

**18. DRGANIE PROSTE.** Jeżeli punkt, poruszający się po prostej w obu kierunkach między dwoma punktami A i A' (fig. 8), za każdym razem do oddzielnego punktu téj prostej przybywa z tą samą prędkością, zmieniającą się od punktu do punktu, prędkości zaś jego ruchu w dwu miejscach m i m', położonych symetrycznie względem środka O prostej AA', są sobie równe, wtedy ruch punktu nazywamy drganiem prostym. Punkt O zwiemy środkiem drgania. Oddalenie  $s = Om$  punktu w dowolnym położeniu m od środka drgania nazywamy jego odchyleniem, a największe z tych odchyłeń, to jest odchylenie  $S = OA = OA'$ , nazywamy *obszernością drgania*.

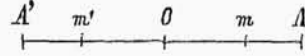


Fig. 8.

Z określenia tego ruchu wynika, że w punktach A i A' kierunek ruchu punktu zmienia się na „prost przeciwny, a zatem w tych punktach prędkość punktu drgającego jest równa zero. Drganie proste jest określone ogólnie zapomocą następującego równania:

$$(1) \quad v^2 = 2k^2 \cdot [f(S) - f(s)],$$

w którym  $k^2$  jest wiadomym współczynnikiem, a  $f$  oznacza funkcję odchylenia, która zadość czyni warunkowi  $f(S) > f(s)$ , skoro  $S > s$ . Jakoż, to równanie daje na  $v$  tylko wtenczas wartość rzeczywistą, gdy  $s < S$ , zaś  $v = 0$  przy  $s = S$ ; a zatem wskazuje ono, że ruch ma miejsce między krańcami A i A'; jeżeli dodatnie  $s$  liczymy od środka O, to każdej wartości  $s$  odpowiadają dwie wartości  $v$ , bezwzględnie równe a przeciwnego znaku, co być powinno według określenia drgania prostego. Różniczkując to równanie względem czasu, otrzymamy

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = -k^2 \cdot f'(s) \cdot \frac{ds}{dt};$$

ponieważ zaś dla ruchu prostoliniowego  $\gamma = \frac{dv}{dt}$ , a  $v = \frac{ds}{dt}$ , przeto

$$(2) \quad \gamma = -k^2 \cdot f'(s),$$

skąd wynika, że drganie proste jest ruchem centralnym, którego środkiem jest punkt O. Przyjmując początek drgania w środku O, widzimy z równania (1), że punkt drgający wychodzi z tego środka O z prędkością  $+\sqrt{2 \cdot k \cdot [f(S) - f(0)]}$  w kierunku OA, przybywa do A z prędkością zero, wraca ku O, przechodząc w odwrotnym porządku i w przeciwnych kierunkach przez te same stany ruchu, jakie przedtem posiadał, przybywa do O z prędkością  $-\sqrt{2 \cdot k \cdot [f(S) - f(0)]}$ , odchyła się następnie ku A', gdzie prędkość jego staje się znowu równą zero, i, przybywszy do O, powraca do stanu początkowego. Po upływie czasu T, w którym punkt po wyjściu ze środka wraca do niego z pierwotną prędkością, powtarza się ruch punktu. Drganie zatem proste jest ruchem peryjodycznym (okresowym), a czas T jest jego peryjodem (okresem).

Żeby więc rozpoznać przebieg drgania prostego, wystarczy uważać ruch punktu podczas jednego okresu  $T$ .

Kładąc w równaniu (1)  $v = \frac{ds}{dt}$ , otrzymamy

$$(3) \quad dt = \pm \frac{1}{k\sqrt{2}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{f(S) - f(s)}},$$

gdzie należy brać znak  $+$  lub  $-$  według tego, czy punkt drgający oddala się od środka, czy się doń zbliża. W pierwszym bowiem przypadku rośnie droga  $s$  wraz z czasem, w drugim zaś ubywa; że zaś przyrost czasu zawsze jest dodatni, przeto pierwiastek należy brać w pierwszym przypadku dodatni, w drugim zaś ujemny. Czas zatem  $t_1$ , w którym punkt drgający opisze czwartą część drogi, od  $O$  do  $A$ , będzie

$$(4) \quad t_1 = \frac{1}{k\sqrt{2}} \cdot \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{f(S) - f(s)}}$$

