

co oznacza, że *krążenie po każdej kierownicy wiru w tym samym kierunku jest toż samo*. Ponieważ kierownica jest krzywą nieskończenie małą, przeto, obierając ją na płaszczyźnie normalnej do osi wiru, i stosując do niej równanie (3), widzimy, że iloczyn przekroju wiru i prędkości kątowej ω jest wielkością stałą dla każdego przekroju. To jest właśnie twierdzenie (3) art. poprzedzającego, a z podanego dowodzenia wynika, że ono ma miejsce, chociażby prędkość kątowa nie była funkcją ciągłą współrzędnych, byle tylko u, v, w nie zrywały ciągłości. W takim przypadku oś wiru będzie miała punkt osobliwy, jak np. punkt zwrotu, a mimo to związki okazane zachodzić będą.

210. RÓWNIANIA RUCHU NIEWIROWEGO. Zwróćmy się teraz do ruchu niewirowego. Jeżeli oznaczymy potencjał prędkości przez Φ i przyjmiemy dla krótkości

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

to równania Euler'a będą dla ruchu niewirowego

$$(1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z};$$

jeżeli siły zewnętrzne mają potencjał U , to otrzymamy

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (U - \Phi) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y} (U - \Phi) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} (U - \Phi) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Pomnożmy te równania odpowiednio przez dx, dy, dz , przyczym te wielkości oznaczają przyrostki współrzędnych, jeżeli w pewnej chwili z punktu (x, y, z) w cieczy niewirującej przechodzimy do punktu sąsiedniego, i dodajmy iloczyny; mieć będziemy

$$d\Phi = dU - \frac{dp}{\sigma}.$$

Całkując to równanie przy stałym t w obrębie przestrzeni, zajętej przez ciecz niewirującą, i wstawiając wartość Φ , otrzymamy

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = U - \frac{p}{\sigma} + F(t).$$

Ponieważ stała całkowania może być funkcją czasu, przeto oznaczyliśmy ją przez $F(t)$. To równanie określa ruch niewirowy; biorąc bowiem jego pochodne cząstkowe względem x, y, z , otrzymujemy równania ruchu (2).

Dla ruchu trwałego przy działaniu sił zachowujących, których potencjał nie zawiera czasu wyraźnie, będzie $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, a stała całkowania będzie niezależna od czasu; otrzymamy więc

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = U - \frac{p}{\sigma} + C.$$

Pochodne potencjału φ względem x, y, z są w każdym przypadku funkcjami jednowartościowymi współrzędnych, każda bowiem z nich oznacza prędkość w pewnym punkcie cieczy w kierunku odpowiedniej osi. Jeżeli potencjał sił jest funkcją jednowartościową, to równanie (3) okazuje, że $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ jest także funkcją jednowartościową, albowiem ciśnienie p posiada w każdym punkcie jedną wartość, dokładnie oznaczoną. W przypadku ruchu ciągłego będą powyższe pochodne funkcjami ciągłymi współrzędnych, a zatem potencjał prędkości będzie funkcją jednopochodną względem każdej współrzędnej, a jej pochodne będą funkcjami doskonałymi. Z tego nie wynika jednak, jakoby potencjał φ miał być także funkcją jednowartościową; wypada więc zastanowić się nad warunkami, przy których zachodzi jednowartościowość tego potencjału.

Zanim to uczynimy, podamy pewną własność ruchu niewirowego. Niech do cieczy, której cząstka w miejscu (x, y, z) ma prędkości u_0, v_0, w_0 , zostaną przyłożone siły chwilowe czyli popędy $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, i niech w tym miejscu działa nadto ciśnienie chwilowe \bar{p} , które-to wielkości według art. 137-go określamy przez równania następujące:

$$\int_0^\tau \bar{X} \cdot dt = \bar{X}, \quad \int_0^\tau \bar{p} \cdot dt = \bar{p}, \text{ i podobnie } \bar{Y} \text{ i } \bar{Z}.$$

