

ROZDZIAŁ XVI.

CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RUCHU.

168. CAŁKOWANIE RÓWNAŃ HAMILTON'A. W tym rozdziale ograniczymy się do przypadków, w których siły przyłożone mają potencjał; te przypadki bowiem są najważniejsze dla poznania ruchów w przyrodzie i w dzisiejszym stanie nauki nadają się do badań ogólnych.

Okazaliśmy w rozdziale XIII, że równania różniczkowe ruchu układu swobodnego n punktów masyjnych przedstawiają się w postaci:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

gdzie U jest potencjałem układu sił przyłożonych. W przypadku układu nieswobodnego możemy $3n$ współrzędnych prostokątnych, między którymi zachodzi $3n - s$ związków, wyrazić przez s argumentów niezależnych q_i i czas t , a wtedy otrzymamy układ równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i}, \quad i=1, 2, \dots, s.$$

Potencjał U jest funkcją czasu t i argumentów q_i , a nie zawiera pochodnych \dot{q}_i ; energia kinetyczna T ma być wyrażona przez czas i pochodne \dot{q}_i , których jest funkcją algebraiczną rzędu 2-go, przyczem współczynniki są funkcjami argumentów q_i . Jeżeli równania, wyrażające ustrój układu, tudzież warunki ruchu, nie zawierają czasu wyraźnie, wtedy współrzędne prostokątne wyrażą się przez argumenty q_i bez pomocy czasu; T będzie przeto jednorodną funkcją rzędu 2-go pochodnych \dot{q}_i , a równania ruchu mogą być przywiedzione do kształtu równań Hamilton'a

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1, 2, \dots, s,$$

gdzie $H = T - U$, $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$. Przy stosowaniu tych równań należy pochodne q_i' wyrazić jako funkcje liniowe s nowych argumentów p_i , aby otrzymać $2s$ równań między $2s + 1$ zmiennymi t, q_i, p_i ; H jest więc funkcją tych $2s + 1$ zmiennych. Rozmaite zagadnienia kinetyki różnią się od siebie pod względem funkcji H i warunkami początkowymi. Jeżeli potencjał nie zawiera czasu wyraźnie, wtedy H jest funkcją wyraźną samych tylko argumentów q_i, p_i , przyczem zachodzi zasada zachowania energii.

Równania ruchu układu swobodnego mogą być także przywiedzione do postaci Hamilton'a. W tym celu oznaczmy pochodne spółrzędnych x_i, y_i, z_i względem t przez x_i', y_i', z_i' , przyjmijmy $m_i x_i' = \xi_i$, $m_i y_i' = \eta_i$, $m_i z_i' = \zeta_i$, i określmy ruch przez zmienne $x_i, y_i, z_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$. Równania ruchu będą wtedy

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\xi_i}{m_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\eta_i}{m_i}, \quad \frac{dz_i}{dt} = \frac{\zeta_i}{m_i}, \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned}$$

Mamy tu $2T = \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \Sigma \frac{1}{m_i} (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)$; ponieważ zaś

$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} = \frac{\xi_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}$, $\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, przeto otrzymamy

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \\ \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & \frac{d\zeta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i} \end{cases}$$

jako żądany kształt Hamilton'a $6n$ równań między $6n + 1$ zmiennymi $t, x_i, y_i, z_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$. Okazuje się więc, że przy całkowaniu równań różniczkowych ruchu możemy ograniczyć się do kształtu Hamilton'a tych równań jako postaci typowej, do której te równania w przypadku istnienia potencjału przywieść się dają. —

W rozdziale VI wyprowadziliśmy te równania z zasady Hamilton'a, według której wariacja całki $\int R dt$, gdzie $R = T + U$, wziętej między danymi krańcami czasu, jest równa zeru, jeżeli położenie układu dla tych wartości czasu jest dokładnie określone. W rozdziale XIII otrzymaliśmy równania Hamilton'a przez przekształcenie równania, wyrażającego zasadę d'Alembert'a, z czego wynika, że te równania służą do określenia ruchu także w tym przypadku, kiedy położenia układu materalnego dla dwu wartości czasu nie są z góry wiadome, lecz zachodzą inne warunki ruchu. W takich przypadkach wariacja powyższej całki nie będzie równa zeru, lecz będzie się składała z dwójakiego rodzaju wyrazów, z których jedno pojawiają się pod znakiem całkowania, a pozostałe są w postaci rozwiniętej. Bliższe zbadanie tej wary-

jacyi według wskazówek Hamilton'a i Jacobi'ego, prowadzi do ogólnej metody całkowania równań ruchu.

169. Wyraziwszy T przez t, q_i, \dot{q}_i , a U przez t i q_i , przyjmijmy $R = T + U$; wtedy R będzie funkcją $2s + 1$ zmiennych t, q_i, \dot{q}_i . Kładąc nadto $V = \int_{t_0}^t R dt$, weźmy wariację tego równania,

$$\delta V = \int_{t_0}^t \delta R \cdot dt;$$

tu zmienna niezależna t nie doznaje żadnej zmiany. Obliczywszy δR według art. 138-go, mieć będziemy

$$(1) \quad \delta V = \Sigma \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial R}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt;$$

a ponieważ $\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, przeto wyraz pod znakiem całkowania jest równy zeru na mocy równań Lagrange'a; biorąc zatem wariacje ze względu na tory, opisywane przez punkty układu, stosownie do zachodzących warunków, otrzymamy

$$(2) \quad \delta V = \Sigma \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Ponieważ jednak $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$, przeto