Punkt opisze dalszą drogę od  $A$  do  $O$  w czasie

$$t_2 = -\frac{1}{k\sqrt{2}} \int_S^0 \frac{ds}{\sqrt{f(S) - f(s)}} = t_1,$$

z czego się okazuje, że okres drgania wynosi

$$(5) \quad T = 4t_1 = \frac{4}{k\sqrt{2}} \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{f(S) - f(s)}}.$$

Niech

$$(6) \quad \gamma = -k^2 s,$$

t. j. niech przyspieszenie będzie proporcjonalne względem odległości punktu od środka  $O$ ; ruch punktu w tym przypadku zwiemy ruchem harmonicznym (drganiami harmonicznymi). To założenie daje

$$\int_s^S f(s) \cdot ds = \int_s^S s \cdot ds = \frac{S^2 - s^2}{2};$$

będzie więc, według (1),

$$(7) \quad v^2 = k^2(S^2 - s^2).$$

Możemy tę prędkość obliczyć także bezpośrednio z równania (6); mamy bowiem według tego równania

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2 s.$$

Mnożąc obie strony przez  $2 \cdot \frac{ds}{dt}$ , otrzymamy

$$2 \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = -2k^2 \cdot s \cdot \frac{ds}{dt}, \text{ czyli}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = -2k^2 \cdot s \cdot \frac{ds}{dt},$$

skąd, po scałkowaniu,

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = v^2 = -k^2 s^2 + a,$$

gdzie  $a$  jest stałą całkowania. Ponieważ dla  $s=S$  jest  $v=0$ , przeto  $a=k^2 S^2$ , a zatem  $v^2=k^2(S^2-s^2)$ . Nadto mamy

$$t_1 = \frac{1}{k} \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{S^2-s^2}} = \frac{1}{k} \int_0^S \arcsin \frac{s}{S} = \frac{\pi}{2k},$$

a przeto okres drgania będzie

$$(8) \quad T = \frac{2\pi}{k}.$$

Okres więc drgania jest niezależny od jego obszerności i od prędkości początkowej w punkcie O, zależy zaś od współczynnika  $k$ , dającego wielkość przyspieszenia przy jednostce odległości od środka.

Jeżeli obszerność drgania nie jest wiadoma, to możemy ją obliczyć z wiadomej prędkości  $V$  w punkcie O. Wartość stałej  $a$  w równaniu  $v^2 = -k^2 s^2 + a$  wyznaczymy wtedy z warunku, że przy  $s=0$  jest  $v=V$ , co daje  $a=V^2$ ; będzie więc

$$(9) \quad v^2 = V^2 - k^2 s^2,$$

skąd wynika, że obszerność drgania  $S = \frac{V}{k}$ . Dla drgania harmonicznego, licząc czas od środka O, jest ogólnie

$$(10) \quad t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{s}{S};$$

a ponieważ, według równania (8),

$$(11) \quad k = \frac{2\pi}{T},$$

przeto mamy ogólnie

$$(12) \quad t = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{s}{S},$$

skąd otrzymujemy równanie ruchu

$$(13) \quad s = S \cdot \sin \frac{2\pi \cdot t}{T}.$$

Z tego zaś równania wynika wyrażenie na prędkość

$$(14) \quad v = \frac{2\pi S}{T} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Widzimy zatem, że, obliczywszy z równania (8) okres drgania, możemy drogę i prędkość wyrazić przez czas.

Gdybyśmy czasu nie liczyli od chwili wyjścia punktu ze środka, lecz od chwili, gdy odchylenie jego w stronę ku punktowi A wynosi  $\sigma = Om$ , to byłoby ogólnie

$$t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{s}{S} + C,$$

a gdy  $t=0$  przy  $s=\sigma$ , przeto  $C = -\frac{1}{k} \arcsin \frac{\sigma}{S}$ ; kładąc zaś jeszcze  $\varepsilon = \arcsin \frac{\sigma}{S}$ , mamy  $C = -\frac{\varepsilon}{k}$ , a zatem

$$(15) \quad \begin{aligned} t &= \frac{1}{k} \left( \arcsin \frac{s}{S} - \varepsilon \right), \text{ czyli} \\ t &= \frac{T}{2\pi} \left( \arcsin \frac{s}{S} - \varepsilon \right), \end{aligned}$$

skąd

$$(16) \quad s = S \cdot \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \varepsilon \right).$$

