

Ponieważ tożsamościowo $\frac{\partial c_r}{\partial \gamma_k} = 0$, $\frac{\partial \gamma_r}{\partial c_k} = 0$, i ponieważ dalej pochodne $\frac{\partial c_r}{\partial c_k}$, $\frac{\partial \gamma_r}{\partial \gamma_k}$ mają wartość zero dla różnych od siebie wskaźników r, k , a wartość 1 dla $r = k$, przeto z (11) otrzymamy następujące tożsamości:

$$[c_r, c_k] = 0, [\gamma_r, \gamma_k] = 0, [\gamma_k, c_r] = 0, [\gamma_r, c_r] = 1,$$

czyli, wstawivszy napowrót funkcje φ_i i φ'_i ,

$$(12) \quad [\varphi_r, \varphi_k] = 0, [\varphi'_r, \varphi'_k] = 0, [\varphi'_k, \varphi_r] = 0, [\varphi'_r, \varphi_r] = 1.$$

Powyższe tożsamości, podane przez Jacobi'ego, okazują, że całki równania Hamilton'a można podzielić na dwie gromady, według tego, czy ta funkcja, utworzona z pochodnych cząstkowych lewych stron tych całek względem q_i i p_i , którą oznaczyliśmy symbolicznie dwiema klamrami, jest tożsamościowo równa zeru, czy też jej wartość bezwzględna jest tożsamościowo równa jedności. Okazane wyżej własności tych całek posłużą do dokładnego zrozumienia pewnego ważnego twierdzenia, którym zakończymy rzecz o całkowaniu równań ruchu.

173. TWIERDZENIE POISSON'A I JACOBI'EGO. Przyjmijmy, że, gdy dane jest zagadnienie kinetyczne, do którego stosują się równania Hamilton'a, mamy już jakiegokolwiek dwie całki, to znamy dwie funkcje zmiennych q_i, p_i, t , które wskutek tych równań mają wartości stałe podczas ruchu,

$$(1) \quad \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = a_i, \quad \varphi_k(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = a_k.$$

Utworzywszy z φ_i, φ_k funkcję, w art. poprzedzającym rozważaną,

$$(2) \quad [\varphi_i, \varphi_k] = \sum_{r=1}^{r=s} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \right),$$

można okazać, że funkcja $[\varphi_i, \varphi_k]$ posiada wskutek równań ruchu także wartość stałą. Jakoż, różniczkując (2) względem t , otrzymamy

$$(3) \quad \frac{d}{dt} [\varphi_i, \varphi_k] = \sum_{r=1}^{r=s} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} \right) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \right) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \right) \right\}.$$

Ponieważ $\varphi_i = a_i$, $\varphi_k = a_k$ są całkami równań ruchu, przeto $\frac{d\varphi_i}{dt} = 0$, $\frac{d\varphi_k}{dt} = 0$, czyli,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right) = 0,$$

a ponieważ $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, więc

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Biorąc pochodną 1-go równania względem q_r , a następnie względem p_r , otrzymamy

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial q_r} + \sum_{i=1}^{l=s} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_r \partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial p_i} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_r \partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial q_i} \right) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial p_r} + \sum_{i=1}^{l=s} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial p_r \partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_i} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial p_r \partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial q_i} \right) = 0,$$

a czyniąc to samo z 2-gim równaniem (4), otrzymamy dwa podobne równania dla φ_k . Mamy jednak

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial q_r} + \sum_{i=1}^{l=s} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_r \partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_r \partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right), \text{ czyli}$$

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial q_r} + \sum_{i=1}^{l=s} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_r \partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_r \partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right); \text{ podobnie}$$

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial p_r} + \sum_{i=1}^{l=s} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial p_r \partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial p_r \partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Gdy podstawimy $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial q_r}$ z równania (5) w (7), a $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial p_r}$ z (6) w (8), otrzymamy następujące dwa równania:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \right) = \sum_{i=1}^{l=s} \left(- \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial p_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial q_i} \right).$$

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \right) = \sum_{i=1}^{l=s} \left(- \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial q_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_i} \right),$$

a kładąc k zamiast i , otrzymamy podobne dwa równania dla φ_k . Wstawisz te pochodne w (3), mieć będziemy

$$(11) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\varphi_i, \varphi_k] = \\ & = \sum_{i=1}^{l=s} \sum_{r=1}^{r=s} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial p_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial q_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial q_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ponieważ wskaźniki l i r przybierają wartości całkowite od 1 do s , przeto w sumie po prawej stronie tego równania znajdują się po dwa wyrazy równe i o znakach przeciwnych, znoszące się nawzajem, z czego wynika, że $\frac{d}{dt} [\varphi_i, \varphi_k] = 0$, że przeto funkcja $[\varphi_i, \varphi_k]$ jest wskutek równań ruchu stała, co było do okazania.

