

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA.

---

**MECHANIKA TEORETYCZNA.**

## PLAN BIBLIJOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNEJ.

### SERYJA PIĘRWSZA (12-mo).

- Tom I. **Początki arytmetyki** M. BERKMANA. Str. X+266; z drzeworytami w tekście. W oprawie kop. 65.
- Tom II. **Wiadomości początkowe z fizyki** S. KRAMSZTYKA. Książeczka I. wydanie 2-ie Str. XII+105; drzeworytów 61. W oprawie kop. 40.
- Tom III. **Toż. Książeczka II.** Wydanie 2-ie. Str. XI+171; drzeworytów 77. W oprawie kop. 65.
- Tom IV. **Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii** A. W. WITKOWSKIEGO. Str. VIII+108; drzeworytów 22, litografij 4. W oprawie kop. 45.
- Tom V. **O najprostszych figurach geometrycznych.**

### SERYJA DRUGA (12-mo).

- Tom I. **Arytmetyka**
- Tom II. **Geometria elementarna w wykładzie przystępnym.**
- Tom III. **Krótki wykład początków algebry.**
- Tom IV. **Przystępny wykład fizyki.**
- Tom V. **Kosmografia i geografia fizyczna z meteorologią.**
- Tom VI. **Nauka rysunków technicznych.**

### SERYJA TRZECIA (8-vo).

- Tom I. **Arytmetyka, kurs teoretyczny** M. A. BARANIECKIEGO, z przypiskami A. ŻBIKOWSKIEGO i J. N. FRANKIEGO. Str. LVIII+375; z drzeworytami w tekście. Rub. 1 kop. 70.
- Tom II. **Zadania arytmetyczne.**
- Tom III. **Algebra elementarna i Teoryja przybliżeń liczebnych.**
- Tom IV. **Geometria elementarna** I. BĄDOWSKIEGO. *Wkrótce wyjdzie z druku.*
- Tom V. **Krótki wykład syntetyczny elementarnych własności przecięć stożkowych.** A. M. BARANIECKIEGO, str. XVI+131, drzeworytów 63 kop. 85.
- Tom VI. **Trygonometria płaska i kulista** A. CZAJEWICZA. *W. w. z d.*
- Tom VII. **Miernictwo.**
- Tom VIII. **Zasady fizyki** A. W. WITKOWSKIEGO. *W. w. z d.*
- Tom IX. **Kosmografia i geografia fizyczna z meteorologią** J. JĘDRZEJEWICZA. Ze wstępem historycznym H. MERZYNGA str. XVIII+400 drzew. 215 tab. X Rub. 3 k. 80.
- Tom X. **Geometria wykreslna.**
- Tom XI. **Mechanika elementarna.**

### SERYJA CZWARTA (8-vo Lex.).

- Tom I. **Wstęp do analizy** M. A. BARANIECKIEGO. *W. w. z d.*
- Tom II. **Rozwiązanie równań liczebnych** J. SOCHOCKIEGO. Str. XII+212; drzew. 9. Rub. 2.
- Tom III. **Teoryja równań algebracyjnych** J. SOCHOCKIEGO. *W. w. z d. \**
- Tom IV. **Geometria analityczna** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Str. XLI+511; drzeworytów 85. Rubli 3.
- Tom V. **Geometria syntetyczna. \*\*)**
- Tom VI. **Rachunek różniczkowy i całkowy.**
- Tom VII. **Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego. \*\*\*)**
- Tom VIII. **Rachunek wariacyjny.**
- Tom IX. **Rachunek prawdopodobieństwa i Metoda najmniejszych kwadratów.**
- Tom X. **Mechanika teoretyczna.** J. N. FRANKIEGO str. XXXI+645, drzew. 72. Rub. 3.
- Tom XI. **Rachunki wykresne.**

**TOM DOBĄTKOWY «BIBLIJOTEKI». Słownik matematyczno-fizyczny.**

Jako uzupełniające seryję IV «Bibl.mat.-fiz.» należy nważać następujące dzieła, ogłoszone przez BIBLIJOTEKĘ KÓRNICKĄ:

