

ROZDZIAŁ X.

STATYKA UKŁADÓW MATERYJALNYCH.

102. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH. Nazywamy w dynamice układem materijalnym czyli układem fizycznym każdy zbiór punktów materijalnych, między których ruchami zachodzi pewna zależność; ciało zaś materjalne jest układem ciągłym punktów materijalnych. Między punktami układu istnieją pewne połączenia, których skutkiem jest właśnie zależność między ruchami tychże punktów; zamiast tych połączeń przyjmujemy niekiedy siły, działające między tymi punktami, o których to siłach z 3-go prawa dynamiki wiadomo (art. 66), że one pojawiają się zawsze po dwie, wzajemnie równe i wprost przeciwne. W tym znaczeniu mówimy np. o układzie słonecznym, zaliczając do niego te ciała niebieskie, których ruchy zależą według tego samego prawa od działania słońca i od wzajemnego działania tych ciał.

Jeżeli układ materjalny, mający pewne położenie, może przyjąć wszelkie inne położenia w przestrzeni, bez naruszenia połączeń między jego punktami, to zowiemy go układem swobodnym. W każdym innym przypadku zowiemy go układem nieswobodnym (art. 42).

Gdy przyłożymy do punktów układu materjalnego jakiekolwiek siły, natenczas zajdzie wogółności zmiana w ruchu każdego punktu, zależna od tych sił, tudzież od połączeń między punktami i od warunków, które dla oddzielnych punktów układu zachodzić mogą. Z praw zasadniczych dynamiki nie wynika jednak, aby zmiana ruchu układu wskutek przyłożenia sił zawsze nastąpić miała (art. 67); zachodzi tedy pytanie, jakie związki mają zachodzić między wielkościami, określającymi ustrój układu, a siłami przyłożonymi, żeby te siły nie wywołały żadnej zmiany w ruchu tego układu, czyli, żeby zaszła równowaga tychże sił przy wiadomych warunkach ich działania. Wyznaczenie tych związków i zastosowanie ich do zagadnień o równowadze sił, jest zadaniem statyki układów materjalnych.

Siły, przyłożone do układu materysjalnego, równoważą się, jeżeli one żadnemu z punktów układu nie udzielają przyspieszenia. To określenie miłości w sobie konieczne i wystarczające kryterysjum równowagi, jakimkolwiek byłby ustrój układu. Według 2-go prawa dynamiki, przyspieszenie, przez siłę wywołane, nie zależy od prędkości punktu, z czego wynika, że we wszystkich przypadkach, w których siły nie zależą od ruchu układu, otrzymamy warunki równowagi, przyjmując układ w jakimkolwiek ruchu, zgodnym z danymi połączeniami. Możemy więc układ przyjąć także w spoczynku, a wtenczas do równowagi potrzeba i wystarcza, żeby spoczynek trwał po przyłożeniu sił. Jednak w przypadkach, gdy należy uwzględniać siły, będące funkcjami prędkości punktu, jak np. opór środka, nie można oczywiście dochodzić równowagi tych sił, przyjmując układ w spoczynku. —

Niech będzie dany jakikolwiek (sztywny lub niesztynny) układ n punktów materysjalnych m_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), których spółrzędne prostokątne niech będą x_i, y_i, z_i , i do tych punktów niech będą przyłożone odpowiednio wiadome siły (X_i, Y_i, Z_i). Niech nadto między tymi punktami zachodzą wiadome połączenia, i niech będą dane warunki, które niezależnie od sił ciągle zachodzić mają. Przypuśćmy, że te połączenia i warunki dają się wyrazić analitycznie zapomocą równań między spółrzędnymi punktów. Ponieważ położenie n punktów jest określone przez $3n$ spółrzędnych tychże punktów, przeto ilość równań między spółrzędnymi jest mniejsza niż $3n$; inaczej byłoby położenie układu niezależne od sił. Niech $3n - s$ będzie ilością danych równań, które piszemy w postaci

$$(1) \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \dots, L_k = 0, \dots, L_{3n-s} = 0,$$

gdzie $L_k = F_k(x_1, y_1, z_1; \dots; x_i, y_i, z_i; \dots; x_n, y_n, z_n)$. Ponieważ z tych równań możemy obliczyć wartości $3n - s$ spółrzędnych bez względu na siły przyłożone, przeto zadanie nasze polega na wyznaczeniu związków między pozostałymi s spółrzędnymi a danymi siłami, zachodzących w przypadku równowagi. Z tych związków obliczymy s spółrzędnych, a równania (1) dadzą potem resztę $3n - s$ spółrzędnych i pozwolą wyznaczyć położenie każdego punktu układu w przypadku równowagi.

Okazaliśmy w dynamice punktu, że każdy związek między spółrzędnymi punktu może być zastąpiony przez pewną siłę o wielkości nieoznaczonej, której składowe są proporcjonalne względem pochodnych cząstkowych funkcji, wyrażającej ten związek, wziętych względem spółrzędnych tego punktu (art. 72). Przyłożywszy do punktu taką siłę, stosownie do każdego warunku, możemy ten punkt uważać za swobodny. Z téj ważnej zasady wynika, że gdy funkcja L_k zawiera spółrzędne punktu m_i , możemy warunek $L_k = 0$ zastąpić przez trzy siły nieoznaczone, $\lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x_i}$, $\lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial y_i}$, $\lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial z_i}$, o kierunkach osi x, y i z , a następnie już ów punkt należy uważać za swobodny. Postępując podobnie z innymi warunkami, otrzymamy następujące równania równowagi dla punktu m_i :

$$(2) \quad \begin{cases} X_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial x_i} = 0, \\ Y_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial y_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial y_i} = 0, \\ Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial z_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial z_i} = 0. \end{cases}$$

Każde z tych równań wyraża, że suma algebryczna sił w kierunku odpowiedniej osi współrzędnych jest równa zeru, jak dla punktu swobodnego być powinno. Powyższych równań będzie $3n$, a ponieważ one są konieczne i wystarczające dla równowagi, przeto po wyrugowaniu z nich współczynników nieoznaczonych λ_k otrzymamy s związków szukanych między współrzędnymi a danymi siłami. Wnosimy stąd, że ilość współczynników λ_k wynosi $3n - s$.

Układ (2) przedstawia $3n$ równań, które zawierają $3n$ niewiadomych współrzędnych x_i, y_i, z_i , tudzież $3n - s$ niewiadomych współczynników λ_k ; razem $6n - s$ niewiadomych. Ponieważ w układach (2) i (1) jest razem $6n - s$ równań, przeto ilość niewiadomych równa się ilości wszystkich równań, z czego wynika przedewszystkiem główne twierdzenie, że *dla układu masyjnego istnieje wogólności skończona ilość położeń równowagi, niebezpośrednio bliskich sobie.*

103. Aby rozpoznać położenia równowagi, należy z równań (2) wyrugować współczynniki λ_k . Do tego rugowania możemy użyć metody współczynników nieoznaczonych. Mnożąc równania dla punktu i -go odpowiednio przez współczynniki nieoznaczone ξ_i, η_i, ζ_i , czyniąc toż samo z równaniami, odnoszącymi się do innych punktów, i dodając owe równania stronami odpowiednimi, otrzymamy następujące równanie:

$$(1) \quad \begin{aligned} & X_i \xi_i + Y_i \eta_i + Z_i \zeta_i + \dots + X_i \xi_i + Y_i \eta_i + Z_i \zeta_i + \dots + X_n \xi_n + Y_n \eta_n + Z_n \zeta_n + \\ & + \lambda_1 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial L_1}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial L_1}{\partial z_1} \zeta_1 + \dots + \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial L_1}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial L_1}{\partial z_i} \zeta_i + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial L_1}{\partial x_n} \xi_n + \frac{\partial L_1}{\partial y_n} \eta_n + \frac{\partial L_1}{\partial z_n} \zeta_n \right) + \\ & + \dots + \\ & + \lambda_{3n-s} \left(\frac{\partial L_{3n-s}}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial z_1} \zeta_1 + \dots + \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial x_n} \xi_n + \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial y_n} \eta_n + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial z_n} \zeta_n \right) = 0. \end{aligned}$$

Współczynniki ξ_i, η_i, ζ_i możemy tak obrać, aby wielomiany, mnożące niewiadome λ_k , stawały się równymi zeru. Jakoż, nadajmy układowi nieskończenie mały ruch przygotowany, to znaczy taki ruch, iżby każdy punkt przyjął położenie nieskończenie bliskie, zgodne z danymi warunkami. Jeżeli $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ oznaczają odpowiednio przesunięcia przygotowane (art. 73) punktu m_i w kierunkach osi współrzędnych, to podstawiając $x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i$ w równaniu $L_k = 0$, rozwijając na szereg funkcję $L_k + \delta L_k$ według powyższych

przyrostów i opuszczając wyrazy rzędów wyższych niż 1-szy, otrzymamy $\delta L_k = 0$, czyli

$$(2) \quad \frac{\partial L_k}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial L_k}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial L_k}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial L_k}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial L_k}{\partial y_n} \delta y_n + \frac{\partial L_k}{\partial z_n} \delta z_n = 0.$$

Przesunięcia przygotowane zadość czynią $3n - s$ takim warunkom, które pozwalają wyznaczyć $3n - s$ tych przesunięć w funkcji s przesunięć pozostałych. Nadajmy współczynnikom ξ_i , η_i , ζ_i wartości powyższych przesunięć, przyjmijmy zatem w równaniu (1) $\xi_i = \delta x_i$, $\eta_i = \delta y_i$, $\zeta_i = \delta z_i$; wówczas z równań (2) znajdziemy, że czynnik niewiadomej λ_k jest równy zeru dla każdego k , otrzymamy więc z równania (1)

$$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + \dots + X_n \delta x_n + Y_n \delta y_n + Z_n \delta z_n = 0,$$

czyli

$$(3) \quad \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0,$$

jako związek, zachodzący w przypadku równowagi między siłami a przesunięciami przygotowanymi ich punktów przyłożenia. Ponieważ powyższy związek został otrzymany po wyrugowaniu współczynników λ_k , pojawiających się z powodu danych warunków, przeto ten związek wyraża zasadę ogólną dla równowagi układów materjalnych, jeżeli tylko warunki można wyrazić analitycznie przez współrzędne punktów.