$$(3) \quad \delta V = \Sigma \int_{t_0}^t p_i \delta \dot{q}_i = \Sigma p_i \delta q_i - \Sigma p_i^0 \delta q_i^0,$$

gdzie $p_i^0, \delta q_i^0$ oznaczają wartości p_i i δq_i dla $t = t_0$. Ostatnie równanie wyznacza wariację całki V przy jakichkolwiek warunkach danych dla t_0 i t ; gdyby położenia krańcowe układu były wiadome dla t_0 i t , otrzymalibyśmy $\delta V = 0$, jak tego wymaga zasada Hamilton'a. Równania Lagrange'a, które możemy napisać w kształcie

$$(4) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial q_i}, \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i},$$

stanowią układ $2s$ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 1-go między $2s + 1$ zmiennymi q_i, p_i, t . Rozwiązania zupełne tego układu pozwalają zmienne q_i, p_i wyrazić jako funkcje argumentu t i $2s$ stałych dowolnych, które można tak wyznaczyć, iżby stało się zadość danym warunkom dla t_0 i t . Z $2s$ równań, służących do obliczenia tych stałych, możemy te stałe

wyrazić przez $2s$ wartości początkowych p_i^0, q_i^0 zmiennych p_i, q_i dla $t = t_0$, a następnie możemy wyrazić p_i, p_i^0 przez q_i i q_i^0 . Podstawiając wyrażenia p_i, p_i^0 w V , wyrazimy V jako funkcję $2s+1$ zmiennych q_i, q_i^0, t , a biorąc wariację tej funkcji, tym sposobem wyrażonej, przy stałym t , otrzymamy

$$(5) \quad \delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0.$$

To równanie określa właściwie wariację funkcji V . Wyznaczywszy wyrażenia p_i, p_i^0 z rozwiązań zupełnych równań ruchu, i biorąc następnie różniczki δ wielkości q_i, q_i^0 , obliczamy nieskończenie małą zmianę, której funkcja V doznaje, jeżeli nieskończenie mało zmieniamy warunki, które dla ruchu układu zachodzić mają dla t_0 i t , przyczem siły działają w każdym punkcie według prawa, określonego przez potencjał U .

Ponieważ w równaniach (3) i (5) wariacje δq_i i δq_i^0 są od siebie niezależne, przeto współczynniki tej samej wariacji są sobie równe, a to prowadzi do $2s$ równań

$$(6) \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0; \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Mamy $R = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$, gdzie $\frac{\partial V}{\partial t}$ oznaczają pochodną względem wyraźnego t , a V wyrażamy jako funkcję wielkości t, q_i, q_i^0 , z których ostatnie zastępują stałe całkowania. Wstawiając wartości, otrzymamy

$$(7) \quad R = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q_i'.$$

Z art. 139-go wiadomo, że w przypadku, gdy warunki nie zawierają czasu wyraźnie, będzie $2T = \sum p_i q_i'$; otrzymamy więc

$$\sum p_i q_i' - R = 2T - (T + U) = T - U = H,$$

możemy zatem równanie (7) napisać

$$(8) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0.$$

Zważmy, że H jest funkcją $2s+1$ zmiennych t, q_i, p_i , co przy uwzględnieniu 1-go równania (6) możemy tak napisać:

$$(9) \quad H = H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s}\right);$$

wtedy z (8) otrzymamy równanie następujące:

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s}\right) = 0.$$

Funkcja $V = \int_{t_0}^t R \cdot dt = \int_{t_0}^t (T + U) dt$ czyni zadość temu równaniu, podanemu przez Hamilton'a. Jestto równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go

między $(s+2)$ -ma zmiennymi t, q_1, \dots, q_s, V , z których V jest zmienną zależną, a t, q_1, \dots, q_s są zmiennymi niezależnymi; powyższe równanie nie zawiera jednak zmiennej zależnej wyraźnie. Nazwiemy je krótko równaniem Hamilton'a. Funkcja V zawiera w sobie tylko s stałych q_i^0 , a rozwiązanie zupełne równania (10) powinno zawierać $s+1$ stałych, ponieważ mamy $s+1$ zmiennych niezależnych; aby przeto funkcja V przedstawiała istotnie rozwiązanie zupełne tego równania, należy dodać jedną stałą. Mając rozwiązanie zupełne równania (10), różniczkujemy V cząstkowo względem q_i i q_i^0 ; otrzymamy według (6) $2s$ równań całkowych ruchu. Z pierwszych s równań (6) wyznaczmy p_i , a zatem q_i' , a stąd prędkość każdego punktu układu; z następnych s równań $\frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0$, w których p_i^0, q_i^0 oznaczają stałe, możemy

obliczyć q_i w funkcji czasu t i $2s$ stałych p_i^0, q_i^0 , a stąd spórzędne każdego punktu w funkcji czasu i warunków początkowych. Układ (6) jest więc układem pierwszych i drugich równań całkowych podanego zagadnienia kinetycznego, a drugi układ (6) przedstawia równania całkowe w znaczeniu ścisłym. Ponieważ w przypadku, gdy warunki ruchu nie zależą wyraźnie od czasu, równania Lagrange'a i Hamilton'a są równoważne, przeto mamy następujące twierdzenie główne:

Aby scałkować układ równań ruchu Hamilton'a

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

w których H jest funkcją $2s+1$ zmiennych t, q_i, p_i , należy w funkcji H przyjąć

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \dots, p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s},$$

i znaleźć rozwiązanie zupełne równania różniczkowego cząstkowego rzędu 1-go

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_s, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s}\right) = 0.$$

Jeżeli $V = \text{stała} + F(t, q_1, \dots, q_s, q_1^0, \dots, q_s^0)$ jest tym rozwiązaniem zupełnym, w którym q_1^0, \dots, q_s^0 oznaczają dane wartości zmiennych q_i dla $t = t_0$, natenczas równania

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1^0} = -p_1^0, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s^0} = -p_s^0,$$

zawierające $2s$ stałych q_i^0, p_i^0 , przedstawiają równania całkowe danego układu równań różniczkowych ruchu.