Gdy przez u, v, w oznaczymy prędkości, których cząstka nabędzie wskutek tych popędów, natenczas równania ruchu będą

$$(5) \quad \begin{aligned} u - u_0 &= \bar{X} - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, & v - v_0 &= \bar{Y} - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \\ w - w_0 &= \bar{Z} - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}, \end{aligned}$$

przyczym, jak wiadomo, siły ciągłe pominąć należy. Załóżmy, że ciecz była w spoczynku, i że działając na nią same tylko ciśnienia chwilowe; natenczas otrzymamy

$$u = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z},$$

z czego wynika $u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz = -\frac{d\bar{p}}{\sigma} = d\varphi$,

a zatem: $\varphi = -\frac{\bar{p}}{\sigma} + C$. To znaczy, że *ruch niewirowy cieczy, w spoczynku będącej, może być wytworzony przez odpowiednie ciśnienia chwilowe*, a więc ruch niewirowy może być także zniesiony przez takie ciśnienia. Do wytworzenia ruchu potrzeba ciśnienia $\sigma(C - \varphi)$, a do zniesienia go potrzeba $\sigma(C + \varphi)$. Widzimy także, że wywierając na ciecz w każdym punkcie toż samo ciśnienie chwilowe, nie wywołamy w niej żadnego ruchu, potencjał φ będzie bowiem wielkością stałą, a zatem prędkość równa zeru. Ruch wirowy nie

może być wytworzony ze spoczynku przez ciśnienia chwilowe, i w tym leży także różnica między obydwojma rodzajami ruchu.

211. WIELOWARTOŚCIOWOŚĆ POTENCJAŁU PRĘDKOŚCI. Do wyrażenia analitycznego potencjału prędkości możemy zawsze dodać jedną stałą dowolną, z czego wynika, że możemy dla jednego punktu w cieczy niewirującej i w pewnej chwili obrać dowolnie wartość tego potencjału. Uczyniwszy to w punkcie m , otrzymamy potencjał prędkości dla innego punktu n , jeżeli oba dwa punkty połączymy dowolną linią, zawartą całkowicie w cieczy niewirują-

cą, i obliczymy całkę $\int (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz)$ czyli prąd po tej krzywej między obydwojma punktami. Jakoż, wyraz pod znakiem całkowania jest z założenia różniczką zupełną w każdym punkcie krzywej mn . Jeżeli więc punkt n przesuniemy w jakimkolwiek kierunku nieskończenie mało, to pochodna prądu, wzięta w tym kierunku, będzie rzutem prędkości tego punktu na ten kierunek, a przeto funkcja różniczkowana będzie potencjałem prędkości w punkcie n (art. 82). Potrzeba przytym założyć, że przestrzeń, zajęta przez ciecz niewirującą, ma własność łączności, t. j. że jakiegokolwiek dwa punkty tej przestrzeni można połączyć linią krzywą, której każdy punkt znajduje się w tej przestrzeni.

Przyjawszy, że taka przestrzeń jest wypełniona całkowicie cieczą niewirującą, łatwo okazać, że wtedy φ będzie funkcją jednowartościową. Jakoż, gdy poprowadzimy w cieczy z punktu m krzywą zamkniętą, to jakąkolwiek przyjmijemy powierzchnią, całkowicie w cieczy leżącą, której brzegiem jest ta krzywa, i zastosujemy do niej równanie (4) art. 209-go, lewa strona tego równania będzie równa zeru, a zatem krążenie po tej krzywej będzie także równe zeru. Ponieważ to krążenie jest równe różnicy potencjałów w punktach skrajnych, przeto, gdy po jakiegokolwiek krzywej zamkniętej całkujemy, nie opuszczając daną przestrzeni, zawsze otrzymamy ten sam potencjał prędkości w punkcie m , i podobnie rzecz się będzie miała w każdym innym punkcie. Nadawajmy takiej krzywej coraz inne kształty, ale tak, żeby ona nie opuszczała przestrzeni, przez ciecz zajętą, i stopniowo stawała się coraz mniejszą; tym sposobem możemy ją uczynić dowolnie małą, przyczym potencjał będzie wciąż ten sam. Wyrażamy się krótko, że w takiej przestrzeni każda krzywa zamknięta może być zredukowana do zera t. j. że przez ciągłe odkształcenia może się ta krzywa, znajdując się w przestrzeni, zajętej przez ciecz niewirującą, dowolnie zbliżyć do granicy, w której jej długość jest równa zeru. Obierzmy w takiej przestrzeni dwa punkty dowolne m i n , połączmy je jedną krzywą mAn i drugą krzywą mBn ; możemy krzywą mBn tak odkształcać, nie opuszczając tej przestrzeni, żeby stała się krzywą mAn . Takie więc dwie krzywe mogą się wzajemnie jedna do drugiej redukować, o całej zaś linii $mAnBm$ możemy się jak powyżej wyrazić, że daje się zredukować do zera.