Lewa strona równania ogólnego (3) jest funkcją jednorodną i liniową przesunięć przygotowanych tych punktów, do których siły są przyłożone, jest więc wogółności funkcją $3n$ przesunięć, między którymi zachodzi $3n - s$ związków liniowych (2). Wyrażając z tych związków $3n - s$ przesunięć przez s pozostałych, podstawmy te ich wyrażenia w równanie (3), a otrzymamy funkcją liniową i jednorodną s przesunięć dowolnych, która ma być równa zeru dla wszelkich wartości tych przesunięć. Z tego wynika, że współczynnik każdego z tych s przesunięć ma być równy zeru. Przyrównyując do zera każdy z tych współczynników, otrzymujemy szukane s związków między siłami a współrzędnymi w przypadku równowagi. Wyraziwszy z tych związków s współrzędnych, otrzymamy resztę współrzędnych z danych $3n - s$ warunków (1) art. 102-go.

Równanie (3) zachodzi również wtedy, kiedy równania warunkowe $L_k = 0$ zawierają czas wyraźnie, jeżeli tylko przesunięciom przygotowanym damy odpowiednią wartość. Jakoż, w tym przypadku będzie ogólnie

$$\delta L_k = \frac{\partial L_k}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L_k}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial L_k}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial L_k}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial L_k}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial L_k}{\partial y_n} \delta y_n + \frac{\partial L_k}{\partial z_n} \delta z_n.$$

Czynnik przy λ_k w równaniu (1) będzie równy zeru, gdy współczynniki ξ_i , η_i , ζ_i tak obierzemy, aby $\frac{\partial L_k}{\partial t} \delta t = 0$ dla każdego k . Ponieważ $\frac{\partial L_k}{\partial t}$ nie jest równe zeru, przeto należy przyjąć $\delta t = 0$, t. j. należy brać przesunięcia przygotowane przy niezmiennych wartościach czasu t . W tym przypadku nie oznaczają

te przesunięcia nieskończenie małych dróg oddzielnych punktów układu, lecz oznaczają tylko przyrosty ich współrzędnych, określone analitycznie przez równania warunkowe. Uważamy je wtenczas za waryjacje współrzędnych, odpowiadające stałej wartości argumentu t , podobnie, jak w rachunku waryjacyjnym obliczamy nieskończenie małe przyrosty zmiennych, nie zmieniając przytym argumentu.

Jeżeli równanie (3) zachodzi dla wszelkich przesunięć przygotowanych, natenczas siły będą w równowadze. Jakoż z tego równania wynika, że

$$(4) \quad \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) + \lambda_1 \cdot \delta L_1 + \dots + \lambda_k \cdot \delta L_k + \dots + \lambda_{3n-s} \cdot \delta L_{3n-s} = 0,$$

gdzie λ_k są współczynnikami nieoznaczonymi. Rozwijając waryjacje δL_k i porządkując według $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, mieć będziemy

$$(5) \quad \Sigma \left\{ \left(X_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \cdot \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \right. \\ \left. + \left(Y_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \cdot \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \right. \\ \left. + \left(Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \cdot \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right\} = 0,$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie wartości wskaźnika i od 1 do n . Ponieważ w tym równaniu dane warunki zostały uwzględnione, przeto przesunięcia należy już uważać za dowolne, a zatym ich współczynniki, każdy z osobna, są równe zeru. Wskutek zaś przyrównania tych współczynników do zera otrzymamy równania (2) art. 102-go, z których wynika równowaga dla każdego punktu, a zatym także dla całego układu materjalnego.

Wielkość $X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i$ wyraża (art. 73) pracę przygotowaną (moment przygotowany) siły, przyłożonej do punktu (x_i, y_i, z_i) ; lewa strona równania (3) jest przeto algebriczną sumą prac przygotowanych wszystkich sił, przyłożonych do punktów układu. Zbiór sił, przyłożonych do punktów układu materjalnego, stanowi układ sił. Sumę algebriczną prac przygotowanych tych sił dla danego przesunięcia układu materjalnego nazywamy pracą przygotowaną układu sił dla tego przesunięcia. Mamy zatym następującą zasadę ogólną równowagi: *jeżeli do punktów układu materjalnego są przyłożone siły, a warunki, którym one mają czynić zadość, są wyrażone przez równania między współrzędnymi tych punktów, mogące także czas wyrażnie zawierać, natenczas do równowagi tych sił potrzeba i wystarcza, żeby dla wszystkich przesunięć przygotowanych praca układu sił przyłożonych była równa zeru.*

Tak wyrażamy ogólnie zasadę prac przygotowanych czyli zasadę momentów przygotowanych dla układu materjalnego. Właściwym źródłem tej zasady są równania (2) art. 102-go, zwane równaniami równowagi Lagrange'a; wyrażają one równowagę w każdym punkcie układu z osobna. Przesunięcia przygotowane należy uważać za służące do utworzenia związków między siłami i współrzędnymi. W tych związkach ostatecznych, wyrażonych analitycznie przez wielkości skończone, nie pojawiają się wcale owe przesunięcia,

Jeżeli uważamy ruch jednego układu masyjnego względem drugiego, a siły, do pierwszego układu przyłożone, nie udzielają żadnemu jego punktowi przyspieszenia względnego, natenczas ten układ znajduje się w równowadze względnej. Ponieważ zagadnienia o ruchu względnym sprowadzamy do zagadnień o ruchu bezwzględnym przez dodanie tak zwanych sił pozornych (art. 88), przeto zasada prac przygotowanych daje także warunki równowagi względnej, jeżeli w każdym punkcie prócz siły przyłożonej przyjmujemy jeszcze siły pozorne. Do równowagi potrzeba i wystarcza, żeby suma prac tych sił była równa zeru dla każdego przesunięcia przygotowanego.

104. RÓWNOWAGA UKŁADÓW SZTYWNYCH. Praca przygotowana układu sił zależy od tych sił, od ustroju układu masyjnego i od danych warunków. Obliczamy tę pracę przedewszystkiem dla układu sztywnego punktów.

Każdy nieskończenie mały ruch układu sztywnego może być wywołany przez trzy obroty około osi współrzędnych i przez trzy ruchy postępowe w kierunkach tych osi (art. 40). To zatem twierdzenie stosuje się do każdego ruchu przygotowanego takiego układu. Jeżeli układ jest swobodny, natenczas wszystkie sześć współrzędnych ruchu przygotowanego, t. j. trzy odchylenia około osi i trzy przesunięcia w kierunkach tych osi będą dowolne; jeżeli zaś swoboda układu jest ograniczona, natenczas zachodzą pewne związki między współrzędnymi ruchu przygotowanego (art. 42). Oznaczmy odpowiednio przez $\delta\xi$, $\delta\eta$ i $\delta\zeta$ odchylenia nieskończenie małych obrotów układu około osi x -ów, y -ów, z -ów, a przez $\delta\lambda$, $\delta\mu$ i $\delta\nu$ nieskończenie małe przesunięcia układu w kierunkach tychże osi. Udzielając układowi tych sześć ruchów, otrzymamy, według (1) art. 24-go, następujące przesunięcia δx_i , δy_i , δz_i punktu (x_i, y_i, z_i) :

$$(1) \quad \begin{cases} \delta x_i = \delta\lambda + z_i\delta\eta - y_i\delta\zeta, \\ \delta y_i = \delta\mu + x_i\delta\zeta - z_i\delta\xi, \\ \delta z_i = \delta\nu + y_i\delta\xi - x_i\delta\eta. \end{cases}$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez składowe X_i , Y_i , Z_i siły przyłożonej do tego punktu i sumując według wskaźnika i , otrzymamy

$$\Sigma(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \delta\lambda \cdot \Sigma X_i + \delta\mu \cdot \Sigma Y_i + \delta\nu \cdot \Sigma Z_i + \\ + \delta\xi \cdot \Sigma(Z_i y_i - Y_i z_i) + \delta\eta \cdot \Sigma(X_i z_i - Z_i x_i) + \delta\zeta \cdot \Sigma(Y_i x_i - X_i y_i).$$

Ponieważ $L_i = Z_i y_i - Y_i z_i$, $M_i = X_i z_i - Z_i x_i$, $N_i = Y_i x_i - X_i y_i$, oznaczają odpowiednio momenty siły (X_i, Y_i, Z_i) względem osi współrzędnych (art. 71), przeto

$$(2) \quad \Sigma(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \delta\lambda \cdot \Sigma X_i + \delta\mu \cdot \Sigma Y_i + \delta\nu \cdot \Sigma Z_i + \\ + \delta\xi \cdot \Sigma L_i + \delta\eta \cdot \Sigma M_i + \delta\zeta \cdot \Sigma N_i.$$

To jest ogólne wyrażenie pracy przygotowanej układu sił, przyłożonych do układu sztywnego punktów. Ta praca jest funkcją liniową i jednorodną nieskończenie małych współrzędnych ruchu przygotowanego, a współczynniki tej funkcji zależą od danych sił.

