanie miejsca szukanego jest $\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} = \frac{z-z_1}{z-z_2}$; gdy zaś punkty m_1 i m_2 znajdują się na osi z , wtedy otrzymamy równanie $x^2 + y^2 - (z-z_1)(z-z_2) = 0$, z którego wynika, że miejscem szukanym jest powierzchnia, utworzona zapomocą obrotu hiperboli równobocznej około osi rzeczywistej.

(10). Przyjmijmy oś pionową paraboli jako oś y i niech $x^2 = 2fy$ będzie równaniem paraboli, wtedy współrzędne 2-go krańca prostej najkrótszego spadku są: $x = \pm p \sqrt{3}$, $y = \frac{3}{2} p$.

(11). Styczne do obu krzywych, poprowadzone w krańcach prostej najkrótszego spadku, są równoległe, a ta prosta jest dwusieczną kąta, który normalne do krzywych w jej krańcach tworzą z pionem.

(12). Obierzmy oś x wzdłuż brzegu, oś y wpoprzek rzeki, oznaczmy przez $2a$ szerokość rzeki, przez μ stosunek prędkości wody w punkcie dowolnym względem odległości tego punktu od brzegu najbliższego, a przez v stałą prędkość pływaka; natenczas $y^2 = \frac{2\mu}{v}x$ jest równaniem pierwszej, a $4ay - y^2 = 2\left(\frac{v}{\mu}x + a^2\right)$ równaniem drugiej połowy toru pływaka; czas przeprawy jest $t = 2a : v$.

(13). Pływak wychodzi z punktu A na jednym brzegu, nadając sobie prędkość stałą v ku punktowi B, leżącemu naprzeciw A na brzegu przeciwnym, a u niech będzie prędkością stałą wody; obrawszy B jako początek osi współrzędnych, oś x wzdłuż brzegu odpowiedniego, oś y ku punktowi A, otrzymamy prędkości x' i y' pływaka w kierunkach osi:

$$x' = u - \frac{vx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y' = -\frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{a stąd}$$

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = \frac{vy}{vx - u\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Całkując to równanie i przyjmując $\lambda = u : v$, otrzymamy równanie toru:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{2\lambda} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x},$$

w którym a jest szerokością rzeki. Pływak przybędzie do brzegu przeciwnego, gdy $\lambda < 1$, a czas przeprawy jest $t = \frac{av}{v^2 - u^2}$.

(14). Z warunku danego wynika, że $v\rho = 2c$, skąd $\gamma_t = -\frac{4c^2}{\rho^3} \cdot \frac{d\rho}{ds}$, $\gamma_n = \frac{4c^2}{\rho^3}$, a z tych dwu składowych można obliczyć γ .

(15). Aby obliczyć γ_N , należy zastosować twierdzenie Meusnier'go, pozwalające obliczyć promień krzywizny dowolnego przekroju płaskiego danej powierzchni w punkcie danym, tudzież twierdzenie Eulera, wyrażające promień krzywizny przekroju normalnego powierzchni w punkcie danym przez odpowiednie promienie krzywizny głównych.

(16). Obrawszy daną prostą poziomą jako oś x , otrzymamy równanie różniczkowe linii krzywój

$$y \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right] = \mu; \quad \text{a stąd } x = a + \sqrt{y(\mu - y)} - \mu \cdot \arctan \sqrt{\frac{\mu - y}{y}},$$

gdzie a i μ oznaczają stałe.

(20). Jeżeli A i B oznaczają połowy osi głównych elipsy, a prędkość wycinkową, r promień wodzący ze środka elipsy, wówczas $\gamma = -\frac{4a^2}{A^2 B^2} \cdot r$.

(21). W przypadku a) przyspieszenie jest odwrotnie proporcjonalne względem r^5 , w przypadku b) odwrotnie proporcjonalne względem r^0 , a w przypadku c) wyraża się przyspieszenie przez funkcją przestępną promienia r .

(22). Oznaczmy punkty poruszające się przez m_1, m_2, m_3, \dots , to każdy z nich opisuje tenże sam tor. Poprowadźmy oś x przez środek koła i przez położenie początkowe punktu m_1 , i przyjmijmy $p = \cos \frac{2\pi}{n}$, $q = \sin \frac{2\pi}{n}$, natenczas równanie różniczkowe toru (m_1) jest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qx + (p-1)y}{(p-1)x - qy}, \text{ skąd } (x^2 + y^2)^{\frac{q}{2(1-p)}} \cdot e^{\arctg \frac{y}{x}} = r^{\frac{q}{1-p}},$$

a gdy wprowadzimy współrzędne biegunowe ρ i φ :

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{q}{1-p}} \cdot e^{\varphi} = 1.$$

Tor (m_1) jest linią spiralną, której punktem asymptotycznym jest środek koła. Ponieważ jednak z równania

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{vq}{\sqrt{2(1-p)}}$$

okazuje się, że prędkość wycinkowa staje się nieskończenie wielką, gdy $\rho = 0$, przeto punkt m_1 przybędzie do środka koła w czasie skończonym. Wyrażając $d\varphi$ przez $d\rho$ z równania toru, otrzymamy równanie

$$t = \frac{1}{v} (r - \rho) \sqrt{\frac{2}{1-p}},$$

z którego wynika czas dojścia do środka, przyjmując $\rho = 0$.

(23). Użyjmy współrzędnych biegunowych r, φ i θ (art. 12) i oznaczmy przez α kąt, który tor (m) punktu m na kuli o promieniu r tworzy z południkiem tego punktu, wtedy $\cos \alpha = \frac{r}{v} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, jeżeli v jest prędkością punktu. Dla loksodromy na kuli mamy warunek $\alpha = \text{stałej}$, więc $\frac{r}{v} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \text{stałej}$, a ponieważ nadto długość geograficzna rośnie jednostajnie z czasem, przeto także $\frac{d\theta}{dt} = \text{stałej}$. Z tych dwu równań można obliczyć prędkość i przyspieszenie.

ROZDZIAŁ II.

(3). Momenty μ_1, μ_2 i μ_3 są proporcjonalne względem pól trójkątów, których podstawą wspólną jest prędkość kątowa obrotu, odcięta na jego osi, a których wierzchołkami są odpowiednio punkty A_1, A_2 i A_3 ; ta uwaga pozwala dowieść twierdzenia.

(4). Podobnie, jak (3).

(5). Zastosować równania (5) art. 25-go.

(6). Podobnie, jak (5).

(7). Obierzmy punkt dany A jako początek osi współrzędnych; Ξ, H, Z, Λ, M, N niech oznaczają współrzędne danego układu obrotów, a, b, c niech będą współrzędnymi prostej dowolnej, poprowadzonej przez punkt A . Jeżeli μ oznacza moment układu obrotów względem prostej (a, b, c) , t. j. sumę momentów tych obrotów względem téj prostej, to według art. 33-go $\mu = a\Lambda + bM + cN$, a zatem $a\Lambda + bM + cN - \mu = 0$ jest równaniem powierzchni, utworzonej przez te proste (a, b, c) , względem których μ ma wartość stałą. Ta powierzchnia jest stożkiem rzędu 2-go, a gdy $\mu = 0$, staje się płaszczyzną.

(8). Zastosować równania (4) i (5) art. 35-go.

(9). Niech ω_1 i ω_2 oznaczają odpowiednio prędkości kątowe skrętów około S_1 i S_2 ; obliczmy współrzędne każdego z tych skrętów, tudzież współrzędne skrętu wypadkowego, to okaże się, że oś tego skrętu przecina oś z pod kątem prostym, a jeżeli λ jest wskaźnikiem tego skrętu, wówczas $\lambda = (\lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \omega_2^2) : (\omega_1^2 + \omega_2^2)$. Według art. 31-go równania osi skrętu wypadkowego są $(\omega_1^2 + \omega_2^2)z + (\lambda_2 - \lambda_1)\omega_1\omega_2 = 0$ i $\omega_1 y - \omega_2 x = 0$; rugując z tych równań stosunek $\omega_1 : \omega_2$, otrzymamy równanie cylindroidy.

(10). Przyjmijmy $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\mu$ i rozłóżmy stronę lewą równania cylindroidy na 2 czynniki, wtedy możemy to równanie tak napisać:

$$\frac{1}{z} \left[x \left(\mu - \sqrt{\mu^2 - z^2} \right) - yz \right] \left[x \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - z^2} \right) - yz \right] = 0,$$

a z téj postaci równania można okazać własności cylindroidy pod a) i b). Własność c) wynika z równania płaszczyzny stycznej do cylindroidy.

ROZDZIAŁ III.

(4). Równania (4) i (5) art. 44-go razem z (5) i (6) art. 12-go pozwalają obliczyć γ_t i γ_n dla każdego punktu układu. Miejscem geometrycznym punktów, dla których $\gamma_t = 0$, jest hiperboloida jednopowłokowa, której jeden układ przekrojów kołowych jest prostopadły do osi chwilowej; miejscem zaś geometrycznym punktów, dla których $\gamma_n = 0$, jest linia krzywa skośna rzędu 4-go, podług której przecinają się 2 hiperboloidy jednopowłokowe.

(5). Zastosować równania (5) art. 44-go.

(6). Oś, sprzężona z osią chwilową, znajduje się w nieskończoności i jest do niej prostopadła; stosując zatem twierdzenie, podane przy końcu art. 35-go, można udowodnić twierdzenie podane.

(7). Rozważać linią krzywą, będącą miejscem geometrycznym punktów, dla których $\gamma_n = 0$.

(8). Płaszczyzny normalne do torów wszystkich punktów prostej L przecinają się podług prostej wzajemnej l ; jeżeli L' oznacza położenie sąsiednie prostej L , wówczas płaszczyzny normalne do torów punktów téj prostej przecinają się podług prostej wzajemnej l' . Obie dwie wiązki płaszczyzn normalnych są jednokręśne, a stąd wynika twierdzenie podane.

(9). Niech H oznacza hiperboloidę osi krzywizny torów wszystkich punktów prostej L , to prosta wzajemna l znajduje się także na H , a prostopadła, poprowadzona przez punkt m na L do odpowiedniej temu punktowi osi krzywizny toru (m), jest normalną główną tego toru w tym punkcie. Płaszczyzna, poprowadzona przez m i l , jest styczna do H w pewnym punkcie μ , a jeżeli przez μ poprowadzimy tworzącą powierzchni H , nie należącą do tegoż samego układu, co l , to ta tworząca jest właśnie osią krzywizny toru (m). Wyprowadźmy z punktu μ stożek kierunkowy powierzchni H , to on jest rzędu 2-go, a prosta l należy do jego tworzących; każda płaszczyzna P , poprowadzona przez prostą l , przecina ten stożek jeszcze podług drugiej prostej tworzącej λ . Poprowadźmy na płaszczyźnie P przez punkt μ prostopadłą p do prostej λ , to p będzie równoległa do normalnej głównej toru (m) w punkcie m , a zbiór prostych p , otrzymywanych dla wiązki płaszczyzn P , które przesuwamy przez l , utworzy stożek kierunkowy powierzchni normalnych głównych do torów wszystkich punktów prostej L . Wiadomo, że na tworzącej hiperboloidy H znajdują się 2 punkty, przez które przechodzą tworzące 2-go układu, przecinające tę tworzącą pod kątem prostym (Ob. *Geometrię analityczną* Wł. Zajęczkowskiego, str. 413), z czego wynika, że każda z powyższych płaszczyzn P przecina stożek kierunkowy powierzchni normalnych głównych podług prostych p i l , a l jest tworzącą podwójną tego stożka, a zatem ten stożek jest rzędu 3-go. Na podstawie tego twierdzenia można dowieść, że każda płaszczyzna, przesunięta przez l , przecina powierzchnią normalnych głównych punktów prostej L podług pewnej prostej π i podług prostej l , i że l jest tworzącą potrójną tej powierzchni, a zatem ta powierzchnia jest rzędu 4-go.

