

## ROZDZIAŁ V.

### RUCH WZGLĘDNY.

---

**58. CECHY RUCHU WZGLĘDNEGO.** Polegając na prawie niezależności ruchów (art. 1), przyjmowaliśmy dotąd, że układ odniesienia jest zasadniczy i że punkt lub układ niezmienny punktów, którego ruchem się zajmujemy, posiada ruch postępowy prostoliniowy i jednostajny wraz z układem odniesienia, a nadto porusza się względem tego ostatniego układu. W zagadnieniach, które będą stanowiły przedmiot tego rozdziału, nie uczynimy powyższych założeń, lecz przyjmujemy, że układ odniesienia ma jakikolwiek wiadomy ruch bezwzględny, tudzież, że układ niezmienny, którym się zajmujemy, posiada także wiadomy ruch bezwzględny, a zadaniem naszym będzie rozpoznanie ruchu tego ostatniego układu względem układu odniesienia.

Aby określić cechy ruchu względnego, rozważmy naprzód ruch jednego punktu  $m$  względem układu odniesienia. Jako układ zasadniczy obierzmy prostokątny układ współrzędnych o osiach  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Az$ , wystawionych w dowolnym punkcie  $A$  w przestrzeni, a co do tego układu przyjmujemy, stosownie do art. 1-go, że jest nieruchomy. Dla krótkości, będziemy ten układ oznaczali symbolem  $Axyz$ . W poruszającym się układzie odniesienia obierzmy dowolnie punkt  $M$  za początek układu prostokątnego współrzędnych o osiach  $M\xi$ ,  $M\eta$ ,  $M\zeta$ , który się razem z tym układem porusza. Ten układ współrzędnych, który oznaczmy symbolem  $M\xi\eta\zeta$ , może przedstawiać układ odniesienia. Punkt  $m$ , nie należący do układu odniesienia, będzie miał podczas ruchu dwojakiego rodzaju współrzędne, mianowicie współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  względem  $Axyz$ , które określają jego miejsce w przestrzeni, a zatem jego ruch bezwzględny, tudzież współrzędne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  względem  $M\xi\eta\zeta$ , które właśnie określają ruch tego punktu względem układu odniesienia. W dotychczasowych zagadnieniach były współrzędne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  punktu  $m$  wielkościami stałymi; w zagadnieniach tego rozdziału musimy te współrzędne uważać za funkcje czasu.

Niech punkt  $m$  zajmuje w czasie  $t$  pewne wiadome miejsce w przestrzeni;

wyznamy taki punkt  $\mu$ , którego położenie względem układu  $Axyz$  byłoby toż samo, co położenie punktu  $m$  względem układu  $M\xi\eta\zeta$ . Niech po upływie czasu  $t + dt$  punkt  $m$  zajmie w przestrzeni miejsce  $m'$ ; wyznaczmy znów taki punkt  $\mu'$ , którego położenie względem  $Axyz$  byłoby toż samo, co położenie punktu  $m'$  względem  $M\xi\eta\zeta$  w czasie  $t + dt$ . Postępując podobnie w każdej chwili, połączmy następnie z sobą punkty  $\mu, \mu', \mu'', \dots$ ; otrzymamy pewną linią krzywą  $(\mu)$ , która, pod względem kształtu i wymiarów liniowych, przedstawiać będzie tor względny punktu  $m$  względem układu  $M\xi\eta\zeta$ . Jeżeli przedstawimy sobie, że punkt  $\mu$  porusza się po tej krzywej, podczas gdy punkt  $m$  porusza się po swoim torze bezwzględny ( $m$ ), i że obadwa punkty przybywają jednocześnie do punktów odpowiednich  $\mu$  i  $m, \mu'$  i  $m', \mu''$  i  $m'',$  i t. d., to cechy ruchu bezwzględnego punktu  $\mu$  będą właśnie cechami ruchu punktu  $m$  względem układu odniesienia.

Prędkość punktu  $\mu$  w miejscu  $\mu$ , odpowiadającym miejscu  $m$  na torze bezwzględny ( $m$ ), nazywamy prędkością względną punktu  $m$  w miejscu  $m$ , przyspieszenie zaś punktu  $\mu$  w miejscu  $\mu$  nazywamy przyspieszeniem względnym punktu  $m$  w miejscu  $m$  — względem układu odniesienia. Określamy więc ruch względny punktu zapomocą cech podobnych, jak ruch bezwzględny; rozmaite przeto określenia innych pojęć kinematycznych, podane dotąd dla ruchu bezwzględnego, możemy stosować do ruchu względnego.

Jeżeli zamiast ruchu jednego punktu rozważamy ruch układu niezmiennego względem pewnego układu odniesienia, to otrzymamy dla każdego punktu układu odpowiednio tor względny, prędkość względną i t. d., a te cechy, wzięte dla wszystkich punktów układu, określają ruch względny tego układu.

**59. PRĘDKOŚĆ WZGLĘDNA.** Wyobraźmy sobie, że punkt, poruszający się względem układu odniesienia, jest podczas elementu czasu stale połączony z tym układem (a zatem nie posiada ruchu względnego); natenczas prędkość, którejby punkt przy tym stałym połączeniu nabył wskutek ruchu chwilowego układu odniesienia, nazywamy prędkością unoszenia tego punktu (art. 4). Ponieważ znamy ruch bezwzględny układu odniesienia, tudzież położenie punktu w przestrzeni, przeto możemy, według reguł, podanych w rozdziale III-im, wyznaczyć prędkość unoszenia punktu.

Niech długość  $ma$  (fig. 32) przedstawia prędkość unoszenia  $v_u$ , a długość  $mb$  prędkość względną  $v_w$  punktu  $m$  w czasie  $t$ . Stosując postępowanie, podane w art. 4-ym przy składzie dwu prędkości, widzimy, że, gdyby punkt

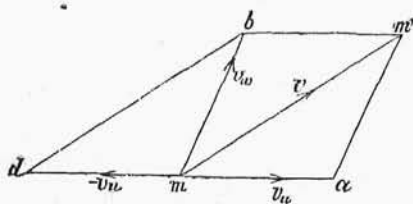


Fig. 32.

$m$  nie posiadał ruchu względem układu odniesienia, po upływie jednostki czasu znajdowałby się w przestrzeni w miejscu  $a$ ; ponieważ atoli ten punkt porusza się względem układu odniesienia z prędkością  $mb$ , przeto, gdy do długości  $ma$  dodamy długość  $am'$ , przedstawiającą prędkość względną, otrzymamy

punkt  $m'$  jako miejsce punktu w przestrzeni po upływie jednostki czasu. Przekątna więc  $mm'$  równoległoboku  $mam'b$  przedstawia prędkość bezwzględną  $v$  punktu. Mamy zatem twierdzenie: *prędkość bezwzględna punktu jest wypadkową jego prędkości unoszenia i jego prędkości względnej.*

Przesuńmy przez punkt  $b$  prostą  $bd$ , równoległą do przekątnej  $m'm$  i równą tej przekątnej; otrzymamy równoległobok  $mm'bd$ , którego przekątna  $mb$  przedstawia prędkość względną. Ponieważ, jak wynika z figury, długość  $md$  jest równa prędkości unoszenia  $ma$  i posiada kierunek wprost przeciwny kierunkowi tej prędkości, przeto otrzymujemy następujące twierdzenie, pozwalające wyznaczyć prędkość względną punktu: *prędkość względna punktu jest wypadkową jego prędkości bezwzględnej i jego prędkości unoszenia, wziętej w kierunku przeciwnym.*

