Astronomia sferyczna

1895 – 1896

Pr. W. Łaska

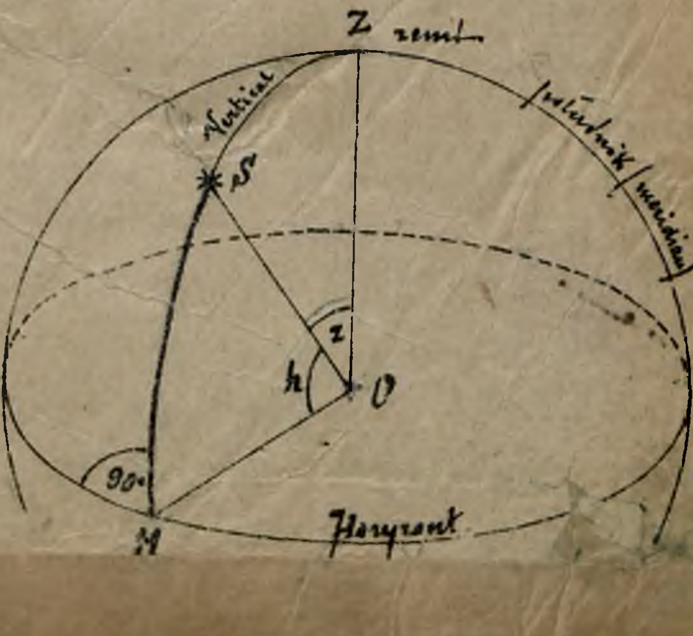
Astronomia sferyczna Część I.

Pojęcia wstępne, oznaczenie położenia gwiazd.

Astronomia zajmuje się badaniem ruchu ciał niebieskich i ich istoty. Przy badaniach swoich posługuje się matematyką i fizyką. Przy pomocy matematyki wyznaczamy położenie gwiazd, wyrachowujemy ich orbity, — zaś przy pomocy fizyki rozpoznajemy ich własności.
Mówiąc tylko o gwiazdach samych można nazwać astronomię **astrofizyką**, skoro zaś mówić o ruchu ciał niebieskich, należy rozróżnić dwojakie ruchy: **absolutne** czyli prawdziwe i ruchy **relatywne** czyli pozorne. Nauka o ruchach absolutnych nazywa się **mechaniką nieba** albo astromechaniką, nauka o ruchach pozornych zowie się **astronomią sferyczną**.—
Miejscem astronomicznych zjawisk jest pozorna kula nieba na powierzchni której zdają się być niejako utkwione gwiazdy, a w środku tej kuli znajduje się nasza ziemia.
Astronomia sferyczna jak już wspomnieliśmy podaje nam sposoby przedstawienia pozornego ruchu gwiazd za pomocą rachunku.
W tym celu należy najpierw określić położenie gwiazd wyrazem matematycznym. Do tego posłużą następujące uwagi:

A. System współrzędnych poziomych.

Pozorna kula nieba ma swoje centrum w oku obserwatora O. Patrzącemu z punktu O przedstawiają się wszystkie gwiazdy w równej od niego odległości. Odległość tak jest tylko pozornie dla wszystkich gwiazd jednakowa, to wszakże jest dostateczne do pozornego miejsca gwiazd stałych.
Przeciągamy płaszczyznę poprowadzoną w jakim kolwiek bądź punkcie O. na powierzchni ziemi wziemy



poziomem. Poziom dzieli sferę świata na dwie półkule. Okrąg po-
ziomu zowiemy widnokręgiem czyli horyzontem (od greckiego sło-
wa rozgraniczać).
Każdy punkt powierzchni kuli ziemskiej ma swój własny poziom
i horyzont. Linia wyprowadzona ze stanowiska obserwatora prostopadle do po-
ziomu, trafia sferę świata w punkcie górnym, zwanym zenitem,
przedłużona zaś, trafia dolną półkulę w punkcie zwanym nadirem.
Koła wielkie przechodzące przez zenit i Nadir zowiemy wierzchołko-
wymi (vertikale).
Odległość gwiazdy od horyzontu t.j łuk SH, czyli wyrażony przez kąt
SOH zowie się wysokością gwiazdy.
(Do zmierzenia wysokości gwiazd służą łuki vertikałów, zaś koła wierzchoł-
kowe zowiemy także kołami wysokości.
Zamiast wysokości gwiazd jest używaną także zenitowa odległość t.j.
łuk SZ jeżeli Z oznacza zenit.

Ponieważ

$\sphericalangle HOS + SOZ = 90°$

wynosi 90°

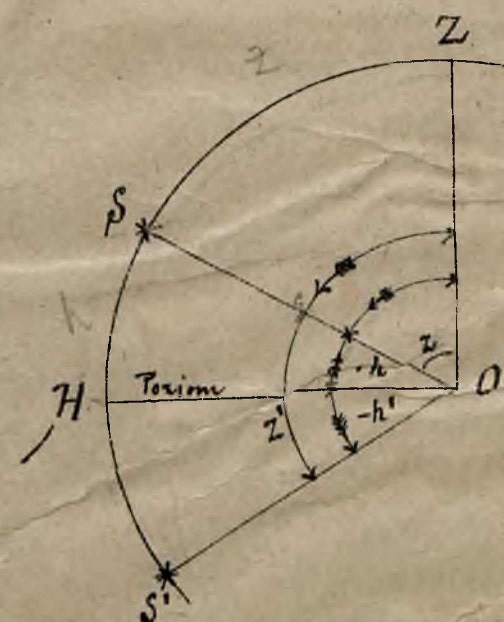
mamy więc równość

$z + h = 90°$ - - - - - - 1.)

czyli

$z = 90° - h$

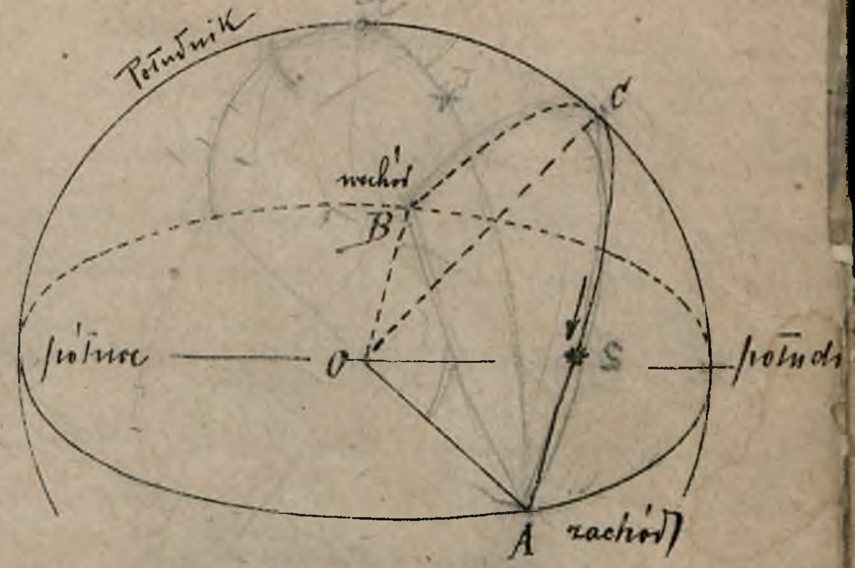
$h = 90° - z$



Jeżeli gwiazda znajduje się nad poziomem to jej wysokość jest dodatnia w przeciwnym razie ujemna. Odległość zenitowa po- zmienia się jest zawsze dodatnia.
Wysokość gwiazdy S jest dodatnia i wyraża się za pomocą łuku HS [illegible] kątem SOH (figura powyżej), Zenitowa odległość tejże gwiazdy przedstawia łuk SZ lub kąt SOZ. Wysokość gwiazdy S' znajdującej się pod poziomem jest ujemna i wyraża się łukiem HS'. Odległość zenitowa gwiazdy [illegible] i równa się łukowi ZS' lub kątowi ZOS'.
Pozorna [illegible] zdaje się wykonywać obrót ze wschodu na [illegible]

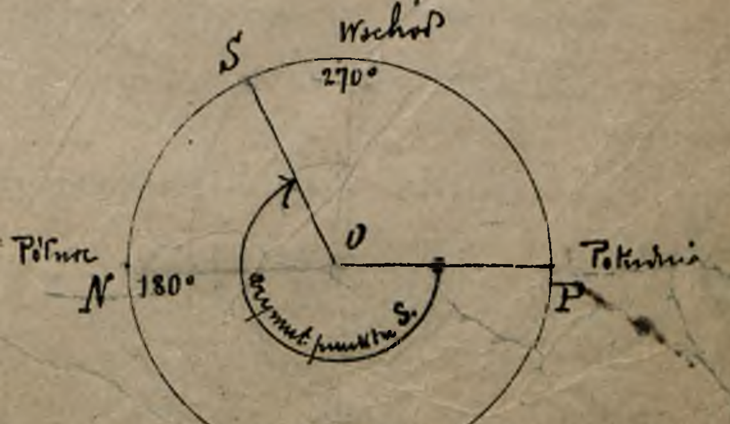
...wschód, powodem tego jest obrót ziemi ze zachodu na wschód.

...ruchomy gwiazdy ... wschodza... ...wznoszące. Tak ... p. gwiazda S wschodzi w punkcie ... i zachodzi w punkcie A. W punkcie C do... ...najwyż...ego swego miejsca nad poziomem, mówimy ... gwiazda górnuje lub kulmi... ...Łuk ACB opisany przez ... nad poziomem zowie ...łukiem dziennym gwiazdy ... gwiazd stałych jest zawsze



$\overline{BC} = \overline{AC}$ lub $\measuredangle BOC = \measuredangle COA$. Wszystkie gwiazdy górnują w tym ... kole wierzchołkowem, które zowie się południkiem. Płaszczyzna ...nika przecina poziom podług ... zwanej południową. — —
...południowa przecina raz kory... ...w dwu punktach Południowym ...nocnym.