(10). To twierdzenie wynika z dwu poprzedzających.

(12) i (13). Zastosować twierdzenia art. 47-go.

(14). Zastosować równania art. 46-go. (To twierdzenie podał Dupin).

(15). Punkt opiszę elipsę.

ROZDZIAŁ IV.

(4). Dowieść podobnie, jak (4) w rozdziale III-im.

(5). Przyjmijmy wierzchołek M stożka jako początek układu $Mxyz$ osi współrzędnych, a płaszczyznę daną jako płaszczyznę xy , na której stożek toczy się w kierunku od osi x ku osi y . Jeżeli r jest promieniem podstawy stożka, R długością tworzącej, ω oznacza prędkość kątową, z jaką tworząca styczności stożka z płaszczyzną xy obraca się około osi z , natenczas prędkość kątowna Ω obrotu chwilowego około tworzącej styczności (osi chwilowej) jest $\Omega = \omega \sqrt{R^2 - r^2} : Rr$; a jeżeli φ oznacza kąt, który os chwilowa tworzy z osią x , więc $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, to współrzędne ruchu chwilowego są: $X = \Omega \cos \varphi$, $Y = \Omega \sin \varphi$, $Z = 0$. Obliczmy z tych równań składowe prędkości punktu dowolnego (x, y, z) i przyjmijmy $\lambda = \omega : \Omega$, to otrzymamy następujące równania różniczkowe cyklojdy sferycznej:

$$\lambda \cdot \frac{dx}{d\varphi} = z \sin \varphi, \quad \lambda \cdot \frac{dy}{d\varphi} = -z \cos \varphi, \quad \lambda \cdot \frac{dz}{d\varphi} = y \cos \varphi - x \sin \varphi.$$

(6). Zastosować równania art. 50-go.

(8). Jeżeli długość prostej ab jest równa odległości środków obu kół, natenczas środek tej prostej opisuje lemniskatę.

(9). Z punktu danego M_1 wykreślimy koło (r_1) o promieniu r_1 , a z 2-go punktu danego M_2 wykreślimy koło (r_2) o promieniu r_2 ; trójkąt ABC porusza się tak, że bok AB jest wciąż stycznym do (r_1), a bok BC jest wciąż stycznym do (r_2), przyczem oba boki tworzą kąt stały β . Jeżeli przez M_1 poprowadzimy prostą ab równoległą do AB , a przez M_2 prostą bc równoległą do BC , to podczas ruchu trójkąta te obie proste będą wciąż przechodziły przez punkty stałe, odpowiednio M_1 i M_2 , przecinając się w punkcie b ; możemy więc ten ruch także tak określić, że dwie proste ab i bc , tworzące z sobą kąt stały β , mają przechodzić wciąż przez dane punkty stałe M_1 i M_2 . Z tego określenia ruchu można łatwo okazać, że centrodyją $[O]$ w płaszczyźnie figury jest koło, poprowadzone przez punkty b , M_1 i M_2 , centrodyją zaś $[o]$ figury jest także koło, zakreślone z punktu b i dotykające się koła pierwszego, a więc mające promień równy średnicy koła $[O]$. Obadwa koła znajdują się ciągle po tejże samej stronie ich stycznej wspólnej; koło $[O]$ jest oraz torem punktu b . Torem punktu B jest cyklojda; żeby znaleźć obwiednią prostej AC , należy rozważyć, że spodek prostopadły do AC , wyprowadzonej ze środka chwilowego, jest punktem szukanej obwiedni tej prostej.

(11). Rozważajmy parabolę w tym położeniu, gdy punktem styczności z daną prostą jest wierzchołek paraboli; przyjmijmy ten punkt jako początek osi współrzędnych, a daną prostą jako oś x . Na podstawie równania (4) art. 55-go można dowieść, że promień krzywizny toru ogniska paraboli jest równy lecz o kierunku wprost przeciwnym promieniowi wodzącemu paraboli w punkcie odpowiednim, skąd wynika równanie różniczkowe tego toru

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2, \text{ którego całka jest } y = \frac{\varepsilon}{2} \left(e^{\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right),$$

gdzie ε oznacza odległość ogniska paraboli od jej wierzchołka. W podobny sposób można wyprowadzić równanie różniczkowe toru ogniska elipsy lub hiperboli, toczących się po danej prostej. Jeżeli tor ogniska elipsy obrócimy około danej prostej, otrzymamy powierzchnię, zwaną unduloidą; gdy tor ogniska hiperboli obrócimy około tej prostej, otrzymamy powierzchnię, zwaną nodojdą; a obracając linią łańcuchową około kierownicy, otrzymamy powierzchnię, zwaną katenoidą. Między tymi 3-ma powierzchniami zachodzą te różnice, że tak zwana krzywizna średnia w każdym punkcie undulojdy jest stałą i dodatnią, w każdym punkcie nodojdy stałą i ujemną, a w każdym punkcie katenoidy jest równą zeru.

(12). Przyjmijmy, że prosta (a) jest prostopadła do (b) i obierzmy te 2 proste jako osi x i y , wtedy obwiednią prostej ab jest hipocyklojda, której równanie jest $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$, gdzie $L = ab$.

(13). Centrodyją w płaszczyźnie jest prosta, równoległa do (a), centrodyją figury jest koło, którego środkiem jest punkt a .

(15). Ob. art. 57-my.

(16). Różniczkując n razy równania (1) art. 53-go, można dowieść istnienia środka przyspieszenia i wyrazić przyspieszenie każdego punktu przez współrzędne tego środka.

(17). Obierzmy normalną spólną do obu dwu centrodz w środku chwilowym jako oś x , a styczną spólną jako oś y , wtedy według art. 55-go i 56-go możemy obliczyć promień krzywizny ρ toru punktu (x, y) i otrzymamy $\rho = K \cdot \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{K(x^2 + y^2) - x}$, a współrzędne ξ i η środka krzywizny będą

$$\xi = -\frac{x^2}{K(x^2 + y^2) - x}, \quad \eta = -\frac{xy}{K(x^2 + y^2) - x}.$$

Punkt (x, y) będzie punktem zwrotu swego toru, gdy $\xi = x$, $\eta = y$, skąd wynika warunek $x^2 + y^2 = 0$, któremu zadość czyni tylko punkt rzeczywisty $x = 0$ i $y = 0$. Ponieważ $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$, $i = \sqrt{-1}$, przeto miejscem geometrycznym punktów zwrotu są dwie proste urojone, przechodzące przez środek chwilowy.

(18). Zastosować równanie koła granicznego, wyprowadzone w zadaniu (10).

ROZDZIAŁ VIII.

(1). Jeżeli a oznacza odległość początkową punktu od środka przyciągania, μ przyciąganie jednostki masy w jednostce odległości, to punkt przybędzie do środka w czasie $t = a^2 : \sqrt{\mu}$.

(2). Jeżeli A_1 i A_2 oznaczają punkty przyciągające, μ_1 i μ_2 odpowiednie przyciągania jednostki masy w jednostce odległości, M oznacza położenie początkowe punktu przyciąganego, i przyjmijmy $A_1 A_2 = 2a$, $MA_1 = a_1$, $MA_2 = a_2$, wówczas

$$V^2 = 2\mu_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a} \right) + 2\mu_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a} \right).$$

(4). Niech m_1 i m_2 będą punktami danymi, a masa każdego z nich równa jednostce obierzmy prostą $m_1 m_2$ jako oś x , biorąc na niej początek dowolny O , $x_1 = Om_1$, $x_2 = Om_2$, i przyjmijmy, że stosunek przyciągań wzajemnych tych dwu punktów jest równy $\mu_1 : \mu_2$, natenczas równania różniczkowe ruchu będą: $x_1'' = \mu_2(x_2 - x_1)$, $x_2'' = -\mu_1(x_2 - x_1)$. Pomnóżmy te równania odpowiednio przez μ_1 i μ_2 i dodajmy iloczyny, a nadto odejmijmy od siebie te równania, to otrzymamy dwa nowe równania całkowne. Całki pozwolą obliczyć x_1 i x_2 .

(5). Oznaczmy, jak w art. 89-ym, opór przez $-\frac{mgv^3}{k^2}$, prędkość początkową przez V i przyjmijmy $k^{\frac{2}{3}} = \lambda$, wówczas wysokość h , do jakiej punkt może się wzniesć, jest

$$h = \frac{\lambda^2}{g\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{(2V - \lambda)^2 + 3\lambda^2}}{2(V + \lambda)} + \arctan \frac{V\sqrt{3}}{2\lambda - V} \right].$$

(6). Oznaczmy przez x odległość punktu od środka przyciągania, przez a wartość x dla $t = 0$ i wyrażmy opór przez $k^2 v^2 : x$, wówczas odległość X , której odpowiada prędkość największa punktu, jest $X = a(2k^2)^{\frac{1}{1-2k^2}}$.

(7). Prosta, poprowadzona przez położenie początkowe punktu i prostopadła do płaszczyzny odpychającej, niech będzie osią y , prosta, w której płaszczyzna, przesunięta przez oś y i prędkość początkową a punktu, przecina płaszczyznę odpychającą,

niech będzie osią x ; niech masa punktu będzie równa jednostce, niech μ oznacza odpychanie w jednostce odległości, α kąt, który prędkość a tworzy z osią x , niech $y = y_0$ dla $t = 0$ i przyjmijmy $A = y_0 + \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sin \alpha$, $B = y_0 - \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sin \alpha$, $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\mu}}{a \cos \alpha}$, wówczas równanie toru punktu jest

$$y = \frac{1}{2} \left(A e^{\frac{x}{\varepsilon}} + B e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right).$$

Tor jest linią łańcuchową, gdy $\alpha = 0$ i $\mu = \frac{a^2}{y_0^2}$.

(8). Jeżeli α oznacza elewację rzutu, β kąt, który płaszczyzna dana tworzy z pionem, natenczas $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$.

(9). Punkt opisze elipsę, której środkiem jest środek przyciągania.

(10). Punkt opisze linią krzywą stopnia 2-go, która przechodzi przez obadwa krańce prostój.

(11). Niech środek ziemi porusza się po kole o promieniu R , a środek komety po paraboli o parametrze p ; T_z niech oznacza czas obiegu koła przez środek ziemi, T_k czas pobytu komety wewnątrz koła, natenczas

$$\frac{T_k}{T_z} = \frac{1}{3\pi} \frac{(R+p) \sqrt{2R-p}}{R^{\frac{3}{2}}}.$$

Ten stosunek jest największym dla $R = p$ i równa się $\frac{2}{3\pi}$.

(13). Oznaczmy przez r i φ współrzędne biegunowe punktu, przez μ przyciąganie w jednostce odległości, przez a prędkość wycinkową, to równanie różniczkowe spiralnej Cotes'a jest

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(1 - \frac{\mu}{a^2} \right) \frac{1}{r} = 0,$$

a przypadki szczególne zależą od tego, czy $\frac{\mu}{a^2} > 1$, czy < 1 , czy $= 1$.

(14). Czas

$$t = \frac{2}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\frac{\cos \alpha_1}{a} + \frac{\cos \alpha}{a_1}}.$$

(15). Jeżeli środkiem przyciągania jest węzeł lemniskaty, wówczas przyciąganie jest odwrotnie proporcjonalne względem r^2 .