Na podstawie więc tego twierdzenia wyznaczamy prędkość względną punktu zapomocą wiadomej metody składu dwu prędkości. Żeby zrozumieć właściwe znaczenie podanego twierdzenia, zważmy, że bezwzględny ruch chwilowy układu odniesienia jest wogółności skretem około pewnej osi  $S$  z pewną prędkością kątową  $\Omega$  i z pewną prędkością  $V$  ruchu postępowego. Aby punktowi udzielić jego prędkości unoszenia w kierunku wprost przeciwnym, połączmy go stale z układem odniesienia, i układowi razem z punktem nadajmy skręt chwilowy około osi  $S$  z prędkościami —  $\Omega$  i —  $V$ . Wskutek tego ruchu układ odniesienia przyjdzie chwilowo do spoczynku, a punkt nabędzie prędkości —  $v_u$ . Jeżeli do tej prędkości —  $v_u$  dodamy we właściwym kierunku prędkość bezwzględną  $v$  tego punktu, to ze składu tych dwu prędkości jednocześnie wyniknie prędkość względną  $v_w$  tego punktu. Widzimy zatem, że powyższe twierdzenie wyraża właściwie następującą regułę wyznaczenia prędkości względnej: *aby wyznaczyć prędkość względną punktu, połączmy go z układem odniesienia i układowi wraz z tym punktem nadajmy taki ruch chwilowy, żeby układ odniesienia przyszedł chwilowo do spoczynku; wówczas, składając prędkość, której punkt nabiera wskutek takiego ruchu, z jego prędkością bezwzględną, otrzymamy prędkość względną tego punktu.*

Kierunek prędkości względnej jest kierunkiem stycznej do toru względnego ( $\mu$ ) punktu  $m$  (art. 58). W przypadku, gdy punkt  $m$  jest w spoczynku bezwzględnym, prędkość względna tego punktu jest równa i wprost przeciwna jego prędkości unoszenia. Jeżeli prędkość bezwzględna punktu jest równa jego prędkości unoszenia (co do wielkości i kierunku), to punkt będzie w spoczynku względem układu odniesienia.

**60.** Podana wyżej reguła ogólna pozwala bezpośrednio wyznaczyć ruch chwilowy układu niezmiennego względem układu odniesienia, jeżeli znamy bezwzględne ruchy chwilowe obudwu układów. Oznaczmy symbolicznie przez  $R_1$  ruch chwilowy układu  $A_1$ , a przez  $R_2$  ruch chwilowy układu  $A_2$ ; według powyższej reguły, ruch układu  $A_1$  względem  $A_2$  jest wypadkową ruchów  $R_1$  i —  $R_2$ , a ruch układu  $A_2$  względem  $A_1$  jest wypadkową ruchów —  $R_1$  i  $R_2$ . Symbole  $R_i$  i —  $R_i$  oznaczają wogółności dwa skrety chwilowe, znoszące się nawzajem, a zatem dwa skrety około tej samej osi, przyczym obiedwie prędko-

ści jednego skrętu są odpowiednio równe i wprost przeciwne prędkościom drugiego skrętu.

Według więc tego twierdzenia otrzymujemy ogólnie względny ruch chwilowy układu przez skład dwu chwilowych skrętów tego układu, z czego wnosimy, że *ruch chwilowy układu niezmiennego względem poruszającego się układu odniesienia jest wogólności skrętem*. Oś tego skrętu nazywamy osią chwilową ruchu względnego tego układu; ona może być uważana, popierwsze, za prostą układu, którego ruch względny wyznaczamy, i powtórę, za prostą poruszającego się układu odniesienia. Miejscem geometrycznym tych osi w pierwszym układzie jest pewna powierzchnia skośna; a miejscem geometrycznym tych osi w układzie odniesienia jest także pewna powierzchnia skośna, styczna do pierwszej wzdłuż osi chwilowej ruchu względnego. Powierzchnia osi chwilowych w układzie, którego ruch względny wyznaczamy, toczy się po odpowiedniej powierzchni w układzie odniesienia i ślizga się na tej powierzchni wzdłuż osi chwilowej. Przez taki ruch obudwu powierzchni wywołujemy ciągły ruch względny układu rozważanego.

Ruch chwilowy układu  $A_1$  względem układu  $A_2$  możemy rozmaitymi sposobami rozłożyć na trzy obroty około osi pewnego układu współrzędnych i na trzy ruchy postępowe w kierunkach tychże osi. Obrawszy w przestrzeni nieruchomy układ osi współrzędnych, możemy współrzędne ruchu względnego w każdej chwili wyznaczyć względem tych trzech osi; możemy także czytać z układem  $A_1$ , czytając z układem odniesienia  $A_2$ , połączyć te trzy osi współrzędnych i brać współrzędne ruchu chwilowego względem jednego lub drugiego z tych dwu układów osi.

**61. PRZYŚPIESZENIE WZGLĘDNE.** Niech (art. 58) trzy osi prostokątne  $Ax, Ay, Az$  przedstawiają układ zasadniczy, a trzy inne osi  $M\xi, M\eta, M\zeta$  poruszający się układ odniesienia; punkt  $m$ , nie należący do tego układu, ma współrzędne bezwzględne  $x, y, z$  i współrzędne względne  $\xi, \eta, \zeta$ . Jeżeli  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$  oznaczają dostawy kierunkowe osi odpowiednio  $M\xi, M\eta, M\zeta$  względem osi układu  $Axyz$ , a  $x_0, y_0, z_0$  współrzędne punktu  $M$ , to między obydwoma rodzajami współrzędnych punktu  $m$  zachodzą związki, podane w art. 43-im. Pierwsze pochodne  $x', y', z'$  współrzędnych  $x, y, z$  względem czasu przedstawiają odpowiednio rzuty prędkości bezwzględnej  $v$  punktu  $m$  na osi układu  $Axyz$ , zaś pierwsze pochodne  $\xi', \eta', \zeta'$  współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$  tegoż punktu względem czasu przedstawiają odpowiednio rzuty jego prędkości względnej  $v_w$  na osi układu  $M\xi\eta\zeta$ . Prędkość zatem względną tego punktu jest

$$(1) \quad v_w = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}.$$

Różniczkując równania (2) art. 43-go względem czasu, przyczem wszystkie wielkości, wchodzące w te równania, zmieniają się, otrzymamy

$$(2) \quad \begin{cases} x' = x'_0 + a_1\xi' + a_2\eta' + a_3\zeta' + a'_1\xi + a'_2\eta + a'_3\zeta, \\ y' = y'_0 + b_1\xi' + b_2\eta' + b_3\zeta' + b'_1\xi + b'_2\eta + b'_3\zeta, \\ z' = z'_0 + c_1\xi' + c_2\eta' + c_3\zeta' + c'_1\xi + c'_2\eta + c'_3\zeta. \end{cases}$$