Jedna część przestrzeni, którą ciecz zajmuje, może być całkiem wypełniona przez cząstki wirujące, potencjał zaś prędkości będzie jednowartościowy.

wy w pozostałej części przestrzeni, jeżeli tylko każda krzywa zamknięta, poprowadzona w cieczy niewirującej, daje się zredukować do zera przez takie odkształcenie, przy którym każdy punkt znajduje się zewnątrz cząstek wirujących, a zatem jeżeli dwie krzywe między dwoma punktami dają się wzajemnie jedna do drugiej zredukować. Mówimy wtedy, że ruch niewirowy zachodzi w przestrzeni o łączności pojedynczej. Łączność pojedyncza zachodzi także wtenczas, gdy nie ma wcale cząstek wirujących w cieczy. Jakoż, w przypadku łączności pojedynczej możemy każdą krzywą zamkniętą uważać za brzeg powierzchni, której każdy punkt jest zewnątrz cząstek wirujących cieczy, a zatem krążenie po takiej krzywej będzie równe zeru, co zapewnia jednowartościowość potencjału. Łączność pojedyncza zachodzi np. w przestrzeni, ograniczonej wewnętrzną powierzchnią kuli i zewnętrzną powierzchnią innej kuli mniejszej, gdziekolwiek mieszcząccej się wewnątrz pierwszej. Jeżeli w kuli mniejszej zachodzi ruch wirowy, to potencjał prędkości w przestrzeni pozostałej między kulami będzie jednowartościowy. Przestrzeń, ograniczona, bądź wewnętrzną, bądź zewnętrzną powierzchnią pierścienia kołowego, nie ma łączności pojedynczej; w takiej więc przestrzeni potencjał prędkości nie będzie jednowartościowy. Mamy więc twierdzenie: *potencjał prędkości jest funkcją jednowartościową w przestrzeni o łączności pojedynczej.*

Niewdając się w badania ogólne innych przypadków, ograniczmy się do ruchu, równoległego do płaszczyzny. Przyjmijmy, że dla każdej cząstki cieczy jest $w = 0$, i że punkty na tej samej prostej, równoległej do osi z , mają też samą prędkość; wtedy u, v będą tylko funkcjami współrzędnych x i y , i dość będzie rozważać ruch tylko na płaszczyźnie xy . Otrzymamy wtedy dla cząstek wirujących $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, a zatem osi obrotu

cząstek będą prostopadłe do płaszczyzny ruchu. Linije wirowe będą linijami prostymi, a wir elementarny będzie walcem, prostopadłym do tej płaszczyzny.

Rozważmy na płaszczyźnie xy pole, zawarte między dwiema krzywymi zamkniętymi (fig. 69) ABC i DEF i niech ciecz wirująca wypełnia pole DEF (kréskowane), a między krzywymi niech zachodzi ruch niewirowy. Z punktu m do n w cieczy niewirującej można przejść dwojakim sposobem: a) po krzywej mGn , która nieokrąża pola kréskowanego; b) po krzywej mHn , która je okrąża. Z tych dwu krzywych żadna nie daje się zredukować do drugiej; nie można bowiem krzywej mHn tak przekształcić, żeby ona stała się krzywą mGn , a przytym żaden punkt nie wkroczył w pole kréskowane. Każda krzywa między m i n daje się zredukować bądźto do mGn , bądźteż do mHn .

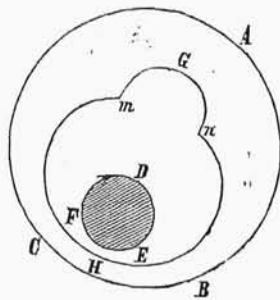


Fig. 69.

O takim polu mówimy, że ono ma łączność podwójną, bo w nim zachodzą dwa rodzaje krzywych takich, iż krzywe każdego rodzaju dadzą się wzajemnie do siebie zredukować, ale krzywe jednego rodzaju nie mogą być zredukowane

do krzywych drugiego rodzaju. Krzywa zamknięta $mGnHm$ nie daje się zredukować do zera.