Zasada przeto prac przygotowanych wyraża się dla układów sztywnych przez następujące równanie:

$$\delta\lambda \cdot \Sigma X_i + \delta\mu \cdot \Sigma Y_i + \delta\nu \cdot \Sigma Z_i + \delta\xi \cdot \Sigma L_i + \delta\eta \cdot \Sigma M_i + \delta\zeta \cdot \Sigma N_i = 0,$$

a jeżeli przyjmiemy

$$(3) \quad X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i, \quad L = \Sigma L_i, \quad M = \Sigma M_i, \quad N = \Sigma N_i, \quad \text{to będzie}$$

$$(4) \quad X \cdot \delta\lambda + Y \cdot \delta\mu + Z \cdot \delta\nu + L \cdot \delta\xi + M \cdot \delta\eta + N \cdot \delta\zeta = 0.$$

Jeżeli układ masyjny jest swobodny, natenczas wszystkie spółrzedne ruchu przygotowanego są dowolne. Żeby zatem równanie (4) zachodziło dla wszelkich ruchów przygotowanych, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(5) \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

z czego wynika następujące ważne twierdzenie: *do równowagi sił, przyłożonych do układu sztywnego i swobodnego, potrzeba i wystarcza, żeby sumy rzutów sił i sumy momentów tychże sił, wziętych w kierunkach trzech osi, wzajemnie do siebie prostopadłych, były równe zeru dla każdej osi zosobna. Z pierwszych trzech równań wynika, że jeżeli wykreślimy z dowolnego punktu wielobok, którego boki w dowolnym porządku są równoległe i proporcjonalne względem sił w równowadze, natenczas otrzymamy wielobok zamknięty, jakgdyby siły były przyłożone do jednego punktu; z ostatnich trzech równań okazuje się, że jeżeli wykreślimy z dowolnego punktu wielobok momentów sił względem tego punktu, natenczas otrzymamy także wielobok zamknięty.*

Jeżeli jeden punkt układu jest nieruchomy, natenczas ruch przygotowany układu jest kręceniem się około tego punktu (art. 48). Obierając wtedy ów punkt nieruchomy jako początek osi, otrzymamy $\delta\lambda = 0$, $\delta\mu = 0$, $\delta\nu = 0$ dla każdego ruchu przygotowanego. Ponieważ $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ pozostają dowolne, przeto warunki równowagi są $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. *Do równowagi sił, przyłożonych do układu sztywnego, którego jeden punkt jest stały, potrzeba i wystarcza, żeby suma momentów tych sił względem trzech prostych, przecinających się w tym punkcie pod kątami prostymi, była równa zeru dla każdej prostej zosobna.*

Jeżeli warunki pozwalają układowi poruszać się tylko równoległe do danej płaszczyzny, natenczas ruch przygotowany jest obrotem około prostej, prostopadłej do tej płaszczyzny (art. 51). Obierzmy wtedy osi Ox i Oy równoległe do tej płaszczyzny, to będzie $\delta\nu = 0$, $\delta\xi = 0$, $\delta\eta = 0$; warunki zatem równowagi będą $X = 0$, $Y = 0$, $N = 0$. Jeżeli układ może się tylko skręcać około pewnej danej prostej, to obierając tę prostą jako oś z -ów, mamy stosownie do tego warunku $\delta\lambda = 0$, $\delta\mu = 0$, $\delta\xi = 0$, $\delta\eta = 0$; równowaga zajdzie przeto, jeżeli będzie $Z = 0$, $N = 0$. Jeżeli układ może się tylko obracać około osi z -ów, to będzie $\delta\lambda = 0$, $\delta\mu = 0$, $\delta\nu = 0$, $\delta\xi = 0$, $\delta\eta = 0$, a $N = 0$ jest jedynym warunkiem równowagi. *Do równowagi sił, przyłożonych do układu sztywnego, który tylko około stałej osi może się obracać, potrzeba i wystarcza, żeby suma momentów sił względem tej osi była równa zeru.*

Warunki równowagi możemy podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa obejmuje równania $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, odnoszące się do ruchu postępowego, druga zaś równania $L=0$, $M=0$, $N=0$, odnoszące się do ruchu obrotowego. Dla układu swobodnego zachodzą obie grupy warunków; im mniejsza zaś swoboda układu, tym mniejsza ilość warunków równowagi sił.

Niech m_i i m_k będą dwoma punktami układu sztywnego; do punktu m_i przykładamy siłę P , mającą kierunek prosty $m_k m_i$ lub też kierunek prosty $m_i m_k$; do punktu m_k zaś siłę $-P$, wprost przeciwną tamtej. Jeżeli r oznacza odległość obudwu punktów, to składowe siły P będą odpowiednio

$$X = \pm P \cdot \frac{x_i - x_k}{r}, \quad Y = \pm P \cdot \frac{y_i - y_k}{r}, \quad Z = \pm P \cdot \frac{z_i - z_k}{r};$$

a składowe siły $-P$ będą: $-X$, $-Y$, $-Z$. Suma prac przygotowanych tych sił wynosi

$$X(\delta x_i - \delta x_k) + Y(\delta y_i - \delta y_k) + Z(\delta z_i - \delta z_k) = \pm \frac{P}{r} [(x_i - x_k)(\delta x_i - \delta x_k) + (y_i - y_k)(\delta y_i - \delta y_k) + (z_i - z_k)(\delta z_i - \delta z_k)],$$

a ponieważ z powodu sztywności $(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - r^2 = 0$, przeto $(x_i - x_k)(\delta x_i - \delta x_k) + \& = 0$, co dowodzi, że suma prac przygotowanych obudwu sił jest równa zeru dla każdego przesunięcia. Takie przeto dwie siły równoważą się. Stosując to postępowanie do układu ilukolwiek punktów, mamy twierdzenie: *siły przyłożone do punktów układu sztywnego, działające wzdłuż prostych, łączących każde dwa punkty, i po dwie równe a mające kierunki wprost przeciwnie, są w równowadze.*

Z tego twierdzenia wynika ważny wniosek. Gdy siły, przyłożone do układu niesztynego, są w równowadze, to równowaga trwać będzie, jeżeli dwa punkty układu połączymy linią sztywną; możemy bowiem taką linią zastąpić dwiema siłami dowolnie wielkimi, równymi i wprost przeciwnymi, działającymi wzdłuż téjże linii na jej końcach, a takie siły znoszą się. Czyniąc to samo z każdą parą punktów, widzimy, że siły równoważące się, przyłożone do układu niesztynego, nie przestają być w równowadze, jeżeli ten układ sztywnym uczynimy. Ponieważ nawzajem nie można twierdzić, jakoby równowaga sił przy sztywności układu pociągała za sobą równowagę tychże sił przy niesztyności układu, przeto mamy twierdzenie: *warunki równowagi sił, przyłożonych do układu sztywnego, są konieczne dla równowagi układu niesztynego, nie są jednak wystarczające.*

105. PRZEKSZTAŁCENIE UKŁADÓW SIŁ. Dwa układy sił, przyłożonych do punktów tegoż samego układu materjalnego, których praca przygotowana posiada tężsamą wartość przy tych samych warunkach, nazywamy układami równoważnymi. Dwa układy sił, równoważne z trzecim, są z sobą równoważne. Postępowanie, zapomocą którego można wyznaczyć układ sił, równoważny z danym układem, nazywamy przekształceniem, lub transformacją tego układu sił. Transformacja jest wogólności nieskończenie

wieloma sposobami możliwa, a dopiero wtedy jest dokładnie oznaczona, jeżeli mamy dostateczną ilość warunków, określających układ równoważny.