Aby otrzymać rzuty  $v_{ux}$ ,  $v_{uy}$ ,  $v_{uz}$  prędkości unoszenia  $v_u$  tego punktu na osi układu  $Axyz$ , należy równania (2) art. 43-go różniczkować względem czasu, uważając w tych równaniach spółrzedne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  za stałe. Otrzymamy więc

$$(3) \quad \begin{cases} v_{ux} = x'_0 + a'_1\xi + a'_2\eta + a'_3\zeta, \\ v_{uy} = y'_0 + b'_1\xi + b'_2\eta + b'_3\zeta, \\ v_{uz} = z'_0 + c'_1\xi + c'_2\eta + c'_3\zeta. \end{cases}$$

Ponieważ  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  oznaczają odpowiednio rzuty prędkości względnej  $v_u$  na osi układu  $M\xi\eta\zeta$ , przeto rzuty  $v_{wx}$ ,  $v_{wy}$ ,  $v_{wz}$  téjże prędkości na osi układu  $Axyz$  będą odpowiednio

$$(4) \quad v_{wx} = a_1\xi' + a_2\eta' + a_3\zeta', \quad v_{wy} = b_1\xi' + b_2\eta' + b_3\zeta', \quad v_{wz} = c_1\xi' + c_2\eta' + c_3\zeta'.$$

Z równań (3), (4) i (2) wynika

$$(5) \quad v_{wx} = x' - v_{ux}, \quad v_{wy} = y' - v_{uy}, \quad v_{wz} = z' - v_{uz}.$$

Te równania wyrażają analitycznie twierdzenie, poprzednio okazane, że prędkość względną punktu jest wypadkową prędkości bezwzględnej i prędkości unoszenia, wziętej w kierunku przeciwnym.

Drugie pochodne  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  spółrzednych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  względem czasu wyrażają rzuty przyspieszenia bezwzględnego punktu  $m$  na osi układu  $Axyz$ , a drugie pochodne  $\xi''$ ,  $\eta''$ ,  $\zeta''$  spółrzednych  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  względem czasu wyrażają odpowiednio rzuty jego przyspieszenia względnego na osi układu  $M\xi\eta\zeta$ . Wyobraźmy sobie, że punkt  $m$  jest połączony z układem odniesienia i bierze udział w ruchu tego układu; wówczas przyspieszenie, którego by ten punkt nabył wskutek połączenia z układem odniesienia, nazywamy przyspieszeniem unoszenia tego punktu. Możemy to przyspieszenie określić także jako przyspieszenie bezwzględne tego punktu w układzie odniesienia, z którym punkt  $m$  chwilowo się schodzi. Różniczkując równania (2) względem czasu, otrzymamy

$$(6) \quad \begin{cases} x'' = x''_0 + a_1\xi'' + a_2\eta'' + a_3\zeta'' + a_1''\xi + a_2''\eta + a_3''\zeta + 2(a_1'\xi' + a_2'\eta' + a_3'\zeta'), \\ y'' = y''_0 + b_1\xi'' + b_2\eta'' + b_3\zeta'' + b_1''\xi + b_2''\eta + b_3''\zeta + 2(b_1'\xi' + b_2'\eta' + b_3'\zeta'), \\ z'' = z''_0 + c_1\xi'' + c_2\eta'' + c_3\zeta'' + c_1''\xi + c_2''\eta + c_3''\zeta + 2(c_1'\xi' + c_2'\eta' + c_3'\zeta'). \end{cases}$$

Przyspieszenie względne  $\gamma_w$  punktu  $m$  wyrazi się zapomocą wzoru

$$(7) \quad \gamma_w = \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$

a jego rzuty  $\gamma_{wx}$ ,  $\gamma_{wy}$ ,  $\gamma_{wz}$  na osi układu  $Axyz$  będą odpowiednio

$$(8) \quad \gamma_{wx} = a_1\xi'' + a_2\eta'' + a_3\zeta'', \quad \gamma_{wy} = b_1\xi'' + b_2\eta'' + b_3\zeta'', \quad \gamma_{wz} = c_1\xi'' + c_2\eta'' + c_3\zeta''.$$

Rzuty  $\gamma_{ux}$ ,  $\gamma_{uy}$ ,  $\gamma_{uz}$  przyspieszenia unoszenia  $\gamma_u$  na osi układu  $Axyz$  otrzymamy według danego określenia, różniczkując równania (3) względem czasu przy stałych wartościach na  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ; będzie więc

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_{ux} = x''_0 + a_1''\xi + a_2''\eta + a_3''\zeta, \\ \gamma_{uy} = y''_0 + b_1''\xi + b_2''\eta + b_3''\zeta, \\ \gamma_{uz} = z''_0 + c_1''\xi + c_2''\eta + c_3''\zeta. \end{cases}$$

Kładąc jeszcze

$$(10) \quad \begin{cases} \Gamma_x = 2(a_1'\xi' + a_2'\eta' + a_3'\zeta'), \\ \Gamma_y = 2(b_1'\xi' + b_2'\eta' + b_3'\zeta'), \\ \Gamma_z = 2(c_1'\xi' + c_2'\eta' + c_3'\zeta'), \end{cases}$$

z równań (8), (9), (10) i (6) otrzymamy

$$(11) \quad \begin{cases} \gamma_{wx} = x'' - \gamma_{ux} - \Gamma_x, \\ \gamma_{wy} = y'' - \gamma_{uy} - \Gamma_y, \\ \gamma_{wz} = z'' - \gamma_{uz} - \Gamma_z. \end{cases}$$

Z tych równań okazuje się, że przyspieszenie względne nie składa się z samych tylko przyspieszenia bezwzględnego i przyspieszenia unoszenia, lecz że do tych dwu przyspieszeń trzeba jeszcze dołączyć, w odpowiednim kierunku wzięte, pewne przyspieszenie  $\Gamma$ , którego rzuty  $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$  dają równania (10).

**62.** Aby rozpoznać znaczenie przyspieszenia dodatkowego  $\Gamma$ , rzuty  $\xi', \eta', \zeta'$  prędkości względnej punktu  $m$  na osi układu  $M\xi\eta\zeta$  obliczmy z rzutów  $v_{wx}, v_{wy}, v_{wz}$  tej samej prędkości na osi układu  $Axyz$ . Mamy do tego równania następujące:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi' = a_1 v_{wx} + b_1 v_{wy} + c_1 v_{wz}, \\ \eta' = a_2 v_{wx} + b_2 v_{wy} + c_2 v_{wz}, \\ \zeta' = a_3 v_{wx} + b_3 v_{wy} + c_3 v_{wz}. \end{cases}$$

Pomnożmy obie strony tych równań naprzód odpowiednio przez  $a_1', a_2', a_3'$ , następnie przez  $b_1', b_2', b_3'$ , a na koniec przez  $c_1', c_2', c_3'$ , i za każdym razem dodajmy je do siebie; otrzymane sumy, po pomnożeniu przez 2, przedstawiać będą odpowiednio  $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ . Obliczmy nadto podług równań (4) art. 43-go składowe  $\Xi, H, Z$  prędkości kątowej  $\Omega$  obrotu chwilowego układu odniesienia i uwzględnijmy wartości tych składowych, tudzież związki między dostawami  $a_i, b_i, c_i$ , podane w art. 43-im; dojdziemy w ten sposób do równań następujących:

$$(2) \quad \begin{cases} \Gamma_x = 2(H \cdot v_{wz} - Z \cdot v_{wy}), \\ \Gamma_y = 2(Z \cdot v_{wx} - \Xi \cdot v_{wz}), \\ \Gamma_z = 2(\Xi \cdot v_{wy} - H \cdot v_{wx}). \end{cases}$$