- \*) **Teoryja wyznaczników, kurs uniwersytecki** M. A. BARANIECKIEGO. Paryż, 1879. 8-vo, str. XX+600. Marek 12.
- \*\*) **Wykład geometrii wykreslniej** E. SAGAYEY. Paryż, 1882. 4-to, str. 444 z bardzo wielu drzeworytami w tekście, oraz LXII tablice (in folio fracto) niedziorytów. Marek 24.
- \*\*\*) **Wykład nauki o równaniach różniczkowych** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Paryż, 1877. 8-vo, str. XXIV+902. Marek 20.

# BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

WYDAWANA

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH  
NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

SERYJA IV.

TOM X.

## MECHANIKA TEORETYCZNA

NAPISAŁ

JAN NEP. FRANK,

CZŁONEK AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI W KRAKOWIE,  
PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE.



REDAKTOR I WYDAWCA CZASOPISMA «RIEL, MAT.-FIZ.»  
A. CZAJEWICZ.

WARSZAWA.

W Drukarni Noskowskiego.

1889.



C.10106

Дозволено Цензурою.  
Варшава, 5 Января 1889 года.

264-104-542.

Drzeworyty ciął W. Bojarski.  
Papier z papierni w Mirkowie.

BG05A/008-27

# SPIS RZECZY.

|                                    |             |
|------------------------------------|-------------|
| PRZEDMOWA AUTORA . . . . .         | Str. IX.    |
| ZARYS HISTORII MECHANIKI . . . . . | XIII.       |
| <hr/>                              |             |
| WSTĘP . . . . .                    | str. 1 — 3. |

## MECHANIKA CIAŁ SZTYWNYCH

### CZĘŚĆ PIĘRWSZA.

#### KINEMATYKA CIAŁ SZTYWNYCH.

|  |               |
|--|---------------|
| ROZDZIAŁ I. RUCH BEZWZGLĘDNY PUNKTU . . . . .  | str. 4 — 55.  |
| 1. Prawo niezależności ruchów. — 2. Rodzaje ruchu punktu. — 3. Ruch jednostajny. — 4 — 5. Skład i rozkład prędkości. — 6. Ruch zmienny. — 7. Ruch jednostajnie zmienny. — 8. Spadek pionowy i ukośny punktu. — 9. Ruch niejednostajnie zmienny. — 10 — 11. Ruch krzywoliniowy. — 12. Skład i rozkład przyspieszeń. — 13. Przyspieszenia rzędów wyższych. — 14. Hodograf. — 15—17. Ruch centralny. — 18. Drganie proste. — 19. Zastosowania do geometrii. — Przykłady i ćwiczenia.  |               |
| ROZDZIAŁ II. RUCH POSTĘPOWY I RUCH OBROTOWY UKŁADÓW NIEZMIENNYCH . . . . .   | str. 56 — 88. |
| 20. Określenie ruchu wogółności. — 21. Rodzaje ruchów. — 22. Prędkość kąta i przyspieszenie katowe obrotu. — 23—24. Skład obrotów około przecinających się osi. — 25—26. Momenty obrotu. — 27. Skład obrotów około osi równoległych. — 28. Para obrotów. — 29. Skład obrotu z ruchem postępowym. Skręt chwilowy. — 30. Spółrzędne obrotu chwilowego. — 31. Spółrzędne skrętu chwilowego. — 32—33. Skład skrętów chwilowych. — 34. Oś centralna dwu obrotów około skośnych osi. — 35. Obroty sprzężone. — 36—37. Spółrzędne jednorodne skrętu. — Ćwiczenia. |               |
| ROZDZIAŁ III. OGÓLNA TEORYJA RUCHU UKŁADÓW NIEZMIENNYCH . . . . .  | str. 89—109.  |
| 38—40. Ruch chwilowy układu niezmiennego. — 41. Ruch ciągły układu niezmiennego. — 42. Rząd swobody układu. — 43—44. Analiza ruchu układu. — 45. Warunki, określające ruch układu. — 46. Ruch linii prostej. — 47. Ruch płaszczyzny i ruch powierzchni. — Przykłady i ćwiczenia.   |               |

