

Z tego równania można w każdej chwili obliczyć prędkość względną cząstki cieczy o współrzędnych (r, θ) . Potencjał prędkości jest ten sam dla punktów, znajdujących się na kole, którego płaszczyzna jest w środku prostopadła do kierunku ruchu środka kuli.

Nadajmy kuli wraz z cieczą prędkość U ; wtedy kula przyjdzie do spoczynku (kręcąc się zresztą około środka) i możemy z (12) otrzymać potencjał prędkości cieczy nieskończonej, której cząstki poruszają się w strugach równoległych, podczas gdy kula jest w spoczynku. Prędkości U w kierunku osi x odpowiada potencjał $Ux = -Ur \cdot \cos \theta$; dodając ten wyraz do (12), otrzymamy

$$(13) \quad \varphi = -U \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta.$$

To równanie pozwala rozpoznać ruch cząstek płynącej wody względem kuli spoczywającej.

221. RUCH FALOWY CIECZY. Niech ciecz materyjalna zajmuje kanał prosty o szerokości stałej, a na powierzchni cieczy niech postępuje fala wzdłuż kanału, zajmująca całą jego szerokość; wtedy każda cząstka, do której fala przybywa, zostanie pobudzona do ruchu. Jeżeli fala postępuje w kierunku poziomym, prostopadłym do szerokości kanału, to ruch cząstki cieczy da się rozłożyć w dwu kierunkach, pionowym i poziomym, prostopadłym do szerokości, a odchylenia cząstki w obu kierunkach będą bardzo małe. Figura 72-ga przedstawia pionowy przekrój podłużny kanału; obierzmy dowolnie stałą prostą poziomą Ox w kierunku ruchu postępowego fali; linia DD niech przedstawia przekrój dna kanału, prosta pozioma MN niech przedstawia powierzchnią cieczy w spoczynku, linia FF przekrój fali, a oś y obierzmy pionowo w górę. Punkt m , którego współrzędne w spoczynku są x, y , odchyli się odpowiednio o ξ i η w kierunkach osi i przybędzie po upływie czasu t , liczonego od dowolnej chwili początkowej, do miejsca m' , którego współrzędne będą $x + \xi, y + \eta$. Odchylenia ξ, η , które przyjmiemy jako dostatecznie małe, będą funkcjami x, y, t .

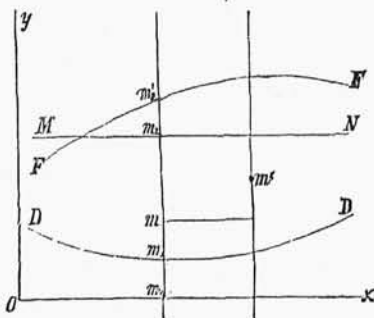


Fig. 72.

Należy dokładnie odróżnić prędkość, z jaką porusza się cząstka, od prędkości, z jaką postępuje ruch falowy, a którą nazywamy prędkością przewodnictwa fali, albo krótko prędkością fali. Jeżeli c jest prędkością fali, to punkt n , którego współrzędna pozioma jest $x + ct$, przesunie się w kierunku poziomym w czasie $t + \tau$ o tę samą długość ξ z miejsca spoczynku, o jaką punkt m posunął się w czasie t , i ten związek między odchyleniami dwu punktów służy właśnie do określenia prędkości fali. Jeżeli więc ξ uwa-

żamy za funkcją x i t , którą oznaczmy przez $\varphi(x, t)$, to będzie $\varphi(x, t) = \varphi(x + c\tau, t + \tau)$; a jeżeli funkcję po prawej stronie rozwiniemy na szereg dla małej wartości τ , to otrzymamy równanie o pochodnych cząstkowych

$$(1) \quad c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja nieoznaczona $\psi(ct - x)$, lub także funkcja $A \cdot \psi(ct - x)$, w której A jest funkcją y . Kładąc $\xi = A \cdot \psi(ct - x)$, otrzymamy dla rozmaitych punktów na tym samym pionie rozmaite odchylenia poziome, przyczem te punkty zaczynają ruch w tej samej chwili. Czyniąc założenie ogólniejsze $\xi = A \cdot \psi(ct - x - B)$, gdzie B jest funkcją y , znosimy tę równoczesność odchyleń, nie sprzeciwiając się warunkowi (1). Ruch każdej cząstki cieczy jest okresowy, i taki tylko rozważać tu chcemy. Możemy przeto przyjąć

$$(2) \quad \xi = A \cdot \cos(ct - x - B) \text{ lub } \xi = A \cdot \sin(ct - x - B),$$

a wtedy otrzymamy funkcję, odpowiadającą wszystkim warunkom kinematycznym zadania. Gdy założymy ogólniej, że $\xi = A \cdot \cos(\alpha t - \beta x - B)$, to równanie (1) zachodzić będzie, jeżeli przyjmiemy $c = \alpha : \beta$. Rozwińmy prawą stronę ostatniego równania i przyjmijmy $P = A \cdot \cos B$, $Q = A \cdot \sin B$; otrzymamy

$$(3) \quad \xi = P \cdot \cos(\alpha t - \beta x) + Q \cdot \sin(\alpha t - \beta x).$$

Tę postać funkcji ξ przyjmijmy za podstawę rachunku.