Z nich wynika

$$(3) \quad \Gamma^2 = \Gamma_x^2 + \Gamma_y^2 + \Gamma_z^2 = 4[\Omega^2 v_w^2 - (\Xi \cdot v_{wx} + H \cdot v_{wy} + Z \cdot v_{wz})^2].$$

Oznaczmy przez  $S$  oś chwilową ruchu bezwzględnego układu odniesienia, a przez  $(S, v_w)$  kąt, który ta oś, wzięta w kierunku odciętej na nią prędkości  $\Omega$ , tworzy z kierunkiem prędkości względnej  $v_w$  punktu  $m$ ; wówczas

$$\Xi \cdot v_{wx} + H \cdot v_{wy} + Z \cdot v_{wz} = \Omega v_w \cdot \cos(S, v_w),$$

a zatem, według (3),

$$(4) \quad \Gamma = 2\Omega v_w \cdot \sin(S, v_w).$$

Gdy zaś pomnożymy obie strony równań (2) naprzód odpowiednio przez



$\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$ , a następnie przez  $v_{wx}$ ,  $v_{wy}$ ,  $v_{wz}$ , i za każdym razem dodamy je do siebie, to otrzymamy

$$(5) \quad \Xi \Gamma_x + H \Gamma_y + Z \Gamma_z = 0, \quad v_{wx} \cdot \Gamma_x + v_{wy} \cdot \Gamma_y + v_{wz} \cdot \Gamma_z = 0.$$

Z równania (4) przedewszystkiem wynika, że nie byłoby przyspieszenia  $\Gamma$ , gdyby  $\Omega = 0$ , t. j. gdyby chwilowy ruch układu odniesienia był tylko ruchem postępowym. W tym zatem przypadku z równań (11) art. 61-go otrzymujemy następujące twierdzenie: *jeżeli ruch chwilowy układu odniesienia jest ruchem postępowym, natenczas przyspieszenie względne punktu jest równoważne jego przyspieszeniu bezwzględnemu i jego przyspieszeniu unoszenia, wziętemu w kierunku przeciwnym.*

Z tego przeto twierdzenia wynika, że tylko ruch obrotowy układu odniesienia przyczynia się do wytworzenia przyspieszenia  $\Gamma$ . Z równań nadto (5) okazuje się, że przyspieszenie  $\Gamma$  jest prostopadłe do osi skrętu chwilowego układu odniesienia, a zarazem prostopadłe do kierunku prędkości względnej punktu. Jeżeli więc przez punkt  $m$  poprowadzimy prostą  $O$ , równoległą do osi chwilowej  $S$ , i wyprowadzimy z tego punktu prostopadłą do  $O$  i  $v_w$ , to ta prostopadła będzie równoległa do przyspieszenia  $\Gamma$ . Żeby rozstrzygnąć, który z dwu kierunków tej prostopadłej jest kierunkiem przyspieszenia  $\Gamma$ , porównajmy równania (2) z równaniami (3) art. 24-go; otrzymamy stąd następującą regułę: obierzmy na kierunku prędkości względnej punktu  $m$  dowolny punkt  $\mu$  i obróćmy ten punkt około prostej  $O$  w kierunku obrotu  $\Omega$  układu odniesienia około osi  $S$ ; kierunek prędkości punktu  $\mu$  wskutek tego obrotu będzie kierunkiem przyspieszenia  $\Gamma$ .

Według równań (11) art. 61-go otrzymamy przyspieszenie względne  $\gamma_w$ , jeżeli do przyspieszenia bezwzględnego  $\gamma$  i do przyspieszenia unoszenia, wziętego w kierunku przeciwnym, —  $\gamma_u$ , dołączymy przyspieszenie —  $\Gamma$ , t. j. powyższe przyspieszenie dodatkowe  $\Gamma$ , wzięte w kierunku przeciwnym. Przyspieszenie —  $\Gamma$ , którego wielkość wyznacza równanie (4), a którego kierunek określamy według podanej dopięroco reguły jako przeciwny kierunkowi prędkości punktu  $\mu$ , nazywamy przyspieszeniem odśrodkowym złożonym. Mamy tedy następujące twierdzenie ogólne: *przyspieszenie względne punktu jest wogólności równoważne trzem przyspieszeniom, mianowicie: przyspieszeniu bezwzględnemu tego punktu, jego przyspieszeniu unoszenia, wziętemu w kierunku przeciwnym, i przyspieszeniu odśrodkowemu złożonemu (twierdzenie Coriolis'a).*

Przyspieszenie odśrodkowe złożone jest równe zeru nietylko wtedy, kiedy  $\Omega = 0$ , lecz także w przypadku, gdy kierunek prędkości  $v_w$  jest równoległy do osi  $S$ , i w przypadku, gdy  $v_w = 0$ , jak to wynika z równania (4). Jeżeli więc prędkość względna punktu jest równoległa do osi skrętu układu odniesienia, lub punkt jest chwilowo w spoczynku względem tego układu, to przyspieszenie względne wyznacza się według twierdzenia szczególnego, podanego poprzednio.

Wstawmy w równania (11) art. 61-go dla  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$ ,  $\Gamma_z$  wyrażenia (2); otrzymamy

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma_{wx} = x'' - \gamma_{ux} - 2(H \cdot v_{wz} - Z \cdot v_{wy}), \\ \gamma_{wy} = y'' - \gamma_{uy} - 2(Z \cdot v_{wx} - \Xi \cdot v_{wz}), \\ \gamma_{wz} = z'' - \gamma_{uz} - 2(\Xi \cdot v_{wy} - H \cdot v_{wx}). \end{cases}$$

Według tych równań możemy także podać wartości składowych  $\xi''$ ,  $\eta''$ ,  $\zeta''$  przyspieszenia względnego, odniesionych do osi układu  $M\xi\eta\zeta$ . Oznaczmy w tym celu przez  $\gamma_\xi$ ,  $\gamma_\eta$ ,  $\gamma_\zeta$  rzuty przyspieszenia bezwzględnego punktu na odpowiednie osi układu  $M\xi\eta\zeta$ , przez  $\gamma_{u\xi}$ ,  $\gamma_{u\eta}$ ,  $\gamma_{u\zeta}$  rzuty jego przyspieszenia unoszenia na też osi, a przez  $p$ ,  $q$ ,  $r$  rzuty prędkości kątowej  $\Omega$  na też same osi; otrzymamy, według (6),

$$(7) \quad \begin{cases} \xi'' = \gamma_\xi - \gamma_{u\xi} - 2(q\zeta' - r\eta'), \\ \eta'' = \gamma_\eta - \gamma_{u\eta} - 2(r\xi' - p\zeta'), \\ \zeta'' = \gamma_\zeta - \gamma_{u\zeta} - 2(p\eta' - q\xi'), \end{cases}$$

przyczym

$$(8) \quad \gamma_\xi = a_1 x'' + b_1 y'' + c_1 z'', \quad \gamma_\eta = a_2 x'' + b_2 y'' + c_2 z'', \quad \gamma_\zeta = a_3 x'' + b_3 y'' + c_3 z'',$$

$$(9) \quad \gamma_{u\xi} = a_1 \gamma_{ux} + b_1 \gamma_{uy} + c_1 \gamma_{uz}, \quad \gamma_{u\eta} = a_2 \gamma_{ux} + b_2 \gamma_{uy} + c_2 \gamma_{uz}, \quad \gamma_{u\zeta} = a_3 \gamma_{ux} + b_3 \gamma_{uy} + c_3 \gamma_{uz},$$

$$(10) \quad p = a_1 \Xi + b_1 H + c_1 Z, \quad q = a_2 \Xi + b_2 H + c_2 Z, \quad r = a_3 \Xi + b_3 H + c_3 Z.$$