Na fig. 70 mamy pole o łączności potrójnej; w dwu polach kréskowanych zachodzi ruch wirowy. Z krzywych mGn , mHn , mKn nie można żadnej do pozostałych zredukować, a takich krzywych mamy właśnie trzy rodzaje. Krzywa mLn , obejmująca obadwa pola kréskowane, da się podzielić na części, mogące być zredukowane do krzywych jednego z tych rodzajów, więc nie stanowi rodzaju osobnego. W podobny sposób dochodzimy do pojęcia wogóle pola płaskiego o łączności n -krotnej.

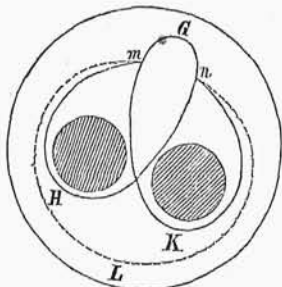


Fig. 70.

W polu o łączności podwójnej i wogóle n -krotnej potencjał φ będzie wielowartościowy. Jakoż niech φ'_m będzie dowolnie w m obraną wartością tej funkcji; wykreślimy krzywą zamkniętą, nie obejmującą pola kréskowanego. Krążenie po niej będzie równe zeru, przyjdziemy więc po tej drodze napowrót do funkcji φ'_m . Obliczmy teraz całkę $\int(u \cdot dx + v \cdot dy)$ wzdłuż krzywej $mGnHm$. Jeżeli ω jest prędkością kątową dla elementu df pola kréskowanego, to według (4) art. 209-go otrzymamy

$$\int(u \cdot dx + v \cdot dy) = 2 \int \omega \cdot df = 2K,$$

a zatem różnica potencjałów między końcem a początkiem drogi będzie

$$\varphi_m'' - \varphi_m' = 2K, \text{ skąd } \varphi_m'' = \varphi_m' + 2K,$$

z czego się okazuje, że φ_m'' będzie drugą wartością potencjału w punkcie m . Dwie więc wartości potencjału różnią się od siebie o krążenie po krzywej DEF w kierunku strzałki, czyli o podwójną sumę nateżeń wirów w cieczy.

Możemy znieść wielowartościowość potencjału, prowadząc dowolną krzywą BE, która rozcina pole na dwie części (fig. 71). Taką krzywą nazwiemy przekrojem danego pola. Uważając obie strony przekroju za krańce pola, których przekraczać nie można, widzimy teraz, że wszystkie krzywe, łączące punkty m i n , dadzą się wzajemnie do siebie zredukować, a każda krzywa zamknięta może być zredukowana do zera, że zatem taki przekrój nadaje polu łączność pojedynczą. Potencjał więc stanie się wszędzie jednowartościowym, lecz na przekroju BE przestanie być funkcją ciągłą. Jeżeli bowiem w punkcie a , leżącym nieskończenie blisko tego przekroju po jednej stronie, potencjał ma

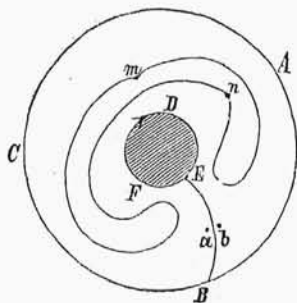


Fig. 71.

wartość φ_a , to w punkcie b , nieskończenie blisko leżącym po stronie przeciwnej przekroju, będzie $\varphi_b = \varphi_a + 2K$. Potencjał przeto prędkości zachowuje się teraz podobnie, jak parametr różniczkowy potencjału przyciągania według prawa Newton'a na powierzchni ciała przyciągającego (art. 126).

Stosując metodę przekrojów, wprowadzoną przez A. Cauchy'ego, do pól o łączności n -krotniej, można potencjał uczynić zawsze jednowartościowym, przyczem jednak każdy przekrój będzie miejscem tych punktów, w których przerywa się ciągłość potencjału.

Powyższe postępowanie stosuje się także do przypadku ruchu niewirowego w przestrzeni trójwymiarowej o jakiegokolwiek łączności. Przecinając taką przestrzeń o łączności n -krotniej, $n-1$ powierzchniami czyli przegrodami, znosimy wielowartościowość potencjału, a otrzymujemy natomiast funkcję, która zrywa ciągłość na każdej przegrodzie.

212. WŁASNOŚCI JEDNOWARTOŚCIOWYCH POTENCJAŁÓW PRĘDKOŚCI. Okażemy najważniejsze własności jednowartościowych potencjałów prędkości na podstawie twierdzenia J. Green'a.