...jakiegokolwiek vertikala ...południka liczona na horyzon... ...od punktu Południowego w kie... ...nku na zachód zowie się azymutem. Wszystkie gwiazdy znajdu... ...się na tym samym vertikalu ...jednakowy azymut, a więc ... punktu południowego jest ... azymut Zachodu 90°, azymut ...północnego 180° azymut wschodu 270°. ...tnie jest azymut punktu S cały ... PZS lub kąt POS [co na rysunku ...czono wskazówką.]



...ice gwiazdy dla pewnego miejsca ...ziemi jest wyznaczone, skoro ...my jej azymut i wysokość w pewnym czasie. Znajomość czasu jest

…mierne z następującego powodu:
…ozorne kuli nieba obraca się ze znajdującemi na [niej] gwiazdami około osi świata t.j. około linii prostej łączącej biegun[y] świata więc azymut i wysokość zmieniają się bezustannie, [z] tego okazuje się metoda oznaczenia położenia gwiazd [za] pomocą azymutu i wysokości niepraktyczną, i dlatego używamy innych kół które względem czasu prawie niezmienne mają wartości. —

B. System spółrzędnych równikowych.

Bieguny świata są prawie stałe, koło wielkie poprowadzone na kuli nieba w odległości 90° od biegunów zowie się równikiem. Równik dzieli pozorną kulę nieba na półkulę północną i półkulę południową. Równik przecina widnokrąg lub horyzont w punkcie wschodu i zachodu. Koła poprowadzone prostopadle do równika i przechodzące przez oba bieguny świata, nazywają się kołami deklinacyi lub kołami godzinnymi. — Południk (Meridian) jest kołem deklinacyi które przechodzi przez Zenit i Nadir. — Odległość gwiazdy od równika mierzona na kole deklinacyi zowie się jej deklinacyą, odległość gwiazdy od ~~równika~~ bieguna północnego nazywa się jej odległością biegunową. Deklinacyę oznacza się przez δ, odległość biegunową przez N.P. Odległość biegunowa jest dopełnieniem deklinacyi do 90°. Mamy tedy zawsze

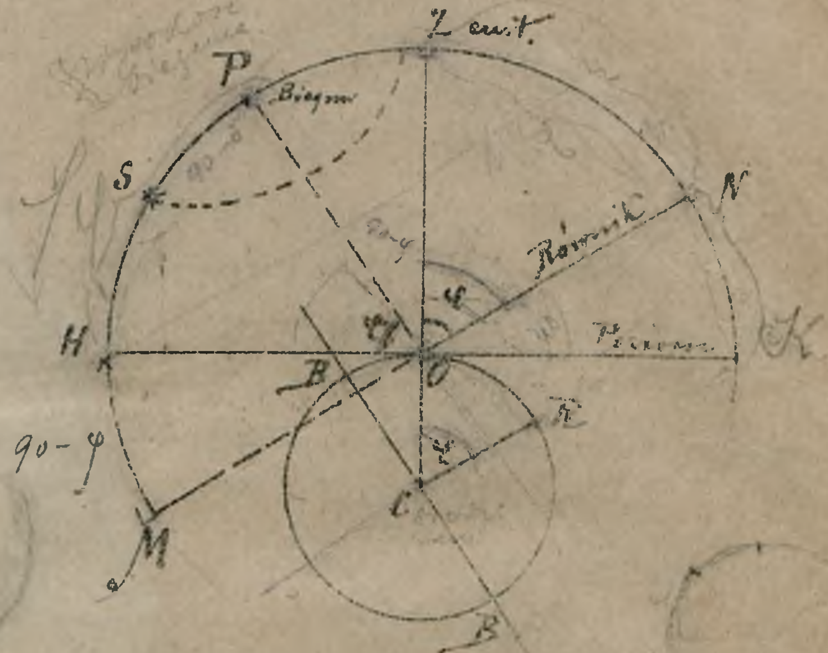
$$NP + \delta = 90°$$

Deklinacya na równiku jest = 0°, deklinacya bieguna północnego jest +90°, deklinacya bieguna południowego −90° jest tedy zawsze na półkuli północnej dodatnia a ujemna na półkuli południowej. Odległość biegunowa jest zawsze dodatnia i rachuje się od 0° do 180° w kierunku od bieguna północnego do bieguna południowego, deklinacya

oś rachujemy na łuku koła deklinacyi w kierunku od równika do bie-
guna północnego (jeżeli jest dodatnia) a do bieguna południowego (jeżeli jest
ujemna. –

Jeżeli φ jest szerokość geograficzna to deklinacya zenitu jest = φ
i wysokość bieguna = φ

aby to udowodnić niech będzie C środkiem ziemi, O miejscem obserwa-
cyi BB oś ziemi, CR prze-
krój równika ziemi tedy
łuk OCR jest równy geogra-
ficznej szerokości. Popro-
wadźmy NO styczną i niech
OP będzie kierunkiem ku bie-
gunowi nieba to OP jest równo-
ległe do BB. Ponieważ równik
nieba ON jest prostopadły
do osi świata OP to jest także
ON ∥ do CR



Mamy przeto

$\sphericalangle HOP = \sphericalangle ZON = \sphericalangle OCR$

a przecież HOP jest wysokością
bieguna, NOZ deklinacyą ze-
nitu, mamy tedy warunek udowodniony. Z narysowanej figury widzi-
my że u nas są tylko te gwiazdy widoczne, których deklinacya południo-
wa mniejsza jest niż łuk

$NK = 90° - \varphi$.

Przeto, jeżeli południowa deklinacya pewnej gwiazdy jest większa jak
$90 - \varphi$ to gwiazda ta na szerokości geograficznej φ jest niewidoczna. Lwów
ma n.p. szerokość geograficzną około 50°, dlatego gwiazdy, których deklinacya
południowa wynosi więcej jak 40° są we Lwowie nie widoczne.

Gwiazdy, które można u nas obserwować dadzą się podzielić na dwie
grupy t.j. takie które wschodzą i zachodzą i gwiazdy które nigdy
nie zachodzą, czyli zawsze są widoczne.

Jeżeli jakaś gwiazda ma być zawsze widzialna to jej odległość od bie-
guna nie powinna być większą jak łuk HP. ..., t.j. odległość biegu-
nowa tej gwiazdy $90-\delta$ musi być mniejsza niż wysokość bieguna φ

otrzymamy więc warunek:

$$90-\delta < \varphi$$

$-\delta < \varphi - 90°$

$\delta > 90° - \varphi$

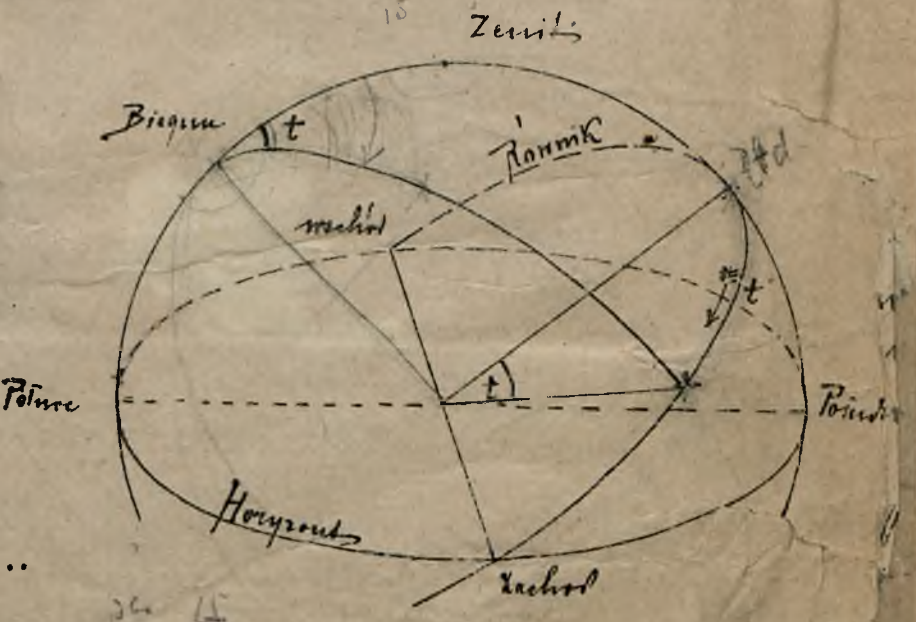
czyli $\delta > 90° - \varphi$

Przeto jeżeli północna deklinacya gwiazdy jest większa od $90°-\varphi$ to gwiazda ta jest na całej szerokości geograficznej φ bezustannie widzialna, czyli jak mówimy gwiazda ta jest kołobiegunowa (circumpolarna). Wywody te ważne są naturalnie i dla półkuli ~~południowej~~. Gwiazdy których północna i południowa deklinacya jest mniejsza jak $90-\varphi$, te gwiazdy u nas wschodzą i zachodzą.

Gwiazdy, których deklinacya jest bliską φ nazywamy gwiazdami zenitalnymi, Gwiazdy na południe od zenitu, nazywają się południowymi czyli gwiazdami czasowymi, ponieważ najodpowiedniej nadają się do spostrzeżeń czasowych.

Gwiazdy w pobliżu bieguna nazywają się także biegunowymi.