(18). Jeżeli $r = a e^{b\varphi}$ jest równaniem spiralnej logarytmicznej, D odległością pierwotną punktu od bieguna, μ przyciąganiem w jednostce odległości, wówczas punkt dojdzie do bieguna w czasie

$$t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{D^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\mu}} \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}}.$$

(21). To zadanie jest przypadkiem szczególnym następującego zagadnienia ogólnego: na płaszczyźnie pionowej jest dany układ nieskończenie wielu linii krzywych podobnych, przechodzących przez punkt dany M , mamy wyznaczyć taką linią na tej płaszczyźnie, iżby punkt ciężki, poczynający z M spadać bez prędkości początkowej, przybył do tej linii w tymże samym czasie, po którejkolwiek linii układu danego spada. Szukana linia nazywa się *synchroną* danego układu krzywych. Poprowadźmy przez M oś x poziomo, oś y pionowo na dół, to układ linii krzywych podobnych możemy wyrazić równaniem $F(x: a, y: a) = 0$, w którym a oznacza parametr zmienny, a jeżeli przyjmiemy $p = dx: dy$, to czas spadku na którejkolwiek z tych linii jest

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \sqrt{\frac{1+p^2}{y}} \cdot dy.$$

Przyjmując za t wartość stałą i rugując a z równania ostatniego i z równania układu linii danych, otrzymamy równanie synchrony. Możemy to równanie także otrzymać w sposób następujący. Rozwiążmy równanie układu linii danych względem x i przyjmijmy $y = a\xi$, to $x = a \cdot f(\xi)$, a gdy przyjmiemy nadto

$$\eta = \int_0^\xi \sqrt{\frac{1+f'(\xi)^2}{\xi}} \cdot d\xi, \text{ to } t = \eta \sqrt{\frac{a}{2g}}, \text{ skąd wynika}$$

$x = \frac{2gt^2}{\eta^2} f(\xi)$, $y = \frac{2gt^2}{\eta^2} \xi$, a jeżeli z tych dwu równań wyrugujemy ξ , otrzymamy równanie synchrony. Rugowanie zmiennej ξ jest tylko wtedy możliwe, gdy całkowanie w η da się wykonać bez użycia szeregu nieskończonego.

Układ cyklojd, których spólnym punktem zwrotu jest M , wyraża równanie $x = a \cdot \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$, w którym a jest promieniem zmiennym koła

tworzącego. Stąd wynika $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)$. Rugowanie parametru a

nie daje się wprowadzić uskutecznić, można jednak dowieść, że synchrona przecina każdą cyklojdę pod kątem prostym. W tym celu obliczmy dx z równania cyklojdy

według wzoru $dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial y} dy$, różniczkujemy t , skąd otrzymamy $\frac{\partial t}{\partial a} da +$

$+\frac{\partial t}{\partial y} dy = 0$, i wyrugujemy da z dwu ostatnich równań, to wyniknie dla synchrony

$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{p}$, a to równanie wyraża właśnie twierdzenie podane.

(22). Zadanie ogólne o brachistochronie w przypadku, gdy siły przyłożone mają potencjał, może być następującym sposobem rozwiązane zapomocą rachunku wariacyjnego. Niech będą dane punkty krańcowe m_1 i m_2 brachistochrony, wtedy

$$= \int_1^2 \frac{ds}{v}, \text{ gdzie całka ma być wzięta między krańcami danymi, a ponieważ dla bra-}$$

chistochrony $\delta t = 0$, przeto $\int \frac{v \cdot \delta ds - ds \cdot \delta v}{v^2} = 0$. Przyjmijmy masę punktu równą jednostce; X, Y, Z niech oznaczają składowe siły, wtedy

$$\delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = v \cdot \delta v = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z,$$

a ponieważ $ds = v \cdot dt$, przeto $ds \cdot \delta v = (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dt$. Z równania $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ wynika $\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz$, a stąd $v \cdot \delta ds = \frac{dx}{dt} \delta dx + \frac{dy}{dt} \delta dy + \frac{dz}{dt} \delta dz$. Wstawiając $ds \cdot \delta v$ i $v \cdot \delta ds$ w równanie $\delta t = 0$, otrzymamy

$$\int \frac{1}{v^2} \left(\frac{dx}{dt} \delta dx + \frac{dy}{dt} \delta dy + \frac{dz}{dt} \delta dz \right) - \int \frac{1}{v^2} (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dt = 0.$$

Całkując częściowo, mieć będziemy

$$\int \frac{1}{v^2} \cdot \frac{dx}{dt} \delta dx = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{dx}{dt} \delta x - \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dx}{dt} \right) dt \cdot \delta x,$$

i podobnie dla y i z , więc:

$$\int_1^2 \frac{1}{v^2} \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) - \int \left\{ \left[\frac{X}{v^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dx}{dt} \right) \right] \delta x + \left[\frac{Y}{v^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \right] \delta y + \left[\frac{Z}{v^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dz}{dt} \right) \right] \delta z \right\} dt = 0.$$

Ponieważ punkty krańcowe są dane, przeto wyraz 1-y jest równy zeru, a ponieważ $\delta x, \delta y$ i δz są wzajemnie niezależne, przeto ich czynniki pod znakiem całkowania muszą być równe zeru, każdy z osobna; otrzymujemy zatem równania następujące:

$$\frac{X}{v^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

i dwa podobne dla y i z . Możemy wprowadzić łuk s jako zmienną, mamy bowiem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{dx}{ds} \right), \text{ a stąd}$$

$$X + v^3 \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{x'}{v} \right) = 0 \text{ i podobnie dla } y \text{ i } z, \text{ gdzie } x' = \frac{dx}{ds}, y' = \frac{dy}{ds}, z' = \frac{dz}{ds}.$$

Obliczywszy v z równania $v^2 = 2 \int (X dx + Y dy + Z dz)$ i wyraziwszy składowe siły przez pochodne potencjału, można z równań podanych wyznaczyć brachistochroną.

Można także bezpośrednio wprowadzić s jako argument, zważając na to, że $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, a wtedy do wyznaczenia brachistochrony prowadzi rozważanie minimum całki

$$\int \left[\frac{1}{v} + \lambda (x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) \right] ds,$$

w której λ jest czynnikiem nieoznaczonym. Gdybyśmy mieli wyznaczyć brachistochroną na powierzchni $F(x, y, z) = 0$, wówczas należy wyznaczyć minimum całki

$$\int \left[\frac{1}{v} + \lambda (x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu \cdot F(x, y, z) \right] ds.$$

Podane równania pozwalają rozwiązać zadania (22) i (30); uwzględniając równanie $F(x^2 + y^2) - z = 0$ powierzchni obrotowej, można rozwiązać zadanie (25).

(23). Niech F i F' oznaczają ogniska, O środek elipsy o osi głównej $2a$; M niech będzie położeniem początkowym, v_0 prędkością początkową punktu i przyjmijmy $FM = R$, $F'M = R'$, a w kierunkach prostych MF , MO i MF' niech działają siły odpowiednio P , P'' i P' , wówczas ciśnienie N na elipsę w punkcie, w którym ρ jest promieniem krzywizny, jest

$$N = \frac{1}{\rho} \left(\frac{PR'}{aR} + \frac{P'R}{aR'} + P''RR' - v_0^2 \right).$$

(24). Poprowadźmy przez położenie początkowe M punktu ($m = 1$) oś x pionowo na dół, oś y poziomo, i niech N oznacza ciśnienie na krzywą w punkcie (x, y) ,

wówczas według art. 87-go $N = \frac{v^2}{\rho} + g \cdot \frac{dy}{ds}$, a jeżeli v_0 oznacza prędkość początkową,

$N = \frac{v_0^2 + 2gx}{\rho} + g \cdot \frac{dy}{ds}$. Jeżeli $d\varepsilon$ oznacza kąt krzywizny w punkcie

(x, y) , wówczas $d\varepsilon = d \arcsin \frac{dy}{ds} = \left(\frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds} \right) ds$, skąd $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds}$, a zatem

$$N = (v_0^2 + 2gx) \frac{\frac{d^2y}{ds}}{\frac{dx}{ds}} + g \cdot \frac{dy}{ds}, \text{ czyli}$$

$$\frac{N}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}} \cdot \frac{dx}{ds} = \sqrt{v_0^2 + 2gx} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{g}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Całkując to równanie przy stałym N i oznaczając stałą całkowania przez a , otrzymamy

$$\text{równanie różniczkowe krzywej szukanej: } \frac{dy}{ds} = \frac{N}{g} - \frac{a}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}}.$$

(25). Ob. zadanie (22).

(26). Jeżeli μ oznacza przyciąganie punktu ($m = 1$) w jednostce odległości, r promień wodzący ze środka przyciągania, φ kąt, który styczna do krzywej tworzy

z promieniem wodzącym, T czas dany, wówczas według równania (8) art. 94-go: $\mu r \cos \varphi = \frac{\pi^2}{4T^2} s$; różniczkując to równanie i wstawiając $dr = ds \cdot \cos \varphi$, otrzymamy równanie różniczkowe między r i φ , a jeżeli wprowadzimy długość p prostopadłej na styczną ze środka przyciągania, to po scałkowaniu mieć będziemy $\mu(r^2 - p^2) + a = \frac{\pi^2 r^2}{4T^2}$, gdzie a jest stałą. Niech $r = b$, gdy $s = 0$, wtedy $a = \pi^2 b^2 : 4T^2$, a stąd wynika równanie różniczkowe tautochrony

$$\mu p^2 - \left(\mu - \frac{\pi^2}{4T^2} \right) r^2 - \frac{\pi^2 b^2}{4T^2} = 0,$$

w którym

$$p^2 = \frac{r^4}{r^2 + r'^2}, \text{ a } r' = \frac{dr}{d\varphi}.$$

(27). Jeżeli $2a$ jest długością osi cyklojdy, b odległością pierwotną punktu od wierzchołka, natenczas

$$t = \sqrt{\frac{8a}{g} \left(\frac{4a}{b} - 1 \right)}.$$

(29). Przyjmijmy początek osi współrzędnych w punkcie najniższym (wierzchołku) cyklojdy, oś x pionowo w górę, oś y poziomo, oznaczmy opór przez $k v$, natenczas $\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{dx}{ds} - k v$. Wyraziwszy s przez x z równania cyklojdy i wstawiwszy $v = -\frac{ds}{dt}$, otrzymamy równanie różniczkowe liniowe rzędu 2-go między s i t , które-

go całkę należy rozważać, przyjmując $k < \sqrt{g : r}$, gdzie r oznacza promień koła tworzącego. Obliczywszy następnie czas dojścia do wierzchołka cyklojdy, okaże się, że on nie zależy od położenia początkowego.

(30). Ob. zadanie (22).

ROZDZIAŁ IX.

(Zadania o momentach bezwładności).

(7). Poprowadźmy przez początek prostokątnego układu osi współrzędnych płaszczyznę $ax + by + cz = 0$, biorąc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, i przyjmijmy dla danego układu masyjnego $A = \sum m_i x_i^2$, $B = \sum m_i y_i^2$, $C = \sum m_i z_i^2$, to moment bezwładności I względem powyższej płaszczyzny jest $I = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2D \cdot bc + 2E \cdot ca + 2F \cdot ab$, gdzie D, E, F mają znaczenie podane w art. 99-ym. Przyjmijmy $I = Mk^2$ i poprowadźmy w odległości εk inną płaszczyznę, równoległą do poprzedzającej, natenczas $u = a : \varepsilon k$, $v = b : \varepsilon k$, $w = c : \varepsilon k$ będą współrzędnymi tej płaszczyzny. Obliczmy z tych równań a, b i c , wstawmy te wartości w I i przyjmijmy ε odpowiednio, wtedy $Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2D \cdot vw + 2E \cdot wu + 2F \cdot uv = 1$ będzie równaniem powierzchni, utworzonej przez płaszczyzny (u, v, w) , wyrażonym w współrzędnych płaszczyzny. Niech osi bezwładności będą osiami współrzędnych, natenczas $D = 0, E = 0,$

$F = 0$, a zatem $Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 1$ będzie równaniem powierzchni powyższej. Równanie tej powierzchni w spólrzędnych punktu jest

$$\begin{vmatrix} A, & 0, & 0, & x \\ 0, & B, & 0, & y \\ 0, & 0, & C, & z \\ x, & y, & z, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli, po rozwinięciu wyznacznika $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$.