**19. ZASTOSOWANIA DO GEOMETRYI.** a). **PROWADZENIE STYCZNYCH.** Jeżeli punkt opisuje pewną krzywą, a warunki ruchu pozwalają wyznaczyć składowe jego prędkości w pewnych, odpowiednio dobranych kierunkach, to skład prędkości posłużyć może do wykreślenia stycznej do toru punktu. Tę bowiem styczną wyznacza wypadkowa rozważanych prędkości. Na tej zasadzie polega metoda kręślenia stycznych,

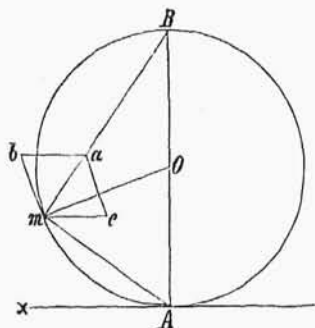


Fig. 9.

podana przez J. Roberval'a. Okażemy ją na cyklojdzie. — Punkt  $m$  (fig. 9) opisze cykloidę zwyczajną, jeżeli koło tworzące toczy się po prostéj, albo inaczej: jeżeli punkt  $m$  porusza się jednostajnie po kole tworzącym, a środek tego koła posuwa się z tą samą prędkością jednostajnie i równoległe do podstawy. Możemy więc podać dwie składowe prędkości,  $mb = mc$ , z których pierwsza w kierunku stycznym do koła, druga równoległa do podstawy. Przekątna  $ma$  rombu  $mabc$  wyznacza prędkość punktu, a zatem styczną do cyklojdy w punkcie  $m$ .

Ponieważ trójkąty równoramienne  $mac$  i  $mA O$  są podobne, a dwie pary ich boków odpowiednich są do siebie prostopadle, przeto

także bok  $ma$  jest prostopadły do  $mA$ , z czego wynika, że styczna do cyklojdy przechodzi przez punkt B. Cięciwa więc  $mA$ , przechodząca przez punkt A, w którym koło tworzące jest styczne do podstawy, jest normalną do cyklojdy w punkcie  $m$ .

b). WYZNACZENIE ŚRODKA KRZYWIZNY. Mając styczną do krzywej, możemy wyznaczyć kinematycznie jej środek krzywizny. Jeżeli bowiem  $\gamma_n$  jest przyspieszeniem normalnym, a  $v$  prędkością w pewnym punkcie, to promień krzywizny będzie  $\rho = \frac{v^2}{\gamma_n}$ . Ten wzór pozwala w wielu przypadkach na łatwe wykreślenie środka krzywizny, co okażemy również na cykloidzie. — Niechaj punkt  $m$  (fig. 9) porusza się jednostajnie z prędkością  $v$  po kole tworzącym o promieniu  $R$ . Oznaczając wtedy przez  $\omega$  stosunek prędkości  $v$  do promienia koła, możemy przyjąć  $mb = V = \omega R$ . Z podobieństwa trójkątów  $mac$  i  $mA O$  wynika

$$ma : mb = mA : mO, \text{ czyli} \\ v : \omega R = mA : R,$$

gdzie  $v$  oznacza prędkość punktu na cykloidzie w miejscu  $m$ . Z tej proporcji

$$v = \omega \cdot mA = \omega \cdot y,$$

jeżeli przez  $y$  oznaczymy cięciwę  $mA$ . Prędkość zatem punktu na cykloidzie jest proporcjonalna względem długości cięciwy koła tworzącego. Ponieważ w kierunku  $mc$  punkt nie ma przyspieszenia, przeto przyspieszenie  $\gamma$  na cykloidzie równa się przyspieszeniu na kole; będzie zatem

$$\gamma = \frac{mb^2}{R} = \omega^2 R,$$

a rzut  $\gamma_n$  tego przyspieszenia na normalną  $mA$  wynosi

$$\gamma_n = \gamma \cdot \cos O mA = \omega^2 R \cdot \frac{mA}{2R} = \frac{\omega^2 y}{2}.$$

Zatem promień krzywizny

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = 2y.$$

## PRZYKŁADY I ĆWICZENIA.

(1). Przyjmując, iż według prawa Newtona przyspieszenie spadku pionowego na ziemię jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu odległości od środka ziemi, wyznaczyć prawa tego spadku ze znacznej wysokości.