Odległość koła deklinacyi od meridianu zowie się kątem godzinnym i oznacza się przez t. Kąt godzinny rachuje się podobnie jak argument od punktu południowego na zachód od $0°$–$360°$ lub miarą czasu od $0^h - 24^h$ tak że mamy równość



$24^h = 360°$; $1° = 0^h\,4^m$

$1^h = 15°$; $1' = 0^h\,0^m\,4^s$

$1^m = 15'$; $1'' = 0^h\,0^m\,0.^s066\ldots$

$1^s = 15''$;

Dlatego mamy np.

$$239°\,18'\,47'' = 15^h\,57^m\,15.^s13$$

Zamianę łuku na czas i na odwrót musimy bardzo często przeprowadzić. Jeżeli łuk mamy wyrazić przez czas to należy podzielić przez 15 resztę pozostałą w stopniach i minutach pomnożyć przez 4 by je zamienić w stopnie i minuty łukowe, pozostałe ale reszty należy znowu pomnożyć przez 15.

Tak więc będzie

$15^h\ 57^m\ 15.117^s$

15 x 15	. . . .	225°
57 : 4 = 14	reszta 1	14° 15'
15.117 : 4 = 3	reszta 3.117	3'
3.117 x 15		46.75"
		239° 18' 46.75"

Ponieważ gdy deklinacya nie jest zawisłą od ruchu dziennego kuli nieba to kąt godzinny zmienia się bezustannie, a więc i ten system spółrzędnych nie nadaje się do bezwzględnego oznaczenia położenia gwiazd.

Wprowadzono przeto inną spółrzędną tak zwaną rektascenzyą.

Dla większej jednak ścisłości tej określnicy, wprowadzę tu jeszcze pewne pojęcie. Ziemia obraca się nietylko około swej osi, ale także około słońca i to w pewnej płaszczyźnie, którą nazywamy płaszczyzną ekliptyki (z greckiego ekleipsein = zaćmić gdyż zaćmienie może tedy zajść, gdy słońce księżyc i ziemia równocześnie w tej płaszczyźnie się znajdują. Pomyślmy sobie tę płaszczyznę przedłużoną aż do przecięcia z pozorną kulą nieba, to otrzymamy na niej pewne największe koło, które nazywamy ekliptyką, a które obecnie względem płaszczyzny równika około 23½° jest nachylone.

Ekliptyka jest przeto pozorną drogą słońca na kuli nieba, którą ono odbywa w ciągu roku przez słońce.

Wyznaczenie położenia słońca w ekliptyce było głównem zagadnieniem starożytnych astronomów, przeto dzielili oni pas w którym słońce, księżyc i inne planety są tak zwany zodyak na 12^{cie} części po 30° i nazywali je znakami gwiazd najbliżej leżących. — Ponieważ równik dzieli

eklipstykę na dwie równe części to jedna z tych leży na północnej półkuli ziemskiej, druga na południowej półkuli nieba.
z północnej leżą:

Znaki wiosny:

♈	Baran	0° – 30°
♉	Byk	30° – 60°
♊	Bliźnięta	60° – 90°

Znaki lata:

♋	Rak	90° – 120°
♌	Lew	120 – 150°
♍	Panna	150 – 180°

Znaki jesieni

♎	Waga	180° – 210°
♏	Niedźwiadek	210° – 240°
♐	Strzelec	240° – 270°

Znaki zimy:

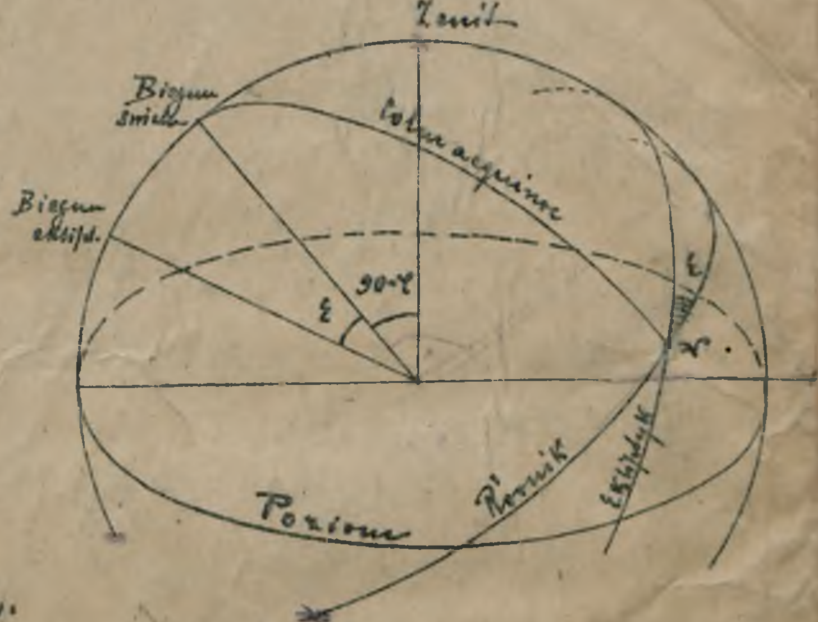
♑	Koziorożec	270° – 300°
♒	Wodnik	300° – 330°
♓	Ryby	330° 360°

Następujący wiersz ułatwia zapamiętanie tego szeregu:

„Baran idzie przed Bykiem po Bliźniętach Raki
Lew schodzi przed Panną – są to letnie znaki
Waga ~~[illegible]~~ Niedźwiedź odkieruj, Strzelec zimnem grozi
Koziorożec lód ciąży, Wodnik Ryby mrozi"

Znaki te nie schodzą się z temi konstelacyami, jak to miało miejsce za czasów Hypparcha, jest temu lat około 2000, gdy punkt równonocny wiosenny leżał przeważnie w Konstelacyi Barana. Teraz znajduje się w Konstelacyi Ryb, – podobnie punkt równonocny jesienny nie leży już teraz jak owczas w Konstelacyi Wagi ale w Konstelacyi Panny.
Powodem tej niezgodności jest ruch punktu przecięcia się eklipstyki z równikiem, tak zwana precesya, o czem jeszcze później przy sposobności pomówię.
Jak już powiedzieliśmy dzieli równik eklipstykę na dwie równe części z których jedna leży na północnej, druga na południowej półkuli nieba.
Punkta przecięcia eklipstyki z równikiem nazywają się punktami równonocnymi (aequinoctialnymi), ponieważ na całej ziemi w dniu 21 marca i 23 września każdego roku dzień jest równy nocy gdy słońce w tych punktach się znajduje.
[illegible] znajduje się słońce w dniu 21 go marca nazywa się punktem

wiosennym. Także miejscem barana lub punktem aequinotialnym
wogóle i oznacza się powszechnie ♈ —
Punkt ten opisuje na kuli nieba bardzo powolny ruch który nazywamy
precesyą. Ruch ten wynosi około 50" na rok, tak że można powiedzieć
że to jest prawie stały punkt na niebie.
W rzeczywistości nie ma na niebie żadnego absolutnie stałego punktu
wszystko znajduje się w ustawicznym ruchu o czem później się dowiemy



Ruch punktu aequinotialnego
jest w porównaniu do dziennego
ruchu kuli nieba bardzo mały
i jednostajny z stanie w każdej chwi-
li rachunkiem ruch ten przed-
stawić. Rozumie się punkt Ba-
rana jest tylko idealny, jego
bezpośrednio na niebie widzieć
nie można, podobnie jak punktu
Południowego.
Wyznaczenie jego miejsca dzieje się
za pomocą odpowiednich stale umieszczo-
nych instrumentów. Punkta o 90°
od punktów aequinotialnych oddalone zowiemy punktami solstytialnymi. Koło dekli-
nacyi idące przez te punkta nazywa się colurem punktów solstitialnych, a ko-
ło idące przez punkta aequinotialne colurem punktów aequinoctialnych.
Kąt między równikiem a ekliptyką ma nazwę ukosu ekliptyki i oznacza się grecką
literą ε. Ukos ten wynosi obecnie (1896); ε = 23° 27' 10" i jest wogóle mało zmienny. —
Odległość koła deklinacyi od punktu
wiosennego zowie się rektascensyą,
lub prostem wznoszeniem gwiazdy
znajdującej się na tem kole, ozna-
cza się przez α. Jest to kąt przy
biegunie zawarty między kołem
deklinacyi punktu wiosennego a
kołem deklinacyi gwiazdy.
Rektascensye rachuje się od 0° do
360° lub 0h–24h w kierunku

Za pomocą deklinacyi i rektascenzyi jest położenie gwiazdy na kuli nieba zupełnie oznaczone, tak samo jak przez podanie długości i szerokości geograficznej pewnego miejsca oznacza się jego położenie na ziemi.

Jak deklinacya tak i rektascenzya zmieniają się bezustannie z powodu precesyi i nutacyi a także innych zjawisk o czem przy sposobności później mówić będziemy. Zmiany te na kilka lat nie są znaczne, tak że można je uważać jako małe poprawki, które po pewnym okresie czasu do dawnych dodać należy:—

Czas któremu odpowiadają pewne spółrzędne t.j deklinacya i rektascenzya zowie się **epoką gwiazdy**, tak n.p. mamy dla gwiazdy α Andromedae dla początku roku 1896.

$\alpha = 0^h\,3^m\,0^s_5 \qquad \delta = +28^\circ\,30'\,58'' \qquad$ Epoka 1896,0

a dla początku roku 1897.

$\alpha = 0^h\,3^m\,3^s_7 \qquad \delta = +28^\circ\,31'\,18' \qquad$ Epoka 1897.0

Czem większa deklinacya tem większa zmiana w rektascenzyi. Tak n.p. dla gwiazdy biegunowej: r. 1896,0 jest:

$\alpha = 1^h\,20^m\,54^s_1 \qquad \delta = +88^\circ\,45'\,11''_5$

dla r. 1897.