W każdym punkcie w przestrzeni można podać jeszcze trzecią elipsoidę, będącą w ścisłym związku z momentami bezwładności układu masy. Używając znakowania art. 100-go, odetnijmy od punktu 0 na osi momentu w obu kierunkach długość, proporcjonalną względem odpowiedniego ramienia bezwładności, i przez kraniec każdego odcinka poprowadźmy płaszczyznę, prostopadłą do osi momentu, natenczas te płaszczyzny utworzą elipsoidę, która bywa nazywaną drugą elipsoidą bezwładności w punkcie rozważanym. Tę elipsoidę wprowadzili Mac Cullagh i Clebsch, podczas gdy elipsoidę, rozważaną w art. 100-ym, wprowadził Cauchy.

(8). Niech m, m_1, m_2 i m_3 oznaczają odpowiednio masy tych 4-ch punktów, których układ ma być równoważny pod względem momentów bezwładności danemu układowi masy o masie M . Obierzmy m jako początek układu osi spólrzędnych (ukośnokątnego), którego osi x, y i z przechodzą odpowiednio przez m_1, m_2 i m_3 , wtedy spólrzędne tych punktów będą: $x_1, 0, 0$; $0, y_2, 0$; $0, 0, z_3$. Jeżeli ξ, η, ζ oznaczają spólrzędne środka masy układu M , zaś k_1, k_2, k_3 jego ramiona bezwładności względem płaszczyzn m_1y, m_2x i m_3z (przyczym odległości punktów od tych płaszczyzn bierzemy w kierunkach osi odpowiednio x, y, z), to łatwo się przekonać, że żądana równoważność jest wyrażona przez równania następujące: $m + m_1 + m_2 + m_3 = M$, $m_1x_1 = M\xi$, $m_2y_2 = M\eta$, $m_3z_3 = M\zeta$, $m_1x_1^2 = Mk_1^2$, $m_2y_2^2 = Mk_2^2$, $m_3z_3^2 = Mk_3^2$. Na podstawie tych równań można dowieść twierdzenia Reyego.

(21). Niech dana prosta będzie osią z układu spólrzędnych, którego początek 0 dowolnie na tej prostej obieramy, to na tej prostej będzie się znajdował taki punkt O' , względem którego ona jest osią bezwładności układu masy, jeżeli $D \cdot \sum m_i x_i = E \cdot \sum m_i y_i$. Przyjmijmy $\delta = OO'$ i oznaczmy przez φ kąt, który druga oś bezwładności tworzy z osią z , wówczas

$$\delta = \frac{D}{\sum m_i y_i} = \frac{E}{\sum m_i x_i}, \quad \tan 2\varphi = \frac{2F}{\alpha - \beta}.$$

Znaczenie liter jest podane w art. 99-ym do 101-go.

ROZDZIAŁ XI.

(9). W każdym boku czworokąta działają 2 siły równe i o kierunkach przeciwnych, które ściskają ten bok; rozważając równowagę w każdym wierzchołku z osobna i rugując następnie siły ściskające, można otrzymać równanie podane.

(10). Jeżeli μ_1, μ_2 i μ_3 oznaczają odpowiednio przyciągania, których punkt doznaje od wierzchołków trójkąta w jednostce odległości, natenczas miejscem równo-

wagi jest środek 3-ch mas, umieszczonych w wierzchołkach trójkąta i proporcjonalnych względem μ_1, μ_2, μ_3 .

(13). Obrawszy punkt dany jako początek osi współrzędnych, dajmy siłom taki kierunek (a, b, c) , żeby $a : b : c = \Sigma P_i x_i : \Sigma P_i y_i : \Sigma P_i z_i$, wówczas będą równoważne z jedną siłą, przyłożoną do tego punktu.

(16). Jeżeli pręt AB o długości $2l$ i ciężarze Q jest zawieszony na linewkach $AO = 2a$ i $BO = 2b$, a T_1 i T_2 oznaczają odpowiednio napięcia tych linewek, wówczas

$$\frac{T_1}{Q} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - l^2}}, \quad \frac{T_2}{Q} = \frac{b}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - l^2}}.$$

(17). Jeżeli r_1 i r_2 oznaczają promienie walców, R ciśnienie wzajemne, T napięcie taśmy, wówczas

$$\frac{R}{T} = 4 \cdot \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}.$$

(18). Niech A_1, A_2 i A_3 oznaczają punkty szukane, Q_1, Q_2 i Q_3 odpowiednie ciężary dane i przyjmijmy $\varphi_{ik} =$ kątowi $A_i O A_k$ ($i, k = 1, 2, 3$), wówczas:

$$\cos \varphi_{23} = \frac{Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2}{2 Q_2 Q_3}, \quad \cos \varphi_{31} = \frac{Q_2^2 - Q_3^2 - Q_1^2}{2 Q_3 Q_1},$$

$$\cos \varphi_{12} = \frac{Q_3^2 - Q_1^2 - Q_2^2}{2 Q_1 Q_2}.$$

(19). Jeżeli r oznacza promień półkuli, $2a$ długość pręta, φ kąt, który pręt tworzy z poziomem, natenczas pierwiastek dodatni równania $4r \cdot \sin^2 \varphi - a \sin \varphi - 2r = 0$ wyznacza ten kąt.

(20). Przyjmijmy naprzód, że kule i płaszczyzny są gładkie, oznaczmy odpowiednio przez O_1 i O_2 środki kul, przez Q_1 i Q_2 ich ciężary, przez α_1 i α_2 kąty nachylenia płaszczyzn do poziomu, przez R_1 i R_2 reakcje płaszczyzn, przez T ciśnienie wzajemne kul, a przez φ kąt, który prosta $O_1 O_2$ tworzy z poziomem, natenczas

$$\tan \varphi = \frac{Q_2 \cot \alpha_2 - Q_1 \cot \alpha_1}{Q_1 + Q_2}, \quad T = Q_1 \frac{\sin \alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \varphi)} = Q_2 \frac{\sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \varphi)}.$$

Reakcje R_1 i R_2 otrzymamy, zważając na to, że siły Q_1, T i R_1 , tudzież Q_2, T i R_2 są w równowadze. Wprowadzając oprócz sił normalnych R_1, R_2 i T jeszcze reakcje styczne, zależne od współczynników tarcia, można to zadanie rozwiązać dla kul i płaszczyzn niegładkich.

(21). Niech płaszczyzna AB tworzy z poziomem kąt α , zaś płaszczyzna BC kąt β (oba kąty ostre), a pręt o długości $2a$ niech tworzy z poziomem kąt φ , wtedy wysokość η środka masy pręta nad płaszczyzną poziomą, poprowadzoną przez B, jest:

$$\eta = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} [2 \cos \varphi \sin \alpha \sin \beta + \sin \varphi \sin(\beta - \alpha)].$$

Dla równowagi $d\eta : d\varphi = 0$, więc $2 \tan \varphi = \cot \alpha - \cot \beta$; obliczając $d^2 \eta : d\varphi^2$ i wstawiając kąt φ , otrzymamy $d^2 \eta < 0$, z czego wynika, że środek masy zajmuje położenie możebnie najwyższe, więc równowaga jest niestabilna.

(22). Obierzmy oś x poziomo, oś y pionowo w górę, a początek O osi niech będzie środkiem przyciągania; jeżeli $2l$ oznacza długość pręta ($\sigma = 1$), wtedy na element ds w punkcie (x, y) , którego odległość od O jest r , przypadają siły $X = -\frac{gl^2}{2} \frac{x}{r^3} ds$, $Y = -g \left(\frac{l^2}{2} \frac{y}{r^3} + 1 \right) ds$, a jeżeli pręt tworzy z osią x kąt φ (ostry), natenczas $\delta x = -(2l - s) \sin \varphi \cdot \delta \varphi$, $\delta y = s \cdot \cos \varphi \cdot \delta \varphi$. Z tego wynika potencjał

$$U = \int_0^{2l} \left\{ l^2 \left[(2l - s)^2 \cos^2 \varphi + s^2 \cdot \sin^2 \varphi \right]^{-\frac{1}{2}} - 2s \cdot \sin \varphi \right\} ds = \\ = l^2 \left[\log \frac{(1 + \cos \varphi) \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi) \sin \varphi} - 4 \sin \varphi \right].$$

Dla równowagi jest $\frac{dU}{d\varphi} = 0$, skąd wynika równanie $\sin \varphi - \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi \sin \varphi = 0$.

Pomnóżmy to równanie przez sumę $\cos \varphi + \sin \varphi$, która nie jest równa zeru, ponieważ $\varphi < \frac{\pi}{2}$, wtedy otrzymamy $(1 + \sin 2\varphi)(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) = 0$. Ponieważ $1 + \sin 2\varphi$

nie jest równe zeru, przeto $\cos 2\varphi + \sin 2\varphi = 0$, skąd $\varphi = \frac{3}{8}\pi$ dla równowagi pręta.

Obliczywszy 2-gą pochodną potencjału i wstawiwszy tę wartość za φ , otrzymamy $d^2U > 0$, z czego wnosimy, że równowaga jest niestabilną.

(24). Poprowadźmy przez punkt najniższy nici oś x poziomo, oś y pionowo w górę i niech ciężar elementu ds będzie wyrażony przez $\mu \cdot ds$; wtedy równania równowagi są: $d\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) = 0$, $d\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) = \frac{\mu \cdot ds}{\sqrt{s}}$. Całkując je i oznaczając przez a napięcie nici w punkcie najniższym, otrzymamy:

$$y = \left(\frac{\mu}{a} x + \frac{a}{2\mu} \right) \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} x^2 + x} - \left(\frac{a}{2\mu} \right)^2 \log \frac{2\mu}{a} \left(\frac{\mu}{a} x + \frac{a}{2\mu} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} x^2 + x} \right), \quad T = a + \frac{2\mu^2}{a} x.$$

(25). Przyjmijmy, że ciężar wozu jest symetrycznie rozdzielony między obadwa koła przednie i między obadwa koła tylne, wtedy wystarczy rozważać równowagę na płaszczyźnie pionowej, poprowadzonej przez jedno koło przednie i jedno tylne. Niech w tej płaszczyźnie koło przednie dotyka się płaszczyzny pochyłej w punkcie A , koło tylne w A' , a S niech będzie środkiem ciężkości ciężaru, przypadającego na te dwa koła, O i O' niech oznaczają środki kół. Gdy hamujemy koło przednie, wówczas reakcja w A' będzie normalna do płaszczyzny, a jeżeli kierunek tej reakcji przecina w punkcie B pion, poprowadzony przez S , natenczas AB jest kierunkiem reakcji w A , a gdyby kąt OAB był większy od kąta tarcia, natenczas wóz ślizgałby się. Gdy zaś hamujemy koło tylne, reakcja w A będzie normalna do płaszczyzny, a jeżeli jej kierunek przecina w C pion punktu S , wtedy CA' będzie kierunkiem reakcji w A' , a gdyby kąt OCA' był większy od kąta tarcia, nastąpiłoby ślizganie się wozu. Stąd wynika, że gdy kąt $OAB >$ kąt OCA' , wtedy lepiej hamować koła tylne; gdy zaś kąt $OAB <$ kąt

OCA', wtedy lepiej hamować koła przednie. Obliczywszy te kąty, można zapomocą formuły wyrazić warunek, odpowiadający hamowaniu najdogodniejszemu wozu.