Niechaj punkt  $m$  (fig. 10) spada z miejsca  $M$ ,  $O$  oznacza środek ziemi,  $A$  zaś punkt na jej powierzchni. Nazwijmy  $OA = r$ ,  $OM = S$ ,  $Mm = s$ , przez  $\gamma$  oznaczmy przyspieszenie w punkcie  $m$ , zaś przez  $g$  przyspieszenie na powierzchni ziemi w punkcie  $A$ . Według założenia, mamy

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{r^2}{(S-s)^2}.$$

Ponieważ zaś  $\gamma = \frac{d^2s}{dt^2}$ , przeto

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g r^2}{(S-s)^2}.$$

Mnożąc przez  $2 \cdot \frac{ds}{dt}$  i całkując, otrzymamy

Fig. 10,

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2gr^2}{S-s} + a,$$

gdzie  $a$  jest stałą całkowania. Z warunku, że  $v = 0$  dla  $s = 0$ , t. j. że punkt wychodził ze spoczynku, wynika  $a = -\frac{2gr^2}{S}$ , a zatem

$$v^2 = \frac{2gr^2}{S} \cdot \frac{s}{S-s}.$$

Gdy nazwiemy  $AM = h$ , prędkość, z jaką punkt przybędzie na ziemię, wynosić będzie

$$V = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{r}{r+h}};$$

dla bardzo zatym małych wysokości  $h$  jest  $V = \sqrt{2gh}$ , jak z przybliżonej teorii Galileusza wynika, według której przyspieszenie jako stałe uważamy. Z wyrażenia na prędkość  $v$  wynika:

$$dt = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{S}{2g}} \cdot \sqrt{\frac{S-s}{s}} \cdot ds, \text{ a stąd}$$

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{S}{2g}} \int ds \cdot \sqrt{\frac{S-s}{s}} + b,$$

gdzie  $b$  jest nową stałą całkowania. Używając podstawienia  $\frac{S-s}{s} = z^2$ , łatwo można tę całkę obliczyć i otrzymać

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{S}{2g}} \left\{ \sqrt{s(S-s)} - S \cdot \arctang \sqrt{\frac{S-s}{s}} \right\} + b.$$

Licząc czas od punktu  $M$ , mamy  $t = 0$  dla  $s = 0$ , a więc

$$b = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{S}{r} \sqrt{\frac{S}{2g}}.$$

Jest zatem

$$t = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{S}{2g}} \left\{ \sqrt{s(S-s)} + S \left( \frac{\pi}{2} - \arctang \sqrt{\frac{S-s}{s}} \right) \right\}.$$

(2). Punkt A (fig. 11) porusza się prostoliniowo i jednostajnie z prędkością  $u$ ; inny punkt  $m$ , wyszedłszy z miejsca M, porusza się ciągle ku punktowi A z prędkością stałą  $v$ : wyznaczyć tor punktu  $m$ . (Taką krzywą opisuje pies, idący za swoim panem).

Niech tor punktu A będzie osią  $x$ ,  $A_0$  położeniem początkowym punktu A, oś  $y$  obróci w dowolnym początku O, zaś  $OA_0 = \mu$ . Oznaczmy nadto przez  $\alpha$  kąt, który prosta  $mA$  tworzy z kierunkiem ujemnym osi  $x$ . Z warunków zadania wynika, że

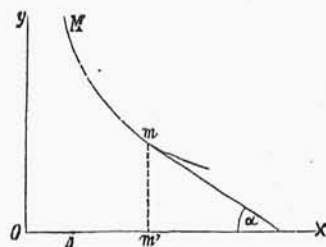


Fig. 11.