$\alpha = 1^h\,21^m\,18^s_5 \qquad \delta = +88^\circ\,45\,20''$

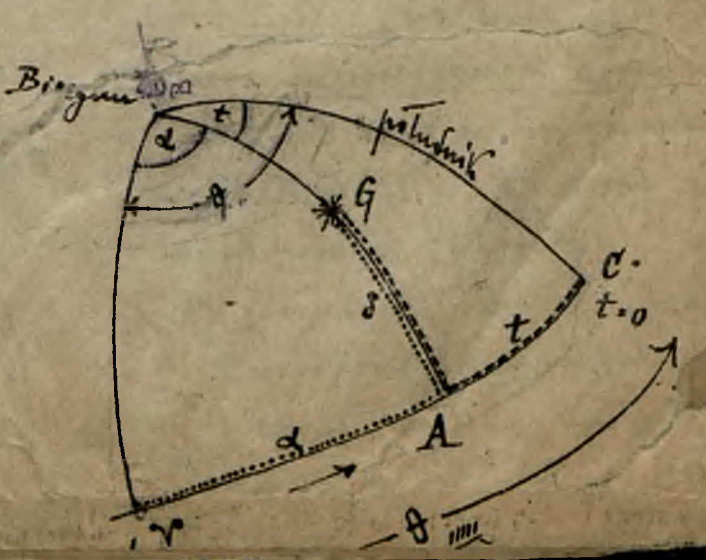
Zmiana w rektascenzyi wynosi tutaj

$+24^s_{,}4$ rocznie.

Odległość punktu wiosennego od meradianu zowie się **czasem [illegible]rycznym** i oznacza się przez ϑ. [illegible] jest tedy kąt godzinny [illegible] wiosennego. Mamy tedy [illegible] [illegible] spółrzędnik, ♈ punkt [illegible]

$\vartheta = \alpha + t$

[illegible]



ponieważ $\sphericalangle CBV = \sphericalangle ABV + \sphericalangle CBA$

będzie $\theta = \alpha + t$ . . . . 3.)

Dla tego jeżeli

$t = 0$ t.j. jeżeli gwiazda znajduje się w meridianie (południku)

$\theta = \alpha$

t.j. Rektascensya pewnej gwiazdy równa się czasowi gwiazdowemu przy górowaniu.

Czas może być oznaczony czas gwiazdowy.

Obserwując mianowicie czas gdy gwiazda której rektascensya wynosi α, przechodzi przez południk to w chwili jej przejścia jest czas gwiazdowy $= \alpha$.

Zbierzmy to wszystko cośmy dotychczas powiedzieli, otrzymamy:

A. System współrzędnych horyzontu.

1.) Współrzędna pionowa: Wysokość (oznaczamy h) jest to długość łuku przynależnego koła pionowego brana począwszy od punktu przecięcia się tegoż z horyzontem aż do gwiazdy.

Wysokość liczy się od 0° (horyzont) do +90° (zenit) lub
od 0° (horyzont) do −90° (Nadir)

i jest $\left\{\begin{array}{l}\text{dodatnia}\\ \text{ujemna}\end{array}\right.$ gdy gwiazda znajduje się $\left\{\begin{array}{l}\text{nad poziomem}\\ \text{pod poziomem.}\end{array}\right.$

Jej uzupełnienie do 90° nazywa się odległością zenitalną i oznacza się przez z.

Mamy tedy związek

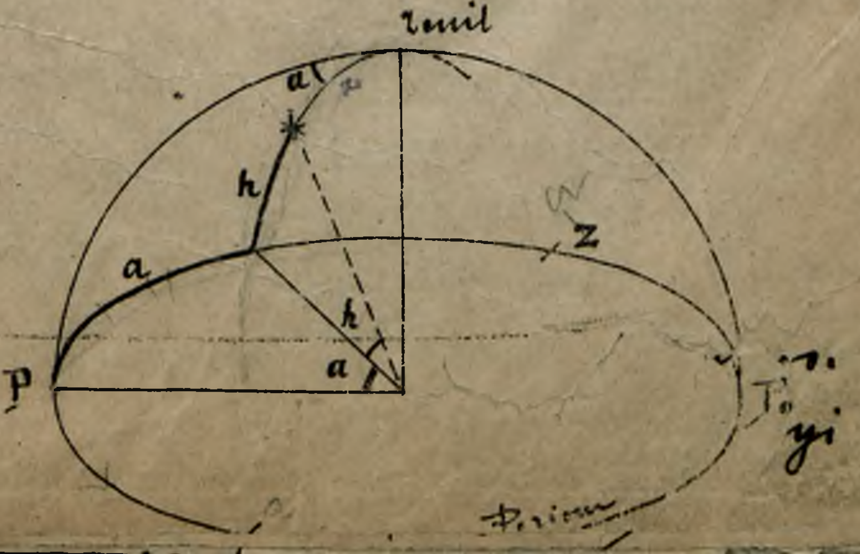
$$z + h = 90°$$

Odległość zenitalna jest zawsze dodatnia i liczy się od 0° (Zenit) do 180° (Nadir).

Współrzędna pozioma

Azymut. (oznacza się a).

Wyraża kąt przy zenicie między południkiem a ko-



-t.

pionowem gwiazdy. Azymut liczy się od 0°–360° od punktu południowego na zachód z kierunku dziennego ~~obrotu kuli ziemskiej~~ ruchu kuli nieba.

B. System spółrzędnych równikowych.

1.) Spółrzędna pionowa. Deklinacya oznaczona przez δ, jest to długość łuku mierzona po przynależnym kole deklinacyi i to od równika aż do gwiazdy

(Deklinacya liczy się od 0° (Równik) do $\left\{ \begin{matrix} +90° \\ -90° \end{matrix} \right\}$ biegun północny / " południowy.

i jest $\left\{ \begin{matrix} \text{dodatnia} \\ \text{ujemna} \end{matrix} \right\}$ na północnej / na południowej półkuli.

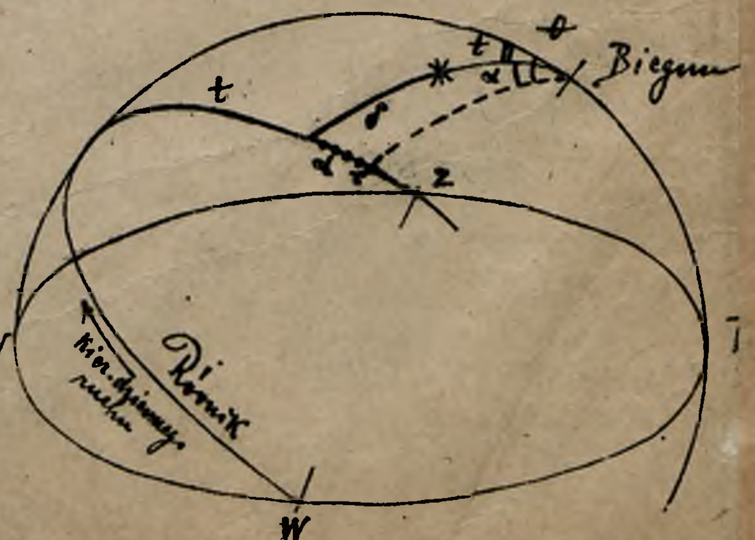
Jej uzupełnienie do 90° nazywa się odległością biegunową północną, ta jest zawsze dodatnia i liczy się od 0° (Biegun północny) do 180° (B. południowy). Oznacza się NP i zachodzi związek.

$$\delta + NP = 90°.$$

2) Spółrzędna pozioma:

α) Kąt godzinny (oznacza się przez t) jest to kąt przy biegunie zawarty między południkiem a kołem deklinacyi gwiazdy. Liczy się od 0^h do 24^h od punktu południowego na zachód, podobnie jak azymut a więc z kierunku dziennego ruchu kuli nieba.–

Deklinacya jak widzimy nie była zawisłą od dziennego ruchu, przeciwnie kąt godzinny zmienia się bezustannie.



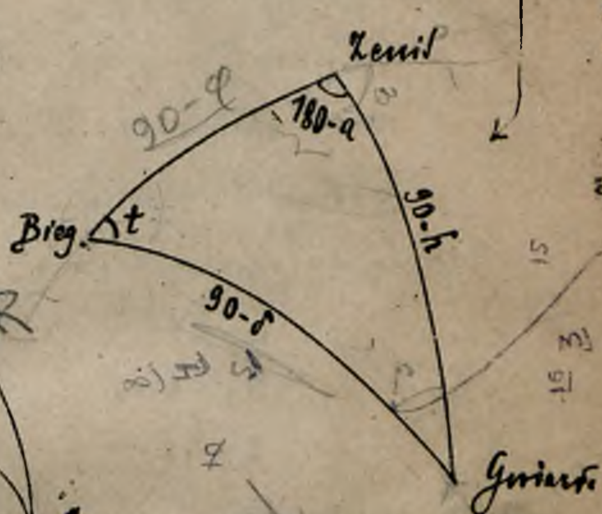
β. Rektascenzya (α) jest to kąt przy biegunie zawarty między kołem deklinacyi punktu równonocnego wiosennego, a kołem deklinacyi [illegible]. Liczy się od 0^h–24^h [illegible] punktu wiosennego na [illegible] a więc z odwrotnym kierunku ruchu dziennego. Ponieważ