## ROZDZIAŁ IV. RUCHY SZCZEGÓLNE UKŁADÓW NIEZMIENNYCH . . . str. 110—130.

48—50. Kręcenie się około punktu. — 51—52. Ruch posuwisty. — 53—54. Analiza ruchu posuwistego. — 55—56. Wykreślenie środka krzywizny. — 57. Ruch linii prostej na płaszczyźnie. — Przykłady i ćwiczenia.

## ROZDZIAŁ V. RUCH WZGLĘDNY . . . str. 131—147.

58. Cechy ruchu względnego. — 59—60. Prędkość względna. — 61—62. Przyspieszenie względne. — 63. Przyspieszenie spadku pionowego. — 64—65. Zboczenie ciała, spadającego na ziemię. — Literatura kinematyki. —

## CZĘŚĆ DRUGA.

## DYNAMIKA CIAŁ SZTYWNYCH.

## ROZDZIAŁ VI. DYNAMIKA PUNKTU. . . . . str. 148—177.

66. Prawa zasadnicze dynamiki. Pojęcie siły. — 67. Masa i gęstość. — 68. Miara siły i miara masy. — 69. Siły ciągłe i siły popędowe. — 70. Skład i rozkład sił. — 71. Momenty sił. — 72. Równowaga punktu nieswobodnego. — 73—74. Zasada prac przygotowanych. — 75. Równania różniczkowe ruchu. — 76. Równania różniczkowe Lagrange'a. — 77. Zasada Hamilton'a. — 78. Inna postać równań Lagrange'a. — 79. Równania ruchu Hamilton'a (Równania kanoniczne).

## ROZDZIAŁ VII. CIĄG DAJSZY DYNAMIKI PUNKTU (KINETYKA PUNKTU) . . . . . str. 178—198.

80. Rozwiązania ogólne równań ruchu. — 81. Zasada pól. — 82. Zasada pracy. — 83. Zasada energii i zasada zachowania energii. — 84. Przykłady sił zachowujących. — 85. Zasada energii dla punktu nieswobodnego. — 86. Zasada najmniejszego działania. — 87. Ruch punktu na torze danym. — 88. Równania różniczkowe ruchu względnego.

## ROZDZIAŁ VIII. ZAGADNIENIA Z KINETYKI PUNKTU . . . . . str. 199—229.

89. Spadek pionowy przy oporze powietrza. — 90. Rzut ukośny. — 91. Ruch centralny. — 92. Wahadło proste (matematyczne). — 93. Wahadło sferyczne. — 94. Tautochrony. — 95. Brachistochrony. — 96. Ruch względny: 1) Pozorny ruch wahadła przy uwzględnieniu obrotu ziemi; 2) Ruch punktu na obracającej się płaszczyźnie. — Ćwiczenia. — Literatura dynamiki punktu.

## ROZDZIAŁ IX. TEORYJA ŚRODKA MASY I MOMENTU BEZWŁADNOŚCI str. 230—257.

97. Określenie i własności środka masy. — 98. Sposoby wyznaczenia środka masy. — Ćwiczenia. — 99. Momenty bezwładności. — 100. Elipsojda bezwładności. — 101. Sposoby wyznaczenia momentów bezwładności. — Przykłady i ćwiczenia. — Literatura.

## ROZDZIAŁ X. STATYKA UKŁADÓW MATERYSJALNYCH . . . . . str. 258—279.

102—103. Zasada prac przygotowanych. — 104. Równowaga układów sztywnych. — 105. Przekształcenie układów sił. — 106. Układy sił, równoważne z jedną siłą. — 107. Siły leżące na jednej płaszczyźnie. — 108. Siły równoległe. Środek ciężkości. — 109. Układy sił, równoważne z parą sił. — 110. Skrętnik. — 111. Układy sił, równoważne ze skrętnikiem. — 112. Dwoistość w mechanice.