To twierdzenie można uogólnić i okazać, że, jeżeli $V = \text{stała} + F(t, q_1, q_2, \dots, q_s, c_1, c_2, \dots, c_s)$, gdzie c_1, \dots, c_s oznaczają stałe, nie mające jednak znaczenia wartości argumentów q_1, \dots, q_s dla $t = t_0$, jest rozwiązaniem zupełnym równania Hamilton'a $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$, natenczas równania:

$$(11) \quad \frac{\partial V}{\partial c_1} = \gamma_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial c_s} = \gamma_s; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s,$$

w których $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ są stałe dowolne, przedstawiają także równania całkowite układu równań różniczkowych Hamilton'a. Jakoż mamy:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt},$$

a zatem według (11)

$$(12) \quad \frac{dV}{dt} = -H + p_1 \frac{dq_1}{dt} + \dots + p_s \frac{dq_s}{dt}.$$

Niech w tej pochodnej stałe c_1, \dots, c_s doznają nieskończenie małych wariacji dowolnych $\delta c_1, \dots, \delta c_s$, to:

$$\delta \frac{dV}{dt} = -\delta H + p_1 \delta \frac{dq_1}{dt} + \dots + p_s \delta \frac{dq_s}{dt} + \frac{dq_1}{dt} \delta p_1 + \dots + \frac{dq_s}{dt} \delta p_s,$$

czyli rozwijając:

$$(13) \quad \delta \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \delta q_1 - \dots - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_1} \delta p_1 - \dots - \frac{\partial H}{\partial p_s} \delta p_s + \\ + p_1 \delta \frac{dq_1}{dt} + \dots + p_s \delta \frac{dq_s}{dt} + \frac{dq_1}{dt} \delta p_1 + \dots + \frac{dq_s}{dt} \delta p_s.$$

Wskutek nieskończenie małych zmian stałych c_i zmieni się V o δV , przyczym będzie:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial V}{\partial c_1} \delta c_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial c_s} \delta c_s,$$

czyli według (11):

$$(14) \quad \delta V = p_1 \delta q_1 + \dots + p_s \delta q_s + \gamma_1 \delta c_1 + \dots + \gamma_s \delta c_s.$$

Różniczkując to równanie względem t , otrzymamy:

$$(15) \quad \frac{d\delta V}{dt} = p_1 \delta \frac{dq_1}{dt} + \dots + p_s \delta \frac{dq_s}{dt} + \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 + \dots + \frac{dp_s}{dt} \delta q_s.$$

Ponieważ $\delta \frac{dV}{dt} = \frac{d\delta V}{dt}$, przeto z (13) i (15) wynika:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1} \delta q_1 - \dots - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_1} \delta p_1 - \dots - \frac{\partial H}{\partial p_s} \delta p_s = \\ = -\frac{dq_1}{dt} \delta p_1 - \dots - \frac{dq_s}{dt} \delta p_s + \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 + \dots + \frac{dp_s}{dt} \delta q_s.$$

Wariacje $\delta q_i, \delta p_i$ są wzajemnie niezależne; ostatnie równanie jest przeto równoważne układowi równań:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

który jest właśnie układem Hamilton'a równań różniczkowych ruchu. Mamy zatem twierdzenie ogólniejsze od poprzedniego: *Aby scałkować układ równań ruchu Hamilton'a, należy w funkcji H położyć $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$, i znaleźć rozwiązanie zupełne równania Hamilton'a*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_s, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s}\right) = 0.$$

Jeżeli $V = \text{stała} + F(t, q_1, \dots, q_s, c_1, \dots, c_s)$, gdzie c_i są stałe dowolne, jest tym rozwiązaniem zupełnym, natenczas równania:

$$(16) \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s; \frac{\partial V}{\partial c_1} = \gamma_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial c_s} = \gamma_s,$$

w których $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ oznaczają nowe stałe dowolne, przedstawiają równania całkowe danego układu Hamilton'a. Drugi układ równań (16) daje całki równań ruchu w znaczeniu ściślejszém t. z. całki drugie tych równań.

Niech potencjał U nie zawiera czasu wyraźnie, a więc niech zachodzi zasada zachowania energii. W tym przypadku H nie zawiera zmiennej t , równanie Hamilton'a będzie więc:

$$(17) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s}\right) = 0,$$

a zasada zachowania energii wyrazi się przez równanie $H = h$, gdzie h oznacza stałą. Równanie (17) możemy przeto napisać: $\frac{\partial V}{\partial t} = -h$. Wprowadźmy nową zmienną W , nie zawierającą czasu wyraźnie, przez podstawienie:

$$(18) \quad V = W - ht, \quad W = V + ht,$$

to $\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$, a zatem równanie Hamilton'a, wyrażające w tym przypadku zasadę energii, będzie:

$$(19) \quad H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = h.$$

Całki pierwsze równań ruchu otrzymamy z układu równań:

$$(20) \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s} = p_s,$$

w którym W jest rozwiązaniem zupełnem równania (19), zawierającém stałą h , tudzież $s - 1$ stałych c_1, \dots, c_{s-1} i nadto pewną stałą dodaną, a zatem:

$$(21) \quad W = \text{stała} + \Phi(q_1, \dots, q_s, h, c_1, c_2, \dots, c_{s-1}).$$