Dla poznania ruchu cząstki użyjmy równań Lagrange'a art. 202-go. Z nich otrzymamy, przyjmując, że nie ma poziomych sił zewnętrznych,

$$\begin{cases} \frac{d^2(x + \xi)}{dt^2} \cdot \frac{\partial(x + \xi)}{\partial x} + \left(\frac{d^2(y + \eta)}{dt^2} + g \right) \frac{\partial(y + \eta)}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{d^2(x + \xi)}{dt^2} \cdot \frac{\partial(x + \xi)}{\partial y} + \left(\frac{d^2(y + \eta)}{dt^2} + g \right) \frac{\partial(y + \eta)}{\partial y} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Ponieważ x i y są od siebie niezależne, i obie wielkości nie zależą od czasu, przeto z tych równań będzie

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} + g \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{d^2 \xi}{dt^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} + g \right) \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Drogi ξ i η , tudzież ich pochodne są bardzo małe, możemy więc pominąć iloczyny pochodnych, tudzież wielkości $g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ i $g \frac{\partial \eta}{\partial y}$; otrzymamy następujące przybliżone równania ruchu cząstki:

$$(4) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -g - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Ostatnie równanie możemy całkować względem y od punktu m_2' , w którym pion punktu m przecina powierzchnię fali, aż do punktu m , przyjmując, że ciśnienie na powierzchni jest równe zeru. Oznaczywszy przez h pierwotną wysokość $m_0 m_2$ poziomu nad osią x , a przez k wzniesienie $m_2 m_2'$ cząstki na powierzchni nad poziom MN, otrzymamy ciśnienie w m

$$p = -\sigma g \int_{h+k}^y dy - \sigma \int_{h+k}^y \frac{d^2 \eta}{dt^2} dy = \sigma g (h + k - y) + \sigma \int_y^{h+k} \frac{d^2 \eta}{dt^2} dy,$$

a ponieważ k jest bardzo małe w porównaniu z h , przeto możemy przyjąć

$$(5) \quad p = \sigma g (h + k - y) + \sigma \int_y^h \frac{d^2 \eta}{dt^2} dy.$$

Z tego równania przez różniczkowanie względem x wynika

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma g \frac{\partial k}{\partial x} + \sigma \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h \frac{d^2 \eta}{dt^2} dy;$$

wstawiwszy tę wartość w (4), otrzymamy

$$(6) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -g \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h \frac{d^2 \eta}{dt^2} dy$$

Z równania (3) mamy $\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\alpha^2 \xi$, będzie więc

$$(7) \quad \alpha^2 \xi = g \cdot \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h \frac{d^2 \eta}{dt^2} dy.$$

Równanie ciągłości będzie

$$\frac{d(x + \xi, y + \eta)}{d(x, y)} = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1,$$

czyli w zakresie dokładności naszego rachunku

$$(8) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Z tego równania wnosimy, że η będzie także funkcją peryjodyczną x, y i t ; każda cząstka będzie więc opisywała bardzo małą krzywą zamkniętą około miejsca równowagi.

Ograniczając się do ruchu niewirowego cieczy, wypada zrobić założenie, że

$$(9) \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0;$$



otrzymamy więc w związku z równaniem (8)

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0.$$

Z tego wynika, zważywszy, że x i y nie zależą od t ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = -\alpha^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\alpha^2 \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

a zatem, według (7)

$$(11) \quad \alpha^2 \xi = g \frac{\partial k}{\partial x} + \alpha^2 \int_h^y \frac{\partial \eta}{\partial x} dy.$$

222. Zastosujmy podane wzory do falowania cieczy w kanale prostokątnym, przyjmując oś x na dnie poziomym. Różniczkując ξ dwukrotnie względem x i y , i wstawiając pochodne w równania (10) art. poprzedzającego, otrzymamy

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \beta^2 P \right) \cos(\alpha t - \beta x) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \beta^2 Q \right) \sin(\alpha t - \beta x) = 0.$$

Ponieważ to równanie ma zachodzić dla każdej wartości t i x , przeto:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \beta^2 P = 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \beta^2 Q = 0, \text{ a stąd}$$

$$(1) \quad P = C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y}; \quad Q = D_1 e^{\beta y} + D_2 e^{-\beta y},$$

gdzie C_1, C_2, D_1, D_2 oznaczają stałe. Mamy więc

$$(2) \quad \xi = (C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y}) \cdot \cos(\alpha t - \beta x) + (D_1 e^{\beta y} + D_2 e^{-\beta y}) \cdot \sin(\alpha t - \beta x).$$

Z równania (8) art. poprzedzającego wynika $\eta = - \int \frac{\partial \xi}{\partial x} dy + \text{stała}$; a zatem, według (2)

$$\eta = - (C_1 e^{\beta y} - C_2 e^{-\beta y}) \sin(\alpha t - \beta x) + (D_1 e^{\beta y} - D_2 e^{-\beta y}) \cos(\alpha t - \beta x) + \text{stała}.$$

Ponieważ cząstki na dnie kanału nie mogą mieć w naszym założeniu żadnego ruchu pionowego, przeto $\eta = 0$ dla $y = 0$, bez względu na x i t . Z tego warunku wynika, że stała jest równa zeru, tudzież $C_1 = C_2 = C$, $D_1 = D_2 = D$; otrzymamy więc

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = (e^{\beta y} + e^{-\beta y}) [C \cdot \cos(\alpha t - \beta x) + D \cdot \sin(\alpha t - \beta x)], \\ \eta = -(e^{\beta y} - e^{-\beta y}) [C \cdot \sin(\alpha t - \beta x) - D \cdot \cos(\alpha t - \beta x)]. \end{cases}$$