Jeżeli układ odniesienia obraca się jednostajnie około osi stałej w przestrzeni, wtedy przyspieszenie unoszenia punktu uważanego będzie przyspieszeniem dośrodkowym (art. 11), ponieważ przyspieszenie styczne jest równe zeru. Przyspieszenie zatym unoszenia, wzięte w kierunku przeciwnym, —  $\gamma_u$ , będzie miało kierunek prostopadły, spuszczonej z tego punktu na oś obrotu, jednak od osi obrotu ku temu punktowi; z tego powodu nazywamy je w tym przypadku przyspieszeniem odśrodkowym tego punktu. Jeżeli jeszcze przyjmiemy, że  $v_w = 0$ , to będzie  $\Gamma = 0$ , otrzymamy więc następujące twierdzenie szczególne: *jeżeli układ odniesienia obraca się jednostajnie około osi stałej, a punkt nie posiada prędkości względnej, to przyspieszenie względne punktu jest równoważne jego przyspieszeniu bezwzłędnemu i przyspieszeniu odśrodkowemu.*

**63. PRZYSPIESZENIE SPADKU PIONOWEGO.** Do najważniejszych zagadnień o ruchu względnym należy spadek ciał na ziemię przy uwzględnieniu obrotu dziennego ziemi. Przyjmujemy w tych zagadnieniach, że ziemia ma kształt kuli.

Jeżeli mamy na powierzchni morza punkt  $m$  (fig. 33), będący w spoczynku względem ziemi, to dostrzegane w tym miejscu przyspieszenie  $g$  spadku pionowego jest przyspieszeniem punktu  $m$  względem obracającej się ziemi. Ponieważ prędkość względna punktu jest równa zeru, przeto przyspieszenie  $g$  będzie wypadkowym przyspieszenia bezwzględnego i przyspieszenia odśrodkowego (art. 62). W teorii przyciągania dowiemy się (art. 123), że przyspieszenie punktu  $m$  miałoby dokładnie kierunek ku środkowi ziemi, gdyby ziemia była w spoczynku; to zatym przyspieszenie  $G$  przedstawia przyspieszenie bez-



względne punktu, a tym samym  $G$  przedstawia wielkość przyspieszenia spadku na biegunach kuli ziemskiej. Obrót dzienny ziemi około jej osi NS jest jednostajny, a przyspieszenie odśrodkowe punktu ma kierunek promienia równoleżnika tego punktu i jest zwrócone od osi NS nazewnątrz. Składając przyspieszenie  $G$  z przyspieszeniem odśrodkowym punktu  $m$ , otrzymamy żądane przyspieszenie  $g$  w tym punkcie.

Niech  $\omega$  będzie prędkością kątową obrotu ziemi,  $\lambda$  szerokością geograficzną punktu  $m$ ,  $R$  promieniem ziemi,  $\rho$  promieniem równoleżnika, przez ten punkt przechodzącego. Przyspieszenie odśrodkowe punktu  $m$  wynosi  $\omega^2 \rho$  (art. 22); jeżeli więc na promieniu  $mo$  odetniemy długość  $ma = G$ , a na prostopadłej do osi NS długość  $mb = \omega^2 \rho$ , i wystawimy równoległobok  $mabc$ , to przekątna  $mc$  będzie przedstawiała przyspieszenie spadku punktu  $m$ . Okazuje się przedewszystkiem, że przyspieszenie  $g$  nie ma wogółności kierunku ku środkowi ziemi; w biegunach N i S przyspieszenie odśrodkowe jest równe zero, a na równiku EW ma kierunek promienia ziemi; w biegunach zatym i na równiku przyspieszenie spadku ma kierunek ku środkowi ziemi, a zresztą nie ma go w żadnym innym punkcie.

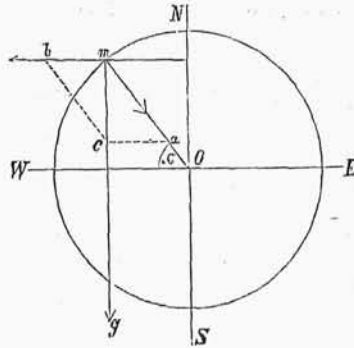


Fig. 33.

Z równoległoboku wzmiankowanego wynika

$$\begin{aligned} g^2 &= G^2 + \omega^4 \rho^2 - 2G\omega^2 \rho \cdot \cos \lambda, & \text{a ponieważ} \\ \rho &= R \cos \lambda, & \text{przeto} \\ (1) \quad G^2 - 2G\omega^2 R \cos^2 \lambda + \omega^4 R^2 \cos^2 \lambda - g^2 &= 0. \end{aligned}$$

To równanie daje dwie wartości na  $G$ ; ponieważ jednak dla  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  jest  $G = g$ , przeto należy brać tylko tę wartość, która odpowiada pierwiastkowi dodatniemu. Mamy zatem

$$G = \omega^2 R \cos^2 \lambda + \sqrt{g^2 - \omega^4 R^2 \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda},$$

czyli

$$(2) \quad G = \omega^2 R \cdot \cos^2 \lambda + \sqrt{g^2 - \frac{\omega^4 R^2}{4} \sin^2 2\lambda}.$$

Promień ziemi wynosi  $6378 \cdot 10^3 m$ , a długość dnia gwiazdowego wynosi 86 164 sekundy; jest przeto  $\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0,000073$ . Wyraz  $\frac{\omega^4 R^2}{4} \sin^2 2\lambda$  przybiera największą wartość przy  $\lambda = \frac{\pi}{4}$ , a ta wartość wynosi  $\frac{\omega^4 R^2}{4} = 0,00029 m$ . Ponieważ w średnich szerokościach przyspieszenie  $g$  wynosi prze-

szło 9 metrów na sekundę, przeto możemy wielkość  $\frac{\omega^4 R^2}{4} \sin^2 2\lambda$ , bardzo małą względem  $g^2$ , zaniedbać, t. j. rozwinąć  $G$  aż do wyrazów tego rzędu co  $\omega^2$ , t. j. wziąć z wystarczającym przybliżeniem

$$(3) \quad G = g + \omega^2 R \cdot \cos^2 \lambda,$$

a podstawiając tu wartość  $\omega^2 R$  i biorąc metr za jednostkę długości, przyjąć

$$(4) \quad G = g + 0,03399 \cos^2 \lambda.$$

Ponieważ  $G$  jest przyspieszeniem spadku na biegunach ziemi, przeto z równania

$$(5) \quad g = G - \omega^2 R \cdot \cos^2 \lambda$$

okazuje się, że przyspieszenie spadku rośnie jednocześnie z szerokością geograficzną, przybierając na biegunach największą wartość  $G$ . Niech  $g_0$  będzie przyspieszeniem na równiku; odpowiednio wówczas  $\lambda = 0$  i

$$(6) \quad g_0 = G - \omega^2 R,$$

zatem

$$(7) \quad g = g_0 + \omega^2 R \cdot \sin^2 \lambda.$$

To równanie pozwala obliczyć przyspieszenie  $g$  z wiadomego przyspieszenia na równiku i okazuje, że *przyrost przyspieszenia spadku od równika ziemi ku jej biegunom jest proporcjonalny względem kwadratu wstawy szerokości geograficznej*.