Niech będą dwie funkcje φ i ψ spółrzędnych x, y, z , ciągłe i jednowartościowe w obrębie pewnej części przestrzeni o łączności pojedynczej, tudzież na zamkniętej powierzchni ograniczającej, i niech ich pochodne cząstkowe mają takie same własności. Rozważajmy całkę

$$(1) \quad I = \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

rozciągającą się na tę część przestrzeni. Kładąc $dV = dx dy dz$, możemy napisać krócej

$$(2) \quad I = \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dV.$$

Całkując częściowo i postępując sposobem, kilkakrotnie używanym, podzielmy powierzchnią ograniczającą na elementy df , oznaczmy przez a, b, c dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej takiego elementu; otrzymamy

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} dV &= - \int a \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} df - \int \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dV, \text{ albo także} \\ \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} dV &= - \int a \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} df - \int \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dV. \end{aligned}$$

Obliczywszy podobnie inne całki i dodawszy je, otrzymamy

$$(3) \quad I = - \int \left(a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \psi \cdot df - \int \psi \cdot \Delta \varphi \cdot dV, \text{ albo także}$$

$$(4) \quad I = - \int \left(a \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \varphi \cdot df - \int \varphi \cdot \Delta_2 \phi \cdot dV,$$

gdzie

$$(5) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Jeżeli (x, y, z) jest dowolnym punktem na powierzchni ograniczającej, a $(x + dx, y + dy, z + dz)$ punktem w odległości dn na normalnej wewnętrznej, to

$$a = \frac{dx}{dn}, b = \frac{dy}{dn}, c = \frac{dz}{dn}, \quad a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (\text{art. 82}), \text{ więc:}$$

$$(6) \quad I = - \int \phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int \phi \cdot \Delta_2 \varphi \cdot dV, \text{ albo}$$

$$(7) \quad I = - \int \varphi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} df - \int \varphi \cdot \Delta_2 \phi \cdot dV.$$

Odejmując te równania od siebie, otrzymamy

$$(8) \quad \int \left(\varphi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df - \int \left(\phi \cdot \Delta_2 \varphi - \varphi \cdot \Delta_2 \phi \right) dV.$$

Równania (6), (7) i (8) wyrażają twierdzenie Green'a. Całkowanie po lewej stronie w (8) rozciąga się na powierzchnię, ograniczającą daną część przestrzeni; całkowanie zaś po prawej stronie na samą tę przestrzeń. Funkcje φ, ϕ i ich pochodne mają być po lewej stronie brane w punktach na powierzchni; po prawej stronie bierzemy funkcje i ich parametry różniczkowe w punktach wewnątrz tej powierzchni.

Niech obie funkcje czynią zadość warunkom $\Delta_2 \varphi = 0, \Delta_2 \phi = 0$; wtedy

$$(9) \quad \int \left(\varphi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df = 0.$$

Obierzmy gdziekolwiek punkt stały $\mu, (\xi, \eta, \zeta)$, oznaczmy przez r jego odległość od punktu (x, y, z) wewnątrz danej powierzchni, i obierzmy $\phi = \frac{1}{r}$; natenczas ta funkcja zadość uczyni wszystkim poprzednio założonym warunkom, jeżeli μ znajduje się zewnątrz powierzchni rozważanej, albowiem, według art. 126-go $\Delta_2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$. Jeżeli zaś μ znajduje się wewnątrz tej powierzchni, to

zastoczywszy około tego punktu jako środka kulę o promieniu nieskończenie małym ε , rozważajmy przestrzeń między tą kulą a powierzchnią ograniczającą; do niej możemy stosować równanie (9). Oznaczmy przez dF element powierzchni téj kuli, przez φ_μ i $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right)_\mu$ wartość funkcji φ i wartość jęj pochodnej w punkcie μ ; według (9) otrzymamy

$$(10) \quad \int \left[\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right] df + \varphi_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \int dF - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} \right)_\mu \int \frac{dF}{\varepsilon} = 0.$$

Całka $\int \frac{dF}{\varepsilon}$ jest potencjałem Newton'a przy powierzchni nieskończenie małej kuli względem środka przy gęstości $= 1$; ma więc wartość równą zeru dla $\varepsilon = 0$ (art. 125). Mamy tu

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \int dF = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int dF = -\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi,$$

a zatem, według (10)

$$(12) \quad \varphi_\mu = \frac{1}{4\pi} \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot df - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot df.$$

Z tego równania możemy obliczyć φ w każdym punkcie wewnątrz wewnętrznej powierzchni, znając wartość téj funkcji i jęj pochodnej w punktach na téj powierzchni.