Dla $y = h$ ma być $\eta = k$, gdzie k oznacza odchylenie pionowe cząstki na powierzchni, a zatem

$$(4) \quad k = -(e^{\beta h} - e^{-\beta h}) [C \cdot \sin(\alpha t - \beta x) - D \cdot \cos(\alpha t - \beta x)].$$

Z (3) i (4) otrzymamy

$$\int_h^y \frac{\partial \eta}{\partial x} dy = [(e^{\beta y} + e^{-\beta y}) - (e^{\beta h} + e^{-\beta h})] [C \cdot \cos(\alpha t - \beta x) + D \sin(\alpha t - \beta x)],$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \beta (e^{\beta h} - e^{-\beta h}) [C \cdot \cos(\alpha t - \beta x) + D \cdot \sin(\alpha t - \beta x)].$$

Wstawiając te wartości w równanie (11) art. poprzedzającego, otrzymamy, po stosownych uproszczeniach

$$\alpha^2 (e^{\beta h} + e^{-\beta h}) = g\beta (e^{\beta h} - e^{-\beta h}), \text{ skąd}$$

$$(5) \quad \alpha^2 = g\beta \cdot \frac{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}}, \quad c^2 = \frac{g}{\beta} \cdot \frac{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}}.$$

Możemy zawsze przyjąć $C = A \cdot \cos B$, $D = A \cdot \sin B$, gdzie A i B oznaczają dwie nowe stałe; otrzymamy tym sposobem

$$\xi = A (e^{\beta y} + e^{-\beta y}) \cos(\alpha t - \beta x - B), \quad \eta = -A (e^{\beta y} - e^{-\beta y}) \sin(\alpha t - \beta x - B).$$

Ponieważ B jest stałą, przeto wszystkie cząstki na tym samym pionie zaczynają drgać jednocześnie; możemy więc początek czasu zawsze tak obrać, żeby $B = 0$, i wtedy otrzymamy wyrażenia najprostsze

$$(6) \quad \xi = A (e^{\beta y} + e^{-\beta y}) \cos(\alpha t - \beta x), \quad \eta = -A (e^{\beta y} - e^{-\beta y}) \sin(\alpha t - \beta x),$$

w których A jest stałą. Znając ruch pionowy na powierzchni, możemy z wiadomego k obliczyć stałą A ; według (5) obliczymy z wiadomego c współczynnik β , a w końcu α . Drganie każdej cząstki będzie więc dokładnie wiadome.

Wielkość $\alpha t - \beta x$ przedstawia tak zwaną fazę drgania; znając ją, możemy wyznaczyć miejsce, które cząstka zajmuje. Jeżeli t przyrasta o wielokrotność ilorazu $2\pi:\alpha$, to ξ i η przybierają też same wartości dla tejże samej cząstki; jeżeli x przyrasta o wielokrotność ilorazu $2\pi:\beta$, to ξ i η będą też same dla tychże samych t i y . Wielkości

$$(7) \quad T = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad L = \frac{2\pi}{\beta}$$

przedstawiają zatem odpowiednio peryjod falowania i długość fali. Uwzględniając równania (5), łatwo znajdziemy następujący związek między T i L :

$$(8) \quad T^2 = \frac{2\pi L}{g} \cdot \frac{\frac{4\pi h}{L} + 1}{\frac{4\pi h}{L} - 1};$$

drogi punktu (x, y) będą

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = A \left(e^{\frac{2\pi}{L}y} + e^{-\frac{2\pi}{L}y} \right) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right), \\ \eta = -A \left(e^{\frac{2\pi}{L}y} - e^{-\frac{2\pi}{L}y} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right). \end{cases}$$

Dla fal krótkich w porównaniu z głębokością będzie $h:L$ bardzo wielką liczbą, otrzymamy więc

$$(10) \quad T^2 = \frac{2\pi L}{g}, \quad c^2 = \frac{gL}{2\pi},$$

z czego wynika, że peryjod falowania i prędkość fali są proporcjonalne względem pierwiastka jej długości i nie zależą od głębokości kanału. Stosunek liczebny największego odchylenia pionowego do największego odchylenia poziomego wynosi $\left(e^{\frac{2\pi}{L}y} - e^{-\frac{2\pi}{L}y} \right) : \left(e^{\frac{2\pi}{L}y} + e^{-\frac{2\pi}{L}y} \right)$. Na dnie jest ten stosunek równy zeru, drogi pionowe są równe zeru, a największa droga pozioma wynosi $2A$; na powierzchni zbliża się ten stosunek do jedności, i różni się tym mniej od tej granicy, im fala jest krótsza. Od dna zatem ku powierzchni wyrównują się drogi cząstek w obu kierunkach ruchu.

Fale, wywołane w pobliżu ujścia rzeki przez przypływ lub odpływ morza, są bardzo długie, a drogi pionowe cząstek na powierzchni są bardzo małe w porównaniu z głębokością rzeki. Dla takich fal będzie $h:L$ bardzo małą liczbą, przez rozwinięcie więc na szeregi otrzymamy w tym przypadku

$$(11) \quad T^2 = \frac{L^2}{gh}, \quad c^2 = gL.$$

Stosunek obu odchyłeń zdąży do granicy $2\pi y:L$, z czego wynika, że drogi pionowe cząstek są bardzo małe w porównaniu z ich drogami poziomymi. Dla bardzo długiej fali otrzymamy

$$(12) \quad \xi = 2A \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right), \quad \eta = -\frac{4\pi A}{L} y \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right),$$

z czego się okazuje, że odchylenia poziome cząstek na tym samym pionie będą prawie równe sobie, a ich odchylenia pionowe będą proporcjonalne względem odległości cząstek od dna.