Stąd wynika, że jeżeli przyjmiemy $[\varphi_i, \varphi_k] = a_{ik}$, gdzie a_{ik} jest stałą dowolną, natenczas równanie $[\varphi_i, \varphi_k] = a_{ik}$ przedstawiać będzie wogólnie nową całkę równań ruchu. Żeby jednak to równanie było istotnie całką nową, nie powinna być wielkość $[\varphi_i, \varphi_k]$ ani funkcję φ_i, φ_k , lub, co na jedno wychodzi,

funkcją stałych a_i, a_k , ani téż tożsamościowo stałą, to znaczy jakąś liczbą szczególną lub tożsamościowo równą zeru. W pierwszym bowiem przypadku równanie $[\varphi_i, \varphi_k] = a_{ik}$ nie dałoby nowego związku między q_i, p_i, t , lecz związek, będący prostym wynikiem równań pierwotnych $\varphi_i = a_i, \varphi_k = a_k$; w drugim zaś przypadku $[\varphi_i, \varphi_k]$ nie byłoby funkcją zmiennych q_i, p_i, t , a $[\varphi_i, \varphi_k] = a_{ik}$ byłoby tożsamością, która, oczywiście, niema znaczenia całki. Tworząc z funkcji $\varphi_i \equiv [\varphi_i, \varphi_k]$ i z funkcji pierwotnych φ_i, φ_k nowe funkcje $[\varphi_i, \varphi_i], [\varphi_k, \varphi_i]$, i przyrównyując każdą z tych ostatnich do stałej dowolnej, otrzymamy wogólności dwie nowe całki, które podobnym sposobem z funkcjami poprzedzającymi połączone być mogą, i t. d. Jeżeli tylko niezachodzi żaden z powyższych przypadków, sprawiających, iż całka byłaby tylko pozorną, to możemy tym sposobem z dwu całek wiadomych utworzyć wszystkie inne całki zagadnienia kinetycznego.

Na podstawie powyższego twierdzenia, podanego pierwotnie w odmienniej postaci przez Poisson'a, a przez Jacobi'ego powtórnie odkrytego i należyście ocenionego, możnaby z dwu całek przez proste różniczkowanie obliczyć wszystkie całki równań ruchu. A że w przeważnej ilości zagadnień możemy podać przynajmniej dwie całki, przeto zdawałoby się, że kinetyka układów masyjnych daje się sprowadzić do bardzo prostego schematu działań różniczkowych, czyniących jakoby zbytecznym bezpośrednie badanie działania sił w przyrodzie. Atoli tak nie jest. Żeby bowiem powyższe twierdzenie dało istotnie nową całkę, muszą być całki dane właściwe zagadnieniu, a nie powinny pochodzić z zasad ogólnych, jak np. z zasady energii, lub z zasady ruchu środka masy i t. p., tudzież nie powinny należeć do całek, odpowiednich temu układowi równań różniczkowych zwyczajnych, który wynika z równania Hamilton'a, określającego funkcję V. Okazaliśmy bowiem w art. 172-im, że funkcje $[\varphi_i, \varphi_k]$, z tych całek utworzone, są tożsamościowo równe zeru lub jedności, wskutek czego nowa całka staje się pozorną.

Jeżeli w zagadnieniu, dla którego zachodzi zasada energii, t. j. takiego, w którym H nie zawiera czasu wyraźnie, znamy, oprócz całki $H = h$, wyrażającej tę zasadę, jeszcze tylko jedną całkę $\varphi_i = a_i$, to z tych dwu całek nie możemy wyprowadzić całki nowój. Jakoż, załóżmy, że φ_i nie zawiera t wyraźnie, że więc $\varphi_i(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = a_i$; wyrażając wówczas że $\varphi_i = a_i$ jest całką równań ruchu, t. j. przyjmując, że $\frac{d\varphi_i}{dt} = 0$, otrzymamy według (4) następujące równanie:

$$\sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = [\varphi_i, H] = 0,$$

z którego się okazuje, że do powyższych dwu całek twierdzenie Poisson'a nie może być stosowane. Gdyby całka zawierała czas, gdyby więc było

$$\varphi_i \equiv t + \psi_i(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = a_i,$$

to byłoby według (4) $[\varphi_i, H] = -1$, co także wyklucza zastosowanie tego twierdzenia. W przypadku zachodzenia zasady energii należy przeto powiedzieć, że jeżeli oprócz całki oczywiście $H = h$, znamy jeszcze dwie całki $\varphi_i = a_i$ i $\varphi_k = a_k$, nie zawierające czasu, natenczas $[\varphi_i, \varphi_k] = \text{stała}$ będzie całką nową, skoro tylko nie zachodzi przypadek, sprawiający, iż ta całka jest tylko pozorną.