(27). Rozważając równowagę każdego elementu nici zosobną, można otrzymać równanie różniczkowe linii łańcuchowej dla sił centralnych. Niech O będzie środkiem siły centralnej P, m punktem na krzywej o masie m , $r = Om$; poprowadźmy w m styczną i oznaczmy przez α kąt, który r tworzy z tą styczną, przez p długość prostopadłej z O na styczną, przez ρ promień krzywizny, natenczas równania równowagi są

$$P_m \cdot \sin \alpha = \frac{T}{\rho}, \quad P_m \cdot dr = dT.$$

Ponieważ $\rho = -r \cdot dr : dp$, $\sin \alpha = p : r$, przeto z równań poprzednich wynika $\frac{dp}{p} +$

$+\frac{dT}{T} = 0$, a stąd $p = \frac{a}{R}$, gdzie $R = \int P_m \cdot dr$, zaś a jest stałą. Wstawwszy P, wyrażone przez r , otrzymamy równanie między r i p . Obierając O jako początek współrzędnych biegunowych r i φ , wstawmy $p = r^2 d\varphi : \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$, a wtedy wyniknie $d\varphi = \frac{a \cdot dr}{r(R^2 r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$ jako równanie różniczkowe linii szukanej. Przyjmując P odwrotnie proporcjonalne względem r^2 , rozwiążemy zadanie.

(28). Jeżeli 2α jest kątem szukany, wtedy $\operatorname{tg} \alpha = 1 : \sqrt{2}$.

ROZDZIAŁ XII.

(4). Jeżeli r oznacza promień łuku, 2φ kąt środkowy, natenczas przyciąganie, mające kierunek prostopadły do cięciwy łuku, jest

$$X = \frac{2k\mu\sigma}{r} \cdot \sin \varphi.$$

(5). Jeżeli h oznacza wysokość stożka, 2φ kąt u wierzchołka, natenczas przyciąganie, mające kierunek osi stożka, jest

$$X = 2\pi k\mu\sigma h (1 - \cos \varphi).$$

(11). Zastosować wzory Gaussa (art. 122), tudzież własności punktów odpowiednich, podane w art. 128-ym.

(13). Potencjał masy kulistej względem środka jest

$$V = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-r} \cdot r \sin \psi \cdot dr d\psi d\vartheta = 4\pi.$$

(14). Obierzmy oś sferoidy o długości $2A$ jako oś z , a płaszczyznę xz poprowadźmy przez punkt przyciągany $\mu : (\xi, \zeta)$, znajdujący się na powierzchni sferoidy, której równanie jest $x^2 + y^2 + (1 + \varepsilon^2)z^2 = (1 + \varepsilon^2)A^2$. Punkt μ nie doznaje widocznie przyciągania w kierunku osi y , pozostają zatem tylko składowe X i Z przyciągania w kierunkach osi x i z . Poprowadźmy przez μ prostą, która z osiami spół-

rzędnych tworzy kąty odpowiednio α, β, γ , obierzmy ją jako oś nieskończenie wązkiego stożka, który na powierzchni kuli o promieniu 1 zakreśla pole $d\omega$, i oznaczmy przez r długość cięciwy sferoidy, odpowiadającej tej prostej, wówczas dla elementu sferoidy, znajdującego się wewnątrz stożka, otrzymamy

$$dX = k\mu\sigma r \cdot \cos\alpha \cdot d\omega, \quad dZ = k\mu\sigma r \cdot \cos\gamma \cdot d\omega.$$

Ponieważ μ znajduje się na sferoidzie, przeto

$$r = -2 \cdot \frac{\xi \cos\alpha + \zeta(1 + \varepsilon^2) \cos\gamma}{1 + \varepsilon^2 \cos^2\gamma}, \text{ a stąd}$$

$$dX = -2k\mu\sigma \cdot \frac{\xi \cos^2\alpha + \zeta(1 + \varepsilon^2) \cos\alpha \cos\gamma}{1 + \varepsilon^2 \cos^2\gamma} d\omega,$$

$$dZ = -2k\mu\sigma \cdot \frac{\xi \cos\alpha \cos\gamma + \zeta(1 + \varepsilon^2) \cos^2\gamma}{1 + \varepsilon^2 \cos^2\gamma} d\omega.$$

Poprowadźmy przez środek sferoidy promień, równoległy do cięciwy r , i oznaczmy przez φ kąt, który południk tego promienia tworzy z płaszczyzną xz , wtedy $\cos\alpha = \sin\gamma \cos\varphi$, $d\omega = \sin\gamma \cdot d\gamma d\varphi$, a stąd

$$X = -2k\mu\sigma\xi \cdot \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin^3\gamma \cos^2\varphi d\gamma d\varphi}{1 + \varepsilon^2 \cos^2\gamma},$$

$$Z = -2k\mu\sigma(1 + \varepsilon^2)\zeta \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2\gamma \sin\gamma d\gamma d\varphi}{1 + \varepsilon^2 \cos^2\gamma}.$$

Obliczywszy te całki aż do wyrazów tego rzędu, co ε^2 , mieć będziemy ostatecznie:

$$X = -\frac{4}{3} \pi k\mu\sigma\xi \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5}\right), \quad Z = -\frac{4}{3} \pi k\mu\sigma\zeta \left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{5}\right).$$

(15). Z obliczonych w zadaniu poprzedzającym składowych X i Z przyciągania P można wyznaczyć kierunek jego, tudzież punkt c , w którym siła P przecina oś; z równania zaś przekroju sferoidy płaszczyzną xz można wyznaczyć punkt b , w którym normalna do sferoidy w punkcie μ przecina oś x . Obliczywszy długości Oc i Ob do wyrazów tego rzędu, co ε^2 , otrzymamy $Oc = \frac{3}{5} \varepsilon^2 \xi$, $Ob = \varepsilon^2 \xi$, skąd $Oc = \frac{3}{5} Ob$. To twierdzenie podał J. Stirling.

(17). Oznaczmy przez L długość normalnej do sferoidy od punktu μ do przecięcia z osią z , natenczas $L = A \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sin^2\lambda)\right]$. Stąd otrzymamy $\frac{dL}{d\lambda} = A\varepsilon^2 \sin\lambda \cos\lambda$, a z wyrażenia na g w zadaniu (16) wynika $\frac{dg}{d\lambda} = g_0 \varepsilon^2 \sin\lambda \cos\lambda$, więc $\frac{dg}{dL} = \frac{g_0}{A}$, co wyraża właśnie twierdzenie podane. To twierdzenie podał T. Simpson.

ROZDZIAŁ XIV.

(1). Z wiadomego wyrażenia energii kinetycznej kręcącego się ciała, $2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$, wynika $\delta T = Ap \cdot \delta p + Bq \cdot \delta q + Cr \cdot \delta r$. Aby obliczyć δp , δq i δr , oznaczmy przez a_i , b_i , c_i ($i = 1, 2, 3$) dostawy kierunkowe osi bezwładności względem osi współrzędnych na początku elementu czasu dt , i zważmy, że ruch przygotowany ciała może być utworzony przez 3 obroty z odchyleniami $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ około tych prostych, które zajmują chwilowo położenia osi bezwładności, a wtedy z równań (20) art. 43-go otrzymamy

$$(1) \quad \delta a_1 = a_2 \cdot \delta\zeta - a_3 \cdot \delta\eta, \quad \delta b_1 = b_2 \cdot \delta\zeta - b_3 \cdot \delta\eta, \quad \delta c_1 = c_2 \cdot \delta\zeta - c_3 \cdot \delta\eta,$$

i podobnie dla dwu osi pozostałych. Ponieważ według tych samych równań

$$(2) \quad \frac{da_1}{dt} = a_2 r - a_3 q, \quad \frac{db_1}{dt} = b_2 r - b_3 q, \quad \frac{dc_1}{dt} = c_2 r - c_3 q,$$

przeło z 1-go równania (1) wynika

$$(3) \quad \frac{d\delta a_1}{dt} = a_2 \cdot \frac{d\delta\zeta}{dt} - a_3 \cdot \frac{d\delta\eta}{dt} + \delta\zeta \cdot \frac{da_2}{dt} - \delta\eta \cdot \frac{da_3}{dt},$$

a z 1-go równania (2),

$$(4) \quad \delta \frac{da_1}{dt} = a_2 \cdot \delta r - a_3 \cdot \delta q + r \cdot \delta a_2 - q \cdot \delta a_3.$$

Jeżeli zważymy, że $\frac{d\delta a_1}{dt} = \delta \frac{da_1}{dt}$, wstawimy w (3) wartości pochodnych $\frac{da_2}{dt}$ i $\frac{da_3}{dt}$, a w (4) wstawimy wartości waryjacji δa_2 i δa_3 , to otrzymamy równanie następujące:

$$(5) \quad a_2 \left(\delta r - \frac{d\delta\zeta}{dt} + q \cdot \delta\xi - p \cdot \delta\eta \right) - a_3 \left(\delta q - \frac{d\delta\eta}{dt} + p \cdot \delta\zeta - r \cdot \delta\xi \right) = 0,$$

a dwa inne równania wynikną z tego, gdy zamiast a wstawimy odpowiednio b i c . Używając w (5) przestawienia kołowego wskaźników bez zmiany litery a , razem z przedstawieniem kołowym liter p , q i r , otrzymamy 2 nowe równania, które znowu dają po 2 równania odpowiednie dla b i c . Ponieważ $a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k = 0$, przeło okazuje się, że czynniki, które w układzie równań takich, jak (5), znajdują się w nawiasach, są równe zero każdy z osobna, a stąd wynika, że

$$\delta p = \frac{d\delta\xi}{dt} + q \cdot \delta\zeta - r \cdot \delta\eta = \delta\xi' + q \cdot \delta\zeta - r \cdot \delta\eta,$$

$$\delta q = \frac{d\delta\eta}{dt} + r \cdot \delta\xi - p \cdot \delta\zeta = \delta\eta' + r \cdot \delta\xi - p \cdot \delta\zeta,$$

$$\delta r = \frac{d\delta\zeta}{dt} + p \cdot \delta\eta - q \cdot \delta\xi = \delta\zeta' + p \cdot \delta\eta - q \cdot \delta\xi.$$

Wstawmy te wartości w δT i zważmy, że

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \xi'} \delta\xi' + \frac{\partial T}{\partial \eta'} \delta\eta' + \frac{\partial T}{\partial \zeta'} \delta\zeta' + \frac{\partial T}{\partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial T}{\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \delta\zeta,$$

to z porównania obu dwu wartości tej wariacji mieć będziemy:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \xi'} = Ap, & \frac{\partial T}{\partial \eta'} = Bq, & \frac{\partial T}{\partial \zeta'} = Cr, \\ \frac{\partial T}{\partial \xi} = (B - C)qr, & \frac{\partial T}{\partial \eta} = (C - A)rp, & \frac{\partial T}{\partial \zeta} = (A - B)pq. \end{cases}$$

Jeżeli te wartości wstawimy w równanie, wyrażające zasadę Hamiltona, lub w równania Lagrange'a, wynikające z tej zasady, i uwzględnimy, że praca przygotowana w przypadku rozważanym wyraża się wzorem $U^{(1)} = L \cdot \delta \xi + M \cdot \delta \eta + N \cdot \delta \zeta$, otrzymamy równania Eulera. Te równania można także otrzymać z równań kanonicznych ruchu, co pozostawiamy czytelnikowi.