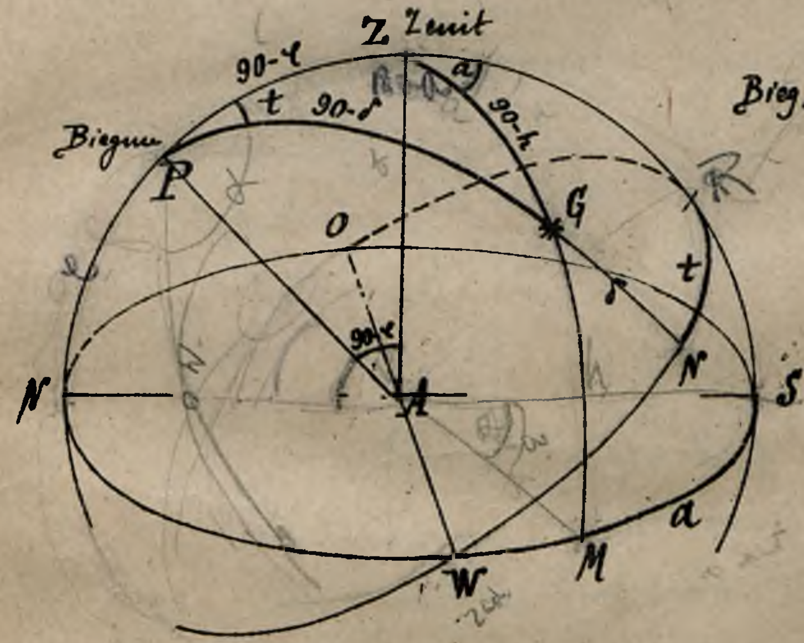
punkt wiosenny porusza się z pozorną kulą nieba, to Rektascenzya jest nie zależną od ruchu dziennego.
Zapomocą α i δ jest miejsce pewnej gwiazdy bez względu na czas oznaczone.

γ) Czas gwiazdowy (oznaczony θ) jest to kąt godzinny punktu wiosennego. Zachodzi następujący związek

$$\theta = \alpha + t$$

Ze związku między tymi wielkościami wynika następujący trójkąt sferyczny:





By to uwodnić niech będzie A miejscem obserwacyi, Z. zenit P. Biegun, G. gwiazda to: jeżeli S oznacza południe W: zachód łuk $\widehat{MS}$ = kątowi $\sphericalangle SZM$ = a azymut łuk $\widehat{MG}$ = = h wysokości gwiazdy G. Podobnie jest łuk RN = $\sphericalangle$ RPN = t (kąt godzinny
i NG = δ deklinacya gwiazdy).

Dlatego jest łuk $PG = PN - NG = 90° - \delta$
$ZG = ZM - MG = 90° - h$.

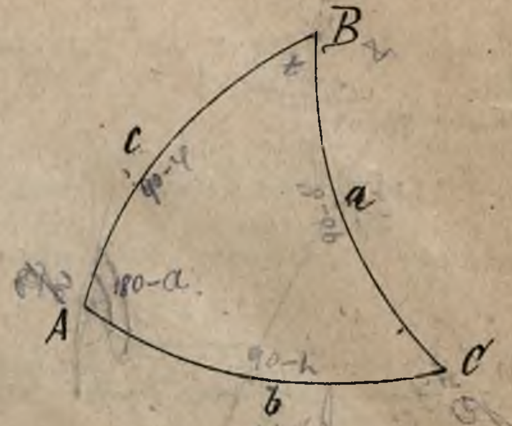
Odległość zenitu od bieguna równa się $90° - \varphi$ = łukowi PZ
i koniecznie jest kąt $PZG = 180° - \sphericalangle RZG = 180° - a$
Aby módz wytłumaczyć związek tych wartości i zjawisk dziennego obrotu gwiazd należy określić zależność rektascenzyi i deklinacyi od azymutu i wysokości wyrazem matematycznym.

W sferycznym trójkącie ABC mamy ogólnie

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$



Połóżmy $a = 90 - \delta$ $\quad A = 180^\circ - a$

$b = 90 - h$ $\quad B = t$

$c = 90 - \varphi$

to otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cosh\cos a \\ \cos\delta \sin t &= \cos h \sin a \\ \cos\delta \cos t &= \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos a \end{aligned}\right\} \quad 4.)$$

Jeżeli wstawimy

$a = 90 - h$ $\quad A = t$

$b = 90 - \delta$ $\quad B = 180^\circ - a$.

$c = 90 - \varphi$

otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \\ \sin a \cos h &= \cos\delta \sin t \\ \cos a \cos h &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \end{aligned}\right\} \quad 5.)$$

Na wzorach 4 i 5 polega cała astronomia sferyczna. — Wzory jak je podaliśmy nie nadają się do rachunku logarytmami trzeba je odpowiednio przekształcić, w tym celu połóżmy w pierwszym wzorze

$$\sin h = m \cos M$$

$$\cos h \cos a = m \sin M$$

Tak że będzie

$$\sin\delta = m \sin(\varphi - M) \qquad m \sin\varphi \cos M - m \sin M \cos\varphi$$

$$m(\sin\varphi \cos M - \sin M \cos\varphi)$$

$$\cos\delta \sin t = \cos h \sin a$$

$$\cos\delta \cos t = m \cos(\varphi - M)$$

przytem m jest zawsze dodatnie.

i stąd otrzymamy

$$\operatorname{tg} M = \cos h \cos a$$

dalej
$$\operatorname{tg} t = \frac{\cos h \sin a}{m \cos(\varphi - M)} = \frac{\cos h \sin a}{\frac{\cos h \cos a}{\sin M} \cos(\varphi - M)}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{tg} a \sin M}{\cos(\varphi - M)}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{m \sin(\varphi - M)}{\frac{m \cos(\varphi - M)}{\cos t}} = \operatorname{tg}(\varphi - M) \cos t$$

Tu chciałbym jeszcze na jedno uwagę Panów zwrócić, jeżeli z równania

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{tg} a \sin M}{\cos(\varphi - M)}$$

otrzymamy dla tg t pewną wartość

$$\operatorname{tg} t = \ldots\ldots$$

to może kąt t przyjąć dwie wartości

$$t \text{ i } t + 180$$

a to z tego powodu, że ogólnie jest

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(180 + t)$$

Aby się przekonać, która z nich jest właśnie szukaną, musimy wiedzieć jaki znak ma sin t i jaki cos t.

Ogólnie jest

	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

dla tego

	I	II	III	IV
tg	+	−	+	−

Są tedy sin i cos oba dodatnie, to t może leżeć tylko w pierwszym kwadrancie, są oba ujemne, to może t leżeć tylko w trzecim kwadrancie. Jeżeli jest sin dodatni a cos ujemny, może leżeć t tylko w drugim kwadrancie, jeżeli jest sin ujemny a cos dodatni może t leżeć tylko w czwartym quadrancie, a ponieważ

$$\sin t = \frac{\cos h . \sin a}{\cos \delta}$$

cos h i cos δ są zawsze wartości dodatnie, ma [illegible] co sin a t.j., t musi zawsze leżeć w tym kwadrancie w którym się a znajduje.

Jeżeli położymy

$$\sin\delta = n \sin N$$
$$\cos\delta \cos t = n \cos N$$

to otrzymamy powtórnie

$$\sin h = n \cos(\varphi - N)$$
$$\cos h \cos a = n \sin(\varphi - N)$$
$$\cos h \sin a = \cos\delta \sin t$$

i dalej

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} t \cos N}{\sin(\varphi - N)}$$

$$\operatorname{tg} h = \frac{\cos a}{\operatorname{tg}(\varphi - N)}$$

Przykład I.

$$\begin{cases} a = 202^\circ\ 4'\ 15''5 \\ h = 16^\circ\ 11'\ 44''0 \\ \varphi = 52^\circ\ 30'\ 16''0 \end{cases}$$

log cotg h	0.5369395
log cos a	9.9669481
log tg M	0.5038876
sin M	9.9796542
tg a	9.6079564
	9.5876106
cos φ−M	9.7597036
tg t	9.8279070
(t)	33° 56' 2"22
t	56' 2"22

φ	52	30	16"0
M	−72°	35'	54"61
φ−M	125	6'	10"61

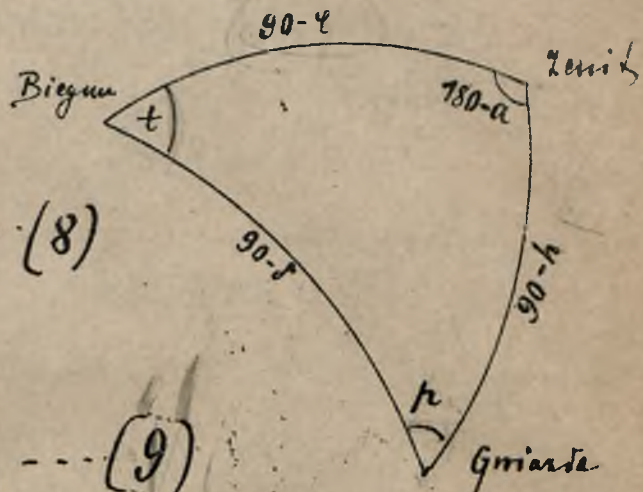
tg (φ−M)	0.1531135
cos t	9.9189115
tg δ	0.0720250
δ	+ 49° 43' 46"0

W zastosowaniu ważnem jest poznanie równań [wzorów] diferencyalnych.
W tym celu należy wprowadzić kąt paralaktyczny, który oznaczamy p.
jest to kąt leżący przy gwieździe w trójkącie głównym t.j. naprzeciw boku $90-\varphi$.