Jeżeli symbole (P) i (Q) oznaczają dwa równoważne układy sił, to jeżeli każdej sile Q_i układu (Q) nadamy kierunek przeciwny, nie zmieniając ani jej wielkości ani jej punktu przyłożenia, natenczas praca przygotowana siły $-Q_i$ będzie równa i znaku przeciwnego pracy siły Q_i . Praca przygotowana układu $(-Q)$, powstającego z sił $-Q_i$, będzie przeto równa pracy układu (P), lecz będzie miała znak przeciwny, a zatem suma prac obudwu układów (P) i $(-Q)$ będzie równa zeru. *Jeżeli każdej sile jednego z dwu układów równoważnych nadamy kierunek przeciwny, nie zmieniając wielkości i punktu przyłożenia tej siły, to otrzymany układ sił jest w równowadze z każdym układem sił, równoważnym z pierwotnym układem.* Z tego twierdzenia wynika drugie: *jeżeli dwa układy sił są w równowadze, to biorąc siły jednego układu w kierunku przeciwnym bez zmiany wielkości i punktów przyłożenia tych sił, otrzymamy układ sił, równoważny z drugim układem.* Te dwa twierdzenia okazują, że między równowagą a równoważnością dwu układów sił zachodzi ścisły związek, który przez podobieństwo nazwisk jest dobitnie wyrażony. —

Z ostatniego twierdzenia art. 104-go wynika, że dwie siły równe, mające ten sam kierunek i ten sam promień działania, których punkty przyłożenia są sztywnie ze sobą połączone, są równoważne. Wyrażamy to twierdzenie, mówiąc, że *punkt przyłożenia siły można przesuwać do innego punktu jej promienia działania, sztywnie z nim połączonogo, nie zmieniając wielkości i kierunku siły.* Według tego twierdzenia określamy siłę przez jej promień działania, przez jej wielkość i kierunek. Jeżeli $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ oznaczają współrzędne (art. 33) promienia działania siły P, to

(1) $X = aP, Y = bP, Z = cP; L = \alpha P, M = \beta P, N = \gamma P$, a więc

$$\frac{a}{X} = \frac{b}{Y} = \frac{c}{Z} = \frac{\alpha}{L} = \frac{\beta}{M} = \frac{\gamma}{N};$$

a ponieważ $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, przeto między wielkościami X, Y, Z, L, M, N zachodzi związek $XL + YM + ZN = 0$. I nawzajem, żeby te sześć wielkości mogło służyć do określenia siły, winien między nimi zachodzić powyższy związek, albowiem one są proporcjonalne względem współrzędnych promienia działania siły, dla którego $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. Trzy rzuty X, Y, Z siły na osi współrzędnych, łącznie z momentami L, M, N téjże siły względem tychże osi zowiemy współrzędnymi siły względem tych osi. Takie sześć współrzędnych określają siłę dostatecznie, i są wiadome, skoro siła jest dana. Punkt przyłożenia siły nie jest określony; może nim być punkt dowolny na jej promieniu działania. Jakkolwiek obierzemy osi współrzędnych, to współrzędne X, Y, Z siły nie mogą być wszystkie równe zeru; atoli współrzędne L, M, N siły mogą jednocześnie przyjąć wartości równe zeru, a to nastąpi, jeżeli początek osi znajduje się na promieniu działania siły. Z sześciu współrzędnych siły może pięć być równe zeru, a wtedy pozostała współrzędna będzie równa sile samój. —

Spółrzednymi układu sił nazywamy sumy algebraiczne odpowiednich spółrzednych wszystkich sił, ten układ stanowiących. Jeżeli $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$ są spółrzednymi siły P_i danego układu, to wielkości $X = \sum X_i, Y = \sum Y_i, Z = \sum Z_i, L = \sum L_i, M = \sum M_i, N = \sum N_i$ przedstawiają spółrzedne tego układu sił. Niech $X, Y, Z, L, M, N; X', Y', Z', L', M', N'$ będą spółrzednymi dwu układów sił, przyłożonych do tego samego układu sztywnego punktów; równoważność tych układów wymaga, żeby dla każdego ruchu przygotowanego

$$(2) \quad X\delta\lambda + Y\delta\mu + Z\delta\nu + L\delta\xi + M\delta\eta + N\delta\zeta = X'\delta\lambda + Y'\delta\mu + Z'\delta\nu + L'\delta\xi + M'\delta\eta + N'\delta\zeta.$$

Jeżeli układ jest swobodny, to spółrzedne ruchu przygotowanego są dowolne; warunki równoważności będą więc

$$(3) \quad X = X', Y = Y', Z = Z', L = L', M = M', N = N'.$$

Do równoważności dwu układów sił, przyłożonych do układu punktów sztywnego i swobodnego, potrzeba i wystarcza, żeby spółrzedne odpowiednie tych układów sił względem tych samych osi były sobie równe. Z tego twierdzenia okazuje się, że spółrzedne układu sił określają zarazem wszelkie inne układy sił, z nim równoważne. Widzimy nadto, że równoważność przy powyższych warunkach nie zależy od ustroju układu materjalnego, byle tylko ten układ był swobodny i sztywny.

Sumę algebraiczną momentów wszystkich sił danego układu względem danej prostej nazywamy momentem układu sił względem prostej. Spółrzedne L, M, N przedstawiają odpowiednio momenty układu (P) względem osi x, y, z . Moment wypadkowy momentów wszystkich sił układu względem danego punktu nazywamy momentem układu sił względem punktu tego. Spółrzedne L, M, N przedstawiają odpowiednio rzuty momentu układu sił względem początku osi (art. 71). Z warunków równoważności dwu układów sił wynika twierdzenie: *momenty dwu równoważnych układów sił względem tego samego punktu lub względem tej samej prostej są sobie równe.*

106. UKŁADY SIŁ, RÓWNOWAŻNE Z JEDNĄ SIŁĄ. Najważniejszym zadaniem przekształcenia sił jest wyznaczenie najprostszego układu sił, który z danymi siłami jest równoważny. Z tego powodu nazywamy przekształcenie także redukcją układu sił, t. j. sprowadzeniem tego układu do postaci najprostszej.

Najprostszym będzie wynik redukcji, jeżeli układ sił daje się sprowadzić do jednej siły. Z twierdzenia ogólnego art. 105-go wynika, że spółrzedne układu sił są wtedy odpowiednio równe spółrzednym jednej siły, jest przeto

$$(1) \quad XL + YM + ZN = 0,$$

gdy X, Y, Z, L, M, N oznaczają spółrzedne danego układu sił. Ten atoli warunek nie jest wystarczający. Wszystkie spółrzedne nie mogą być równe zeru, gdyż zachodziłaby równowaga danych sił, co wyklucza oczywiście

możliwość żądanej redukcji. Założenie $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ jest także niemożliwe, albowiem te trzy współrzędne siły nie mogą być jednocześnie równe zeru (art. 105). Jeżeli przez początek osi współrzędnych poprowadzimy siły równe i równoległe do sił danego układu (P), czyli, jeżeli przesuniemy te siły równoległe do tego punktu, to sumy rzutów tych sił po przesunięciu na osi współrzędnych będą odpowiednio równe współrzędnym X , Y , Z tego układu. Gdyby więc było $X=0$, $Y=0$ i $Z=0$, natenczas dane siły, przesunięte do jednego punktu, znosiłyby się. Mamy przeto twierdzenie: *układ sił jest równoważny z jedną siłą, jeżeli jego współrzędne czynią zadość warunkowi $XL + YM + ZN = 0$, a siły tego układu, przesunięte równoległe do jednego punktu, nie znoszą się.*

Wielkość $h = XL + YM + ZN$, utworzoną ze współrzędnych danego układu sił, nazywamy parametrem układu tego. Podane twierdzenie możemy więc tak wyrazić: *układ sił jest równoważny z jedną siłą, jeżeli jego parametr jest równy zeru, a siły tego układu, przesunięte równoległe do jednego punktu, nie znoszą się.* Siłę, równoważną z układem sił, nazywamy wypadkową tego układu. Wypadkowa układu sił jest siłą, dokładnie oznaczoną. Jakoż, przenosząc siły danego układu równoległe do dowolnego punktu O, obranego jako początek układu współrzędnych, i składając je w tym punkcie zapomocą wieloboku, otrzymamy wypadkową sił przeniesionych, równą i równoległą do wypadkowej danego układu, albowiem rzuty téj siły na osi współrzędnych są odpowiednio równe X , Y , Z . Przyjmijmy $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, i obliczmy ilorazy $L : R$, $M : R$, $N : R$, to otrzymamy momenty α , β , γ promienia działania szukanéj wypadkowej. Tym sposobem wypadkowa R jest dokładnie wyznaczona. Widzimy zarazem, że wielkość i kierunek siły wypadkowej zależy tylko od wielkości i od kierunku każdej z sił danych, i że te dwie cechy wypadkowej wyznacza się tak, jakgdyby dane siły były przyłożone do jednego punktu. Siła, równa wypadkowej i mająca ten sam promień działania, lecz kierunek przeciwny, przywodzi dany układ sił do równowagi.

Układy sił, równoważne z jedną siłą, nazywamy układami sił pierwszego rodzaju. We wszystkich zagadnieniach, w których trzeba uważać pracę przygotowaną takiego układu sił, można ten układ zastąpić jego wypadkową i tym sposobem najłatwiej rozwiązać takie zagadnienia.

Z równości momentów dwu równoważnych układów sił wynikają dla układów 1-go rodzaju następujące twierdzenia: *moment wypadkowej układu sił 1-go rodzaju względem prostej równa się momentowi tego układu względem téj prostej; moment wypadkowej takiego układu sił względem punktu równa się momentowi tego układu względem tego punktu.*

Parametr układu sił jest równy zeru, jeżeli siły działają na jednej płaszczyźnie lub jeżeli są równoległe. Jakoż, obierzmy w pierwszym przypadku osi x i y na płaszczyźnie sił, więc oś z prostopadle do téjże płaszczyzny, wtedy $Z_i = 0$, $M_i = 0$, $X_i = 0$, a stąd $h = 0$; w drugim przypadku obierzmy oś x równoległe do sił, wtedy $Y_i = 0$, $Z_i = 0$, $L_i = 0$, a stąd $h = 0$.

Takie zatym układy sił należą do 1-go rodzaju, jeżeli tylko, przesunięte równolegle do jednego punktu, nie znoszą się.