(3). Twierdzenie podane stosuje się widocznie do każdego układu masyjnego, którego środek masy porusza się jednostajnie po linii prostej. Obierzmy na tej prostej punkt dowolny $m: (x, y, z)$, którego odległość od środka masy jest r , i oznaczmy, jak w art. 142-im, przez G_x, G_y i G_z momenty ilości ruchu układu względem 3-ch prostych równoległych do osi współrzędnych i poprowadzonych przez punkt m . Jeżeli, odpowiednio do równania (6) art. 142-go, przyjmiemy $G_x = \mu_x + S_x, G_y = \mu_y + S_y, G_z = \mu_z + S_z$, to tylko μ_x, μ_y i μ_z będą funkcjami współrzędnych punktu m , zaś S_x, S_y i S_z nie zależą od tych współrzędnych. Stosując równania (6) art. 71-go, otrzymamy

$$\mu_x = M \left[(z - \zeta) \frac{d\eta}{dt} - (y - \eta) \frac{d\zeta}{dt} \right],$$

a podobnie μ_y i μ_z ; jeżeli jednak uwzględnimy, że $x = \xi + r \cdot \frac{d\xi}{dt}$, $y = \eta + r \cdot \frac{d\eta}{dt}$,

$z = \zeta + r \cdot \frac{d\zeta}{dt}$, to wyniknie $\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$, a stąd $G_x : G_y : G_z = S_x : S_y : S_z$,

co wyraża właśnie twierdzenie podane, albowiem dostawy kierunkowe prostopadłe do płaszczyzny niezmienną, odpowiadającej punktowi m , są odpowiednio proporcjonalne względem G_x, G_y i G_z .

(4). Dowodzenie podobne, jak (3).

(5). Oznaczmy przez m_1, m_2 i m_3 punkty, obrane na osiach bezwładności w odległościach od O odpowiednio $x_1 = Om_1 = \varepsilon \sqrt{M : A}$, $y_2 = Om_2 = \varepsilon \sqrt{M : B}$, $z_3 = Om_3 = \varepsilon \sqrt{M : C}$, to składowe prędkości tych punktów, wzięte w kierunkach osi bezwładności, możemy obliczyć z równań (16) art. 43-go. Czyniąc to i oznaczając odpowiednio przez v_1, v_2 i v_3 prędkości punktów powyższych, mieć będziemy

$$v_1^2 = \frac{\varepsilon^2 M}{A} (r^2 + q^2), \quad v_2^2 = \frac{\varepsilon^2 M}{B} (p^2 + r^2), \quad v_3^2 = \frac{\varepsilon^2 M}{C} (q^2 + p^2),$$

a stąd po łatwych przerobieniach

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{\varepsilon^2 M}{ABC} [2T(A + B + C) - G^2],$$

co jest wielkością stałą, gdy na układ żadne siły nie działają.

(6). Równanie elipsoidy bezwładności jest $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, a równanie płaszczyzny średnicowej, równoległej do płaszczyzny niezmienną, jest $Ap \cdot x +$

$+ Bq \cdot y + Cr \cdot z = 0$; wyznaczwszy osi główne odpowiedniego przekroju elipsojdy bezwładności (Ob. *Geometrię analityczną* Wł. Zajęczkowskiego str. 418 — 419), można dowieść tego twierdzenia.

(7). Przyjmijmy $p_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q_1 = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, natenczas krzywizna k danej powierzchni $F(x, y, z) = 0$ wyrazi się przez wzór następujący:

$$k = \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{(1 + p_1^2 + q_1^2)^2}.$$

Obliczmy powyższe pochodne dla elipsojdy bezwładności i wprowadźmy następnie współrzędne punktu bieżącego połody, mianowicie $x = p : \sqrt{2T}$, $y = q : \sqrt{2T}$, $z = r : \sqrt{2T}$, a otrzymamy wyrażenie następujące na krzywiznę tej elipsojdy w każdym punkcie połody:

$$k = ABC \cdot \left(\frac{2T}{G^2} \right)^2.$$

(8). Uwzględnić równanie $Ap \cdot x + Bq \cdot y + Cr \cdot z - \sqrt{2T} = 0$ płaszczyzny stycznej do elipsojdy bezwładności w punkcie połody, tudzież równania krzywych ogniskowych powierzchni stopnia 2-go ze środkiem, podane w *Geometrii analitycznej* Wł. Zajęczkowskiego str. 428 — 431.

(9). Dowodzenie podobne, jak (5).

ROZDZIAŁ XV.

(1). Jeżeli w chwili wystrzału v oznacza prędkość pocisku względem działa, v_1 prędkość bezwzględną pocisku, v_2 prędkość bezwzględną działa, natenczas $v_1 : v_2 = m : M$, a ponieważ $v = v_1 + v_2$, przeto $v_2 = mv : (M + m)$. Ponieważ tarcie fMg wywołuje stałe opóźnienie fg działa, przeto ruch działa jest jednostajnie opóźniony, a stąd wynika, że działło cofać się będzie przez czas $\frac{mv}{fg(M + m)}$, a droga jego wyniesie

$$\frac{1}{2fg} \cdot \left(\frac{m}{M + m} \right)^2 v^2.$$

(2). Oś wahanja jest równoległa do osi większej elipsy i przechodzi przez środek połowy osi mniejszej.

(3). Niech k będzie ramieniem bezwładności wahadła o masie m względem osi wahanja, h odległością środka masy od téjże osi, natenczas $l = k^2 : h$ jest jego długością zredukowaną. Aby l przyrosło o λ , dodajemy w odległości x od osi wahanja małą masę μ , a wtedy będzie $l + \lambda = (mk^2 + \mu x^2) : (mh + \mu x)$. Wyznaczmy stąd μ i szukajmy warunku, żeby μ było najmniejszym, to otrzymamy $2x = l + \lambda$, a ponieważ λ jest bardzo małe, przeto możemy przyjąć $2x = l$. Czytelnik wyznaczy zmianę trwania wahnięcia przez dodanie masy regulującej μ .

(4). Czytelnik rozwiąże to zadanie przy założeniu, że środek masy S wahadła wydrążonego i środek masy s kuli płynnej nie znajdują się na prostej, prostopadłej do osi wahanja, lecz że prostopadłe do téj osi, poprowadzone przez S i s , tworzą kąt wia-

domy α . Przyjmując małe wahnięcia, można scałkować równanie ruchu, a biorąc $\alpha = 0$, można podać rozwiązanie w przypadku szczególnym, odpowiadającym temu założeniu.

(5). Używając sposobu 1-go, oznaczmy przez M masę, przez k ramię bezwładności (względem osi wahania) wahadła razem z działem, przez m masę pocisku, przez δ odległość osi działu od osi wahania, przez h odległość środka masy wahadła razem z działem od osi wahania, przez φ odchylenie mierzone wahadła wskutek wystrzału, to prędkość v pocisku jest

$$v = \frac{2 M k \sqrt{gh}}{m \delta} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Używając zaś sposobu 2-go, oznaczmy przez M masę wahadła, przez k jego ramię bezwładności względem osi, przez h odległość jego środka masy od tejże osi, a przez δ odległość środka masy pocisku, utkwionego w masie wahadła, od osi wahania tegoż wahadła, natenczas

$$v = 2 \cdot \frac{\sqrt{g}}{m \delta} \sqrt{(Mh + m\delta)(Mk^2 + m\delta^2)} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

(6). Niech ω oznacza prędkość kątową obrotu pręta, a na element dx w odległości x od osi obrotu niech przypada opór $\mu \omega^2 x^2 \cdot dx$, niech l będzie długością, mk^2 momentem bezwładności pręta, wówczas

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\mu l^3}{3 mk^2} t + \text{stała}.$$

(7). Obierzmy kierunek toczenia się kuli jako kierunek osi x , a kula o promieniu r i momencie bezwładności mk^2 względem średnicy niech dotyka się płaszczyzny w punkcie M ; jeżeli M_0 jest położeniem początkowym (dla $t = 0$) punktu styczności na kuli, zaś N_0 jego położeniem na osi x , to warunek toczenia się jest $N_0 M =$ łukowi $M_0 M$, a gdy kula obróciła się o kąt φ i x liczymy od N_0 , to ten warunek wyrazi się wzorem $x = r\varphi$. Oznaczmy tarcie przez F , to mamy następujące 2 równania ruchu:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \cdot \sin \alpha - F, \quad mk^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Fr,$$

z których 1-sze wyznacza ruch postępowy kuli, 2-gie jej obrót około średnicy poziomej, prostopadłej do osi x . Rugując φ zapomocą warunku $x = r\varphi$, można wyznaczyć x i okazać, że kula będzie się toczyła bez ślizgania się, gdy $f \geq \frac{2}{7} \tan \alpha$.

(8). Gdy $f < \frac{2}{7} \tan \alpha$, natenczas $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{5}{2} \cdot \frac{fg}{r} t \cdot \cos \alpha$, podczas gdy w zadaniu poprzedzającym $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{5}{7} \cdot \frac{gt}{r} \cdot \sin \alpha$.

(10). Poprowadźmy na płaszczyźnie ruchu trójkąta ABC przez punkt A osi współrzędnych x i y ; niech w czasie t pręt AB tworzy z osią x kąt α , pręt BC kąt β , a pręt BC z prętem AB kąt φ , przyjmijmy nadto $AB = BC = 2a$, oznaczmy przez mk^2 moment bezwładności każdego pręta względem prostej, poprowadzonej przez

jego środek i prostopadłej do płaszczyzny ruchu, przez ω prędkość kątową obrotu pręta AB około A, przez ω_1 prędkość kątową obrotu pręta BC około B. Zanedbajmy ciężary własne prętów, natenczas reakcja osi obrotu A i napięcie nici AC są jedynymi siłami przyłożonymi; ponieważ suma momentów tych sił względem A jest równa zeru, przeto możemy zastosować równanie (9) art. 157-go, biorąc $N = 0$, a jeżeli to równanie scałkujemy, otrzymamy

$$(1) \quad M(\xi \eta' - \eta \xi') + I\varphi' = c,$$

gdzie c jest stałą, a pochodne względem czasu oznaczyliśmy przecinkiem u góry. Jeżeli promień wodzący r i kąt biegunowy ϑ są współrzędnymi środka (środką masy) pręta BC, to lewa strona równania (1) dla obudwu prętów razem będzie miała wartość $m[(k^2 + a^2)\omega + r^2\vartheta' + k^2\omega_1]$; dla wyznaczenia stałej c mamy warunki, że dla $t = 0$: $\omega = \Omega$, $\vartheta' = \Omega$, $r^2 = 3a^2$ (bo trójkąt ABC był pierwotnie równobocznym), więc $c = 2m\Omega(k^2 + 2a^2)$, a stąd

$$(2) \quad (k^2 + a^2)\omega + r^2\vartheta' + k^2\omega_1 = 2\Omega(k^2 + 2a^2).$$

Zastosujmy dalej zasadę pracy. Energija kinetyczna pręta AB jest $\frac{m}{2}(k^2 + a^2)\omega^2$; aby obliczyć energiją pręta BC, obierzmy na nim punkt (x, y) w odległości λ od środka, to $x = r\cos\vartheta + \lambda\cos\beta$, $y = r\sin\vartheta + \lambda\sin\beta$, różniczkujmy te równania i zważmy, że $\omega_1 = \beta'$, to otrzymamy energiją tego pręta równą $\frac{m}{2}(r^2\vartheta'^2 + r'^2 + k^2\omega_1^2)$.