Z obliczonych wartości ogólnych ξ i η łatwo okazać, że każda cząstka opisuje małą elipsę, której osi mają kierunek poziomy i pionowy. Dla fal długich będzie elipsa wydłużona w kierunku poziomym, zbliżając się do prostej; dla fal krótkich zbliża się elipsa tym więcej do koła, im cząstka znajduje się bliżej powierzchni. Wyznaczenie prędkości cząstki i ciśnienia pozostawiamy czytelnikowi. Ze wzoru (5) art. poprzedzającego okazuje się, że dla fal długich ciśnienie różni się bardzo mało od ciśnienia hydrostatycznego, odpowiadającego głębokości cząstki pod powierzchnią fali.

Ponieważ równania różniczkowe, określające ξ i η , są liniowe, przeto funkcje

$$(13) \quad \begin{cases} \xi = \sum A_i (e^{\beta_i y} + e^{-\beta_i y}) \cos (\alpha_i t - \beta_i x), \\ \eta = -\sum A_i (e^{\beta_i y} - e^{-\beta_i y}) \sin (\alpha_i t - \beta_i x) \end{cases}$$

będą także rozwiązaniami tych równań. Może więc kilka fal jednocześnie postępować wzdłuż kanału, a ruch każdej cząstki otrzymamy, dołączając do siebie drgania, odpowiadające każdej fali osobno.

223. RÓWNAŃ RUCHU CIECZY LEPKIEJ. Dla ciała stałego i sprężystego określiliśmy stan naturalny jako stan taki, w którym siła wewnętrzna jest równa zeru w każdym punkcie; jeżeli do takiego ciała przyłożymy siły, to wskutek przesunięć jego elementów pojawią się siły wewnętrzne, zależne od tych przesunięć. W cieczy nie istnieje stan naturalny bez sił wewnętrznych; punkty, w których ciśnienie jest równe zeru, nie mogą wypełnić przestrzeni o trzech wymiarach skończonych. Jeżeli cząstki cieczy nie przesuwają się względem siebie, natenczas ciśnienie, które w każdym punkcie jest także samo we wszystkich kierunkach, zmieniając się od punktu do punktu, jest jedyną siłą wewnętrzną. Wskutek przyłożenia sił zewnętrznych nastąpi wogólności ruch względny cząstek cieczy, a wskutek tego wystąpią nowe siły wewnętrzne, wywołane przez lepkość cieczy, które dla rozmaitych elementów płaskich, przez punkt poprowadzonych, będą miały rozmaite wielkości i kierunki. Te siły, nie mające wogólności kierunków normalnych do odpowiednich elementów, mierzą tarcie wewnętrzne w cieczy, które wypadałoby poprawniej nazwać oporem lepkości cieczy.

Na zasadzie pewnych przypuszczeń, które drogą doświadczalną sprawdzić należy, możemy obliczyć powyższe siły wewnętrzne. Stosując prawo niezależności sił, przypuścimy przedewszystkiem, że *tarcie wewnętrzne w cieczy nie zależy od ciśnienia*. To założenie pozwala siły, pojawiające się wskutek ruchu względnego cząstki, obliczyć podobnym sposobem, jak nateżenia w ciele sprężystym, które poprzednio było w stanie naturalnym, jeżeli jeszcze przyjmiemy, że siła wewnętrzna w cieczy lepkiej, odpowiednia nieskończenie małemu polu, jest proporcjonalna względem wielkości tego pola.

Przesunięcie względne dwu elementów ciała sprężystego jest bardzo małe; w cieczy zaś przesunięcie względne dwu elementów może być bardzo wielkie, ponieważ element opisuje z biegiem czasu drogę skończoną, przesuwając się kolejno wzdłuż rozmaitych cząstek cieczy. Jeżeli zaś uważamy te przesunięcia w stosunku do czasu, to miarą ruchu względnego dwu elementów sąsiednich będzie wielkość tego samego rzędu, co odległość ich środków masy. Z tego wynika, że zamiast przesunięć punktu, rozważanych w ciele sprężystym, należy brać stosunki jego przesunięć do czasu, czyli jego prędkości u, v, w , aby dla cieczy lepkiej obliczyć siły wewnętrzne, niezależne od ciśnienia. Otrzymujemy więc tę samą zasadę przy badaniu ruchu skończonego

cieczy lepkich na podstawie teorii sprężystości, jakiej używaliśmy przy badaniu ruchu elementu cieczy w art. 203 — 204.