Według twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{\sin p}{\sin(90-\varphi)} = \frac{\sin t}{\sin(90-h)} = \frac{\sin(180-a)}{\sin(90-\delta)}$$

lub $\sin p = \cos\varphi \dfrac{\sin t}{\cos h} = \cos\varphi \dfrac{\sin a}{\cos\delta}$ . . . (8)



analogicznie otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} \cos p \cos\delta &= \sin\varphi \cos h + \cos\varphi \sin h \cos a \\ \cos p \cos h &= \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t \end{aligned}\right\} \quad \ldots (9)$$

Tem poprzedziwszy, przejdźmy teraz do bliższego rozpatrzenia równań diferencyalnych trójkąta: (biegun, zenit, gwiazda).

Dáty obserwacyjne są zazwyczaj mniej lub więcej błędne; wynika to już z samych błędów przy obserwowaniu, dalej z powodu błędów w instrumencie a wreszcie ma wpływ jeszcze wiele innych czynników, które razem wiele wartości mogą deformują.

Zmiana jednego kąta, lub boku, w trójkącie sferycznym, pociąga za sobą zmianę pozostałych boków i kątów, z wyjątkiem tych, które uważane bywają jako niezmienne. Zależność zmiany jednego pierwiastka w trójkącie od drugiego, podaje równanie różniczkowe powstałe przez różniczkowanie równania zasadniczego.—

Postawmy sobie teraz pytanie, o ile zmieni się δ, gdy h, powiększymy na $h+dh$? Mamy ogólnie:

$$d\delta = \frac{\partial\delta}{\partial h}\,dh$$

ale że:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos a$$

a więc otrzymamy

$$\cos\delta \frac{\partial\delta}{\partial h} = (\sin\varphi \cos h + \cos\varphi \sin h \cos a)$$

a ponieważ dalej

$$\cos\delta\cos p = \sin\varphi\cosh + \cos\varphi\sin h\cos a$$

przeto będzie:

$$\cancel{\cos\delta}\, d\delta = \cancel{\cos\delta}\cos p\, dh$$

czyli ostatecznie

$$d\delta = \cos p\, dh$$

dlatego otrzymamy

$$d\delta = \cos p . dh$$

Przyjmijmy, że h, φ a także a mogą się zmienić, otrzymamy:

$$d\delta = \frac{\partial\delta}{\partial h}dh + \frac{\partial\delta}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\delta}{\partial a}da$$

i przez podobne rozwinięcie (co do ćwiczeń polecam) równanie

$$\left.\begin{aligned} d\delta &= \cos p\, dh + \cos t\, d\varphi + \cos h\sin p\, da \\ dh &= \cos p\, d\delta - \cos a\, d\varphi - \cos\delta\sin p\, dt \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\, dt &= -\sin p\, dh + \sin t\sin\delta\, d\varphi + \cos h\cos p\, da \\ \cos h\, da &= \sin p\, d\delta - \sin a\sin h\, d\varphi + \cos\delta\cos p\, dt \end{aligned}\right\} \quad 1$$

Zastosujmy to do szczególnego przypadku:

Mamy n.p. wyznaczyć z danego azymutu a i obserwowanej wysokości pewnej gwiazdy h kąt godzinny t, to na obliczenie [illegible] t mamy równanie:

$$\sin t = \cos h\frac{\sin a}{\cos\delta}$$

według 1). $\quad dt = \left(-\frac{\sin p}{\cos\delta}\right)dh$

jeżeli δ zbliża się do $90°$, to $\cos\delta$ jest prawie 0 przeto $\frac{1}{\cos\delta}$ będzie bardzo wielkie. Mała zmiana h ma tedy wielki wpływ na obrachowanie [illegible]. Mając więc wyznaczyć t z h nie będzie używać w tym celu gwiazd o wielkiej deklinacji, t.j. gwiazd biegunowych.

Widzimy więc że równania różniczkowe pouczają nas, z gwiazdami jakiemi [illegible] tej wyznaczenia przeprowadzić, by wpływ błędów na rezultat [illegible]

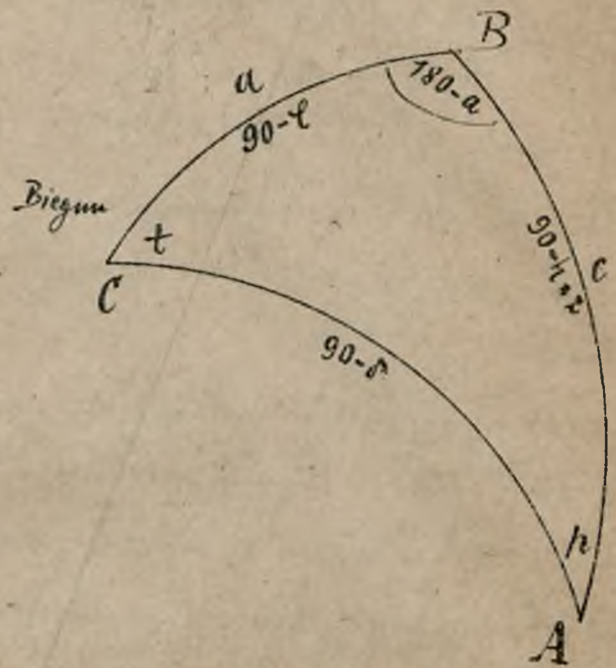
Korzyść do minimum [illegible] Otóż błędów w obserwacji [illegible] błędów w liczeniu, łatwo je znaleźć przerachowując zagadnienie inną metodą. W tym celu służy rozwojowa metoda Gausa.

Niech będą ABC trzy kąty

abc trzy boki trójkąta

sferycznego to mamy następujące równania:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\
\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} &= \sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}\\
\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} &= \cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2}\\
\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}
\end{aligned}\right\}$$



stawiamy

$$\left.\begin{aligned}
a &= 90^\circ-\varphi & A &= p\\
b &= 90^\circ-\delta & B &= 180^\circ-a\\
c &= 90-h = z & C &= t
\end{aligned}\right\}$$

i otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{z}{2}\cos\tfrac{1}{2}(a-p) &= \cos\frac{t}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)\\
\cos\frac{z}{2}\sin\tfrac{1}{2}(a-p) &= \sin\frac{t}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)\\
\sin\frac{z}{2}\sin\tfrac{1}{2}(a+p) &= \sin\frac{t}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)\\
\sin\frac{z}{2}\cos\tfrac{1}{2}(a+p) &= \cos\frac{t}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ 12.)$$

C. System współrzędnych ekliptyki.

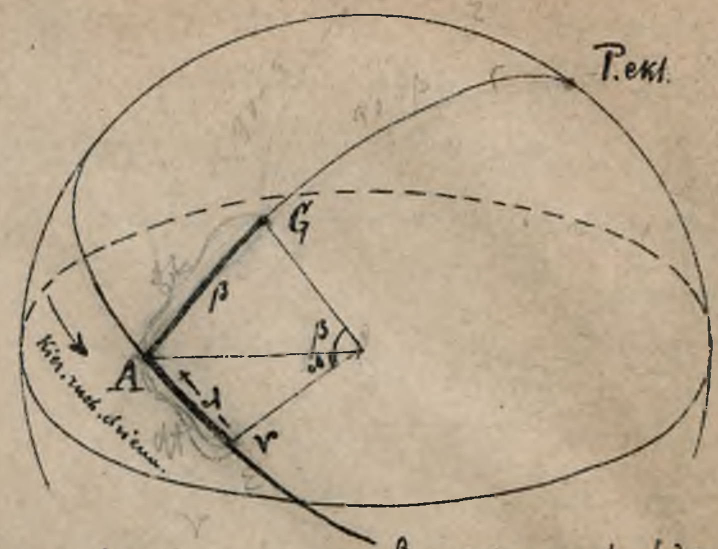
System współrzędnych odniesiony do ekliptyki ma przedewszystkiem zastosowanie w astronomii sferycznej.

Podobnie jak poprzednio odnosiliśmy współrzędne gwiazd do równika horyzontu tak też możemy je odnieść do ekliptyki. Na miejsce zenitu względnie bieguna świata wprowadzamy <u>biegun ekliptyki</u>. — Wielkie koła przechodzące przez bieguny ekliptyki (prostopadłe do niej) nazywają się <u>koła szerokości</u>.

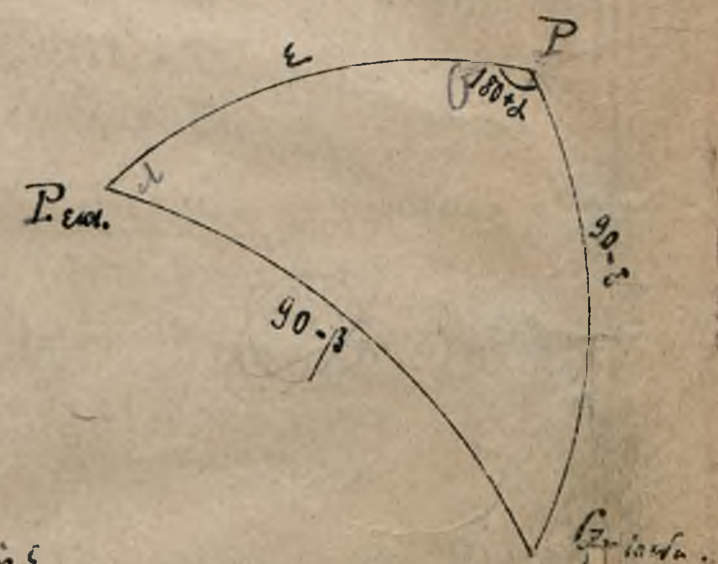
Niech Υ będzie punktem barana to dla pewnej gwiazdy G nazywamy

$$\left.\begin{aligned}
&AG \text{ szerokością} = \beta\\
&\Upsilon A \text{ długością} = \lambda
\end{aligned}\right\}\ \text{tej gwiazdy.}$$

Szerokość liczy się podobnie jak deklinacya od 0° (na ekliptyce) do ±90° (Biegun ekliptyki). Długość liczy się na ekliptyce od punktu Barana (0°) – 360° aż nalogicznie jak rektascensya a więc przeciw ruchowi dziennemu.