107. SIŁY, LEŻĄCE NA JEDNĘJ PŁASZCZYZNIE. Obierzmy płaszczyznę sił jako płaszczyznę Oxy , wtedy $Z=0$, $L=0$, $M=0$. Taki więc układ sił okręślają trzy współrzędne X , Y i N . Wypadkowa układu jest $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$; jeżeli a i b oznaczają jej dostawy kierunkowe, a γ oznacza odległość promienia działania tej wypadkowej od punktu O , to

$$(1) \quad a = \frac{X}{R}, \quad b = \frac{Y}{R}, \quad \gamma = \frac{N}{R}.$$

Moment N wypadkowej względem punktu O jest sumą algebraiczną momentów danych sił względem tego punktu. Niech (x, y) będzie dowolnym punktem na R , to $\gamma = bx - ay$; ostatnie przeto równanie (1) daje $N = R(bx - ay) = Yx - Xy$, czyli

$$(2) \quad Yx - Xy - N = 0$$

jako równanie promienia działania tej wypadkowej. Niech x_i, y_i będą współrzędnymi punktu przyłożenia siły P_i , tworzącej z osią x kąt λ_i , wtedy

$$X_i = P_i \cos \lambda_i, \quad Y_i = P_i \sin \lambda_i, \quad N_i = P_i(x_i \sin \lambda_i - y_i \cos \lambda_i);$$

równanie (2) więc możemy tak napisać:

$$(3) \quad x \sum P_i \sin \lambda_i - y \sum P_i \cos \lambda_i - \sum P_i(x_i \sin \lambda_i - y_i \cos \lambda_i) = 0.$$

Obróćmy każdą siłę P_i , nie wychodząc z płaszczyzny danego układu, około jej punktu przyłożenia o kąt φ w kierunku od dodatnich x ku dodatnim y . Siła P_i w nowym położeniu tworzy z osią x kąt $\lambda_i + \varphi$, jej składowe zatym X'_i i Y'_i będą

$$\begin{aligned} X'_i &= P_i \cos(\lambda_i + \varphi) = X_i \cos \varphi - Y_i \sin \varphi, \\ Y'_i &= P_i \sin(\lambda_i + \varphi) = Y_i \cos \varphi + X_i \sin \varphi, \end{aligned}$$

a jeżeli X' , Y' oznaczają współrzędne nowego układu sił, przez powyższy obrót powstałego, to otrzymamy

$$(4) \quad X'^2 + Y'^2 = (\sum X'_i)^2 + (\sum Y'_i)^2 = X^2 + Y^2,$$

skąd wynika, że wypadkowa nowego układu jest równa wypadkowej pierwotnej. Niech pierwotna wypadkowa tworzy z osią x kąt λ , to $\tan \lambda = \frac{Y}{X}$; dla wyznaczenia kąta nachylenia λ' nowej wypadkowej otrzymamy równanie

$$(5) \quad \tan \lambda' = \frac{Y'}{X'} = \frac{Y \cos \varphi + X \sin \varphi}{X \cos \varphi - Y \sin \varphi} = \frac{\tan \lambda + \tan \varphi}{1 - \tan \lambda \tan \varphi} = \tan(\lambda + \varphi),$$

z którego wnosimy, że wypadkowa nowego układu sił tworzy z wypadkową pierwotną taki sam kąt φ , o jaki każda siła obrócona została. Równanie promienia działania nowej wypadkowej będzie według (3)

$$x \cdot \sum P_i \sin(\lambda_i + \varphi) - y \cdot \sum P_i \cos(\lambda_i + \varphi) - \sum P_i[x_i \sin(\lambda_i + \varphi) - y_i \cos(\lambda_i + \varphi)] = 0,$$

czyli

$$(6) \quad [x \cdot \Sigma P_i \sin \lambda_i - y \cdot \Sigma P_i \cos \lambda_i - \Sigma P_i (x_i \sin \lambda_i - y_i \cos \lambda_i)] \cos \varphi + \\ + [x \Sigma P_i \cos \lambda_i + y \Sigma P_i \sin \lambda_i - \Sigma P_i (x_i \cos \lambda_i + y_i \sin \lambda_i)] \sin \varphi = 0.$$

Oznaczywszy przez ξ i η spólrzędne punktu, w którym przecinają się obiedwie wypadkowe, i wprowadzając X_i i Y_i , otrzymamy dla wyznaczenia tego punktu z (3) i (6) następujące dwa równania:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi Y - \eta X = \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i), \\ \xi X + \eta Y = \Sigma (X_i x_i + Y_i y_i), \end{cases}$$

z których wypada

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{X^2 + Y^2} [Y \cdot \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i) + X \cdot \Sigma (X_i x_i + Y_i y_i)], \\ \eta = \frac{1}{X^2 + Y^2} [Y \cdot \Sigma (X_i x_i + Y_i y_i) - X \cdot \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i)]. \end{cases}$$

Z tych równań okazuje się, że obie wypadkowe przecinają się z sobą w pewnym punkcie, którego położenie nie zależy od kąta φ obrotu każdej siły około jej punktu przyłożenia. Punkt o spólrzędnych ξ i η nazywamy środkiem układu sił. Ponieważ X i Y nie są równe zeru, przeto ów środek jest punktem, dokładnie oznaczonym, zależnym od punktów przyłożenia, od wielkości i od wzajemnego położenia danych sił. *Jeżeli każdą siłę układu płaskiego obrócimy około jej punktu przyłożenia o tenże sam kąt w tę samą stronę, natenczas siła wypadkowa obraca się około środka tego układu o tenże również kąt w tę stronę.*

108. SIŁY RÓWNOLEGŁE. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI. Gdy mamy układ sił równoległych, zaś a , b , c są dostawami kierunkowymi którejkolwiek siły P_i takiego układu, przyłożonej do punktu (x_i, y_i, z_i) , to powyżej wprowadzone dostawy stosują się do wszystkich sił, mających kierunek siły P_i , podczas gdy dostawy $-a$, $-b$, $-c$ odnoszą się do sił, mających kierunek przeciwny. Spólrzędne układu sił są

$$(1) \quad \begin{cases} X = a \cdot \Sigma P_i, Y = b \cdot \Sigma P_i, Z = c \cdot \Sigma P_i, \\ L = c \Sigma P_i y_i - b \Sigma P_i z_i, M = a \Sigma P_i z_i - c \Sigma P_i x_i, N = b \Sigma P_i x_i - a \Sigma P_i y_i. \end{cases}$$

Dla wypadkowej mamy $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, a stąd $R = \Sigma P_i$; nadto będzie

$$(2) \quad \frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c},$$

z czego się okazuje, że *wypadkowa układu sił równoległych równa się sumie algebraicznej tychże sił i działa równolegle do kierunku tych sił, których suma jest liczebnie większa.* Ponieważ $L = (cy - bz) \Sigma P_i$, $M = (az - cx) \Sigma P_i$, $N = (bx - ay) \Sigma P_i$, gdzie (x, y, z) jest dowolnym punktem na promieniu działania wypadkowej, przeto równania tego promienia będą

$$(3) \quad \begin{cases} c(y \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i y_i) - b(z \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i z_i) = 0, \\ a(z \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i z_i) - c(x \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i x_i) = 0, \\ b(x \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i x_i) - a(y \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i y_i) = 0. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez a , drugie przez b , i dodając iloczyny, otrzymamy trzecie równanie, z czego się okazuje, że powyższe równania wyrażają tylko dwa związki między x, y, z , jak być powinno. Z tych równań widzimy, że na promieniu działania wypadkowej znajduje się pewien punkt, którego położenie nie zależy od wielkości a, b, c , t. j. od kierunku sił danego układu. Obierając bowiem taki punkt (ξ, η, ζ) , żeby jednocześnie

$$(4) \quad \xi \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i x_i = 0, \quad \eta \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i y_i = 0, \quad \zeta \cdot \Sigma P_i - \Sigma P_i z_i = 0,$$

przywiedzimy powyższe trzy równania do tożsamości, jakiekolwiek wartości damy spółrzednym kierunkowym (a, b, c) . To znaczy, że jeżeli wszystkim siłom damy inny, zresztą dowolny kierunek, nie zmieniając ani ich wielkości, ani ich wzajemnego położenia, ani ich punktów przyłożenia, natenczas wypadkowa przybierze nowy kierunek i przetnie pierwotną wypadkową w pewnym punkcie, którego spółrzedne wyznaczają równania (4). Ten punkt zwiemy środkiem sił równoległych. Spółrzedne tego środka są

$$(5) \quad \xi = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i}, \quad \eta = \frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i}, \quad \zeta = \frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i}.$$

Środek sił równoległych posiada podobne znaczenie, co środek sił na płaszczyźnie. Jeżeli punkty przyłożenia sił równoległych leżą na jednej płaszczyźnie, to środek leży także na tej płaszczyźnie; skoro bowiem $z_i = 0$ dla każdego wskaźnika i , to $\zeta = 0$. Niech m_i oznacza masę punktu przyłożenia siły P_i , i założmy, że te siły są proporcjonalne względem mas swych punktów przyłożenia; natenczas spółrzedne środka tych sił będą

$$(6) \quad \xi = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad \eta = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i},$$

to znaczy (art. 97), że *środkiem sił równoległych, proporcjonalnych względem mas swych punktów przyłożenia, jest środek masy tychże punktów*. Z tego twierdzenia wynika, że środek sił równoległych można wyznaczyć takim samym sposobem, jakiego używaliśmy do wyznaczenia środka masy (art. 98). W tym celu należy w punkcie przyłożenia każdej siły przyjąć masę, proporcjonalną względem tej siły, t. j. obrać dla wszystkich sił ten sam, zresztą dowolny, stosunek między siłą a masą, i wyznaczyć środek tych mas; ten punkt będzie środkiem sił równoległych.