Całki 2-gie równań ruchu wynikają z układu równań:

$$(22) \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \tau, \quad \frac{\partial V}{\partial c_1} = \gamma_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial c_{s-1}} = \gamma_{s-1},$$

gdzie $\tau, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}$ oznaczają stałe dowolne. Możemy te całki wprost obliczyć z funkcji W ; jakoż mamy $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial W}{\partial h} - t, \frac{\partial W}{\partial c_i} = \frac{\partial V}{\partial c_i}$, z czego się okazuje, że całki 2-gie równań ruchu można otrzymać z układu równań

$$(23) \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial W}{\partial c_1} = \gamma_1, \dots, \frac{\partial W}{\partial c_{s-1}} = \gamma_{s-1}.$$

170. Zastanowimy się nad rozwiązaniem równania Hamilton'a tylko w przypadku, gdy ruch jest określony przez dwa argumenty q_1, q_2 ; szczegółów jest ono traktowane w dziełach specjalnych o całkowaniu równań cząstkowych rzędu 1-go. *)

Niech więc ruch będzie określony przez dwa argumenty i niech zasada energii zachodzi; wtedy równanie Hamilton'a możemy napisać w postaci

$$(1) \quad \Psi \left(q_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) = 0,$$

$$\text{a kładąc } p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2},$$

$$(2) \quad \Psi(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0.$$

Z określenia zmiennych p_1, p_2 wynika, że w tym przypadku będzie

$$(3) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} dq_2 = p_1 dq_1 + p_2 dq_2;$$

jeżeli przeto równanie (2) rozwiążemy względem p_2 , $p_2 = \varphi(q_1, q_2, p_1)$, i podstawimy to wyrażenie w równaniu

$$(4) \quad dV = p_1 dq_1 + \varphi(q_1, q_2, p_1) dq_2,$$

to zadanie nasze polegać będzie właściwie na tym, aby p_1 tak wyznaczyć, iżby prawa strona ostatniego równania stała się różniczką zupełną. Wyznaczywszy p_1 odpowiednio do tego warunku, jako funkcją argumentów q_1, q_2 i jednej stałej dowolnej c_1 , a zatym $p_1 = \psi(q_1, q_2, c_1)$, podstawmy to wyrażenie w (4); otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne, którego całka V będzie zawierała dwie stałe c_1, c_2 . Ta całka więc przedstawia rozwiązanie zupełne równania (1). Aby $p_1 dq_1 + \varphi dq_2$ było różniczką zupełną, potrzeba, aby

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1},$$

a ponieważ $\frac{\partial p_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1}$, przeto z powyższego warunku wynika

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = 0.$$

*) Ob. *Wykład nauki o równaniach różniczkowych* przez Wł. Zajączkowskiego, Paryż, 1877, stron. 547 — 665.

Kładąc w tym równaniu wartości pochodnych cząstkowych wiadomej funkcji φ względem p_1 i q_1 , otrzymamy dla p_1 równanie liniowe i cząstkowe rzędu 1-go. Okazuje się więc, że całkowanie równania (1) sprowadza się do całkowania równania liniowego rzędu 1-go o pochodnych cząstkowych, a następnie do całkowania równania zwyczajnego.

Przedstawmy sobie, że już otrzymaliśmy równanie szukane $p_1 = \psi(q_1, q_2, c_1)$ i że je rozwiązaliśmy względem stałej c_1 ; niech $f(q_1, q_2, p_1) = c_1$ będzie tym rozwiązaniem, wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = 0;$$

z pierwotnego równania $\Psi = 0$ wynika nadto:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_1} = 0;$$

z tych więc 4-ch równań otrzymamy

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1} = -\frac{\partial f}{\partial q_1} : \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial \Psi}{\partial p_1} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2}.$$

Podstawiając te wartości w (5), mieć będziemy

$$(6) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0,$$

co przedstawia równanie cząstkowe rzędu 1-go i liniowe, określające f jako funkcję zmiennych q_1, q_2, p_1 . Wyznaczając f z ostatniego równania, przyjmijmy $f(q_1, q_2, p_1) = c_1$, gdzie c_1 jest stałą dowolną, i z tego równania, tudzież z pierwotnego $\Psi(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0$, obliczmy p_1 i p_2 . Obliczone wartości podstawmy w wyrażeniu $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$; wówczas ono stanie się różniczką zupełną. Wykonawszy na koniec całkowanie, mieć będziemy $V = c_2 + \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2)$. Tym sposobem wypadnie scałkować tylko jedno równanie cząstkowe rzędu 1-go i liniowe, tudzież wyznaczyć całkę różniczkową, zamiast, jak było pierwotnie, całkować równanie różniczkowe zwyczajne.