$$\tan \alpha = - \frac{dy}{dx} = \frac{mn'}{OA_0 + A_0A - Om'} = \frac{y}{\mu + ut - x},$$

gdzie  $x$  i  $y$  są współrzędnymi punktu  $m$ . Jeżeli wprowadzimy  $s = Mm$ , to  $s = v \cdot t$ , a zatem  $u \cdot t = \frac{u}{v} \cdot s = \lambda s$ , gdzie  $\lambda = \frac{u}{v}$ . Otrzymamy więc z poprzedniego równania

$$(1) \quad x - y \cdot \frac{dx}{dy} = \mu + \lambda s,$$

jako równanie różniczkowe krzywej ( $m$ ). Różniczkując to równanie względem  $y$ , mieć będziemy

$$-y \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = \lambda \cdot \frac{ds}{dy}.$$

Ponieważ zaś  $\frac{ds}{dy} = - \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$  (należy brać znak —, widocznie bowiem łuk  $s$  rośnie przy malejącym  $y$ ), przeto równanie różniczkowe krzywej, uwolnione od  $s$ , będzie

$$\lambda \cdot \sqrt{1 + q^2} = y \cdot \frac{dq}{dy},$$

gdzie  $q = \frac{dx}{dy}$ . Całkując to równanie, otrzymamy

$$(2) \quad \left(\frac{y}{a}\right)^\lambda = q + \sqrt{1 + q^2},$$

gdzie  $a$  jest stałą całkowania. To równanie daje  $y = a$  dla  $q = 0$ , a więc stała  $a$  oznacza rzędną  $y$  tego punktu naszej krzywej, w którym styczna jest prostopadła do osi  $x$ -ów. Mając współrzędne  $x_0$  i  $y_0$  punktu M i kierunek ruchu w tym pun-

kie, możemy z równania (2) obliczyć stałą  $a$ . Wprowadziwszy ponownie  $\frac{dx}{dy}$  zamiast  $q$  w równaniu (2), otrzymamy z niego

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^{2\lambda} - 1}{2 \cdot \left(\frac{y}{a}\right)^{\lambda}},$$

a stąd, całkując, mieć będziemy

$$2(x+b) = \frac{y^{\lambda+1}}{(\lambda+1)a^{\lambda}} - \frac{a^{\lambda}}{1-\lambda} \cdot y^{1-\lambda}.$$

Obierzmy styczną do (m) w punkcie  $y=a$  (a więc prostopadłą do osi  $x$ -ów) za nową oś  $y$ -ów, wskutek tego  $x=0$  przy  $y=a$ , co dozwala oznaczyć wartość stałej  $b$ ,

$$b = \frac{\lambda a}{\lambda^2 - 1}.$$

A zatem otrzymujemy w tym układzie współrzędnych

$$(3) \quad 2\left(x + \frac{\lambda a}{\lambda^2 - 1}\right) = \frac{y^{\lambda+1}}{(\lambda+1)a^{\lambda}} + \frac{a^{\lambda}}{(\lambda-1)y^{\lambda-1}}$$

jako równanie krzywej przy  $\lambda \geq 1$ . — Dla  $\lambda=1$  mamy ogólnie z pierwotnego równania różniczkowego

$$2 \cdot dx = \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right) \cdot dy, \text{ a więc}$$

$$2(x+b) = \frac{y^2}{2a} - a \cdot \ln y.$$

Ponieważ zaś w naszym układzie współrzędnych jest  $y=a$  przy  $x=0$ , przeto

$$(4) \quad b = \frac{a}{4} - \frac{a}{2} \ln a, \text{ i}$$

$$2\left(x + \frac{a}{4}\right) = \frac{y^2}{2a} - a \cdot \ln \frac{y}{a}$$

jest równaniem równoważnej krzywej przy  $\lambda=1$ . — Odległość wzajemną jednocześnie miejsc punktów bieżących  $m$  i  $A$ , która jest zarazem długością odcinka stycznej do toru (m) w  $m$  od punktu styczności do punktu przecięcia się z torem (A) w  $A$ , nazwijmy  $\delta$ . Mamy tu

$$(5) \quad \delta = y \sqrt{1+q^2} = \frac{y}{2} \left[ \left(\frac{y}{a}\right)^{\lambda} + \left(\frac{a}{y}\right)^{\lambda} \right].$$