## ROZDZIAŁ XI. DOKOŃCZENIE STATYKI I ZAGADNIENIA STATYCZNE str. 280—300.

113—114. Rodzaje równowagi. — 115. Reakcje linii i powierzchni. — 116. Równowaga nici nierozciągliwej. — 117. Linia łańcuchowa. — 118—119. Równowaga wraze, gdy uwzględniamy tarcie. — Przykłady i ćwiczenia. — Literatura statyki.

## ROZDZIAŁ XII. TEORYJA PRZYCIĄGANIA . . . . . str. 301—343.

120. Okręcenia ogólne — 121. Przyciąganie punktu wewnętrznego. — 122. Obliczanie składowych przyciągania. — 123. Przyciąganie kuli. — 124 — 125. Potencjał przyciągania (Funkcja potencyjalna). — 126. Twierdzenia Laplace'a i Poisson'a. — 127. Potencjał kuli. — 128 — 131. Przyciąganie elipsoidy. — 132. Potencjał elipsoidy. — 133. Przyciąganie sferoidy. — 134—135. Przyciąganie ziemi. — 136. Przyciąganie dwu ciał. — Ćwiczenia — Literatura.

## ROZDZIAŁ XIII. KINETYKA UKŁADÓW MATERYJALNYCH . . . str. 344—369.

137. Zasada d'Alemberta. Równania różniczkowe ruchu. — 138. Zasada Hamilton'a. Drugi układ równań Lagrange'a — 139. Kanoniczne równania ruchu Hamilton'a. — 140. Zasada ruchu środka masy. — 141. Zasada pól. — 142. Inne wyrażenia powyżej podanych zasad. — 143. Zasada pracy i zasada energii. — 144. Zasada zachowania energii. — 145. Ruch względny. — Literatura.

## ROZDZIAŁ XIV. KINETYKA UKŁADÓW SZTYWNYCH . . . . . str. 370—398.

146.—147. Obrót około osi stałej. — 148. Środek uderzenia. — 149. Osi swobodne obrotu. — 150—152. Kręcenie się ciała sztywnego około punktu. — 153—154. Polodyja i herpolodyja. — 155—156. Precesja i nutacja. — 157. Ruch posuwisty. — 158. Ruch układu swobodnego. — Ćwiczenia.

## ROZDZIAŁ XV. ZAGADNIENIA Z KINETYKI UKŁADÓW MATERYJALNYCH . . . . . str. 399—433.

159. Ruch przy uwzględnieniu tarcia. — 160 — 161. O uderzeniu się ciał. — 162. Wahadło fizyczne. — 163. Ruch kuli na płaszczyźnie. — 164. Ruch walca na płaszczyźnie. — 165. Ruch bąka. — 166. Kręcenie się ciała obrotowego. — 167. Ruch względny. Giroskop. — Ćwiczenia. — Literatura.

## ROZDZIAŁ XVI. CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RUCHU str. 434—460.

168 — 172. Całkowanie równań Hamilton'a. — 173. Twierdzenie Poisson'a i Jacobi'ego. — 174. Zagadnienia. — Literatura.

## MECHANIKA CIAŁ NIESZTYWNYCH.

## ROZDZIAŁ XVII. TEORYJA SPRĘŻYSTOŚCI . . . . . str. 461—504.

175—176. Pojęcia zasadnicze teorii sprężystości. — 177. Odształcenie elementu ciała. — 178—179. Wydłużenia główne. — 180. Ruch elementu odształconego. — 181. Natężenia elementu ciała. — 182. Natężenia główne. — 183. Równania równowagi i równania ruchu elementu. — 184. Związki między natężeniami a odształceniami. — 185. Spółczynniki sprężystości. — 186. Ciała równokierunkowe. — 187. Równania ruchu i równania równowagi ciał równokierunkowych. — 188. Wyciąganie graniastosłupa. — 189. Skręcenie walca. — 190. Równowaga walca pustego (rury). — 191. Przewodzenie drgań. — 192. Drgania błony wypięzionej. — Ćwiczenia. — Literatura.