Przyspieszenie  $g$  wyznaczamy zapomocą wahadła, o czym później będzie mowa. Na podstawie takich doświadczeń z wahadłem, czynionych przez bardzo wielu fizyków w rozmaitych miejscach na ziemi, okazała się dla szerokości geograficznej  $\lambda = 45^\circ$  najprawdopodobniejszą wartość przyspieszenia  $g = 9,80590$  metra na sekundę. Kładąc przeto  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , otrzymamy

na biegunach  $G = 9,82290 m$ ; na równiku  $g_0 = 9,78891 m$ .

Obliczając przeto  $g$  w metrach na sekundę, mamy dla każdego miejsca na ziemi

$$(8) \quad g = 9,78891 + 0,03399 \sin^2 \lambda.$$

Ponieważ w strefie umiarkowanej to przyspieszenie mało się zmienia, przeto dla przybliżonego rachunku przyjmujemy zwykle  $g = 9,81 m$ .

Z równania (6) widzimy, że przyspieszenie  $g_0$  na równiku byłobyby równe zeru, gdyby prędkość kątowna obrotu ziemi wynosiła  $\Omega = \sqrt{\frac{G}{R}} = 0,00124$ . Stosunek tej prędkości do rzeczywistej prędkości obrotu jest

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1240}{73}, \text{ w przybliżeniu } \frac{\Omega}{\omega} = 17,$$

z czego się okazuje, że spadanie na równiku byłoby jednostajne, gdyby się ziemia obracała 17 razy prędeżej. Ponieważ przybliżenie

$$\omega^2 R = \frac{G}{17^2} = \frac{G}{289},$$

przeto możemy z dostatecznym przybliżeniem przyjąć

$$(9) \quad g = G \left( 1 - \frac{\cos^2 \lambda}{17^2} \right).$$

**64. ZBOCZENIE CIAŁA, SPADAJĄCEGO NA ZIEMIĘ.** Jeżeli punkt spada swobodnie na powierzchnię ziemi, bez prędkości początkowej, to jego torem bezwzględny jest prosta, łącząca położenie początkowe tego punktu ze środkiem ziemi. Ponieważ ziemia obraca się około swój osi, przeto punkt nie spadnie na ziemię w punkcie, w którym powyższa prosta (pionowa) spotyka jej powierzchnię, lecz w innym punkcie, który właśnie chcemy wyznaczyć.

Niech  $m_0$  (fig. 34) będzie położeniem początkowym punktu spadającego,  $m_0O$  pionem tego punktu, który powierzchnię ziemi spotyka w  $M_0$ . Punkt  $M_0$  opisuje wskutek obrotu ziemi obwód równoleżnika; niech  $M$  będzie dowolnym położeniem tego punktu podczas spadku. Układ osi współrzędnych  $M\xi\eta\zeta$ , obracający się razem z ziemią, obierzmy jak następuje: osią  $M\xi$  niech będzie przedłużenie promienia równoleżnika, od  $M$  nazewnątrż; osią  $M\eta$  styczna do równoleżnika, wzięta w kierunku obrotu dziennego ziemi, a zatem od zachodu na wschód, osią zaś  $M\zeta$  niech będzie prosta, równoległa do osi ziemi, a skierowana na północ. Przyjmujemy przytym, że punkt

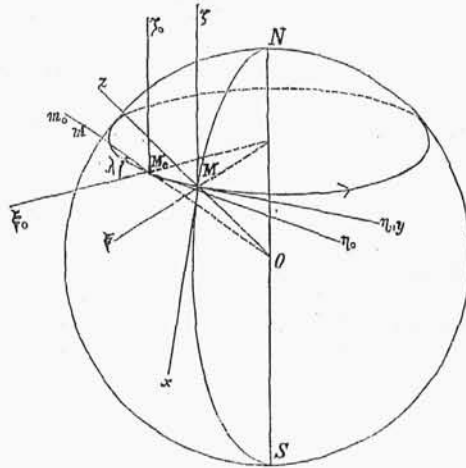


Fig. 34.

$m$  spada na półkulę północną. Niech  $M_0\xi_0\eta_0\zeta_0$  oznacza położenie początkowe powyższego układu współrzędnych, a  $\lambda$  niech będzie szerokością geograficzną punktu  $M$ . Przyspieszenie  $g$ , odpowiednie tej szerokości, jest wypadkowym przyspieszenia bezwzględnego i przyspieszenia odśrodkowego; ponieważ wysokość spadku  $h = M_0m_0$  jest bardzo mała w porównaniu z promieniem ziemi, przeto możemy  $g$  uważać za stałe podczas spadku. W pierwszym przybliżeniu możemy także pominąć zmianę kierunku tego przyspieszenia względem układu  $M\xi\eta\zeta$ , przyjmując, że  $g$  posiada kierunek  $mO$ . Otrzymamy zatem, zachowując znakowanie wprowadzone do równań (7) art. 62-go,

$$\gamma_{\xi} - \gamma_{u\xi} = -g \cos \lambda, \quad \gamma_{\eta} - \gamma_{u\eta} = 0, \quad \gamma_{\zeta} - \gamma_{u\zeta} = -g \sin \lambda.$$

Odetnijmy prędkość kątową  $\omega$  obrotu ziemi od  $O$  ku biegunowi północnemu  $N$ , uważając ten kierunek osi za dodatny (widzimy obrót z punktu końcowego odcinka  $\omega$  w kierunku przeciwnym obrotowi wskazówki na zegarze); mieć będziemy  $p=0$ ,  $q=0$ ,  $r=\omega$ ; składowe przyspieszenia odśrodkowego złożonego będą przeto odpowiednio  $2\omega \cdot \frac{d\eta}{dt}$ ,  $-2\omega \cdot \frac{d\xi}{dt}$ ,  $0$ . Równania różniczkowe ruchu względnego punktu  $m$  będą zatem, według art. 62-go,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -g \cos \lambda + 2\omega \cdot \frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -2\omega \cdot \frac{d\xi}{dt}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -g \cdot \sin \lambda. \end{cases}$$

Jeżeli  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  oznaczają spólrzędne punktu  $m_0$ , to mamy dla  $t=0$ :  $\xi = \xi_0 = h \cos \lambda$ ,  $\eta = \eta_0 = 0$ ,  $\zeta = \zeta_0 = h \cdot \sin \lambda$ ; a składowe prędkości początkowej są równe zeru. Całkując ostatnie równanie dwukrotnie, otrzymamy

$$\zeta = \left( h - g \frac{t^2}{2} \right) \sin \lambda.$$

Kładąc zaś  $\xi' = \frac{d\xi}{dt}$ ,  $\eta' = \frac{d\eta}{dt}$ , mamy z równań (1)

$$\frac{d\xi'}{dt} = -g \cos \lambda + 2\omega \eta'; \quad \frac{d\eta'}{dt} = -2\omega \xi'.$$