Chcąc jednak powyższe twierdzenie zastosować do jakiegokolwiek sił równoległych, musimy uogólnić pojęcie środka masy, przyjmując także masy ujemne. Jeżeli bowiem siły równoległe, działające w jednym kierunku, uważamy za dodatne, natenczas siły, mające kierunek przeciwny, należy uważać za ujemne. Biorąc zatem masy proporcjonalne względem sił, potrzeba w (6) za m_i podstawiać bądź liczbę dodatnią, bądźtż ujemną, stosownie do kierunku odpowiedniej siły. Jeżeli zaś znak momentu masy m_i względem płaszczyzny spółrzednych (art. 97) wyznaczymy według znaku téjże masy i znaku odpowiedniej odległości od płaszczyzny, wówczas te określenia i sposoby postępowania, które podaliśmy w rozdziale IX dla samych mas dodatnich, będą

mogły być zastosowane do układu, mieszczącego w sobie masy dodatne i masy ujemne. Takie uogólnienie pozwala środek sił równoległych wyznaczyć według tych samych sposobów, które podaliśmy w rozdziale IX.

Z analogii między środkiem masy układu masyjnego a środkiem sił równoległych wynika, że środek dwu sił równoległych i mających tensam kierunku, leży na prostej, łączącej ich punkty przyłożenia, i dzieli odległość wzajemną tych punktów wewnątrznie w stosunku odwrotnym sił. Środek dwu sił równoległych, mających kierunki przeciwne, dzieli odległość ich punktów przyłożenia zewnątrznie w stosunku odwrotnym sił. Stosując te dwa twierdzenia do dwu sił układu, następnie do ich wypadkowej i do 3-ciej siły i t. d., możemy łatwo wyznaczyć środek tych sił, w jakimkolwiek przytym porządku postępować będziemy.

Siły ciężkości, przyłożone do elementów ciała masyjnego, są proporcjonalne względem mas tychże elementów, a przyspieszenie g równa się właśnie stosunkowi siły do masy (art. 67). Promienie działania tych sił przecinają się w środku ziemi; jeżeli zatem rozmiary ciała są dostatecznie małe w porównaniu z rozmiarami ziemi i z odległością jej środka od punktów tego ciała, wtedy możemy siły ciężkości uważać za równoległe i mające kierunek pionu. Z tego wynika, że środek masy ciała masyjnego jest zarazem środkiem układu sił ciężkości, przyłożonych do elementów tego ciała. Z tego powodu nazywamy środek masy ciała także środkiem ciężkości tego ciała. Nauka o środku ciężkości mieści się w rozdziale IX. Ciężar ciała możemy sobie wyobrazić przyłożony do środka ciężkości; czyniąc ten punkt stałym w przestrzeni, znosimy działanie siły ciężkości. Atoli pojęcie środka ciężkości jest tylko o tyle ścisłym, o ile siły ciężkości można uważać za równoległe.

109. UKŁADY SIŁ, RÓWNOWAŻNE Z PARĄ SIŁ. Jeżeli każda ze spółrzędnych X, Y, Z układu sił jest równa zeru, a spółrzędne L, M, N nie są wszystkie równe zeru, układ nie jest równoważny z jedną siłą (art. 106). Przypuśćmy, że taki układ jest równoważny z dwiema siłami $P' : (X', \dots, N')$ i $P'' : (X'', \dots, N'')$, które działają wzdłuż prostych odpowiednio (a', \dots, γ') i (a'', \dots, γ'') . Dla wyznaczenia tych dwu sił mamy warunki następujące:

$$(1) \quad \begin{cases} a'P' + a''P'' = 0, & b'P' + b''P'' = 0, & c'P' + c''P'' = 0, \\ \alpha'P' + \alpha''P'' = L, & \beta'P' + \beta''P'' = M, & \gamma'P' + \gamma''P'' = N. \end{cases}$$

Ponieważ dwie siły są określone przez 12 spółrzędnych, między którymi zachodzą związki $X'L' + Y'M' + Z'N' = 0$ i $X''L'' + Y''M'' + Z''N'' = 0$, a równania (1) dają tylko sześć związków między owymi spółrzędnymi, przeto widzimy, że można nieskończenie wieloma sposobami wyznaczyć takie dwie siły P' i P'' , które razem są równoważne z danym układem sił.

Z pierwszych trzech równań (1) otrzymamy

$$(2) \quad \frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''} = -\frac{P''}{P'} = 1,$$

to znaczy, że szukane dwie siły są bezwzględnie równe, równoległe i mają kierunki przeciwne. Jeżeli oznaczmy $P' = -P'' = P$, otrzymamy z ostatnich trzech równań (1)

$$(3) \quad P(\alpha' - \alpha'') = L, \quad P(\beta' - \beta'') = M, \quad P(\gamma' - \gamma'') = N,$$

a stąd

$$(4) \quad (\alpha' - \alpha'') : L = (\beta' - \beta'') : M = (\gamma' - \gamma'') : N,$$

$$(5) \quad P^2[(\alpha' - \alpha'')^2 + (\beta' - \beta'')^2 + (\gamma' - \gamma'')^2] = L^2 + M^2 + N^2.$$

Równania (4) i (5) są wynikami algebricznymi równań (3), a przeto mogą owe równania zastąpić. Aby poznać ich znaczenie, poprowadźmy płaszczyznę przez siły P' i P'' ; równanie jej będzie

$$(6) \quad c'[(\alpha' - \alpha'')x + (\beta' - \beta'')y + (\gamma' - \gamma'')z] + \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = 0;$$

oznaczymy nadto przez δ odległość wzajemną tych dwu sił, wówczas $\delta^2 = (\alpha' - \alpha'')^2 + (\beta' - \beta'')^2 + (\gamma' - \gamma'')^2$, otrzymamy zatem z równania (5)

$$(7) \quad P^2\delta^2 = L^2 + M^2 + N^2 = \mu^2,$$

gdzie μ oznacza moment danego układu sił względem początku współrzędnych. Równanie (6) wyraża, że płaszczyzna, poprowadzona przez siły P' i P'' , jest prostopadła do tego odcinka, który przedstawia geometrycznie moment danego układu sił względem początku osi; a z równania (7) okazuje się, że iloczyn $P \cdot \delta$ jest równy owemu momentowi.

Obliczmy moment μ' danego układu sił względem punktu dowolnego (x, y, z) . W tym celu poprowadźmy przez ten punkt trzy proste, równoległe do osi współrzędnych, oznaczmy odpowiednio przez L', M', N' momenty układu sił względem tych prostych, i zastosujmy równania (5) art. 71-go; wtedy otrzymamy $L' = L, M' = M, N' = N$, a zatem $\mu' = \mu$. Okazuje się zatem, że moment rozważanego układu sił względem każdego punktu jest stały pod względem wielkości i pod względem kierunku. Z tego wynika na podstawie równań (6) i (7), że lubo nieskończenie wielu sposobami możemy wyznaczać owe dwie siły P' i P'' , to przecież płaszczyzna, poprowadzona przez te dwie siły, ma kierunek stały, prostopadły do odcinka μ , a iloczyn $P \cdot \delta$ posiada wielkość stałą, równą μ . Zresztą ani kierunek ani wielkość każdej z tych dwu sił, ani też ich odległość wzajemna nie jest bliżej określona przez warunki równowagi.

Dwie siły równoległe, bezwzględnie równe i mające kierunki przeciwne, stanowią układ, który nazywamy parą sił (fig. 46). Odległość wzajemną dwu sił, stanowiących parę, nazywamy ramieniem pary sił, a iloczyn tego ramienia i wielkości każdej siły nazywamy momentem pary sił. Na mocy tych określeń i twierdzenia art. 106-go możemy teraz wypowiedzieć twierdzenie: *jeżeli siły danego układu nie są w równowadze, lecz przesunięte równoległe do jednego punktu, znoszą się, natenczas dany układ jest równoważny z parą sił. Płaszczyzna tej pary jest prostopadła do momentu układu sił, a jej moment jest równy momentowi tego układu.* Układy sił, równoważne

z parą, nazywamy układami sił drugiego rodzaju. Parę sił P i $-P$ będziemy oznaczali symbolem $(P, -P)$.

Niech będzie dana para sił $(P, -P)$ i punkt dowolny m ; wyprowadźmy z tego punktu dwa odcinki, wyobrażające odpowiednio momenty sił P i $-P$ względem punktu m , i wystawmy równoległobok na tych odcinkach, natenczas przekątna tego równoległoboku, poprowadzona przez punkt m , przedstawiać będzie moment pary $(P, -P)$ względem tego punktu. Z dowodzenia poprzedzającego wynika, że ów moment jest stały pod względem kierunku i wielkości, gdziekolwiek punkt m obierzemy, i z tego powodu mówimy wprost o momencie pary sił bez podawania punktu, do którego moment ma być odniesiony. Łatwo spostrzeżemy, że moment pary sił jest także równy momentowi każdej z dwu sił tej pary względem punktu, obranego dowolnie na drugiej siłę téjże pary.

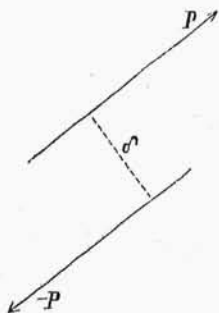


Fig. 46.