## ROZDZIAŁ XVIII. STATYKA CIECZY (HYDROSTATYKA) . . . . . str. 505—522.

193. Pojęcie cieczy doskonałej. — 194 — 195. Równania równowagi. — 196. Ciśnienie cieczy materjalnej. — 197. Zasada Archimedes'a. — 198. Równowaga ciał pływających. — 199 — 200. Kształt równowagi obracającej się cieczy. — Ćwiczenia. — Literatura.

## ROZDZIAŁ XIX. KINETYKA CIECZY (HYDROKINETYKA) . . . . . str. 523—552.

201—202. Równania ruchu cieczy doskonałej. — 203—204. Ruch w elemencie cieczy. — 205. Ruch wirowy i ruch niewirowy. — 206. Zachowanie ruchu wirowego. — 207 — 208. Linije wirowe i wiry elementarne. — 209. Prąd

i krążenie cieczy. — 210. Równania ruchu niewirowego. — 211. Wielowartościowość potencjału prędkości. — 212—213. Własności jednowartościowych potencjałów prędkości. — 214. Linije prądu i strugi cieczy.

ROZDZIAŁ XX. KINEITYKA CIECZY (DOKOŃCZENIE) . . . . . str. 553—585.

215. Ruch trwały cieczy materialnej. — 216. Ruch cieczy równoległy do płaszczyzny. — 217. Zagadnienia. — 218—219. Ruch ciała sztywnego w cieczy. — 220. Zagadnienia: 1) Ruch cieczy w wydrążeniu elipsoidalnym. 2) Ruch elipsojdy w cieczy nieskończonej. — 221—222. Ruch falowy cieczy. — 223. Równania ruchu cieczy lepkich. — 224. Ruch cieczy w prostej rurze walcowej. — Ćwiczenia. — Literatura.

ROZDZIAŁ XXI. MECHANIKA GAZÓW . . . . . str. 586—604.

225. Równania równowagi. — 226. Równania ruchu. — 227. Drgania głosowe powietrza. — 228. Teoryja kinetyczna gazów. — 229. Twierdzenie Maxwell'a. — 230—231. Własności gazów. — 232. Mieszanina gazów. — Literatura. —

Wskazówki do ćwiczeń . . . . . str. 605—634.

---

SPIS TERMINÓW MECHANICZNYCH . . . . . str. 635—643.

Errata . . . . . str. 644—645.

---





## PRZEDMOWA.

---

W szeregu nauk matematyczno-fizycznych zajmuje mechanika bardzo ważne i wybitne stanowisko, albowiem owe nauki polegają głównie na prawach ruchu i działania sił. Zasady mechaniki znajdują liczne zastosowania także w takich naukach, które nie używają analizy matematycznej, jak np. w chemii i w naukach biologicznych, które wyjaśniają zjawiska życia na podstawie praw dynamiki. Zbytecznem byłoby dowodzić ważności mechaniki dla nauk technicznych; dość wskazać na to, że w zagadnieniach, w których inżynier, mechanik lub budowniczy stosuje wiedzę matematyczną, wypada przedewszystkiem rozważać równowagę pewnych sił, lub ruch i pracę, przez siły wytworzoną.

W dziele niniejszym starałem się opracować mechanikę teoretyczną w takim zakresie, żeby ją przedstawić jako naukę samoistną, a zarazem podać materyjał pożądaną dla innych nauk pokrewnych i dla nauk stosowanych. Uwydatniając cechę mechaniki jako nauki przyrodniczej, wypadało na czele postawić prawa zasadnicze ruchu, wynikające z umiejętnej obserwacji przyrody, a określające zarazem granice, których w badaniu ruchu przekroczyć nie możemy. Jeżeli dla pewnej gromady zjawisk nie umiemy podać prawa zasadniczego, wtedy czynimy przypuszczenie, które tym pewniej zastępuje owo prawo nieznane, im częściej i dokładniej sprawdzić się daje. Na tych podstawach polegają wszelkie badania w nauce o ruchu, których wyniki streszczamy bądźto w postaci zasad ogólnych, bądźże w postaci twierdzeń, stosujących się do przypadków szczególnych.