Załóży w równaniach (6) lub (7) $\varphi = \psi$, $\Delta_2 \varphi = 0$, $\Delta_2 \psi = 0$; otrzymamy nowy związek

$$(13) \quad \int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV = - \int \varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot df;$$

a jeżeli przyjmiemy $\psi = \text{stała}$, to z (9) wypada

$$(14) \quad \int \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot df = 0.$$

Nadajmy teraz funkcji φ znaczenie potencjału prędkości; wówczas będziemy mogli z tych równań wyprowadzić własności tego potencjału.

213. Gdy pomnożymy równanie (13) przez gęstość cieczy σ , to lewa strona przedstawiać będzie podwójną energiją kinetyczną cieczy niewirującej. Oznaczwszy energiją przez T , mamy

$$(1) \quad 2T = -\sigma \int \varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} df;$$

możemy przeto energiją wyrazić przez całkę, rozciągającą się na powierzchnię cieczy.

Niech ciecz porusza się tak, że wypełnia ciągle tę samą przestrzeń o łączności pojedynczej, której ograniczenie jest wiadome i może być całkiem lub częściowo utworzone przez ściany naczynia. Cząstki cieczy na powierzchni mogą się wtedy poruszać tylko w kierunkach stycznych do tej powierzchni, a zatem w każdym punkcie na powierzchni będzie $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Z tego wynika

$T = 0$, a zatem dla każdej cząstki $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$; to znaczy: jeżeli ciecz poruszająca się zajmuje ciągle tę samą przestrzeń o łączności pojedynczej, natenczas jej ruch nie może być niewirowym. W tym przypadku albo są wszystkie cząstki w spoczynku, albo zachodzą wiry w cieczy. Jeżeli więc w całej cieczy ma zachodzić ruch niewirowy, to jej powierzchnia bierze udział w ruchu, a ciecz nie może być wszędzie ograniczona ścianami naczynia.

Z równań (12) i (13) możemy wyprowadzić warunki, określające potencjał prędkości, a tym samym ruch niewirowy.

a). Jeżeli znamy potencjał prędkości we wszystkich punktach na powierzchni, ograniczającej przestrzeń o łączności pojedynczej, to możemy wyznaczyć potencjał w każdym punkcie wewnątrz tej powierzchni. Jakoż, znając φ , znamy tym samym prędkość $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ w kierunku normalnym, możemy więc

według (12) obliczyć φ_μ w każdym punkcie μ wewnątrz powierzchni. Czyli inaczej: w każdym punkcie wewnątrz powierzchni, ograniczającej przestrzeń o łączności pojedynczej, można mieć tylko jedną funkcję, której wartość w każdym punkcie na tej powierzchni jest dana, której pierwsze pochodne są funkcjami ciągłymi i jednowartościowymi, i której parametr różniczkowy rzędu drugiego jest równy zeru.

b). Jeżeli znamy pochodną $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ w każdym punkcie na powierzchni, ograniczającej przestrzeń o łączności pojedynczej, to co do potencjału φ w każdym punkcie wewnętrznym nie będzie tylko wiadoma pewna stała dowolna, niezależna od spórzędnych. Jakoż, niech φ_1 i φ_2 będą dwiema funkcjami w punkcie μ , które odpowiadają danym warunkom; w każdym punkcie na powierzchni będzie $\frac{\partial}{\partial n} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, a zatem według (12) otrzymamy w punkcie μ

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

z czego wynika, że φ_1 i φ_2 różnią się od siebie o wielkość, niezależną od x , y , z . Możemy zatem według (12) wyznaczyć φ_μ , przyczem jednak stała pozostaje jeszcze dowolną. To twierdzenie możemy tak wyrazić: znając prędkość w każdym punkcie na powierzchni cieczy niewirującej, możemy wyznaczyć prędkość cieczy w każdym punkcie wewnętrznym.

c). Z powyższych twierdzeń okazuje się, że można dać wartość poten-

cyjału φ dla pewnej części powierzchni cieczy, tudzież wartość pochodnej $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ dla reszty powierzchni, aby z tych danych obliczyć potencjał prędkości w punktach wewnętrznych.