Oznaczywszy ukos ekliptyki przez ε, to mamy następujący trójkąt: Biegun eklipt., Biegun świata, Gwiazda. Który podaje nam związek między spółrzędnymi równika i ekliptyki. Otrzymamy następujące równania:



$$\begin{cases} \cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda = \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \\ \sin\beta = -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon \end{cases}$$

i podobnie

$$\begin{cases} \cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon \\ \sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon. \end{cases}$$

System ten oddaje znakomite usługi w oznaczeniu drogi ciał [illegible]. Dla nas ma on jednak małe znaczenie.

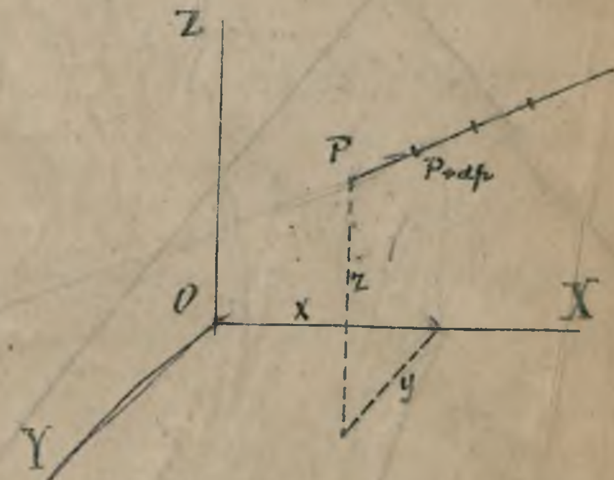
Długość i szerokość pewnej gwiazdy zmienia się bardzo mało analogicznie jak deklinacya i rektascensya, tak że mogą być użyte do oznaczenia położenia gwiazd.

Słońce, ponieważ porusza się ciągle po ekliptyce, to jego szerokość zawsze jest 0. Długość słońca zmienia się w ciągu roku od 0°–360° i oznacza się osobnym znakiem ⊙

Czas. —

Definicyi czasu nie jesteśmy w stanie podać stwarzamy podobnie jak punktu linii, ale etc

Ażeby czas módz mierzyć, potrzeba ruchu jednostajnego, aby zaś zdefiniować ruch jednostajny, pomyślmy sobie punkt P, którego spółrzędne są = $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$.



Pomyślmy dalej, że punkt doznał małego przesunięcia o

$$dx, dy, dz,$$

tak, że spółrzędne punktu $P+dP$ są

$$x+dx, \; y+dy, \; z+dz.$$

Operacyę tę nazwijmy słowami: elementarnem poruszeniem.

Wartości dx dy dz uważajmy za nieskończenie małe t.j. za takie, które ze swojej natury nic a nic nie utracą, jeżeli my je sobie dowolnie mało przyjmiemy t.j. mniejsze aniżeli każda z jakichkolwiek danych małych wartości.

Każde takie elementarne poruszenie ma dwa istotne znamiona:

1.) pewną długość

2.) pewien kierunek

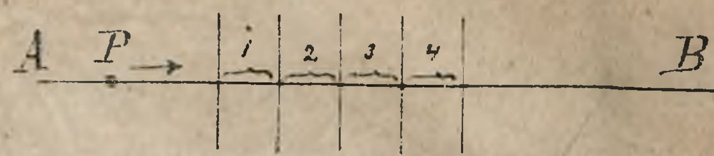
Takie dwa elementarne poruszenia, które zgadzają się ze sobą co do długości i jeżeli drugie zaczyna się tam gdzie pierwsze się kończy, nazywamy stykane (zusammenhängend).

Ruch jednostajny możemy tedy zdefiniować jako wartość graniczną nieograniczonego szeregu stykanych elementarnych poruszeń.

t.j

$$\lim \sum_{k=1}^{k=\infty} dP_k$$

Pomyślmy sobie dalej prostą poziomą AB, którą przecinamy w równych odstępach kilka pionowych prostych. Niechaj punkt P porusza się od A do B



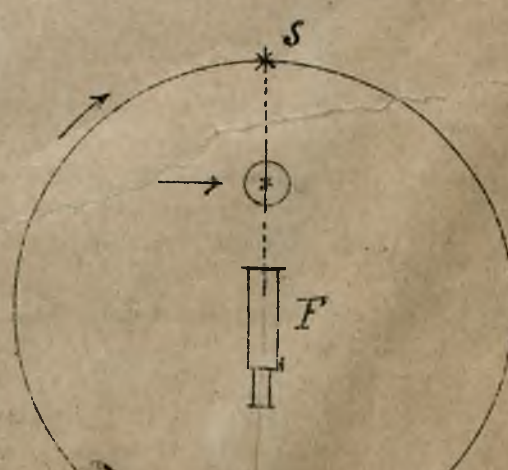
jednostajnie, to możemy powiedzieć, że on przebywa drogę pomiędzy pionowymi w równych odstępach czasu. Przyjmowszy że znaleźlibyśmy sobie w naturze taki jednostajnie poruszający się punkt, to tem samem znaleźlibyśmy metodę wymierzenia czasu.
Dokładność tej metody zależałaby od tego, o ile udałoby się nam odstępy 1, 2, 3 absolutnie dokładnie wykonać.
Pomyślmy sobie punkt, który porusza się zupełnie jednostajnie po obwodzie koła, to punkt ten, po pewnym stałym okresie czasu przejdzie zawsze przez pewne miejsce na tem kole n.p. A.

Ta rzecz dwojako da się zastosować

1.) Sztucznie (w naszych zegarach)

2.) Naturalnie (w astronomicznym wymierzeniu czasu). —

Za pomocą licznych i nader trudnych doświadczeń udowodniono, że czas obrotu naszej ziemi, można uważać jako ruch absolutnie jednostajny.
Pomyślmy sobie lunetę n.p. teodolitu zupełnie dokładnie i stale skierowaną na południe ustawioną; w polu widzenia [illegible] znajduje się nitka pionowa.



Skierowawszy lunetę odpowiednio na niebo, to można z pewnym uzbrojonym [illegible] widzieć, jak jakaś gwiazda w pole widzenia wstępuje, następnie przez nitkę przechodzi i znowu pole widzenia opuszcza. Po każdym obrocie ziemi powtarza się to zjawisko, ponieważ kula nieba jednostajnie obra swej osi się obraca, to mamy tem samem sposób zmierzenia czasu albo raczej interwałów czasowych.

Luneta ustawiona w powyżej opisany sposób, zowie się lunetą południkową.—

Obmyślono jednak takie przyrządy, których skazówka, przebiega obrót pewnego koła ~~zarobiego~~ jednostajnie, tak, że czas, po odbyciu pewnej drogi przez skazówkę, może być w pewnych punktach tegoż koła, zmierzony.

Przyrządy te nazywamy zegarami, ponieważ jednak są one dziełem ręki ludzkiej, niezawsze dokładne, muszą być przeto podług pierwiej opisanego zegaru nieba regulowane. Sposoby jak się to regulowanie czasu przeprowadza poznamy w rozdziale o wymierzaniu czasu.—

Z dawien dawna jest zwyczaj wyrażania czasu w latach, miesiącach dniach, godzinach, minutach, obecnie liczymy czas jeszcze w sekundach i ułamkach tych sekund.—

Jako jednostkę czasu uważamy dzień. Dzień dzieli się na 24 godzin. W starożytności liczono czas według babilońskiego (czyli planetarnego) podziału czasu, a mianowicie dzielono czas od wschodu do zachodu słońca na 12 równych części.—

W czasach średnich liczono początek dnia później i tak: dzielono czas od zachodu słońca do zachodu na 24 części (godzin). Godziny te były rozumie się w każdej porze roku rozmaicie długie. Ten sposób liczenia, który przeniósł się z Italii do środkowej Europy zwano czeskim albo włoskim.

Oprócz tego istniał niemiecki sposób liczenia godzin, przy którym dzień o północy się zaczynał i był podzielony na dwa razy po 12tu godzin.

Sposób ten liczenia zwany także powszechnym utrzymał się obecnie ogólnie.

Mamy jeszcze astronomiczny sposób liczenia czasu od południa do południa. Godziny liczą się od 1–24. tak, że południe dnia powszechnego (niemieckiego) jest początkiem dnia astronomicznego.

Tak n.p. mamy:

[illegible]		astronomiczny
1^{a} Maja 3 godzina w nocy	=	1^{a} maja 3^{cia} godzina
2^{a} " 10^{ta} godz. przed południem	=	1^{a} " 22^{ga} godzina
2^{a} " 8^{ma} wieczorem	=	2^{a} " 8^{ma} godzina
3^{a} " 8^{ma} rano	=	2^{a} " 20^{sta} godzina.

Przy astronomicznym terminie odpada naturalnie dodatek wieczór, rano etc.