W opracowaniu oddzielnych części mechaniki doprowadziłem rzecz tak daleko, jak tego cel, poprzednio zaznaczony, wymagał. Mechanika ciał sztywnych, jako nauka odrębna i podstawowa, zajmuje najwięcej miejsca; w teorii sprężystości, tudzież w mechanice cieczy i gazów trzymałem się ściśle tych granic, poza którymi leży pole badania fizyki matematycznej, teorii wytrzymałości i hydrauliki, a tylko w zagadnieniach poszedłem niekiedy dalej w kwestyjach ważniejszych. Kinematyka została opracowana stosunkowo dość obszernie; raz dlatego, że o nią dotąd bardzo mało po polsku pisano, powtóre dlatego, że na kinematyce polega dynamika, której wykład mógł być w niejednym miejscu skrócony, zyskując na przejrzystości.

W porównaniu z innymi kursami mechaniki wyróżnia się ten wykład większą obfitością i różnorodnością materiału naukowego. Gdyby ta różnorodność materiału miała być powodem zarzutu, natenczas pozwałam sobie zauważyć, że w innych językach najwięcej szczegółowe kwestyje nauki mają swoją literaturę, podczas gdy u nas długo może czekać wypadnie na liczniejsze prace specjalne, a do tego czasu literatura naukowa posiadać będzie z konieczności pewną cechę encyklopedyczną.

Obiedwie główne metody badania, analityczna i syntetyczna, znalazły zastosowanie, chociaż przewaga jest po stronie metody pierwszej. Mając na uwadze stan nauki w uniwersytetach i szkołach politechnicznych, dla których ten kurs jest głównie przeznaczony, przyjmuję, że czytelnik posiada znajomość geometrii analitycznej, rachunku różniczkowego i całkowego, tudzież głównych zasad rachunku wariacyjnego i nauki o całkowaniu równań. Zastosowanie funkcji eliptycznych do mechaniki nie wchodzi w zakres tego wykładu.

Program seryi IV Biblijoteki matematyczno-fizycznej wymaga oczywiście, żeby każde dzieło tej seryi stało na wysokości nauki według jej stanu dzisiejszego. Starłem się wszędzie przestrzegać tej zasady bez względu na to, że w wykładzie szkolnym wypada w niej jednej kwestyi ograniczyć się zaznaczeniem myśli głównych, pozostawiając resztę własnej pracy studenta. Gdyby ta książka stała się pomocną przy takiej pracy, cel jej byłby osiągnięty. W tej myśli umieszczałem w texcie często wezwania do czytelnika, żeby dopełnił badania pewnej kwestyi, i podałem zbiór zadań klasycznych, metodycznie rozwiązanych, tudzież liczne ćwiczenia, na których czytelnik może spróbować sił własnych i zaprawić się stopniowo do pracy samodzielnej.

W téj myśli wreszcie umieściłem w stosownych miejscach notatki o literaturze przedmiotów, traktowanych w tym kursie. Te wskazówki literackie odnoszą się przedewszystkiem do prac źródłowych lub takich opracowań, które mogą ułatwić należyte zrozumienie źródeł nauki. Uwzględniłem w nich także nieliczne prace w języku polskim.

Nie potrzebuję nadmienić, że w wyborze materiału korzystałem z każdego źródła dostępnego, aby tylko odpowiedzieć zadaniu, które sobie założyłem; co jest moją własną pracą, nie widzę potrzeby podnosić, a świadomy rzeczy czytelnik łatwo tego dopatrzeć się potrafi.

We Lwowie, we wrześniu r. 1888.

---