174. ZAGADNIENIA. Niech będzie dany układ swobodny n punktów; x_i, y_i, z_i niech oznaczają współrzędne prostokątne punktu m_i , które obierzmy jako argumenty q . Mamy wtedy $2T = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$, a ponieważ $\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i'$, przeto ilości ruchu $m_i x_i'$ przedstawiają zmienne p_i . Jeżeli U jest potencjałem sił, to $H = T - U$. Równania więc kanoniczne ruchu takiego układu będą

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial (m_i x_i')} , \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (m_i y_i')} , \quad \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial (m_i z_i')} \\ m_i \frac{dx_i'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} , \quad m_i \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} , \quad m_i \frac{dz_i'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} i=1, 2, \dots, n.$$

A ponieważ $\frac{\partial H}{\partial (m_i x_i')} = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i'} = x_i'$, $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$, i t. p., przeto otrzymamy z (1) układ równań ruchu

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_i' , \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i' , \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i' ; \\ m_i \frac{dx_i'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x_i} , \quad m_i \frac{dy_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_i} , \quad m_i \frac{dz_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i} . \end{aligned}$$

Możemy podać dwie całki tego układu, nie zawierające czasu, mianowicie:

$$(3) \quad \varphi = \sum m_i (x_i y_i' - y_i x_i') = c, \quad \psi = \sum m_i (y_i z_i' - z_i y_i') = a,$$

które wyrażają przy wiadomych warunkach (art. 141) zasadę pól dla płaszczyzn xy i yz . Z nich otrzymamy

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (m_i x_i')} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (m_i y_i')} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial (m_i z_i')} - \frac{\partial \varphi}{\partial (m_i x_i')} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial (m_i y_i')} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial (m_i z_i')} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right).$$

Obliczywszy pochodne cząstkowe według (3), mieć będziemy $[\varphi, \psi] = \sum m_i (z_i x_i' - x_i z_i')$; a zatem równanie

$$(4) \quad \sum m_i (z_i x_i' - x_i z_i') = b$$

przedstawia według twierdzenia Poisson'a 3-cią całkę, która wyraża wiadome twierdzenie, że skoro zasada pól zachodzi dla dwu płaszczyzn współrzędnych, to ona zachodzi także dla 3-ciej płaszczyzny.

W celu otrzymania równania Hamilton'a o pochodnych cząstkowych, przyjmujemy

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i x_i', \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i y_i', \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i z_i'.$$

Obliczmy z tych równań x_i' , y_i' , z_i' i podstawmy w T; otrzymamy

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} \right)^2 \right];$$

a ponieważ $H = T - U$, przeto równanie Hamilton'a będzie tu w przypadku ogólnym, t. j. gdy potencjał U zawiera czas wyraźnie

$$(5) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} \right)^2 \right] - U = 0.$$

Jeżeli U nie zawiera czasu wyraźnie, to używszy podstawienia $V = W - ht$, otrzymamy równanie Hamilton'a, wyrażające zasadę energii,

$$(6) \quad \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_i} \right)^2 \right] = U + h.$$

Dla jednego punktu swobodnego (x, y, z) otrzymamy

$$(7) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] = U + h.$$

I). Zastosujmy to równanie do ruchu punktu, przyciąganego przez środek stały. Obierzmy środek przyciągania jako początek współrzędnych; r niech oznacza odległość punktu m od środka, $U = f(r)$ niech będzie potencjałem przyciągania. Wprowadzając współrzędne biegunowe r, ϕ, ϑ , przyjmijmy $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi \cos \vartheta$, $z = r \sin \phi \sin \vartheta$; będziemy mieli

$$T = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \phi'^2 + r^2 \vartheta'^2 \sin^2 \phi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = m r', \quad \frac{\partial T}{\partial \phi'} = m r^2 \phi', \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = m r^2 \vartheta' \sin^2 \phi.$$

Spółrzędne r, ϕ, ϑ przedstawiają argumenty q_1, q_2, q_3 ; zmienne p_i mają wartości $p_1 = m r'$, $p_2 = m r^2 \phi'$, $p_3 = m r^2 \vartheta' \sin^2 \phi$. Kładąc