Ponieważ współrzędne X, Y, Z pary sił są równe zeru, przeto para sił jest określona przez trzy współrzędne L, M, N , a dwie pary sił są równoważne, jeżeli ich współrzędne L, M, N są odpowiednio równe. Ponieważ te współrzędne są rzutami momentu pary sił na odpowiednie osi współrzędnych, przeto widzimy naprzód, że para sił jest dokładnie określona, jeżeli znamy wielkość i kierunek jej momentu, powtóre, że dwie pary sił są równoważne, jeżeli wielkości i kierunki ich momentów są też same. Z daną parą sił może być nieskończenie wiele par równoważnych. Weźmy bowiem na płaszczyźnie E parę sił $(P, -P)$ o momencie $\mu = P \cdot \delta$, a poprowadziwszy dowolną płaszczyznę E' , równoległą do E , obierzmy na niej dowolnie dwie równoległe proste w odległości wzajemnej δ' i te proste przyjmijmy jako promienie działania takich dwu sił P' i $-P'$, żeby $\mu = P' \delta'$ i żeby moment pary $(P', -P')$ miał ten sam kierunek, co moment pary $(P, -P)$, natenczas pary $(P, -P)$ i $(P', -P')$ będą równoważne.

Niech będzie n par sił $(P_i, -P_i)$ o współrzędnych L_i, M_i, N_i ($i = 1, 2, \dots, n$), to te wszystkie pary stanowiąc będą wogółności układ sił 2-go rodzaju, który będzie równoważny parze sił $(R, -R)$ o współrzędnych $L = \sum L_i, M = \sum M_i, N = \sum N_i$. Para $(R, -R)$ przedstawia parę sił wypadkową danego układu par. Ponieważ rzut momentu pary wypadkowej na każdą z osi współrzędnych jest równy sumie rzutów momentów par składowych na odpowiednią oś, przeto moment pary wypadkowej otrzymujemy sposobem następującym. Wyprowadźmy z dowolnego punktu wiązkę odcinków, przedstawiających odpowiednio momenty μ_i danych par, i przyłóżmy do siebie te odcinki w porządku dowolnym, natenczas odcinek, zamykający otrzymany wielobok, przedstawiać będzie moment μ pary wypadkowej. Jeżeli wielobok momentów μ_i zamknie się, natenczas pary sił znoszą się nawzajem. Na mocy tego postępowania możemy parę sił rozłożyć na dwie lub więcej par sił.

110. SKRĘTNIK. Siła razem z parą sił stanowi układ, który, mówiąc wogólności, nie należy ani do 1-go ani do 2-go rodzaju. Jakoż, niech X', \dots, N' będą spólrzędnymi siły P , a L'', M'', N'' spólrzędnymi pary sił o momencie μ , to parametr $k = X'L'' + Y'M'' + Z'N''$ nie będzie wogólności równy zeru. Gdy parametr k jest równy zeru, t. j. gdy $X'L'' + Y'M'' + Z'N'' = 0$, to siła jest równoległa do płaszczyzny pary, a w tym przypadku posiada układ siłę wypadkową. W celu wyznaczenia téj wypadkowej poprowadźmy płaszczyznę pary μ przez siłę P (art. 109) i obierzmy siłę $-P$, działającą w téjże samej prostéj, co P , jako jedną siłę pary μ , wyznaczając odpowiednio drugą siłę téj pary. Siły P i $-P$ zniosą się, a druga siła pary μ będzie żadaną wypadkową.

Jak w przypadku powyższym możemy siłę i parę sił zastąpić jedną siłą, tak możemy nawzajem daną siłę P zastąpić siłą i parą sił. Obierzmy punkt dowolny m i przyłożmy do niego dwie siły, P i $-P$, znoszące się nawzajem; siła dana P razem z siłą dodaną $-P$ stanowi parę, której moment jest równy momentowi siły danéj względem punktu m (art. 109), a pozostaje jeszcze siła P , równoległa do siły danéj, lecz przyłożona do punktu m . Widzimy zatem, że *siłę można przenieść do punktu dowolnego, dodając jednocześnie parę sił, której moment jest równy momentowi siły względem tego punktu.* —

Niech będzie dana siła $P: (X, Y, Z, L', M', N')$ i para sił $(Q, -Q): (L'', M'', N'')$ i niech parametr $k = XL + YM + ZN$, gdzie $L = L' + L'', M = M' + M'', N = N' + N''$, będzie różny od zera. Przenieśmy siłę P do punktu dowolnego $m: (x, y, z)$; otrzymamy siłę, równą sile danéj, o spólrzędnych $X, Y, Z, L'_0, M'_0, N'_0$, i parę sił $(S, -S)$ o spólrzędnych L''_0, M''_0, N''_0 , a z twierdzenia poprzedzającego wynika

$$(1) \quad \begin{cases} L'_0 = Zy - Yz, & M'_0 = Xz - Zx, & N'_0 = Yx - Xy, \\ L''_0 = L' + Yz - Zy, & M''_0 = M' + Zx - Xz, & N''_0 = N' + Xy - Yx. \end{cases}$$

Pary $(Q, -Q)$ i $(S, -S)$ dają parę wypadkową $(R, -R)$ o spólrzędnych

$$(2) \quad L'_1 = L' + L''_0, \quad M'_1 = M' + M''_0, \quad N'_1 = N' + N''_0.$$

Tym sposobem przekształciliśmy układ P i $(Q, -Q)$ na układ równoważny P i $(R, -R)$, przyczem siła P przechodzi przez punkt m . Jeżeli a, b, c oznaczają dostawy kierunkowe siły P , to rzut momentu pary $(R, -R)$ na tę siłę będzie

$$(3) \quad aL'_1 + bM'_1 + cN'_1 = \frac{XL'' + YM'' + ZN''}{P} = \frac{XL + YM + ZN}{P} = \frac{k}{P},$$

a ponieważ k i P są wielkościami stałymi, przeto widzimy, że *jakimkolwiek sposobem przekształcimy układ, składający się z siły i pary sił, na podobny układ równoważny, rzut momentu pary sił na siłę jest stały.*

Z równań (2) okazuje się, że moment pary $(R, -R)$ jest funkcją spólrzędnych punktu m ; przekształcając więc dany układ sił, otrzymamy w każdym punkcie téżsamą siłę, lecz coraz inną parę. Punkt m może być tak obrany,

że moment pary ($R, -R$) będzie równoległy do siły P , czyli że płaszczyzna téj pary będzie prostopadła do siły. W tym celu należy punkt tak obrać, żeby

$$(4) \quad \begin{aligned} &L'_1 : X = M'_1 : Y = N'_1 : Z, \text{ czyli} \\ &\frac{L + Yz - Zy}{X} = \frac{M + Zx - Xz}{Y} = \frac{N + Xy - Yx}{Z}. \end{aligned}$$

Z tych równań widzimy, że miejscem geometrycznym punktów, w których żądane przekształcenie daje się uskuteczyć, jest pewna prosta, równoległa do siły P . Tę prostą nazywamy osią centralną danego układu sił. Z twierdzenia poprzedzającego wynika naprzód, że, przenosząc siłę P do punktu dowolnego na osi centralnej, otrzymamy oprócz téj siły parę sił o momencie stałym i równym $k : P$; powtóre, że takie przekształcenie daje parę sił o najmniejszym momencie, która razem z siłą P jest równoważna danemu układowi sił.

Aby wyznaczyć spółrzędne $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ osi centralnej, przyjmijmy $\mu = k : P$ i oznaczmy przez l stosunek momentu μ do siły P , więc

$$(5) \quad l = \frac{\mu}{P} = \frac{k}{P^2} = \frac{XL + YM + ZN}{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

mieć będziemy

$$L = \alpha P + \frac{k}{P} a = \alpha P + \frac{k}{P^2} X = \alpha P + lX, \text{ a stąd } \alpha P = L - lX,$$

podobnie $\beta P = M - lY, \gamma P = N - lZ$; otrzymamy zatem dla osi centralnej

$$(6) \quad \frac{a}{X} = \frac{b}{Y} = \frac{c}{Z} = \frac{\alpha}{L - lX} = \frac{\beta}{M - lY} = \frac{\gamma}{N - lZ}.$$

Układ sił, składający się z siły i pary sił, której płaszczyzna jest prostopadła do siły, nazywamy skrętnikiem. Jeżeli X, Y, Z, L, M, N oznaczają spółrzędne skrętnika, natenczas moment μ pary tego skrętnika wyraża się wzorem następującym:

$$(7) \quad \mu = \frac{k}{P} = \frac{XL + YM + ZN}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Stosunek $l = \mu : P = k : P^2$ momentu μ pary sił skrętnika do siły P , nazywamy wskaźnikiem tego skrętnika. Równanie (5) wyraża wskaźnik jako funkcję spółrzędnych skrętnika. Wskaźnik może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste od $-\infty$ do $+\infty$; skrętnik o wskaźniku równym zeru ($\mu = 0$) przedstawia siłę, skrętnik o wskaźniku nieskończenie wielkim ($P = 0$) przedstawia parę sił. Skrętnik może być przedstawiony geometrycznie przez dwa odcinki na jego osi centralnej, t. j. na siłę P , z których pierwszy wyobraża siłę, a drugi moment pary sił; obadwa odcinki mogą mieć początek spólny, a ich kierunki wskazują kierunek siły i kierunek momentu pary sił. Układ, składający się z siły i pary sił, którego parametr nie jest równy zeru, jest równoważny ze skrętnikiem. Obadwa układy sił mają spólną oś centralną.