Równanie $\varphi_\mu = \text{stałej}$, albo krócej $\varphi = \text{stałej}$, wyznacza powierzchnią, którą nazywamy powierzchnią potencyjalną prędkości. W każdym punkcie takiej powierzchni ma potencjał φ tę samą wartość, a jej znaczenie jest podobne do znaczenia powierzchni potencyjalmiej siły, określonej w art.

82-gim. Równanie różniczkowe takiej powierzchni jest $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy +$

$+ \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$, z czego się okazuje, że prędkość cząstki cieczy jest normalna

do powierzchni potencyjalmiej, przez tę cząstkę przechodzącej. Prędkość jest odwrotnie proporcjonalna względem grubości warstwy, ograniczonej powierzchnią rozważaną i sąsiednią powierzchnią potencyjalną, której odpowiada potencjał większy, jeżeli mierzymy grubość warstwy w kierunku normalnym do pierwszej powierzchni. Gdyby się dwie sąsiednie powierzchnie potencyjne przecinały, to prędkość byłaby nieskończenie wielka w każdym punkcie przecięcia. Dwie powierzchnie potencyjne, nie sąsiednie, nie mogą się przecinać w przestrzeni o łączności pojedynczej, bo φ jest funkcją jednowartościową. W przestrzeni o łączności pojedynczej żadna powierzchnia potencyjalmiej nie może być zamknięta. Przypuściwszy bowiem, że $\varphi = C$ jest powierzchnią zamkniętą, możnaby poprowadzić drugą powierzchnią $\varphi = C'$ nieskończenie bliską i znajdującą się całkowicie wewnątrz pierwszej; stała C' różniłaby się nieskończenie mało od stałej C . Ponieważ różnica $C - C'$ dla dwu punktów nieskończenie bliskich ma ten sam znak, gdziekolwiek te punkty oberzemy,

przeto pochodna $\frac{d\varphi}{dn} = \frac{C - C'}{dn}$ nie zmienia znaku na powierzchni $\varphi = C$, a zatem całka w równaniu (14) art. poprzedzającego nie byłaby równa zero, jakby w takiej przestrzeni być powinno. W tym dowodzeniu przypuszczamy jednak, że wewnątrz powierzchni potencyjalmiej nie znajduje się żaden punkt osobliwy funkcji φ , w którymby ta funkcja zrywała ciągłość; gdyby tak było, to powierzchnia potencyjalmiej byłaby zamknięta. Przekonamy się o tym w zagadnieniach.

214. LINIJE PRĄDU I STRUGI CIECZY. Poprowadźmy w cieczy niewirującą taką linią, iżby styczna w każdym punkcie tej linii miała kierunek ruchu chwilowego tego punktu; taką linią nazywamy linią prądu w cieczy. Równania różniczkowe takiej linii są

$$(1) \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w};$$

przez każdy punkt można poprowadzić jedną linią prądu, która tylko w takim miejscu jest nieoznaczona, w którym prędkość jest równa zero. Linije prądu przecinają każdą powierzchnią potencyjalną prędkości pod kątem prostym.

Poprowadźmy przez punkt m dowolną płaszczyznę, wykreślmy na niej nieskończenie małą krzywą zamkniętą, otaczającą ten punkt, i poprowadźmy przez każdy punkt jej obwodu linię prądu; wydzielimy z cieczy część nieskończenie małą, którą zwiemy strugą cieczy. Biorąc m w środku masy pola tej krzywej, poprowadźmy linię prądu w tym punkcie; otrzymamy oś strugi. Przekrojem strugi będzie pole jej przecięcia płaszczyzną, normalną do osi. Stosując równanie (13) art. poprzedzającego do elementu strugi między dwoma przekrojami, można podobnym sposobem, jak w art. 208-ym, okazać, że *iloczyn prędkości cieczy i przekroju strugi ma tę samą wartość we wszystkich punktach tej samej strugi*.