Aby rozwiązać równanie (6), należy, jak wiadomo, scałkować następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(7) \quad \frac{dq_1}{\frac{\partial \Psi}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\frac{\partial \Psi}{\partial p_2}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial \Psi}{\partial q_1}},$$

a ponieważ wystarcza mieć rozwiązanie f bez stałej, przeto dostatecznie będzie, gdy podamy jedną całkę układu (7). Aby ten układ uczynić symetrycznym, a przez to ogólniej przydatnym, różniczkujmy równanie (2) względem q_i, p_i ; mieć będziemy

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} dp_2 = 0.$$

Ponieważ według (7), $\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} dp_1 = 0$, przeto z ostatniego równania mamy $\frac{\partial \Psi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} dp_2 = 0$; otrzymamy więc według (7) następujący układ symetryczny:

$$(8) \quad \frac{\frac{dq_1}{\partial \Psi}}{\frac{\partial p_1}{\partial \Psi}} = \frac{\frac{dq_2}{\partial \Psi}}{\frac{\partial p_2}{\partial \Psi}} = \frac{\frac{dp_1}{\partial \Psi}}{-\frac{\partial q_1}{\partial \Psi}} = \frac{\frac{dp_2}{\partial \Psi}}{-\frac{\partial q_2}{\partial \Psi}},$$

który także posłużyć może do rozwiązania danego równania. Jakoż możemy szukane równanie $f(q_1, q_2, p_1) = c_1$ uważać za wynik rugowania zmiennej p_2 z równania pierwotnego $\Psi = 0$ i z pewnego równania $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = c_1$, tak, że gdy podstawimy $p_2 = \varphi$ w ostatnim równaniu będzie tożsamościowo

$$(9) \quad F(q_1, q_2, p_1, \varphi) = f(q_1, q_2, p_1).$$

Funkcja więc F , przez to równanie określona, czyni zadość równaniu (6). Ponieważ

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{\partial F}{\partial q_2} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} = \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_1},$$

przeto wstawiając te wartości w (6), otrzymamy dla obliczenia funkcji F następujące równanie o pochodnych cząstkowych:

$$(10) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \right) = 0.$$

Z tożsamości $\Psi(q_1, q_2, p_1, \varphi) = 0$ wynika

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_2} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = -\frac{\partial \Psi}{\partial p_1} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2};$$

wstawiając te wartości w (10), mieć będziemy następujące równanie cząstkowe dla F jako funkcji zmiennych q_1, q_2, p_1, p_2 :

$$(11) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_2} = 0,$$

z którego okazuje się, że $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = c_1$ jest całką układu równań różniczkowych zwyczajnych (8). Z równań więc $F = c_1$ i $\Psi = 0$ otrzymamy też same wartości na p_1 i p_2 , co z równań $f = c_1$ i $\Psi = 0$. Ponieważ widocznie $\Psi = 0$ jest także całką układu (8), która przez dodanie stałej dowolnej do funkcji Ψ może być zamieniona na całkę ogólną, przeto otrzymujemy następujące twierdzenie:

Aby wynaleść rozwiązanie zupełne V równania różniczkowego cząstkowego

$$\Psi \left(q_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) = 0,$$

należy w nim przyjąć $p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}$, $p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}$ i znaleźć jedną całkę układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} : -\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial \Psi}{\partial q_2}.$$

Jeżeli $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = c_1$ jest tą całką, to, wyznaczwszy z niej i z całki $\Psi(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0$ zmienne p_1, p_2 jako funkcje argumentów q_1, q_2 , otrzymamy przez całkowanie różniczeki

$$V = c_2 + \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2).$$

Ponieważ założyliśmy, że zachodzi zasada energii, wyrażona przez równanie $H - h = 0$, przeto kładąc $V = W - ht$, otrzymamy

$$\Psi \equiv H\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) - h = 0,$$

co przedstawia już jedną całkę układu (8), będącego układem kanonicznym równań ruchu. Ten układ, który w przypadku dwu argumentów q_1 i q_2 jest

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

możemy także napisać w postaci

$$dt : dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = 1 : \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} : \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} : -\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial \Psi}{\partial q_2},$$

która wychodzi na jedno ze schematem (8). Jeżeli zatem oprócz całki $\Psi = 0$, zawierającej jedną stałą h , znamy jeszcze drugą całkę, nie zawierającą czasu, np. $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = c$, to z $\Psi = 0$ i $F = c$ należy obliczyć p_1, p_2 w funkcji q_1, q_2 i wyznaczyć W zapomocą całkowania różniczeki, z którego wynika

$$W = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2).$$

Wartości na p_1, p_2 wynikają z całek pierwszych równań ruchu, a z wiadomych równań

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial W}{\partial c} = \gamma,$$

otrzymamy całki drugie tych równań. Podstawiając wartości, otrzymujemy całki drugie

$$(12) \quad \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial h} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h} dq_2 \right) = t + \tau, \quad \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial c} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial c} dq_2 \right) = \gamma.$$

Powyższa metoda, podana przez Jacobiego, a polegająca na wyznaczaniu całek drugich przez całkowanie różniczek, daje się zastosować w przypad-

ku, gdy ruch jest określony przez ilekolwiek argumentów q_i . W tym przypadku wystarczy znaleźć $s-1$ równań, które łącznie z wiadomym równaniem $H = h$ wyrażają, że $dV = p_1 dq_1 + \dots + p_s dq_s$ jest różniczką zupełną. Niech

$$(13) \quad H = h, \quad H_1 = c_1, \dots, H_{s-1} = c_{s-1}$$

będą owymi równaniami, rozwiązanymi względem stałych dowolnych. Obliczmy z tych równań zmienne p_1, \dots, p_s jako funkcje argumentów q_1, \dots, q_s ; otrzymamy naprzód całki pierwsze równań ruchu, a następnie przez całkowanie różniczki możemy obliczyć funkcję $V = \int (p_1 dq_1 + \dots + p_s dq_s)$, przedstawiającą rozwiązanie zupełne równania Hamilton'a $H = h$, w którym podstawiono $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$. Gdy podstawimy wartości na p_i w równaniu $H = h$, otrzymamy tożsamość, którą możemy różniczkować czystkowo względem każdej stałej c_i , ($i = 1, 2, \dots, s-1$). Czyniąc to, otrzymamy $s-1$ równań następujących:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial c_i} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial c_i} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial c_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s-1),$$

z których po wstawieniu wartości $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ wynika

$$\frac{\partial p_1}{\partial c_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial c_i} dq_2 + \dots + \frac{\partial p_s}{\partial c_i} dq_s = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s-1).$$