Rozważajmy nieskończenie mały element prostopadłościenny cieczy lepkiej $abcdefg$ (fig. 65), którego wierzchołkiem, najbliższym początku osi, jest punkt $m(x, y, z)$; p, u, v, w niech oznaczają odpowiednio ciśnienie i prędkości w tym punkcie. Na ściany, schodzące się w m , przypadają pewne siły wewnętrzne, odpowiadające jednostce powierzchni, które podobnie oznaczać będziemy przez p_{ik} , jak w rozdz. XVII, przyczym $p_{ik} = p_{ki}$. Przyjmując ciecz jednorodną, wyrazimy te siły przez równania (7) art. 186-go, jako funkcje liniowe pochodnych prędkości względem współrzędnych, a dwa współczynniki a_{11}, a_{44} zależęć będą od natury cieczy. Dla dogodności zmienimy znakovanie. Kładąc $\Delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, otrzymamy

$$p_{11} = 2a_{11}\Delta - 4a_{44}(\Delta - \lambda_1) = (2a_{11} - 4a_{44})\Delta + 4a_{44}\lambda_1,$$

a jeżeli wprowadzimy $\mu = 2a_{44}$, $\Theta = 2a_{11} - 4a_{44}$, to będzie $p_{11} = \Theta \cdot \Delta + 2\mu\lambda_1$. Dla cieczy nieściśliwych mamy

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

a zatem $p_{11} = 2\mu\lambda_1$, a jeżeli wstawimy wiadome wartości λ_i, φ_i , to otrzymamy następujące wyrażenia sił wewnętrznych w cieczy lepkiej:

$$(1) \quad \begin{cases} p_{11} = 2\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} & ; & p_{23} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ p_{22} = 2\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} & ; & p_{31} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p_{33} = 2\mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} & ; & p_{12} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Te siły są określone przez jedyny współczynnik μ , zależny od natury cieczy. Nazywamy go, chociaż niezupełnie właściwie, współczynnikiem tarcia wewnętrznego cieczy. Każdej z tych sił należy nadać kierunek, przeciwny kierunkowi prędkości względnej punktu, do niej równoległej, wypada bowiem siły wewnętrzne uważać za opory, usiłujące zmniejszyć prędkość punktu.

Równania (7) art. 186-go, odnoszące się do ciał sprężystych równokierunkowych, polegały na zasadzie, że siły wewnętrzne są funkcjami liniowymi przesunięć względnych dwu elementów sąsiednich takiego ciała; równania zaś (1) dla cieczy lepkich jednorodnych polegają na podobnej zasadzie, mianowicie: że *siły tarcia wewnętrznego w cieczy lepkiej są funkcjami liniowymi prędkości względnych dwu sąsiednich elementów cieczy*. Ta zasada jest uogólnieniem prawidła, podanego przez I. Newton'a, według którego tarcie dwu sąsiednich warstw cieczy, poruszających się z rozmaitymi prędkościami w tym samym kierunku, jest proporcjonalne względem ich prędkości względnej.

Możemy teraz wyprowadzić równanie ruchu elementu w kierunku osi x . Na ściany elementu przypadają w tym kierunku następujące siły wewnętrzne:

na ścianę $m b c g$ siła $(p - p_{11}) dy dz$, na ścianę przeciwną $a d e f$: $\left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) + \left(p_{11} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx \right) \right] dy dz$; na ścianę $m a c e$ siła $- p_{21} dz dx$, na przeciwną $b d f g$: $\left(p_{21} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} dy \right) dz dx$; na ścianę $m a b d$ siła $- p_{31} dx dy$, na przeciwną $c e f g$: $\left(p_{31} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} dz \right) dx dy$. Suma tych sił wynosi $\left(- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} \right) dx dy dz$. Jeżeli X oznacza siłę, przyłożoną do jednostki masy, a zatem $\sigma X dx dy dz$ siłę zewnętrzną, działającą na element cieczy, to równanie ruchu, po skróceniu przez $dx dy dz$, będzie

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} \right).$$

Wstawiając wartości z (1), otrzymamy

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial \Delta}{\partial x},$$

a ponieważ $\Delta = 0$, przeto otrzymamy następujące równania ruchu, podstawiając wartość pochodnej zupełnej u względem t , i postępując podobnie dla osi y i z :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

Biorąc w tym układzie $\mu = 0$, otrzymamy wiadome równanie ruchu cieczy doskonałej. Do tego układu należy przyłączyć równanie ciągłości $\Delta = 0$, aby z tych 4-ch równań wyznaczyć u, v, w, p jako funkcje x, y, z, t i współczynniki μ i σ .

Kładąc, jak zwykle, $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, otrzymamy w związku z $\Delta = 0$, następujące równanie dla każdej cieczy, doskonałej czy lepkiej:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

albo, stosując znakowanie art. 203-go,

$$(4) \quad \Delta_2 u = 2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right), \quad \Delta_2 v = 2 \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right), \quad \Delta_2 w = 2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right),$$

gdzie $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oznaczają składowe prędkości kątowej obrotu elementu cieczy, jeżeli w niej zachodzi ruch wirowy.

Z równań (3) okazuje się, że $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$, $\Delta_2 w$ nie mogą być równe zeru w cieczy lepkiej, a z tego wnosimy według (4), że ω_1 , ω_2 , ω_3 nie mogą jednocześnie być zerami w całej cieczy. Z tego wynika ważne twierdzenie, że *ruch cieczy lepkiej nie może być niewirowy, chyba, że ona porusza się jak ciało sztywne.*