Wprowadziwszy warunek, że $r' = 0$ dla $t = 0$, otrzymamy $\frac{m}{2}[(k^2 + a^2)\omega^2 + r^2\vartheta'^2 + r'^2 + k^2\omega_1^2 - 2(k^2 + 2a^2)\Omega^2]$ jako przyrost energii obudwu prętów od początku ruchu. Niech ρ będzie długością nici AC w czasie t , to napięcie T wyrazi się wzorem $T = \frac{E}{2a}(\rho - 2a)$, w którym E jest współczynnikiem sprężystości nici (art. 188), a praca tego napięcia będzie

$$-\int_{2a}^{\rho} T \cdot d\rho = -\frac{E}{2a} \int_{2a}^{\rho} (\rho - 2a) d\rho = -\frac{E}{4a} (\rho - 2a)^2.$$

Zasada pracy daje więc równanie następujące:

$$(3) \quad m[(k^2 + a^2)\omega^2 + r^2\vartheta'^2 + r'^2 + k^2\omega_1^2] = 2m(k^2 + 2a^2)\Omega^2 - \frac{E}{2a}(\rho - 2a)^2.$$

Miedzy niewiadomymi mamy następujące związki geometryczne: $\varphi = \beta - \alpha$, a stąd ($\omega = \alpha'$)

$$(4) \quad \varphi' = \omega_1 - \omega;$$

następnie $r^2 = 5a^2 + 4a^2\cos\varphi$, a stąd

$$(5) \quad rr' = -2a^2(\omega_1 - \omega)\sin\varphi;$$

dalej $\sin(\vartheta - \alpha) : \sin\varphi = a : r$, a stąd

$$(6) \quad (\vartheta' - \omega)\cos(\vartheta - \alpha) = (\omega_1 - \omega)\left(\frac{a}{r}\cos\varphi + \frac{2a^3}{r^3}\sin^2\varphi\right);$$

nareszcie

$$(7) \quad \rho^2 + 2a^2 = 2r^2.$$

Wyrujmy ω_1 z równań (2) i (4), wstawmy następnie ϑ' z (6), wyrażmy $\cos(\vartheta - \alpha)$, wyrażmy r przez φ , a ρ przez r według (7), i wstawmy te wartości w (3), to otrzymamy równanie między φ i t , określające obrót pręta BC względem AB. W chwili, gdy nie staje się najdłuższą, będzie $\rho' = 0$, a ponieważ według (7) i (5) $\rho\rho' = -4a^2(\omega_1 - \omega)\sin\varphi$, więc w tej chwili bądź $\sin\varphi = 0$, bądź $\omega_1 = \omega$. Założenie $\sin\varphi = 0$ oznacza, że obadwa pręty stanowią linią prostą, a wtedy $\rho = 4a$ jest największą długością nici; założenie $\omega_1 = \omega$ daje według (6) $\vartheta' = \omega_1 = \omega$, a według (5) $r' = 0$. Wprowadziwszy te wartości w (2) i (3) i wyraziwszy r według (7), otrzymamy 2 równania, które dają ω i ρ w chwili największego wydłużenia nici. Podane równania pozwalają obliczyć prędkości kątowe ω i ω_1 dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tudzież najmniejszą wartość Ω , żeby dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ prędkości ω i ω_1 miały wartości rzeczywiste.

(13). W tym zadaniu można rozróżnić 2 przypadki, mianowicie: 1) Każde koło jest stale połączone ze swoją osią, jak w wozach kolejowych, a wtedy siła pociągowa ma do pokonania tarcie kół o podstawę, tudzież tarcie czopów. 2) Każde koło obraca się swobodnie około swjej osi, jak w wozach zwykłych, a wtedy zamiast tarcia czopów należy uwzględnić tarcie, zachodzące między osią a piastą koła. Ponieważ średnica otworu w piąście koła jest nieco większa od średnicy osi, przeto piasta i oś dotykają się wzajemnie w pewnej prostej, która względem pionu, poprowadzonego przez środek koła, znajduje się w kierunku przeciwnym działania siły pociągowej; w punktach tej prostej zachodzi reakcja normalna między kołem a osią, tudzież reakcja styczna, przedstawiająca tarcie. Wyznaczywszy reakcje normalne, można obliczyć siłę pociagową.

(14). Niech $2a$ oznacza długość, M masę pręta, m masę kuli, v_0 i v prędkość kuli przed uderzeniem i po uderzeniu, ω prędkość kątową pręta po uderzeniu, natenczas

$$v = v_0 \cdot \frac{3m - M}{3m + M}, \quad \omega = v_0 \cdot \frac{6m}{a(3m + M)}.$$

(15). Użyjmy fig. 48-éj w Rozdz. XI z tą odmianą, że prosta SO niech tworzy z osią x kąt α , zaś $2a$ niech będzie długością pręta. Wprowadziwszy reakcje R_1 i R_2 , wypiszmy 2 równania ruchu środka masy S, a równanie (8) art. 157-go zastosujmy do punktu, w którym przecinają się reakcje. Wprowadziwszy następnie kąt α , otrzymamy równanie następujące:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = C - \frac{2ga}{k^2 + a^2} \sin\alpha,$$

w którym k jest ramieniem bezwładności pręta względem prostej, poprowadzonej przez S prostopadłe do pręta, C stałą. Z danych warunków początkowych, że, gdy $\alpha = \alpha_0$, wtedy $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0$, można wyznaczyć C, a następnie obliczyć R_1 i R_2 z równań ruchu środka masy.

(16). Ob. art. 146-y i 147-y.

(22). Przyjmijmy, że kula toczy się na płaszczyźnie wzdłuż prostej, prostopadłej do osi obrotu tej płaszczyzny. Punkt, w którym ślad kuli na płaszczyźnie przecina oś obrotu, przyjmijmy jako początek O ruchomego układu osi współrzędnych, ów ślad jako oś $O\xi$, prostopadłą do niego na płaszczyźnie pionowej jako oś $O\eta$, a oś obrotu jako oś $O\zeta$; niech ξ i η oznaczają współrzędne środka kuli, φ kąt, który ten promień kuli, który w chwili $t = 0$ był prostopadły do płaszczyzny, tworzy z osią $O\eta$, R promień kuli, Mk^2 jej moment bezwładności względem średnicy, ω prędkość kątową obrotu płaszczyzny. Wyraziwszy energiją ruchu względnego kuli przez pochodne ξ' i φ' ($\eta' = 0$, ponieważ η jest stałe), zastosujmy równanie (6) art. 145-go i uwzględnijmy warunek toczenia się, $\xi' = r\varphi'$, to otrzymamy równanie różniczkowe $\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)\xi'' = \omega^2\xi + g\sin\omega t$, którego całka pozwala wyrazić ξ przez t i przez 2 stałe C_1 i C_2 , zależne od warunków początkowych. Wstawiając za k wartość, otrzymamy całkę tego równania:

$$\xi = -\frac{5}{12} \frac{g}{\omega^2} \sin\omega t + C_1 e^{\omega \sqrt{\frac{5}{7}} t} + C_2 e^{-\omega \sqrt{\frac{5}{7}} t}.$$

(24). Stosując zasady, podane w art. 142-im, można okazać, że, jeżeli obrót pierwotny z prędkością kątową ω zachodził około osi, której dostawy kierunkowe względem osi bezwładności były a, b, c , a obrót nowy zachodzi około osi, której dostawy kierunkowe są a_1, b_1 i c_1 , natenczas prędkość kątowa ω_1 tego obrotu daje się obliczyć z równania następującego:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{A \cdot a a_1 + B \cdot b b_1 + C \cdot c c_1}{A a_1^2 + B b_1^2 + C c_1^2}.$$

ROZDZIAŁ XVII.

(1). Obróćmy obie proste na jednej z płaszczyzn współrzędnych, zastosować równania (4) i (5) art. 178-go.

(2). Zastosować równanie (9) art. 180-go, zważając na to, że superpozycja polega na dodawaniu dwu odkształceń, zachodzących w tym samym kierunku.

(3). Niech a, b, c oznaczają dostawy kierunkowe osi głównych, I moment bezwładności przed odkształceniem, I' po odkształceniu, natenczas

$$I' = I + 2[\alpha\lambda_1(b^2 + c^2) + \beta\lambda_2(c^2 + a^2) + \gamma\lambda_3(a^2 + b^2)],$$

gdzie α, β, γ mają znaczenie, podane na str. 251 w zadaniu (2).

(4). Przyjmijmy początek pionowej osi y w środku masy przekroju swobodnego (najniższego) pręta, oznaczmy przez p stałe napięcie pręta, przez F_0 pole przekroju swobodnego, a przez γ ciężar jednostki objętości pręta, natenczas pole F przekroju w odległości y od przekroju swobodnego wyznacza się wzorem następującym:

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma}{p} y}.$$

(5). Rozważając warunki równowagi walca skręconego, można przyjąć, że napięcie styczne w punkcie dowolnym jego przekroju jest proporcjonalne względem odległości tego punktu od osi walca. Na podstawie tego przypuszczenia można otrzymać równanie, podane przy końcu art. 189-go i okazać, że włókno, równoległe do osi walca i znajdujące się w odległości y od tejże osi, może być po odkształceniu uważane za linią prostą, tworzącą z osią walca taki kąt φ , że $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\theta y}{x}$, gdzie θ oznacza kąt skręcenia przekroju, którego odległość od przekroju utwierdzonego jest równa x .

(6). Zastosować postępowanie, podane w art. 190-ym.

(7). Przyjąć u, v, w proporcjonalne odpowiednio względem x, y, z .

(8). Stosując znakowanie art. 192-go, otrzymamy następujące linie węzłów:

a) W przypadku ($i = 2, k = 2$): prostą $y = \frac{a}{2}$ i prostą $z = \frac{a}{2}$. b) W przypadku

($i = 1, k = 3$) lub ($i = 3, k = 1$): proste $y = \frac{a}{3}$, $y = \frac{2a}{3}$; $z = \frac{a}{3}$, $z = \frac{2a}{3}$;

$y = z$, $y = a - z$, i koło $\cos^2 \frac{\pi y}{a} + \cos^2 \frac{\pi z}{a} = \frac{1}{2}$.

(9). Obierając środek koła jako początek współrzędnych, wprowadźmy współrzędne biegunowe r i φ zapomocą równań $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$, wtedy otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \log r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right),$$

a stąd równanie różniczkowe drgań poprzecznych błony okrągłej:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{p}{\sigma r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \log r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

(10). Przyjmując, że struna wypięzona ma kierunek osi x , otrzymamy teżsame równania, które podaliśmy w art. 191-ym pod (2).

ROZDZIAŁ XVIII.

(2). Przyjmijmy średnicę poziomą półkuli o promieniu r jako oś x , a promień pionowy na dół jako oś z , natenczas dla dwu punktów podziału, po sobie następujących i leżących na osi z , mianowicie dla punktu ($i - 1$)-go i i -go, otrzymamy równanie następujące:

$$n(x_{i-1}^3 - x_i^3) - r^3 = 0,$$

przyczym $x_0 = r$, $x_n = 0$.

(3). Obierzmy środek kuli jako początek osi współrzędnych, osi x i y poziomo, oś z pionowo na dół, i oznaczmy przez σ gęstość cieczy, natenczas składowe X, Y, Z ciśnienia będą wyrażone przez równania następujące:

$$X = \sigma g \iint x \, dx \, dy, \quad Y = \sigma g \iint y \, dx \, dy, \quad Z = \sigma g \iint z \, dx \, dy,$$

gdzie całki podwójne rozciągają się na 4-tą część powierzchni naczynia półkulistego.