Różniczkujemy ostatnie równanie i podstawmy wartość z pierwszego równania; otrzymamy  $\frac{d^2\eta'}{dt^2} = -2\omega(-g \cos \lambda + 2\omega \eta')$ . Całka tego równania jest  $\eta = \frac{g \cos \lambda}{2\omega} \left( t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)$ . Jeżeli podstawimy tę wartość w pierwszym równaniu (1), to otrzymamy dla punktu  $m$

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = h \cdot \cos \lambda - g \frac{\cos \lambda}{4\omega^2} (1 - \cos 2\omega t), \text{ z czego wynika} \\ \eta = g \frac{\cos \lambda}{4\omega^2} (2\omega t - \sin 2\omega t), \text{ a poprzednio otrzymaliśmy} \\ \zeta = \left( h - \frac{g t^2}{2} \right) \sin \lambda; \end{cases}$$

składowe zaś prędkości względnej punktu wyrażają się wzorami

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -gt \cdot \cos \lambda + 2\omega \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = 2\omega (h \cos \lambda - \xi), \\ \frac{d\zeta}{dt} = -gt \cdot \sin \lambda, \end{cases}$$

które dają kwadrat prędkości względnej  $v_w$  punktu spadającego

$$(4) \quad v_w^2 = 2g[(h \cos \lambda - \xi) \cos \lambda + (h \sin \lambda - \zeta) \sin \lambda].$$

Dwa pierwsze równania (2) dają rzut toru względnego na płaszczyznę równoleżnika, przechodzącego przez punkt M. Z tych równań łatwo okazać (co pozostawiamy czytelnikowi), że ten rzut toru względnego jest cykloidą zwykłą, której podstawa jest równoległa do osi  $M_0\eta_0$ ; koło tworzące o promieniu  $\frac{g \cos \lambda}{4\omega^2}$  toczy się po tej podstawie wewnątrz równoleżnika, a cykloida jest zwrócona stroną wypukłą ku środkowi równoleżnika. Ponieważ  $\omega$  jest bardzo małe, przeto promień koła tworzącego jest bardzo wielki. Koło toczy się z prędkością  $2\omega$  po swój podstawie od zachodu na wschód.

Wystawmy w punkcie M nowy układ prostokątny osi  $Mxyz$ , a mianowicie osią  $Mz$  niech będzie pionową od środka ziemi ku M, osią  $Mx$  oś  $M\eta$ , a osią  $My$  niech będzie styczna do południka, od punktu M ku biegunowi południowemu S. Jeżeli  $x, y, z$  są współrzędnymi punktu  $m$  względem tych osi, to mamy

$$x = \xi \cdot \sin \lambda - \zeta \cdot \cos \lambda, \quad y = \eta, \quad z = \xi \cdot \cos \lambda + \zeta \cdot \sin \lambda,$$

a zątem

$$(5) \quad \begin{cases} x = \frac{g \sin \lambda \cos \lambda}{4\omega^2} [2\omega^2 t^2 - (1 - \cos 2\omega t)], \\ y = \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} (2\omega t - \sin 2\omega t), \\ z = h - \frac{g}{4\omega^2} [2\omega^2 t^2 \cdot \sin^2 \lambda + (1 - \cos 2\omega t) \cos^2 \lambda]. \end{cases}$$

Rozwińmy  $\cos 2\omega t$  i  $\sin 2\omega t$  na szeregi, zważając, że  $\omega$  jest bardzo małe. Jeżeli obliczymy współrzędne punktu aż do wyrazów tego rzędu co  $\omega^2$ , to otrzymamy

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{g}{3!} \omega^2 t^4 \cos \lambda \sin \lambda, \\ y = \frac{g}{3} \omega t^3 \cos \lambda, \\ z = h - \frac{g t^2}{2} + \frac{g}{3!} \omega^2 t^4 \cos^2 \lambda. \end{cases}$$

Z tych równań widzimy, że punkt spadający zbacza od pionu, a to zboczenie jest wypadkowym zboczenia  $x$  w kierunku południka na południe i zboczenia  $y$  w kierunku równoleżnika na wschód. Pierwsze zboczenie jest rzędu  $\omega^2$ , drugie zaś rzędu  $\omega$ ; zboczenie więc na południe jest znacznie mniejsze od zboczenia na wschód. Obliczając współrzędne tylko do wyrazów tego rzędu co  $\omega$ , otrzymalibyśmy

$$(7) \quad x = 0, \quad y = \frac{g}{3} \omega t^3 \cos \lambda, \quad z = h - \frac{g t^2}{2}.$$

Punkt przybędzie na ziemię, skoro stanie się  $z = 0$ , a zatem w czasie  $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . Podstawiając tę wartość w (7), otrzymamy współrzędne punktu, do którego punkt spadający przybędzie na ziemię

$$(8) \quad x = 0, \quad y = \frac{2h}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \omega \cos \lambda, \quad z = 0.$$

Spółrzędna  $y$  tego punktu daje tak zwane zboczenie wschodnie punktu spadającego, t. j. odległość miejsca na ziemi, do którego przybywa punkt spadający, od punktu  $M_0$ , liczoną na stycznej  $M_0y$  do równoleżnika. Zboczenie wschodnie jest proporcjonalne względem dostawy szerokości geograficznej i zależy od wysokości spadku. Dla średnich szerokości geograficznych zboczenie południowe jest tak małe (mamy bowiem  $\omega^2 = 0,0000000053$ ), że nie daje się dostrzegać.

J. Newton pierwszy (w r. 1679) zwrócił uwagę na zboczenie wschodnie, a J. Guglielmini w Bolonii (w r. 1790 i 1791), Benzenberg w Hamburgu (w r. 1802) i w Schlebusch (w r. 1804), a następnie F. Reich w kopalni we Freibergu w Saksonii (w r. 1831), czynili spostrzeżenia, aby sprawdzić i wymierzyć to zboczenie, a tym samym otrzymać dowód oczywisty obrotu ziemi. Wysokość spadku wynosiła w doświadczeniach Reich'a  $h = 158,50 \text{ m}$ , szerokość geograficzna  $\lambda = 50^\circ 53' 23''$ ; zboczenie wschodnie wynosiło, podług obserwacji,  $y = 28,396 \text{ milimetra}$ . Podstawiając  $h$  i  $\lambda$  w równaniu (8), otrzymamy z rachunku  $y = 27,512 \text{ mm}$ , co okazuje znakomitą zgodność teorii z obserwacją.

Rugując czas z równań (7), otrzymamy

$$(9) \quad y = \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot (h - z)^{\frac{3}{2}},$$

jako przybliżone równanie rzutu toru względnego na płaszczyznę południka. Ten rzut jest parabolą półkubiczną, zwaną także parabolą Neil'a.