Siły p_{ik} na powierzchni cieczy pochodzą z tarcia o ciało stałe, którego ciecz się dotyka, lub o ściany naczynia, w którym ona jest zawarta. Co do tego tarcia zewnętrznego przyjmiemy, że ono jest także niezależne od ciśnienia, i że jest proporcjonalne względem prędkości cieczy względem ciała, tudzież względem powierzchni elementu; kierunek tarcia jest przeciwny kierunkowi prędkości względnej cieczy. Jeżeli ściana naczynia jest w spoczynku, a v jest współczynnikiem tarcia cieczy o ścianę, to $-vu$, $-vv$, $-vw$ będą składowymi tarcia zewnętrznego, przyczym $au + bv + cw = 0$, jeżeli a , b , c oznaczają dostawy kierunkowe normalnej zewnętrznej (ku ścianie) do powierzchni naczynia. Wielkości $ap_{11} + bp_{21} + cp_{31}$, $ap_{12} + bp_{22} + cp_{32}$, $ap_{13} + bp_{23} + cp_{33}$ wyrażają według art. 182-go odpowiednie składowe siły wewnętrznej, odpowiadającej jednostce pola elementu na powierzchni cieczy. Mamy według (1)

$$ap_{11} + bp_{21} + cp_{31} = \mu \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

a ponieważ $a = \frac{dx}{dn}$, $b = \frac{dy}{dn}$, $c = \frac{dz}{dn}$, gdzie dn jest elementem normalnej zewnętrznej, a ostatni wyraz jest równy zeru, przeto

$$ap_{11} + bp_{21} + cp_{31} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn} \right) = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial n};$$

podobnie będzie co do dwu pozostałych wyrazów. Otrzymamy więc według równań (3) art. 183-go następujące warunki krańcowe na powierzchni cieczy lepkich:

$$(5) \quad \mu \frac{\partial u}{\partial n} + vu = 0, \quad \mu \frac{\partial v}{\partial n} + vv = 0, \quad \mu \frac{\partial w}{\partial n} + vw = 0.$$

Jeżeli część powierzchni jest swobodna, to dla niej będzie $v = 0$, a zatem $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$, jak to już wiemy. Jeżeli zaś cząstki na powierzchni przylegają do ściany naczynia, zwilżając je, wtedy $v = \infty$, a zatem $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ wyrażać będą warunki krańcowe.

224. RUCH CIECZY W PROSTEJ RURZE WALCOWEJ. Z naczynia wypływa ciecz przez prostą rurę poziomą o długości L i promieniu wewnętrznym R ; przyjmijmy, że wypływ i dopływ są sobie równe, wtedy ruch cieczy w rurze jest trwały, a zatem p , u , v , w nie zawierają czasu wyrażnie. Oś rury obierzmy za oś x , a jej początek w naczyniu jako początek współrzędnych, oś zaś z pionowo w górę. Jeżeli promień rury jest dostatecznie mały, wtedy możemy przyjąć, że cząstki cieczy poruszają się równolegle do osi rury, będzie więc $v = 0$, $w = 0$. Na ciecz działa tylko siła ciężkości, a więc $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$.

Z równania ciągłości wynika $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, a zatem *ruch postępowy każdej cząstki cieczy jest jednostajny*. Równania ruchu będą według (3) art. 223-go

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0, \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad g + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że p jest niezależne od y ; a z trzeciego otrzymamy $p = f(x) - \sigma g z$. Ponieważ rura jest wązka, przeto spółrzędne z dla rozmaitych punktów różnią się bardzo mało od siebie, możemy więc pominąć różnice ciśnień z powodu różnicy głębokości cząstek pod powierzchnią cieczy w naczyniu, i przyjąć $p = f(x)$. *Cząstki cieczy w tym samym przekroju rury doznają tego samego ciśnienia*.

Z powodu symetrii przekroju rury możemy nadto przyjąć, że prędkość u będzie zależała tylko od odległości r cząstki od osi rury, że przeto cząstki, znajdujące się na tym samym kole, mają tę samą prędkość. Ponieważ $r^2 = y^2 + z^2$, przeto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr},$$

a zatem, według pierwszego równania (1)

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right),$$

Ponieważ prawa strona tego równania nie zależy od x , przeto $\frac{\partial p}{\partial x}$ nie zawiera x , a ponieważ p nie jest ani funkcją y , ani z , przeto ta pochodna jest wielkością stałą. Będzie więc

$$p = ax + b,$$

gdzie a i b oznaczają dwie stałe. Oznaczmy przez p_0 ciśnienie środka otaczającego, np. powietrza, na powierzchnią cieczy w naczyniu, przez h głębokość środka rury pod tą powierzchnią; wtedy dla $x = 0$ mamy $p = p_0 + \sigma g h$, skąd $b = p_0 + \sigma g h$. Jeżeli ciecz wypływa w powietrze, to ciśnienie na wylot rury możemy przyjąć równe p_0 , więc mamy $p = p_0$ dla $x = L$, skąd $a = -\sigma g h : L$. Będzie więc

$$(3) \quad p = \frac{\sigma g h}{L} (L - x) + p_0,$$

ciśnienie zmniejsza się proporcjonalnie względem odległości przekroju od wniknięcia rury do naczynia.