Całkując otrzymamy układ:

$$(14) \quad \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial c_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial c_i} dq_2 + \dots + \frac{\partial p_s}{\partial c_i} dq_s \right) = \gamma_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s-1),$$

który wyznacza $s-1$ całek drugich równań ruchu. Aby otrzymać całkę s -tą, bierzmy pochodną powyższej tożsamości względem h , wówczas

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial h} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial h} = 1, \text{ czyli}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial h} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h} dq_2 + \dots + \frac{\partial p_s}{\partial h} dq_s = dt, \text{ a stąd wynika}$$

$$(15) \quad \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial h} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h} dq_2 + \dots + \frac{\partial p_s}{\partial h} dq_s \right) = t + \tau$$

jako szukana całka s -ta.

171. Między lewymi stronami równań (13) art. poprzedzającego, rozwiązanych względem stałych dowolnych, z którychto równań zmienne p_i dają się tak obliczyć jako funkcje argumentów q_i , że $dV = p_1 dq_1 + \dots + p_s dq_s$ staje się różniczką zupełną, zachodzą pewne związki, które tu podamy. Gdy



podstawimy $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ w równaniu $H_i = c_i$, otrzymamy tożsamość, którą możemy różniczkować względem dowolnego argumentu q_l . Czyniąc to, otrzymamy tożsamościowo

$$(1) \quad \frac{\partial H_i}{\partial q_l} + \sum_{r=1}^{r=s} \frac{\partial H_i}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial p_r}{\partial q_l} = 0.$$

Różniczkujemy $H_k = c_k$ względem q_l , otrzymamy podobne wyrażenie

$$(2) \quad \frac{\partial H_k}{\partial q_l} + \sum_{r=1}^{r=s} \frac{\partial H_k}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial p_r}{\partial q_l} = 0.$$

Pomnóżmy (1) przez $\frac{\partial H_k}{\partial p_l}$, (2) przez $-\frac{\partial H_i}{\partial p_l}$, dodajmy iloczyny, weźmy następnie ich sumę od $l=1$ do $l=s$, i zważmy, że obadwa wskaźniki r i l przybierają wartości całkowite od 1 do s ; otrzymaną tożsamość możemy tak napisać:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial H_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H_i}{\partial p_l} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial q_l} \right) + \sum_{i=1}^{i=s} \sum_{r=1}^{r=s} \frac{\partial H_i}{\partial p_l} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial p_r} \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q_r} \right) = 0.$$

Ponieważ z równań (13) według założenia można p_i tak wyrazić przez argumenty q_i , że dV staje się różniczką zupełną, przeto będzie $\frac{\partial p_r}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial q_r}$, a więc suma podwójna w (3) jest równa zeru. Gdy przeto przyjmiemy dla krótkości

$$(4) \quad [H_i, H_k] = \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial H_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H_i}{\partial p_l} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial q_l} \right),$$

otrzymamy tożsamościowo

$$(5) \quad [H_i, H_k] = 0,$$

jakikolwiek wartości z szeregu liczb $0, 1, 2, \dots, s-1$ nadamy wskaźnikom i, k .

Nawzajem możemy okazać, że gdy lewe strony równań (13), z których można wyrazić p_i w funkcji q_i , zadość czynią warunkowi (5), jakiegokolwiek wartości ze wskazanych liczb nadamy wskaźnikom i, k , natenczas obliczone z tych równań wartości p_i sprawią, iż $dV = p_1 dq_1 + \dots + p_s dq_s$ będzie różniczką zupełną. Jakoż postępując z funkcjami H_i, H_k opisanym wyżej sposobem, otrzymamy, według (3),

$$[H_i, H_k] + \sum_{i=1}^{i=s} \sum_{r=1}^{r=s} \frac{\partial H_i}{\partial p_l} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial p_r} \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q_r} \right) = 0.$$

Ponieważ $[H_i, H_k] = 0$, a wyrazy w sumie podwójnej, w których $r=l$, są równe zeru, przeto porządkując pozostałe wyrazy odpowiednio po dwa, możemy ostatnie równanie tak napisać

$$(6) \quad \Sigma \Sigma \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_l} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial p_r} - \frac{\partial H_i}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial H_k}{\partial p_l} \right) \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q_r} \right) = 0,$$

przyczym w sumie podwójnej mają być wzięte różne wartości wskaźników r i l z układu liczb $1, 2, \dots, s$. Biorąc wszystkie kombinacje różnych wskaźników i, k z powyższego układu liczb, otrzymamy $\frac{s(s-1)}{2}$ równań (6), zawierających linijowo $\frac{s(s-1)}{2}$ wyrazów $\frac{\partial p_r}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_r}$. Wyznacznik tego układu równań linijowych jest wyznacznikiem funkcyjnym

$$\frac{\partial (H, H_1, \dots, H_{s-1})}{\partial (p_1, p_2, \dots, p_s)},$$

rozwiniętym według wyznaczników częściowych stopnia 2-go; a ponieważ z założenia równania (13) są od siebie niezależne, i z tego powodu pozwalają zmienne p_i obliczyć jako funkcje argumentów q_i , przeto ten wyznacznik nie jest tożsamościowo równy zeru. Z tego wynika, że układ (6) prowadzi do rozwiązań $\frac{\partial p_r}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_r} = 0$, że przeto wartości na p_i , obliczone z (13), sprawiają, iż dV jest różniczką zupełną, c. n. d.