111. UKŁADY SIŁ, RÓWNOWAŻNE ZE SKRĘTNIKIEM. Możemy teraz dowieść następującego twierdzenia ogólnego: *układ sił, którego parametr nie jest równy zero, jest równoważny ze skretnikiem*. Niech będzie dany układ sił, którego współrzędne są X, Y, Z, L, M, N , przyczym $k = XL + YM + ZN$ nie jest równe zero. Żeby ten układ sił był równoważny ze skretnikiem, którego siła P posiada współrzędne X', Y', Z', L', M', N' , a którego para sił o momencie μ posiada współrzędne L'', M'', N'' , potrzeba i wystarcza, żeby zachodziły następujące warunki:

$$(1) \quad X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z, \quad L' + L'' = L, \quad M' + M'' = M, \quad N' + N'' = N,$$

$$(2) \quad X'L' + Y'M' + Z'N' = XL' + YM' + ZN' = 0,$$

$$(3) \quad \frac{L''}{X'} = \frac{M''}{Y'} = \frac{N''}{Z'} = l = \frac{k}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Równania (3) wyrażają warunek, że moment μ jest równoległy do siły P . Pierwsze trzy równania (1) dają rzuty X', Y', Z' siły P na osi współrzędnych; wstawiając ich wartości w (3), otrzymamy $L'' = lX, M'' = lY, N'' = lZ$, a wskutek tego znajdziemy z ostatnich trzech równań (1) $L' = L - lX, M' = M - lY, N' = N - lZ$. Tym sposobem otrzymujemy wszystkie wielkości, określające siłę i moment pary sił skretnika wyrażone jako funkcje współrzędnych danego układu sił. Oś centralną skretnika, to znaczy ową prostą, w której działa siła P , określają następujące równania:

$$(4) \quad \frac{a}{X} = \frac{b}{Y} = \frac{c}{Z} = \frac{\alpha}{L - lX} = \frac{\beta}{M - lY} = \frac{\gamma}{N - lZ},$$

w których l oznacza wskaźnik skretnika, dający się obliczyć z równania (3). Oś centralną owego skretnika nazywamy osią centralną układu sił.

O prawdziwości twierdzenia podanego można się także innym sposobem przekonać. Niech do punktów m_i będą przyłożone siły P_i ($i = 1, 2, \dots, n$); obierzmy punkt dowolny O , połączony sztywnie z punktami m_i , i przenieśmy każdą siłę P_i do punktu O (art. 110); wypadnie dodać pary sił o momentach μ_i , gdzie μ_i oznacza moment siły P_i względem punktu O . Siły, przeniesione do punktu O , mają wypadkową P , przyłożoną do tego punktu; pary sił μ_i mają parę wypadkową o momencie μ' . Rozłóżmy moment μ' na dwa momenty, mianowicie μ , równoległy do P , i μ'' , prostopadły do P ; siła P , przyłożona do O , razem z parą o momencie μ'' dają się zastąpić siłą, równą P i równoległą do téj siły, lecz nie przyłożoną do punktu O (art. 110); ta siła razem z pozostałą parą o momencie μ tworzy właśnie skretnik, równoważny z danym układem sił P_i . Układy sił, równoważne ze skretnikiem, nazywamy układami sił trzeciego rodzaju.

Układ sił 3-go rodzaju można nieskończenie wielu sposobami zastąpić przez dwie siły skośne. Niech X, \dots, N będą współrzędne takiego układu sił zaś X', \dots, N' i X'', \dots, N'' współrzędne dwu sił P' i P'' . Żeby te dwie siły, były równoważne z układem sił, potrzeba i wystarcza, aby $X' + X'' = X, Y' + Y'' = Y, Z' + Z'' = Z, L' + L'' = L, M' + M'' = M, N' + N'' = N, X'L' + Y'M' + Z'N' = 0,$

$X''L'' + Y''M'' + Z''N'' = 0$. Między dwunastoma współrzędnymi tych dwu sił mamy tylko osiem związków, z czego okazuje się, że zastąpienie danego układu sił przez dwie siły jest możliwe nieskończenie wieloma sposobami.

Parametr danego układu sił wyraża się wzorem

$$(5) \quad k = X'L'' + Y'M'' + Z'N'' + X''L' + Y''M' + Z'N'.$$

Podstawmy w tym wyrażeniu współrzędne α', \dots, γ' i $\alpha'', \dots, \gamma''$ promieni działania sił P' i P'' , to

$$(6) \quad k = P'P''(\alpha'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + \alpha''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma'), \text{ a stąd} \\ \alpha'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + \alpha''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma' = k : P'P''.$$

Lewa strona tego równania przedstawia moment tych dwu prostych, w których działają siły P' i P'' (art. 33), a ponieważ k nie jest równe zeru, przeto te proste nie mogą się wzajemnie przecinać, a zatem obiedwie siły mają względem siebie położenie skośne. Układ takich dwu sił jest równoważny ze skrętnikiem.

Wyczerpawszy wszelkie możliwe wypadki przekształcenia układu sił, przekonywamy się, że układ sił może być równoważny z jedną siłą, lub z parą sił, lub też ze skrętnikiem. Te trzy rodzaje układów sił różnią się od siebie pod względem swój istoty, a dwa układy sił, należące do dwu rodzajów rozmaitych, nie mogą się wzajemnie znosić.

112. DWOISTOŚĆ W MECHANICE. Czytelnik spostrzegł niewątpliwie, że między układami obrotów chwilowych, rozważanymi w kinematyce, a układami sił, rozważanymi w statyce, zachodzi pewna analogija, która najdobitniej wyraża się w ogólnych wypadkach przekształcenia owych układów. Siłę i obrót chwilowy możemy takimżesamym sposobem przedstawić geometrycznie, mianowicie zapomocą odcinka prostoliniowego; pojęcie momentu stosuje się do obrotu chwilowego i do siły; jak z dwu obrotów chwilowych przy wiadomych warunkach utworzyliśmy pojęcie pary obrotów, tak z dwu sił przy warunkach analogicznych powstało pojęcie pary sił; jak nareszcie układy obrotów chwilowych podzieliliśmy na trzy oddzielne rodzaje, a to według tego, czy one są równoważne z jednym obrotem, czy też z parą obrotów, czy też ze skrętem, tak otrzymaliśmy powyżej analogicznie trzy oddzielne rodzaje układów sił, a nazwa «skrętnik» została utworzona na podobieństwo nazwy «skręt». Pojęciu parametru, wskaźnika i osi centralnej skrętu odpowiada pojęcie parametru, wskaźnika i osi centralnej skrętnika. Śledząc uważnie znakowanie, jakiego używaliśmy w rozdziale II i w rozdziale bieżącym, spostrzeżemy, że, jeżeli litery alfabetu greckiego, używane w rozdziale II, a mianowicie: Ξ , H , Z , A , M , N , α i λ zastąpimy odpowiednio literami alfabetu łacińskiego, mianowicie: X , Y , Z , L , M , N , k i l , to natenczas z wzorów kinematyki obrotów chwilowych otrzymamy analogiczne wzory statyki układów sztywnych, które wyrażają odpowiednie twierdzenia o siłach, przyłożonych do takich układów.

Ta analogija pozwala nam dostrzec następującą «dwoistość», zachodzącą między obrotem chwilowym a siłą: *jeżeli w twierdzeniu o układzie obrotów*

chwilowych, udzielonych układowi sztywnemu, podstawimy siłę zamiast obrotu, a parę sił zamiast pary obrotów, otrzymamy twierdzenie odpowiednie o układzie sił, przyłożonych do układu sztywnego. To podstawienie należy tak rozumieć, że zamiast obrotu podstawiamy siłę, która działa wzdłuż osi obrotu, a której wielkość jest przedstawiona przez tę samą ilość jednostek, co prędkość kątowa obrotu; podobnie rozumiemy podstawienie pary sił zamiast pary obrotów. Nawzajem możemy z twierdzenia o układzie sił otrzymać twierdzenie odpowiednie o układzie obrotów chwilowych.

Ta dwoistość ma z tego powodu ważne znaczenie, że pozwala wiele twierdzeń statyki wypowiedzieć bez osobnego dowodzenia. Z art. 33-go wynika, że *parametr układu dwu sił równa się sześciokrotnej objętości czworościanu, którego krawędziami przeciętymi są wielkości tych sił, odcięte na ich promieniach działania.* Podobnie wyrazimy twierdzenie Chasles'a o siłach (art. 33): *układ sił jest równoważny z jedną siłą, jeżeli suma algebryczna objętości czworościanów, wystawionych na każdym dwu siłach, odciętych na ich promieniach działania, jest równa zeru.* Podobnie otrzymamy twierdzenie następujące (art. 35): *promienie działania czterech sił, znoszących się nawzajem, należą do tegoż samego układu tworzących hiperbolojdy jednopowłokowej.*

Okręślenia osi niezależnych obrotu, współrzędnych jednorodnych skrętu lub obrotu chwilowego i t. p., podane w art. 36-ym i 37-ym, mogą być bez trudności przeniesione do statyki, i tym sposobem można otrzymać nowe związki między siłami, stanowiącymi układy równoważne. Pozostawiamy czytelnikowi wyznaczenie tych związków.