(4). Niech trójkąt ABC będzie podstawą graniastosłupa prostego, s niech będzie gęstością graniastosłupa, σ gęstością cieczy i przyjmijmy $\lambda = s : \sigma$, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, niech D będzie środkiem boku a , $l = AD$, kąt $BAD = \alpha$, kąt $DAC = \beta$. Jeżeli graniastosłup pływa tak, że krawędź, przechodząca przez A , jest zanurzona w cieczy, której powierzchnia przecina bok AB w punkcie E , i przyjmijmy $AE = x$, natenczas x jest pierwiastkiem równania

$$x^4 - 2l \cos \alpha \cdot x^3 + 2\lambda l bc \cos \beta \cdot x - \lambda^2 b^2 c^2 = 0;$$

jeżeli zaś podczas pływania są zanurzone krawędzie, przechodzące przez punkty B i C , wówczas

$$x^4 - 2l \cos \alpha \cdot x^3 + 2(1 - \lambda) l bc \cos \beta \cdot x - (1 - \lambda)^2 b^2 c^2 = 0.$$

Niech powierzchnia cieczy przecina bok AC w punkcie F i przyjmijmy $AF = y$, natenczas w 1-yim przypadku $xy = \lambda bc$, zaś w 2-gim przypadku $xy = (1 - \lambda) bc$. O stałości pływania rozstrzyga twierdzenie, podane w art. 198-ym.

(6). Przyjmijmy początek osi współrzędnych w środku poziomego dna naczynia, oś z pionowo w górę, i oznaczmy przez ω prędkość kątową obrotu około osi z , natenczas powierzchnia cieczy jest wyrażona przez równanie

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega^2} (z - a) = 0,$$

w którym a oznacza stałą, którą należy obliczyć z wiadomej objętości cieczy w naczyniu.

(8). Przyjmijmy środek przyciągania O jako początek osi współrzędnych, oś obrotu z prędkością kątową ω jako oś z , i oznaczmy przez $k^2 r$ przyciąganie punktu w odległości r od O , natenczas równanie ogólne powierzchni cieczy jest $(\omega^2 - k^2)(x^2 + y^2) - k^2 z^2 = \text{stała}$. Różne kształty tej powierzchni zależą od związków między ω i k .

(9). Obierzmy wierzchołek O paraboloidy jako początek osi współrzędnych, oś z pionowo w górę, a $x^2 + y^2 - 2az = 0$ niech będzie równaniem tej powierzchni, ω prędkością kątową obrotu cieczy około osi z . Jeżeli przed obrotem ciecz sięgała w paraboloidzie do wysokości h , natenczas równanie powierzchni cieczy wskutek obrotu będzie

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega^2} \left(z - h \sqrt{\frac{g - a\omega^2}{g}} \right) = 0.$$

Ciśnienie p w punkcie (x, y, z) wyrazi się równaniem

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz + b,$$

a jeżeli przyjmijmy, że na powierzchni cieczy zachodzi ciśnienie równe zeru, otrzymamy

$$p = \sigma \left[\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz + h \sqrt{g(g - a\omega^2)} \right].$$

Uwzględnijmy równanie paraboloidy danej, natenczas ciśnienie w punkcie dowolnym tej powierzchni będzie

$$p = \frac{\sigma}{2} \left[\left(\omega^2 - \frac{g}{a} \right) (x^2 + y^2) + 2h \sqrt{g(g - a\omega^2)} \right],$$

a stąd otrzymamy ciśnienie na paraboloidę w kierunku osi z ,

$$Z = \frac{\sigma}{2} \iint \left[\left(\omega^2 - \frac{g}{a} \right) (x^2 + y^2) + 2h \sqrt{g(g - a\omega^2)} \right] dx dy,$$

gdzie należy wstawić krańce odpowiednie.

(10). Jeżeli r jest promieniem kuli, natenczas prędkość kątowna obrotu wynosi

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{r}}.$$

ROZDZIAŁ XX.

(2). Ob. art. 217-y.

(5). Niech $2c$ oznacza daną odległość ognisk układu linii prądu, wtedy ten układ możemy wyrazić równaniem

$$\frac{x^2}{\mu} + \frac{y^2}{\mu - c^2} = 1,$$

w którym μ oznacza parametr zmienny, a potencjał prądu ψ będzie funkcją tego parametru. Przekształcając równanie $\Delta_2 \psi = 0$, otrzymamy naprzód

$$\Delta_2 \psi = \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{d^2 \psi}{d\mu^2} + \frac{d\psi}{d\mu} \cdot \Delta_2 \mu = 0,$$

a jeżeli wprowadzimy długość p prostopadłej ze środka elipsy na styczną w punkcie (x, y) , to

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 = 4p^2, \quad \Delta_2 \mu = 2p^2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu - c^2} \right),$$

skąd

$$\Delta_2 \psi = 2 \cdot \frac{d^2 \psi}{d\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu - c^2} \right) \frac{d\psi}{d\mu} = 0,$$

a więc

$$\psi = A \log \left(\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu - c^2} \right) + B,$$

gdzie A i B oznaczają stałe dowolne. Linijami potencyjalnymi są hiperbole spółogniskowe, a potencjał prędkości jest

$$\varphi = A \arcsin \frac{\sqrt{\mu}}{c} + B_1,$$

gdzie \sqrt{v} oznacza połowę osi głównej hiperboli. Ruch sprzężony określają funkcje powyższe, z tą tylko odmianą, że ϕ jest potencjałem prędkości a φ potencjałem prądu.

(6). $\phi = A \log(r - \mu \theta)$, $\varphi = -A(\log r + \theta)$; prędkość w biegunie jest nieskończenie wielka.

(7). Podzieliwszy otwór prostymi poziomymi na elementy, możemy prędkość wypływu dla każdego elementu obliczyć według wzoru Torricelliego. Obierzmy płaszczyznę xy na powierzchni cieczy, oś z pionowo na dół, oznaczmy przez u szerokość otworu w głębokości z , przyczem $u = f(z)$ można wyznaczyć z wiadomego kształtu otworu, natenczas wydatek M otworu, t. j. objętość cieczy, wypływającej z niego w jednostce czasu, będzie wyrażona wzorem

$$M = \sqrt{2g} \int_{z_1}^{z_2} u z^{\frac{1}{2}} dz,$$

w którym krańce z_1 i z_2 zależą od kształtu i położenia otworu. Jeżeli f jest polem otworu, natenczas $V = M : f$ przedstawia prędkość średnią wypływu cieczy.

(8) Niech r oznacza promień otworu kołowego, h głębokość jego środka pod powierzchnią cieczy, natenczas wydatek otworu jest

$$M = 2 \sqrt{2g} \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 + z^2} \cdot \sqrt{h + z} \cdot dz,$$

a jeżeli wstawimy $z = r \sin \varphi$, rozwiniemy pierwiastki na szeregi i zastosujemy wzór wiadomy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi \cdot d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \cdot \frac{\pi}{2},$$

otrzymamy

$$M = \pi r^2 \sqrt{2gh} \left[1 - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{h} \right)^2 - \frac{5}{1024} \left(\frac{r}{h} \right)^4 - \dots \right].$$

(9). Obierzmy płaszczyznę xy na dnie poziomym naczynia, oś z pionowo w górę, oznaczmy przez f pole otworu, przez $F = \varphi(z)$ pole przekroju poziomego naczynia w wysokości z ponad dnem, natenczas wypływ cieczy trwać będzie przez czas

$$t = \frac{1}{f\sqrt{2g}} \int F \cdot z^{-\frac{1}{2}} dz,$$

gdzie należy wstawić krańce odpowiednie.

(10). Zastosować postępowanie, podane w dwu zadaniach poprzedzających.

(11). Używając takiego znakowania, jak w (9), oznaczmy jeszcze przez Q stały dopływ do naczynia w jednostce czasu, to poziom cieczy zniży się o dz w czasie

$$dt = \frac{F \cdot dz}{f \sqrt{2gz - Q}}.$$

Ten wzór pozwala rozwiązać zadanie.

(12). Należy uwzględnić ciśnienie cieczy otaczającej na otwór.

(13). To zadanie można także rozwiązać według zasad, podanych dla ruchu cieczy, równoległego do płaszczyzny, jeżeli dane są warunki krańcowe. Uważajmy bowiem powierzchnią walca za granicę cieczy, to owa powierzchnia krańcowa porusza się z wiadomą prędkością U w kierunku prostopadłym do tworzących. Niech prędkość U ma kierunek osi x , a ds niech oznacza element linii krzywej, podług której płaszczyzna xy przecina powierzchnię walca, to $\frac{d\psi}{ds}$ jest prędkością cieczy w kierunku

normalnym do ds , więc $\frac{d\psi}{ds} = U \cdot \frac{dy}{ds}$, a stąd wynika dla owej linii krzywej na walcu $\psi = Uy + a$, gdzie a jest stałą dowolną. Znając ψ , możemy stąd otrzymać linie prądu i rozpoznać ruch cieczy.

Niech ξ , η będą nowymi zmiennymi, które określamy równaniem $x + iy = b \sin(\xi + i\eta)$, gdzie b jest stałą. Wyrażmy stąd x i y przez ξ i η , wyrugujmy potem ξ a następnie η , to otrzymamy następujące 2 równania

$$\frac{x^2}{(e^\eta + e^{-\eta})^2} + \frac{y^2}{(e^\eta - e^{-\eta})^2} = \frac{b^2}{4}, \quad \frac{x^2}{\sin^2 \xi} - \frac{y^2}{\cos^2 \xi} = b^2,$$

z których okazuje się, że równanie $\xi = \text{stałej}$ przedstawia układ hiperbol spółogniskowych, równanie zaś $\eta = \text{stałej}$ przedstawia układ elips spółogniskowych, przyczem $2b$ jest odległością ich ognisk spólnych.

Przyjmijmy teraz $\varphi + i\psi = Aie^{i(\xi + i\eta)}$, gdzie A jest stałą rzeczywistą, natenczas $\varphi + i\psi$ będzie funkcją zmienną zespoloną $x + iy$, przyczem $\psi = Ae^{-\eta} \cos \xi$, więc według równania $\psi = Uy + a$,

$$Ae^{-\eta} \cos \xi = Ub \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} \cos \xi + a.$$

W układzie linii, wyrażonych przez to równanie, znajduje się także elipsa, dla której

$$Ae^{-\eta} = Ub \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2},$$

a jeżeli α i β oznaczają połowy osi tej elipsy, wtedy

$$\alpha = b \cdot \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2}, \quad \beta = b \cdot \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2}, \quad A = U \cdot \frac{\beta b}{\alpha - \beta} = U\beta \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}},$$

a stąd potencjał prądu

$$\psi = U\beta \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} e^{-\eta} \cos \xi.$$

Ta funkcyjja określa ruch cieczy względem walca eliptycznego, poruszającego się z prędkością U w kierunku osi większej. W przypadku ruchu walca w kierunku osi mniejszej, otrzymalibyśmy

$$\psi = -U\alpha \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} e^{-\eta \sin \xi}.$$

(14). Użyjmy znakowania art. 221-go, przyjmując oś x na dnie kanału, wtedy za p możemy przyjąć ciśnienie hydrostatyczne $p = \sigma g (h + \eta - y) + \text{stała}$, skąd $\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$. Objętość warstwy cieczy o szerokości 1 między płaszczyznami x i $x + dx$ jest w czasie t równa $h dx$, a w czasie $t + dt$ jest $(h + \eta) \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx\right)$, więc $\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)(h + \eta) = h$ jest równaniem ciągłości. Równanie ruchu tej warstwy jest $\sigma h \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx + \frac{\partial p}{\partial x} (h + \eta) dx = 0$; jeżeli z tym równaniem połączymy 2 poprzedzające i zaniedbamy $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, otrzymamy równanie ruchu $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, którego całka jest $\xi = F(x - ct) + f(x + ct)$, gdzie $c = \sqrt{gh}$.