Założmy, że znamy s całek układu kanonicznego, mianowicie:

$$(7) \quad \varphi = c, \quad \varphi_1 = c_1, \dots, \varphi_{s-1} = c_{s-1},$$

zadłość czyniących $\frac{s(s-1)}{2}$ tożsamościom $[\varphi_i, \varphi_k] = 0$, przyczym H zawiera t wyraźnie, a zatem zasada zachowania energii nie zachodzi. Wyrażmy z całek (7) zmienne p_i przez q_i i t ; można okazać, że jeżeli podstawimy wartości obliczone w wyrażeniu $dV = -H' dt + p_1 dq_1 + \dots + p_s dq_s$, natenczas prawa strona tego wyrażenia stanie się różniczką zupełną. Wielkość H' oznacza to, na co przechodzi H , jeżeli w nim zamiast p_i podstawimy wartości, obliczone z (7). Różniczkując H' względem któregośkolwiek q_i , otrzymamy

$$\frac{\partial H'}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} + \frac{dq_i}{dt} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial q_i} + \dots + \frac{dq_s}{dt} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial q_i},$$

a ponieważ, jak z dowodzenia poprzedzającego wiadomo, gdy mają miejsce równania (7), to $p_1 dq_1 + \dots + p_s dq_s$ jest różniczką zupełną, przeto $\frac{\partial p_r}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_r}$, więc:

$$\frac{\partial H'}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_s} \cdot \frac{dq_s}{dt}.$$

Ponieważ $\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_s} \cdot \frac{dq_s}{dt}$; przeto wstawivszy tę wartość w poprzednim równaniu, otrzymamy

$$(8) \quad \frac{\partial H'}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial t};$$

a ponieważ dalej $\frac{\partial p_r}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_r}$, przeto z równania (8) okazuje się, że $-H' dt +$

Różniczkujemy następnie cząstkowo względem a_k tożsamości

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = \alpha_1, \frac{\partial V}{\partial a_2} = \alpha_2, \dots, \frac{\partial V}{\partial a_s} = \alpha_s,$$

w których wszystkie q_i wyrażono sposobem podanym; wówczas będzie

$$(5) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial a_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial a_k} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_s} \cdot \frac{\partial q_s}{\partial a_k} = 0, \\ & \frac{\partial^2 V}{\partial a_s \partial a_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_s \partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial a_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_s \partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial a_k} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_s \partial q_s} \cdot \frac{\partial q_s}{\partial a_k} = 0. \end{aligned}$$

Pomnóżmy równania (3) odpowiednio przez $\frac{\partial q_1}{\partial a_k}, \frac{\partial q_2}{\partial a_k}, \dots, \frac{\partial q_s}{\partial a_k}$, i dodajmy iloczyny; uwzględniając równania (5) otrzymamy

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_i} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial a_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_i} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial a_k} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_i} \cdot \frac{\partial q_s}{\partial a_k} = \\ & = \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_k} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_s \partial a_k} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Gdy dodamy obustronnie do tego równania $\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial a_k} = \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_i}$, to otrzymane równanie możemy tak napisać:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial V}{\partial a_k} \right), \text{ czyli } \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i},$$

co dowodzi prawdziwości 1-go równania (1). Różniczkujemy podobnie równania (2) względem p_i ; wówczas będzie

$$(6) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial a_s} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial p_i} = 0, \\ & \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial a_s} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial p_i} = 1, \\ & \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial a_s} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial p_i} = 0. \end{aligned}$$

Pomnóżmy te równania odpowiednio przez $\frac{\partial q_1}{\partial a_k}, \frac{\partial q_2}{\partial a_k}, \dots, \frac{\partial q_s}{\partial a_k}$, dodajmy iloczyny i uwzględnijmy znowu równanie (5); otrzymamy $\frac{\partial q_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}$. Różniczkując równania (4) względem α_k , a (2) względem q_i , następnie zaś względem p_i , i postępując podobnym, jak powyżej, sposobem, można dowieść prawdziwości dwu ostatnich równań Jacobi'ego (1). —

Rozważmy teraz układ kanoniczny

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

i załóżmy, że znamy s jego całek,

$$(7) \quad \varphi = c, \quad \varphi_1 = c_1, \dots, \varphi_{s-1} = c_{s-1},$$

z których p_i dają się tak wyrazić jako funkcje q_i , że $dV = -H dt + p_1 dq_1 + \dots + p_s dq_s$ staje się różniczką zupełną. Funkcja V będzie wtedy rozwiązaniem zupełnym równania Hamilton'a $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$, w którym H zawiera także t wyraźnie, a całki, o które idzie, wynikają z dwu układów następujących:

$$(8) \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -H; \quad \frac{\partial V}{\partial c} = \gamma, \quad \frac{\partial V}{\partial c_1} = \gamma_1, \dots, \frac{\partial V}{\partial c_{s-1}} = \gamma_{s-1}.$$