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad p_3 = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

otrzymamy $r' = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial W}{\partial r}$, $\phi' = \frac{1}{m r^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \phi}$, $\vartheta' = \frac{1}{m r^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vartheta}$,

$$T = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 \right];$$

równanie więc Hamilton'a, kładąc $m=1$, będzie

$$(8) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 = 2f(r) + 2h.$$

Aby wynaleść jego rozwiązanie zupełne, przyjmijmy

$$(9) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 = 2a,$$

gdzie a jest stałą dowolną; wtedy równanie (8) rozłoży się na równanie (9) i na drugie równanie

$$(10) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{2a}{r^2} = 2f(r) + 2h,$$

którego całka ogólna będzie

$$(11) \quad W = \sqrt{2} \int \sqrt{f(r) - \frac{a}{r^2} + h} \cdot dr + F(\phi, \vartheta),$$

gdzie $F(\phi, \vartheta)$ oznacza funkcję dowolną argumentów ϕ i ϑ . Wstawiając wartość z (11) w (9), mamy dla F równanie

$$(12) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)^2 = 2a,$$

w którym przyjmijmy podobnie $\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)^2 = 2b$, gdzie b jest stałą dowolną, a otrzymamy

$$(13) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{2b}{\sin^2 \phi} = 2a,$$

skąd

$$(14) \quad F = \sqrt{2} \int \sqrt{a - \frac{b}{\sin^2 \phi}} \cdot d\phi + F_1(\vartheta),$$

gdzie $F_1(\vartheta)$ jest znowu funkcją dowolną, dla której mamy równanie $\left(\frac{\partial F_1}{\partial \vartheta}\right)^2 = 2b$, skąd $F_1(\vartheta) = \sqrt{2b} \cdot \vartheta$, a więc

$$F = \sqrt{2} \left\{ \int \sqrt{a - \frac{b}{\sin^2 \phi}} \cdot d\phi + \sqrt{b} \cdot \vartheta \right\},$$

a zatem według (11)

$$(15) \quad W = \sqrt{2} \left\{ \int \sqrt{f(r) - \frac{a}{r^2} + h} \cdot dr + \int \sqrt{a - \frac{b}{\sin^2 \phi}} \cdot d\phi + \sqrt{b} \cdot \vartheta \right\},$$

jako rozwiązanie zupełne równania (8), zawierające właściwą ilość stałych dowolnych. Znając prawo przyciągania, możemy, obliczając całkę, wyznaczyć W . Z tego wynikają następujące równanie całkowe pierwsze:

$$(16) \quad r' = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad r^2 \phi' = \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad r^3 \vartheta' \sin^2 \phi = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

tudzież równanie całkowe drugie:

$$(17) \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial W}{\partial a} = \alpha, \quad \frac{\partial W}{\partial b} = \beta,$$

gdzie τ , α , β oznaczają nowe stałe dowolne. Podstawiając wartość W , otrzymamy drugie równania całkowe w postaciach:

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{dr}{f(r) - \frac{a}{r^2} + h}} &= t + \tau, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ - \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(r) - \frac{a}{r^2} + h}} + \int \sqrt{\frac{d\phi}{a - \frac{b}{\sin^2 \phi}}} \right\} &= \alpha, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ - \int \frac{d\phi}{\sin^2 \phi \sqrt{a - \frac{b}{\sin^2 \phi}}} + \frac{\vartheta}{\sqrt{b}} \right\} &= \beta. \end{aligned}$$

Znając położenie początkowe i prędkość początkową punktu, możemy wyznaczyć stałe a , b , α , β , τ , h . Z pierwszego równania (18), że otrzymamy r jako funkcję t , a dwa ostatnie wyznaczają tor punktu.

Wiedząc, że ruch centralny zachodzi na płaszczyźnie, możemy równanie Hamilton'a rozwiązać sposobem, podanym w art. 170-ym. Równanie Hamilton'a będzie w tym przypadku:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 = 2f(r) + 2h,$$

a kładąc $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, otrzymamy

$$(19) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 = 2f(r) + 2h.$$

Kładąc $p_1 = \frac{\partial W}{\partial r}$, $p_2 = \frac{\partial W}{\partial \phi}$, mieć będziemy

$$(20) \quad \Psi \equiv p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} - 2[f(r) + h] = 0.$$

Mamy teraz wynaleść jedną całkę układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$dr : d\phi : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} : -\frac{\partial \Psi}{\partial r} : -\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}.$$