Wstawiawszy pochodną ciśnienia w (2), otrzymamy równanie

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{a}{\mu},$$

którego całka jest

$$u = u_0 + c \cdot \log r + \frac{a}{4\mu} \cdot r^2,$$

gdzie u_0 i c są stałe. Dla $r = 0$ otrzymalibyśmy z tego równania u ujemne i nieskończenie wielkie, co być nie może, jest więc $c = 0$, skąd:

$$(4) \quad u = u_0 - \frac{\sigma g h}{4\mu L} \cdot r^2.$$

Dla $r = 0$ będzie $u = u_0$, ta stała oznacza więc prędkość strugi, tworzącej oś rury. Przypuśćmy, że ciecz zwilża ściany rury, wtedy według art. 223-go mamy warunek krańcowy $u = 0$ dla $r = R$, z którego wynika

$$(5) \quad u_0 = \frac{\sigma g h}{4\mu L} R^2, \text{ a zatem}$$

$$(6) \quad u = \frac{\sigma g h}{4\mu L} (R^2 - r^2).$$

To jest wyrażenie prędkości cząstki, której odległość od osi rury wynosi r . Cząstki na osi rury płyną z największą prędkością, która zmniejsza się w miarę oddalania się cząstek od osi, stając się równą zero przy samej ścianie rury. Z ostatniego równania okazuje się ciekawy wynik, mianowicie: że *cząstki cieczy, które w pewnej chwili znajdują się na płaszczyźnie przekroju rury, znajdują się będą po upływie jednostki czasu na powierzchni paraboloidy obrotowej, której osią jest oś rury*. Parametr tej paraboloidy jest podany w ostatnim równaniu.

Wydatkiem rury nazywamy objętość (lub ciężar) cieczy, wypływającej z niej w jednostce czasu. Oznaczywszy go przez M , mamy

$$M = 2\pi \int_0^R u r dr = \frac{\pi \sigma g h}{2\mu L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr, \text{ a zatem}$$

$$M = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sigma g}{\mu} \cdot \frac{h R^4}{L}.$$

Jeżeli zaś przyjmiemy $P = \sigma g h$, to będzie

$$(7) \quad M = \frac{\pi}{8\mu} \cdot \frac{P \cdot R^4}{L}.$$

Wydatek jest więc proporcjonalny względem ciśnienia początkowego P , względem czwartej potęgi promienia i jest odwrotnie proporcjonalny względem długości rury. Ostatni wzór zgadza się zupełnie z wynikami doświadczeń, które czynił Poiseuille nad wypływem wody ze szklanych rur włoskowatych. W tych doświadczeniach, wykonanych z wzorową dokładnością, objawił się także wpływ temperatury na wypływ cieczy; te doświadczenia pozwoliły po raz pierwszy obliczyć współczynnik tarcia wewnętrznego cieczy. Nowsze doświadczenia stwierdziły w zupełności wyniki poszukiwań Poiseuilla.

Łatwo okazać, że cała ciecz w rurze wiruje nieustannie. Stosując bowiem równania (2) art. 203-go i kładąc dla krótkości $\lambda = \sigma g h : 4\mu L$, otrzymamy $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -\lambda z$, $\omega_3 = \lambda y$, skąd $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \lambda^2 r^2$. Każdy element cieczy obraca się zatem z prędkością, proporcjonalną względem jego odległości od osi rury, około prostej, poprowadzonej prostopadłe do promienia r na płaszczyźnie przekroju. Elementy na tym samym kole obracają się około stycznych do koła, a prędkość kątowna ma być odcięta na osi obrotu w kierunku od dodatnich y ku dodatnim z . Linijami wirowymi są koła spółśrodkowe z przekrojem rury, a wirami elementarnymi są pierścienie spółśrodkowe. Linije wirowe posuwają się w kierunku osi rury, tworząc równoleżniki paraboloidy, o której poprzednio była mowa.

Ć W I C Z E N I A.

(1). Jeżeli u, v, w są funkcjami x, y, z, t , czyniącymi zadość warunkowi $\Delta_2 = 0$, a x, y, z wyrazimy jako funkcje t i 3-ich stałych dowolnych a, b, c , okazać, że wyznacznik funkcyjny $\frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)}$ nie zależy od t .

(2). Ruch cieczy, równoległy do płaszczyzny, wyrażamy przez spółrzedne biegunowe r i θ , a ρ i τ oznaczają odpowiednio prędkości w kierunku promienia i w kierunku prostopadłym (art. 217); okazać, że odpowiednie przyśpieszenia w tych kierunkach wyrażają się wzorami:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial r} + \tau \frac{\partial \rho}{r \cdot \partial \theta} - \frac{\tau^2}{r}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho \frac{\partial \tau}{\partial r} + \tau \frac{\partial \tau}{r \cdot \partial \theta} + \frac{\rho \tau}{r}.$$

(3). Jeżeli U jest potencjałem sił, czyniącym zadość warunkowi $\Delta_2 U = 0$, natenczas ciśnienie nie może być minimum w żadnym punkcie wewnątrz cieczy, mającej ruch niewirowy.

(4). Okazać, że jeżeli prędkość cieczy, mającej ruch niewirowy równoległy do płaszczyzny, ma wszędzie tę samą wielkość, natenczas kierunek prędkości będzie ten sam we wszystkich punktach.

(5). Linijami prądu dla ruchu niewirowego, równoległego do płaszczyzny, są elipsy spółogniskowe: zbadać ruch cieczy, tudzież ruch sprzężony, dla którego te elipsy są linijami potencjalnymi.

(6). Zbadać ruch niewirowy cieczy, równoległy do płaszczyzny, jeżeli linijami prądu są spiralne, mające spółny biegun, których równanie jest $r = \lambda e^{\mu \theta}$, gdzie μ jest stałe dla wszystkich spiralnych, a λ parametrem zmiennym.