Zastąpmy stałe c, c_1, \dots, c_{s-1} , znajdujące się po lewych stronach równań 2-go układu (8), funkcjami $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-1}$, i oznaczmy przez $\varphi', \varphi_1', \dots, \varphi_{s-1}'$ to, na co, wskutek tego, przechodzą owe lewe strony; wówczas 2-gi układ (8) możemy tak napisać:

$$(9) \quad \varphi' = \gamma, \quad \varphi_1' = \gamma_1, \dots, \varphi_{s-1}' = \gamma_{s-1}.$$

Jeżeli funkcje φ_i , stanowiące strony lewe równań (7), zastąpimy literami c_i , a funkcje φ_i' po stronach lewych równań (9), literami γ_i , to wskutek obudwu układów (8) możemy c_i, γ_i wyrazić jako funkcje zmiennych p_i, q_i , a nawzajem p_i, q_i jako funkcje wielkości c_i, γ_i . Według wyprowadzonych poprzednio równań Jacobi'ego będzie

$$(10) \quad \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial c_k}, \quad \frac{\partial \gamma_k}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial c_k}; \quad \frac{\partial c_r}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k}, \quad \frac{\partial c_r}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_k}.$$

Mamy jednak

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r}{\partial c_k} &= \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial c_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial c_k} + \frac{\partial c_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial c_k} \right); \quad \frac{\partial c_r}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial c_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_k} + \frac{\partial c_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k} \right), \\ \frac{\partial \gamma_r}{\partial c_k} &= \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial c_k} + \frac{\partial \gamma_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial c_k} \right); \quad \frac{\partial \gamma_r}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_k} + \frac{\partial \gamma_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k} \right), \end{aligned}$$

a uwzględniając równania (10),

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c_r}{\partial c_k} &= \Sigma \left(-\frac{\partial c_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial p_i} + \frac{\partial c_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_i} \right) = [\gamma_k, c_r], \\ \frac{\partial c_r}{\partial \gamma_k} &= \Sigma \left(\frac{\partial c_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial c_k}{\partial p_i} - \frac{\partial c_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial c_k}{\partial q_i} \right) = [c_r, c_k], \\ \frac{\partial \gamma_r}{\partial c_k} &= \Sigma \left(-\frac{\partial \gamma_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \gamma_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_i} \right) = [\gamma_k, \gamma_r], \\ \frac{\partial \gamma_r}{\partial \gamma_k} &= \Sigma \left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial c_k}{\partial p_i} - \frac{\partial \gamma_r}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial c_k}{\partial q_i} \right) = [\gamma_r, c_k]. \end{aligned}$$

Ponieważ tożsamościowo $\frac{\partial c_r}{\partial \gamma_k} = 0$, $\frac{\partial \gamma_r}{\partial c_k} = 0$, i ponieważ dalej pochodne $\frac{\partial c_r}{\partial c_k}$, $\frac{\partial \gamma_r}{\partial \gamma_k}$ mają wartość zero dla różnych od siebie wskaźników r, k , a wartość 1 dla $r = k$, przeto z (11) otrzymamy następujące tożsamości:

$$[c_r, c_k] = 0, [\gamma_r, \gamma_k] = 0, [\gamma_k, c_r] = 0, [\gamma_r, c_r] = 1,$$

czyli, wstawivszy napowrót funkcje φ_i i φ'_i ,

$$(12) \quad [\varphi_r, \varphi_k] = 0, [\varphi'_r, \varphi'_k] = 0, [\varphi'_k, \varphi_r] = 0, [\varphi'_r, \varphi_r] = 1.$$

Powyższe tożsamości, podane przez Jacobi'ego, okazują, że całki równania Hamilton'a można podzielić na dwie gromady, według tego, czy ta funkcja, utworzona z pochodnych cząstkowych lewych stron tych całek względem q_i i p_i , którą oznaczyliśmy symbolicznie dwiema klamrami, jest tożsamościowo równa zeru, czy też jej wartość bezwzględna jest tożsamościowo równa jedności. Okazane wyżej własności tych całek posłużą do dokładnego zrozumienia pewnego ważnego twierdzenia, którym zakończymy rzecz o całkowaniu równań ruchu.

173. TWIERDZENIE POISSON'A I JACOBI'EGO. Przyjmijmy, że, gdy dane jest zagadnienie kinetyczne, do którego stosują się równania Hamilton'a, mamy już jakiegokolwiek dwie całki, to znamy dwie funkcje zmiennych q_i, p_i, t , które wskutek tych równań mają wartości stałe podczas ruchu,

$$(1) \quad \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = a_i, \quad \varphi_k(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = a_k.$$

Utworzywszy z φ_i, φ_k funkcję, w art. poprzedzającym rozważaną,

$$(2) \quad [\varphi_i, \varphi_k] = \sum_{r=1}^{r=s} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \right),$$

można okazać, że funkcja $[\varphi_i, \varphi_k]$ posiada wskutek równań ruchu także wartość stałą. Jakoż, różniczkując (2) względem t , otrzymamy

$$(3) \quad \frac{d}{dt} [\varphi_i, \varphi_k] = \sum_{r=1}^{r=s} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} \right) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \right) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_r} \right) \right\}.$$

Ponieważ $\varphi_i = a_i$, $\varphi_k = a_k$ są całkami równań ruchu, przeto $\frac{d\varphi_i}{dt} = 0$, $\frac{d\varphi_k}{dt} = 0$, czyli,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right) = 0,$$

a ponieważ $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, więc

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$