Z równania (14) art. 212-go wynika, że w cieczy nie może istnieć powierzchnia, w której prędkość byłaby równa zero w każdym punkcie. Gdyby bowiem taka powierzchnia istniała, to strugi kończyłyby się w niej; stosując więc owo równanie do elementu strugi, ograniczonego tą powierzchnią i przekrojem sąsiednim, w którym ruch zachodzi, mielibyśmy $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ dla tego przekroju, co się sprzeciwia poprzedniej własności strugi. Taka zatem powierzchnia, dla jakiej byłoby w każdym punkcie $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, istnieć nie może, chyba, że cała ciecz jest w spoczynku, a wtedy φ jest wielkością stałą w całym obrębie cieczy niewirującej. Pochodne potencjału względem współrzędnych mogą być równe zero tylko w pewnych punktach lub liniach osobliwych. Zarazem widzimy, że każda struga przechodzi na wskroś cieczy, że zatem ani nie zaczyna, ani nie kończy się wewnątrz niej. Struga nie może być jednak zamknięta, jak wir elementarny, nie mogłaby bowiem przecinać prostokątnie wszystkich powierzchni potencjalnych wewnątrz cieczy, jak tego wymaga jej określenie.

Linia prądu, przez pewien punkt poprowadzona, ma w każdej chwili kształt inny, ponieważ pochodne potencjału są funkcjami czasu, a tor tego punktu jest styczny w tym punkcie do linii prądu. Jeżeli potencjał nie zawiera czasu wyraźnie, a zatem ruch jest trwały, wtedy linie prądu nie zmieniają się z czasem, a każda z nich jest torem pewnej cząstki cieczy w przestrzeni. Jakoż prędkość cząstki jest nieustannie też sama w tym samym punkcie i ma kierunek styczny do linii prądu, cząstka porusza się zatem wzdłuż tej linii. Nieskończenie małe elementy cieczy poruszają się w strugach, a stała wartość iloczynu prędkości i przekroju strugi wynika bezpośrednio z ciągłości cieczy.

Około punktu p zatoczmy kulę o dowolnym promieniu ρ , leżącą wewnątrz cieczy, i zastosujmy do tej kuli równania (13) i (14) art. 212-go. Wtedy otrzymamy

$$\int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = 0,$$

a ponieważ dla normalnej wewnętrznej

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho^2},$$

przeto otrzymamy

$$(2) \quad \varphi_{\mu} = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int \varphi \cdot df,$$

co wyraża twierdzenie Gauss'a: *potencjał prędkości w środku kuli równa się wartości średniej potencjału w punktach na jej powierzchni*. Podług tego twierdzenia leży wartość φ_{μ} między największą a najmniejszą wartością potencjału na kuli; ponieważ zaś promień ρ możemy uczynić dowolnie małym, przeto wnosimy stąd, że *potencjał prędkości nie może przyjąć wewnątrz cieczy ani wartości największej, ani najmniejszej*. Takie wartości mogą zachodzić tylko na powierzchni cieczy.

Dowiedziemy jeszcze następującego ciekawego twierdzenia W. Thomsona: *ze wszystkich ruchów cieczy, ograniczonej daną powierzchnią, dla których prędkość normalna w tym samym punkcie na powierzchni jest ta sama, ruch niewirowy wytwarza najmniejszą energiją kinetyczną*. Niech u , v , w będą rzutami prędkości w punkcie (x, y, z) przy ruchu wirowym, T_w odpowiednią energiją cieczy, φ potencjałem prędkości dla ruchu niewirowego, T energiją odpowiednią; wtedy

$$2T_w = \sigma \int (u^2 + v^2 + w^2) dV,$$

$$2T = \sigma \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV,$$

więc

$$\frac{2(T_w - T)}{\sigma} = \int \left\{ \left[u^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[v^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[w^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dV,$$

albo

$$(3) \quad \frac{2}{\sigma} (T_w - T) =$$

$$= \int \left[\left(u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(w - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV +$$

$$+ 2 \int \left[\left(u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(w - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dV.$$

Całkując częściowo, otrzymamy wiadomym sposobem

$$\int \left(u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV = - \int a \left(u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \varphi \cdot df - \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \varphi \cdot dV,$$

i podobnie obliczymy dwie pozostałe całki, gdzie a, b, c oznaczają dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej do powierzchni w elemencie df . Będzie więc

$$\begin{aligned} & \int \left[\left(u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(w - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dV = \\ & = - \int \left[a \left(u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + b \left(v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + c \left(w - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] df - \\ & - \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \varphi \cdot dV + \int \varphi \cdot \Delta_2 \varphi \cdot dV. \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia $a \left(u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + b \left(v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + c \left(w - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$, a wyrazy w drugiej i trzeciej całce mają także wartość równą zeru, przeto powyższa całka jest równa zeru. Z równania zatym (3) wynika, że $T_w - T > 0$. c. n. d.