Gdy punkt  $m$  dosięgnie punktu  $A$ , będzie  $y=0$ . Jeżeli  $\lambda > 1$ , to przy  $y=0$  z równań (3) i (5) wynika  $x=\infty$ , a  $\delta=\infty$ , co oznacza, że przy  $\lambda > 1$  punkt  $m$  nie dosięgnie punktu  $A$ . Wrazie, gdy  $\lambda < 1$ , otrzymamy z tychże równań przy  $y=0$



$$x = \frac{\lambda a}{1 - \lambda^2}, \quad \delta = 0,$$

a zatem punkt  $m$  dosięgnie punktu  $A$  w odległości  $\frac{\lambda a}{1 - \lambda^2}$  od tego punktu, w którym styczna do krzywej ( $m$ ) jest prostopadła do prostej ( $A$ ). Wrazie na koniec, gdy  $\lambda = 1$ ,  $x$  jest nieskończenie wielkie przy  $y = 0$ , a zatem punkt  $m$  nie dosięgnie punktu  $A$ . — Wyrażenia na  $\frac{dx}{dy}$  wskazują, że przy  $\lambda \geq 1$  oś  $x$ -ów jest asymptotą krzywej ( $m$ ), co także okazuje, że w tych przypadkach punkty  $m$  i  $A$  zejść się z sobą razem nie mogą.

(3). Wiadomy jest czas, po którego upływie usłyszymy uderzenie o wodę kamienia, wrzuconego do głębokiej studni: obliczyć głębokość téj studni.

(4). Okazać, że czasy, w których punkt, spadający pionowo ze spoczynku, opisuje równe drogi, są proporcjonalne względem liczb  $\sqrt{1} - \sqrt{0} : \sqrt{2} - \sqrt{1} : \sqrt{3} - \sqrt{2} : \dots$ , a prędkości końcowe względem liczb  $\sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \dots$ .

(5). Z danego miejsca  $M$  spada punkt ze spoczynku pionowo na ziemię, a jednocześnie inny punkt z danego miejsca  $N$ , leżącego na pionie punktu  $M$ , wznosi się pionowo z daną prędkością: podać warunki, żeby obadwa punkty się spotkały, tudzież czas i miejsce spotkania, i zbadać rozmaite przypadki, jakie w tym zadaniu zachodzić mogą.

(6). Punkt porusza się jednostajnie po kole, którego środek posuwa się jednostajnie po danej prostej: wyznaczyć tor punktu i podać warunki, aby ten tor był cyklojdą.

(7). Punkt porusza się jednostajnie po kole, którego środek opisuje jednostajnie inne koło: wyznaczyć tor punktu i podać warunki, aby ten tor był linią prostą.

(8). Prędkość punktu w kierunku każdój z trzech osi prostokątnego układu współrzędnych jest proporcjonalna względem iloczynu jego współrzędnych, równoległych do dwu pozostałych osi: wyznaczyć tor i przyspieszenie punktu.

(9). Dane są dwa punkty  $m_1$  i  $m_2$ : wyznaczyć miejsce geometryczne tych punktów, z których spadek prostoliniowy ze spoczynku ku punktom  $m_1$  i  $m_2$  dokonuje się w tym samym czasie. (Szukane miejsce jest wogółności powierzchnią rzędu 3-go, a gdy  $m_1$  i  $m_2$  znajdują się na tym samym pionie, to szukane miejsce jest hiperboloidą obrotową równoboczną.)

(10). Prosta, po której punkt spada, zadość czyniące danym warunkom, w najkrótszym czasie, nazywamy prostą najkrótszego spadku. Wyznaczyć taką prostą, jeżeli punkt spada ze spoczynku z ogniska paraboli do jój obwodu, oś paraboli jest pionowa, a wierzchołek ponad ogniskiem

(11). Wyznaczyć prostą najkrótszego spadku między jakimikolwiek dwiema krzywymi w téj samj płaszczyźnie pionowej.

(12). Niech prędkość wody w każdym punkcie na powierzchni rzeki będzie proporcjonalna względem odległości tego punktu od najbliższego brzegu, a pływak (uważany jako punkt) nadaje sobie stałą prędkość, prostopadłą do kierunku biegu wody: wyznaczyć tor pływaka i czas jego przeprawy wpoprzek rzeki.