Ponieważ $\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = 0$, przeto żądana całka będzie $p_2 = a$, gdzie a jest stałą dowolną. Wstawiając tę wartość w (20), otrzymamy

$$p_1 = \frac{1}{r} \sqrt{2r^2 [f(r) + h] - a^2}.$$

Podane wartości sprawiają, iż $p_1 dr + p_2 d\phi$ jest różniczką zupełną, tak, iż

$$(21) \quad W = \int (p_1 dr + p_2 d\phi) = \\ = \int \frac{dr}{r} \sqrt{2r^2 [f(r) + h] - a^2} + a\phi$$

jest szukanym rozwiązaniem zupełnym, zawierającym stałe a i h . Równania całkowe drugie będą

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial W}{\partial a} = \alpha, \text{ albo po podstawieniu wartości,} \\ (22) \quad \int \frac{r \cdot dr}{\sqrt{2r^2 [f(r) + h] - a^2}} = t + \tau, \\ -a \int \frac{dr}{r \sqrt{2r^2 [f(r) + h] - a^2}} + \phi = \alpha.$$

Pierwsze równanie określa ruch ze względu na czas, drugie wyznacza tor punktu; stałe a , α , h , τ dają się wyznaczyć z warunków początkowych.

II) Rzut ukośny. — Obracząc współrzędne prostokątne x , y jako argumenty, mieć będziemy dla $m=1$, $U = -gy$, więc równanie Hamilton'a będzie

$$(23) \quad \Psi = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + 2gy - 2h = 0.$$

Ponieważ Ψ nie zawiera x , przeto możemy podobnie, jak w art. 169-ym użyć podstawienia $W = W_1 + c_1 x$, gdzie W_1 nie zawiera x , a c_1 jest stałą dowolną. Ponieważ $\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW_1}{dy}$, przeto z równania (23) wynika

$$\left(\frac{dW_1}{dy} \right)^2 = 2h - c_1^2 - 2gy, \\ W_1 = -\frac{1}{3g} (2h - c_1^2 - 2gy)^{\frac{3}{2}}, \text{ a stąd}$$

$$(24) \quad W = c_1 x - \frac{1}{3g} (2h - c_1^2 - 2gy)^{\frac{3}{2}},$$

co przedstawia rozwiązanie zupełne, zawierające stałe h i c_1 . Równania całkowite pierwsze będą

$$(25) \quad x' = c_1, \quad y' = \sqrt{2h - c_1^2 - 2gy},$$

a równania całkowite drugie będą

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= -\frac{1}{g} \sqrt{2h - c_1^2 - 2gy} = t + \tau, \\ \frac{\partial W}{\partial c_1} &= x + \frac{c_1}{g} \sqrt{2h - c_1^2 - 2gy} = \gamma, \end{aligned}$$

gdzie τ i γ są dwiema nowymi stałymi. Jeżeli c jest prędkością rzutu, α elewacją, to dla $t=0$ mamy $x=0$, $y=0$, $x'=c \cos \alpha$, $y'=c \sin \alpha$, a więc $c_1 = c \cos \alpha$, $2h = c^2$, $\tau = -\frac{c}{g} \sin \alpha$, $\gamma = \frac{c^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$. Wstawiając te wartości w drugie równanie (26), otrzymamy $y = x \tan \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x^2$ jako równanie toru parabolicznego.

Polecamy czytelnikowi przerobienie zagadnień rozdziału VIII i IX sposobem, podanym w tym rozdziale, np. ruch punktu, przyciąganego według prawa Newton'a przez dwa punkty stałe, ruch punktu na kuli i t. p. —



L i t e r a t u r a (Rozdz. XVI).

W. R. HAMILTON. On a general method in Dynamics, by which the study of the motion of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function (Transactions of the Royal Society of Ireland, 1834); Second essay on a general method in Dynamics (tamże, 1834). — S. D. POISSON, Sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique (J. des mathém., t. II, 1837). — J. BERTRAND: Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique (J. des mathém., t. XVII, 1852); Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique (J. des mathém., t. XVII, 1852; tudzież nota VII do 3-go wydania Mécanique analytique Lagrange'a, Paris, t. I. 1853). — E. BOUR: Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique (Paris, 1855); Sur l'intégration des équations

tions différentielles partielles du premier et du second ordre (J. de l'école polyt., t. XXII, 1862). — C. G. F. JACOBI, Vorlesungen über Dynamik (Berlin, 1866). — GRAINDORGE, Mémoire sur l'intégration des équations de la dynamique (Bruxelles, 1871). — E. MATHIEU, Dynamique analytique (Paris, 1878). — A. MEYER, Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie (Math. Annalen, t. XVII, 1880).