(7). Przyjmując ciecz doskonałą, obliczyć prędkość średnią wypływu tej cieczy z otworu znacznego w ścianie naczynia, tudzież wydatek otworu, znając kształt tego otworu. Wysokość cieczy nad otworem jest ciągle ta sama.

(8). Zastosować wzory, otrzymane w zadaniu poprzednim, do wypływu z otworu kołowego.

(9). W ścianie naczynia znajduje się mały otwór, z którego ciecz uchodzi, a naczynie nie ma dopływu: podać wzór na obliczenie czasu, w przeciągu którego naczynie się wypróżni.

(10). Obliczyć czas wypróżnienia się naczynia, przyjmując otwór znaczny o wiadomym kształcie.

(11). Jeżeli dopływ do naczynia jest stały, ale nie jest równy wypływowi z otworu w pierwszej chwili, obliczyć wysokość, o którą w przeciągu pewnego czasu zniży lub podniesie się powierzchnia cieczy w naczyniu.

(12). Jak należy zmienić wzór Torricelli'ego, jeżeli mały otwór w ścianie naczynia jest zanurzony w cieczy otaczającej do pewnej głębokości?

(13). Przyjmując w zagadnieniu (2) art. 220-go jedną oś elipsydy nieskończenie wielką, zbadać ruch cieczy względem walca eliptycznego, poruszającego się w niej w kierunku większej lub mniejszej osi podstawy.

(14). Pomijając ruch pionowy cieczy, na której powierzchni postępuje fala długa, wyprowadzić według art. 221-go i 222-go przybliżone równania ruchu cieczy i scalkować je dla kanału prostokątnego.

Literatura (Rozdz. XIX i XX).

L. NAVIER, Mémoire sur le mouvement des fluides en ayant égard à l'adhésion des molécules. (Mémoires de l'Institut. t. VI, Paris, 1826). — G. GREEN, Mathematical Papers, (London, 1871, a mianowicie artykuły: Researches on the vibration of pendulums in fluid media, 1833 i On the motion of waves in a variable canal of small depth and width, 1837). — G. STOKES. Mathematical and physical papers (Cambridge, 2 tomy, 1880 i 1883, a mianowicie w t. 1-ym: On the steady motion of incompressible fluids, 1842; On some cases of fluid motion, 1843; On the theories of internal friction of fluids in motion, 1845; On the theory of oscillating waves, 1847; w t. 2-im: Demonstration of a fundamental theorem, 1848; On waves, 1849). — G. B. AIRY, Tides and waves (Encyclopedia metropolitana t. V, London, 1845; wyszło także osobno; ob. także Journal des math., 3-e sér., t. I, Paris, 1875). — POISEUILLE, Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres (Mém. des savants étrangers, t. IX, Paris, 1846). — G. L. DIRICHLET: Ueber einige Fälle, in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt (Monatsberichte der Akad. zu Berlin für d. Jahr 1852); Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik (Journ. v. Borchardt. t. LVIII, Berlin, 1861). — CLEBSCH: Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit (Journ. v. CRELLE, t. LII — LIII, Berlin, 1856, 1857); Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. (Mathem. Annalen., t. III, Leipzig, 1871). — H. HELMHOLTZ, Ueber die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen (J. v. CRELLE, t. LV, Berlin, 1858; także Gesammelte Werke I. Band, Leipzig,

1882). — H. HELMHOLTZ UND G. PIOTROWSKI. Ueber Reibungstr opfbarer Flüssigkeiten (Sitzungsberichte, Wien, t. XL, 1860).—H. JACOBSON, Beiträge zur Haemodynamik (Archiv für Anatomie v. Reichert u. Du Bois-Reymond, Leipzig, 1860, 1861, 1862).—H. HANKEL, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten (Göttingen, 1861). — O. E. MEYER: Ueber die Reibung der Flüssigkeiten (J. v. CRELLE, t. LIX, 1861); Zur Theorie der inneren Reibung (tamże, t. LXXVIII, 1874). — J. STEFAN, Ueber die Bewegung flüssiger Körper (Sitzungsberichte, Wien, t. XLVI, 1862 i 1863). — W. J. M. RANKINE, Miscellaneous scientific papers (London, 1881, mianowicie cz. III). — W. THOMSON: On vortex motion (Transactions of the royal society of Edinburgh, t. XXV, 1869); Vortex statics (Proceedings of the r. soc. of Ed., 1876; Philosophical mag., 1880). — B. RIEMANN, Partielle Differentialgleichungen etc., rozdział VI. — E. BELTRAMI, Ricerche sulla cinematica dei fluidi (Memorie dell'accademia delle scienze di Bologna, 1875). — G. KIRCHHOFF, Mechanik, lekcya 15 — 22, 25 i 26. — H. LAMB. A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids (Cambridge, 1879; tłumaczenie niemieckie R. REIFFA p. tyt.: Einleitung in die Hydrodynamik, Freiberg u. Tübingen, 1884). — F. AUERBACH, Die theoretische Hydrodynamik nach dem Gange ihrer Entwicklung in der neuesten Zeit (Braunschweig, 1881). — G. MINCHIN, Uniplanar kinematics of solids and fluids (Oxford, 1882).—J. J. THOMSON, A treatise on the motion of vortex rings (London, 1883).—C. D. NEUMANN, Hydrodynamische Untersuchungen (Leipzig, 1883). — N. QUINT, De Wervelbeweging (Amsterdam, 1888). — A. B. BASSET, A treatise on hydrodynamics (Cambridge, 1888). —