(13). Niech prędkość wody na powierzchni rzeki będzie stała, a pływak, wychodzący z danego punktu na jednym brzegu, nadaje sobie prędkość stałą, skierowaną ciągle ku punktowi, leżącemu naprzeciw punktu wyjścia na brzegu przeciwnym: wyznaczyć tor pływaka i czas przeprawy przez rzekę.

(14). Punkt porusza się na płaszczyźnie tak, że promień krzywizny jego toru opisuje w równych czasach równe pola: okazać, że kwadrat przyspieszenia  $\gamma$  tego punktu wyrazi się zapomocą wzoru:

$$\gamma^2 = \frac{c^4}{\rho^2} \left[ \frac{1}{\rho^4} + \left( \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} \right)^2 \right],$$

w którym  $\rho$  oznacza promień krzywizny, a  $c$  stałą prędkość wycinkową tego promienia.

(15). Jeżeli punkt porusza się na powierzchni,  $v_1$  i  $v_2$  oznaczają jego prędkości w kierunkach stycznych do linii krzywizn głównych tej powierzchni, a  $\rho_1$  i  $\rho_2$  odpowiednie promienie krzywizn głównych, to przyspieszenie  $\gamma_N$  punktu w kierunku normalnym do powierzchni wynosi

$$\gamma_N = \frac{v_1^2}{\rho_1} + \frac{v_2^2}{\rho_2}.$$

(16). Wyznaczyć taką krzywą na płaszczyźnie pionowej, iżby spadek po stycznej z każdego punktu tej krzywej do danej prostej poziomej dokonywał się w tym samym czasie.

(17). Jeżeli  $r$ ,  $\varphi$  oznaczają współrzędne biegunowe punktu, poruszającego się po krzywej płaskiej, to

$$\gamma_t = \frac{r'r'' + r^2\varphi'\varphi'' + r r'\varphi'^2}{\sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}}, \quad \gamma_n = \frac{r(r\varphi'' - \varphi r'') + 2\varphi' r'^2 + r^2\varphi'^3}{\sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}},$$

gdzie  $r'$ ,  $r''$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  oznaczają pierwsze i drugie pochodne współrzędnych względem czasu.

(18). Okazać, że przyspieszenie styczne i normalne ruchu centralnego wyrażają się zapomocą wzorów

$$\gamma_t = \frac{\gamma}{v} \cdot \frac{dr}{dt}, \quad \gamma_n = -\frac{\gamma}{v} \cdot \frac{2a}{r}.$$

(19). Jeżeli przyspieszenie punktu posiada ciągle ten sam kierunek, to  $\gamma = \frac{v^3}{\lambda\rho}$ , gdzie  $\rho$  jest promieniem krzywizny toru, a  $\lambda$  wielkością stałą (twierdzenie E. Habicha).

(20). Przyspieszenie ruchu centralnego po elipsie ma kierunek ku środkowi elipsy: wyznaczyć to przyspieszenie w funkcji promienia wodzącego.

(21). Wyznaczyć przyspieszenie ruchu centralnego po następujących krzywych: a) po kole, gdy środek ruchu leży na jego okręgu; b) po krzywej  $r^3 = a^3 \cos 3\varphi$ , c) po spiralnej  $r = a e^{\lambda \cos \varphi}$ . W przypadkach b. i c. początek współrzędnych jest środkiem ruchu.

(22). Na obwodzie koła o promieniu  $r$  znajduje się  $n$  punktów w odstępach równych, a każdy z tych punktów porusza się ciągle ku punktowi sąsiedniemu z prędkością stałą  $v$ : wyznaczyć tor każdego punktu i okazać, że wszystkie punkty dojdą jednocześnie do środka koła w czasie  $\frac{r}{v} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$ .

(23). Loksodromą na powierzchni obrotowej nazywamy tę krzywą, która wszystkie południki przecina pod kątem stałym. Niech punkt opisuje loksodromę na kuli; wyznaczyć jego  $v$  i  $\gamma$  i okazać, że wrazie, kiedy punkt tak się porusza po loksodromie, iż jego długość geograficzna rośnie jednostajnie z czasem, to prędkość i przyspieszenie będą proporcjonalne względem dostawy jego szerokości geograficznej.

---