**65.** Jeżeli punkt zostaje wyrzucony pionowo w górę z punktu  $M_0$  z prędkością początkową  $v_0$ , a obierzemy też same osi współrzędnych, to równania ruchu zostają niezmiennymi, lecz warunki początkowe będą dla  $t = 0$

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0; \quad \frac{d\xi}{dt} = v_0 \cos \lambda, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = v_0 \sin \lambda;$$

otrzymamy zatem współrzędne punktu spadającego

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\cos \lambda}{4\omega^2} [2\omega v_0 \sin 2\omega t - g(1 - \cos 2\omega t)], \\ \eta = \frac{\cos \lambda}{4\omega^2} [g(2\omega t - \sin 2\omega t) - 2\omega v_0(1 - \cos 2\omega t)], \\ \zeta = \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) \sin \lambda, \end{cases}$$



tudzież składowe jego prędkości względnej

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = (v_0 - gt) \cos \lambda + 2\omega \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = -2\omega \xi, \\ \frac{d\zeta}{dt} = (v_0 - gt) \sin \lambda. \end{cases}$$

Postępując podobnie, jak w ustępie 64-ym, otrzymamy spółrzędne punktu w układzie osi  $Mxyz$

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{4\omega^2} [2\omega^2 g t^2 - g(1 - \cos 2\omega t) - 2\omega v_0(2\omega t - \sin 2\omega t)], \\ y = \frac{\cos \lambda}{4\omega^2} [g(2\omega t - \sin 2\omega t) - 2\omega v_0(1 - \cos 2\omega t)], \\ z = \frac{1}{4\omega^2} [2\omega^2(2v_0 t - g t^2 \cdot \sin^2 \lambda) - g \cos^2 \lambda (1 - \cos 2\omega t) - \\ - 2\omega v_0 \cos^2 \lambda (2\omega t - \sin 2\omega t)]. \end{cases}$$

Rozwijając  $\cos 2\omega t$  i  $\sin 2\omega t$  na szeregi i obliczając spółrzędne aż do wyrazów tego rzędu co  $\omega^2$ , otrzymamy

$$(4) \quad \begin{cases} x = \frac{\omega^2}{3!} (g t^4 - 4v_0 t^3) \sin \lambda \cos \lambda, \\ y = \omega \left( \frac{g t^3}{3} - v_0 t^2 \right) \cos \lambda, \\ z = v_0 t - \frac{g t^2}{2} + \frac{\omega^2}{3!} (g t^4 - 4v_0 t^3) \cos^2 \lambda. \end{cases}$$

Pionowa prędkość punktu wynosi

$$(5) \quad \frac{dz}{dt} = v_0 - gt + \frac{2}{3} \omega^2 (g t^3 - 3v_0 t^2) \cdot \cos^2 \lambda,$$

różni się zatem od tej prędkości, jakąby punkt posiadał względem nieruchomej ziemi, o wielkość tego rzędu, co  $\omega^2$ . Jeżeli w rozwinięciach ograniczymy się do wyrazów tego rzędu co  $\omega$ , to będzie

$$(6) \quad x=0, \quad y = \omega \left( \frac{g t^3}{3} - v_0 t^2 \right) \cos \lambda, \quad z = v_0 t - \frac{g t^2}{2}, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 - gt.$$

Punkt dosięgnie największej wysokości, skoro będzie  $\frac{dz}{dt} = 0$ , co nastąpi w czasie  $T = \frac{v_0}{g}$ . Podstawiając tę wartość w drugim równaniu (6), otrzymamy dla najwyższego położenia punktu

$$y = -\frac{2}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \omega \cos \lambda.$$

Punkt przeto podczas podnoszenia się zbacza na zachód; zboczenie w kierunku południka jest tego rzędu co  $\omega^2$ , jest zatem poza obreębem obserwacyi.

### Literatura kinematyki (Rozdz. I—V).

M. CHASLES: Sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entre eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre (Bulletin de FÉRUSSE, t. XIV, Paris, 1831); Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre (Comptes rendus, t. XVI, 1843); Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan (Journ. des mathém., t. X, 1845); Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable (Comptes rendus, t. LI i LII, 1860, 1861).—A. F. MOEBIUS, Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen (Journ. v. CRELLE, t. XVII, 1838).—O. RODRIGUES, Des lois géométriques qui régissent le déplacement d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements, considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire (Journ. des math., t. V, 1840).—A. TRANSON, Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe des courbes (Journ. des math., t. X, 1845).—L. POINSON, Théorie nouvelle de la rotation des corps (Journ. des math., t. XVI, 1851).—CH. BRESSE, Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans, et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure (Journ. de l'école polytechnique, t. XX, 1853).—SCHÖNEMANN, Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien (Monatsberichte der Akademie zu Berlin, 1855; przedrukowane w Journal v. CRELLE, t. XC, 1881).—MANNHEIM: Constructions des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan (Journ. de l'éc. polyt., t. XXI, 1858); Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable; nouvelle méthode des normales, applications diverses (Mém. des savants étrangers, t. XX, 1872); Propriétés relatives aux trajectoires des points d'une figure de forme invariable (Cpts. rendus, t. LXXVI, 1873); Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable, dont le déplacement est assujéti à quatre conditions (Journ. des math., 1875); Cours de géométrie descriptive de l'école polytechnique (Paris, 1880, 1886).—E. DE JONQUIÈRES, Mélanges de géométrie pure (Paris, 1856; rozdz. I).—H. RESAL, Traité de cinématique pure (Paris, 1862).—E. HABICH: Sur le mouvement conchoidal (Les mondes, t. XIII, 1866); Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan (w 4-ch częściach; tamże, t. XIV, 1867); Sur le centre instantané de rotation et ses applications géométriques (tamże, t. XVIII i XIX, 1870); Etudes cinématiques (Paris, 1879).—F. KLEIN, Notiz betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper (Mathematische Annalen, t. IV, 1871).—J. N. FRANKE: Przyczynek do ogólnej teorii kół ząbionych (Pamiętnik tow. nauk ścisłych w Paryżu, t. IV, 1874); Studyja analityczne nad ruchem ciał stałych (Pamiętnik akad. umiejętności w Krakowie, t. I, 1874); O niektórych zagadnieniach kinematyki na podstawie ruchu powierzchni skośnych (tamże, t. III, 1877); Sur la courbure des surfaces réciproques (Journ. des mathém., 3-e sér., t. III, 1877); Ueber geometrische Eigenschaften von Kräfte- und Rotationssystemen in Verbindung mit Liniencomplexen (Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften zu Wien, t. LXXXIV, 1881); O inwolucyi sześciu prostych, uważanych jako osi skrętów chwilowych (Pam. ak. um., t. VII, 1881); Teoryja analityczna kompleksów śrub

chwilowych (tamże, t. VII, 1882). — CH. BRISSE, Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable (J. des math. 3-e sér., t. I, 1875). — R. ST. BALL, Theory of screws, a study in the dynamics of a rigid body (Dublin, 1876). — W. K. CLIFFORD, Elements of dynamic; part I, kinematic (London, 1878). — E. CAVALLI, Elementi di cinematica teorica (Milano, 1882). — L. BURMESTER, Lehrbuch der Kinematik (Leipzig, 1886). — G. SCHOENFLEISS, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung (Leipzig, 1886). — M. A. THÉVENET, Etude analytique sur le déplacement infiniment petit d'un corps solide libre (Paris, 1886).

C. F. GAUSS, Fundamentalgleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers auf der rotirenden Erde (1803; Werke, t. V, Göttingen, 1867). — CORIOLIS: Mémoire sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines (Journ. de l'ec. polyt., t. XIII, 1832); Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps (tamże, t. XV, 1835); Traité de la mécanique des corps solides (Paris, 1844).