Należy jeszcze wspomnieć o czasie kolejowym, jest to zazwyczaj średni czas miejscowy pewnej głównej stacyi w kraju. Tak n.p. dla Wielkiej Brytanii był dawniej ważny czas w Greenwich, w Austryi zazwyczaj czas Praski (do r. 1891. 1.X.), z wyjątkiem stacyj na wschód od Krakowa położonych, jako też stacyj na Węgrzech, dla których był ważny czas Krakowski (Zonenzeit). Obecnie prawie powszechnie przyjęto czas południkowy, t.j. wychodząc od pierwszego południka przez Greenwich.

Czas środkowo europejski późny jednej godzinie czasu greenwichskiego ważny jest w Austryi od 1.X.91. na kolejach i urzędach telegraficznych w ogólności.

Jeżeli tedy w następujących miastach jest 12^{ta} godzin. południe podług czasu miejscowego to według zegaru kolejowego jest

we Lwowie 11^h 24^m = 3

w Krakowie 11^h 40^m

we Wiedniu 11^h 55^m

w Pradze 12^h 2^m

Tak zwany czas zachodnio europejski, przyjęty we Wielkiej Brytanii, Belgii etc. wskazuje o jedną godzinę wstecz, czas wschodnio europejski wskazuje o jedną godzinę naprzód.

Dzień powszechny (światowy). rozpoczyna się na całej ziemi w chwili gdy w Greenwich jest północ. W Ameryce są jeszcze następujące czasy w użyciu:

Eastern Time (75° od Greenwich); Mountains Time [105° od Greenwich]

Central " (90° " "); Pacific [120° " "]

Nazwa dni w tygodniu, podług siedmiu znanych w starożytności planet (słońce i Księżyc uważane też były jako planety) utrzymała się do dzisiejszego dnia w wielu językach. – Nazywamy je:

Niedziela ma znak słońca ☉
Poniedziałek " " Księżyca ☾
Wtorek " " marsa ♂
Środa " " merkura ☿
Czwartek " " jupitera ♃
Piątek " Wenus ♀
Sobota " " Saturna ♄.

Nazwy te sięgają dalekiej przeszłości, gdyż już przed pięcioma tysiący lat, były już w Babylonie powszechnie używane.
Siedm dni tworzy tydzień, cztery tygodnie (28 dni) czynią miesiąc, to jest czas, jakiego potrzebuje Księżyc, aby obiec ziemię raz w około.
Po ogólnej wzmiance o czasie, przejdziemy teraz do bardziej szczegółowego rozpatrzenia. –
Wspomnieliśmy, że czas mierzymy ruchem jednostajnym, dalej, że ruch jednostajny w naturze wykonuje nasza ziemia i że może jako odbiciem tego ruchu jest kula nieba. Obieramy więc na niej gdziekolwiek punkt, przedstawiający nam niejako skazówkę, to kąt godzinny tego punktu, podaje nam czas.
Przeciąg czasu, który upłynie od jednej kulminacyi gwiazdy stałej do jej następnej kulminacyi nazywamy __dniem gwiazdowym__.
Początek dnia gwiazdowego rozpoczyna się z górnej kulminacyi punktu wiosennego. Powiadamy że upłynęły jedna, dwie, ...24 godzin czasu gwiazdowego, gdy kąt godzinny punktu wiosennego wynosi 1, 2, ... 24, godzin czyli 15°, 30°, ... 360°. –
Wskutek tego, że my przyjmujemy punkt wiosenny jako wskazówkę

wprowadzamy pewną niedokładność w naszych obliczeniach czasowych, gdyż jak to później obaczymy punkt wiosenny nie jest stały, a więc wskutek tego zmienia się niejednostajnie jego kąt godzinny.
Ta niejednostajność jest jednak bardzo mała, tak mała że jest nieznaczna w obec wielu korrekcyi jakie uzyskujemy wprowadzając punkt wiosenny jako punkt początkowy.
Ponieważ punkt wiosenny kulminuje o rozmaitej porze dnia, przeto czas gwiazdowy nie nadaje się do użytku w życiu codziennem.
Dla naszego życia, którego czynności zawisłe są od światła, słońce musi być miarodajnem.
Nazywamy każdorazowy kąt godzinny słońca prawdziwym czasem słonecznym, a czas jaki upływa między dwoma bezpośredniemi kulminacyami słońca dniem słonecznym prawdziwym;
Gdy środek słońca przechodzi przez południk danego miejsca, tedy jest prawdziwe południe, czyli w danem miejscu mamy 0^h czasu prawdziwego.

Rektascenzya słońca nie zmienia się jednak jednostajnie, dla tego jego kąt godzinny nie może przedstawiać ruchu jednostajnego.
Droga jaką ziemia opisuje około słońca, jest elipsą. W jednem jej ognisku znajduje się słońce. W czasie swego obiegu dochodzi ziemia do punktu najbardziej od słońca odległego z początkiem lipca, punkt ten nazwano aphelium. Na początku stycznia jest ziemia najmniej oddalona od słońca, czyli znajduje się w perihelium (t.j. punkcie przybliżenia). Podobne drogi opisują i inne planety.

Dla ruchu planet, wyprowadził ~~[illegible]~~ Kepler, na podstawie spostrzeżeń dokonanych przez znakomitego Tyge Brahe, następujące prawa:
1.) Drogi planet są elipsami, w których wspólnym ogniskiem jest słońce.

2.) Każda planeta w równych czasach, opisuje równe powierzchnie.

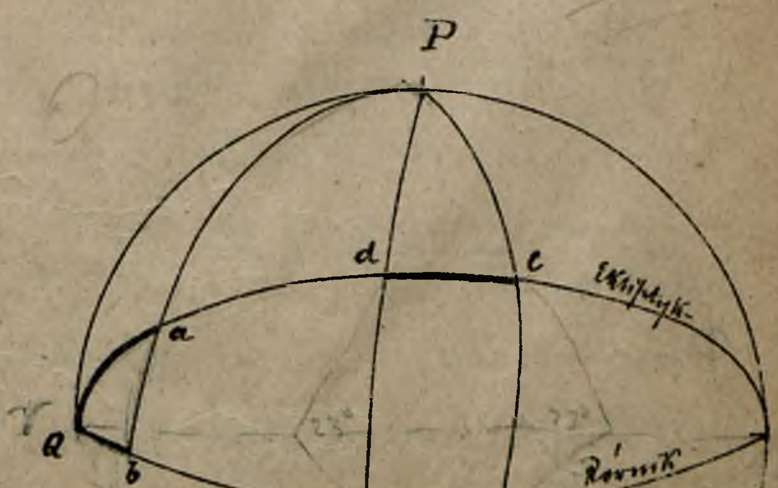
To należy w ten sposób rozumieć, że promień wodzący poprowadzony z ogniska (elipsy) (słońce S) do planety A zakreśla w równych czasach równe powierzchnie. Tak n.p. w perihelium, zakreśla na dzień promień wodzący, powierzchnię ASB, w aphelium powierzchnię CSD; a obie powierzchnie

$$ASB = CSD.$$

3. Kwadraty z czasów t, t_1 całkowitych obiegów dwóch jakichkolwiek planet stoją do siebie w stosunku jak trzecie potęgi z ich średnich odległości od słońca a, a_1 tak, że mamy związek

$$\frac{t^2}{t_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3}$$

gdyż ze względu, że ziemia obraca się około słońca po ekliptyce, to słońce porusza się też pozornie według 2go prawa Keplera nie: jednostajnie i to w zimowem półroczu z większą chyżością. Ale gdyby nawet słońce poruszało się jednostajnie po ekliptyce, przecież czas prawdziwy nie zmieniałby się jednostajnie, gdyż czas mierzy się kątem godzinnym, a ten zaś mierzy się na równiku, a że równe łuki ekliptyki nie odpowiadają, więcej równym łukom na równiku. Ten można się łatwo przekonać z następującej figury:



Niech EPQ przedstawia nam przekrój półkuli nieba; P, biegun świata, EQ, Równik; E,c,d,a,Q, ekliptykę. Odcinamy na ekliptyce równe sobie łuki Qa i dc, i poprowadzimy przez punkta a, dc, koła godzinne, to odetniki łuków le. na równiku

W trójkącie Qab, którego części Qa i Qb są tak małe, że mogą być uważane jako linie proste mamy kąt ∢ Qab = 23½°

$$Qb < Qa \text{, a to z tego powodu że mamy związek}$$

$$Qb = Qa \cdot \cos 23\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{9}{10}\,Qa$$

dalej jest $dc = fg$

a że $dc = Qa$

więc i $fg > Qb$

Zegary zwyczajne, których właśnie jest najważniejszą zaletą, a raczej powinien być, ruch jednostajny, nie mogą podawać czasu prawdziwego, należy sobie przeto wyobrazić tak zwane średnie słońce, które przebiega z jednostajną chyżością równik nieba w tym czasie, w którym prawdziwe słońce kończy swój roczny obieg po ekliptyce i to tak, że rektascenzya tego średniego słońca jest tedy równa długości prawdziwego słońca, gdy to znajduje się najbliżej ziemi t.j. w perihelium.
Jeden dzień tego średniego słońca będzie równy średniej ze wszystkich dni całego roku prawdziwego słońca.
Średni astronomiczny dzień jest czas między dwoma bezpośredniemi górnymi kulminacyami średniego słońca i zaczyna się w średnie południe, gdy średnie słońce przechodzi przez górny południk. W tym czasie wynosi średni czas tego miejsca 0^h.
Średni czas jest tedy kąt godzinny średniego słońca wyrażony w czasie, a liczony od górnego południka od $0^h - 24^h$.
Dzień powszechny (obywatelski) rozpoczyna się 12 godzin prędzej jak astronomiczny, a więc z średnią astronomiczną północą, a jego godziny liczą się dwa razy po 12$^{\text{cie}}$.
Obrót ziemi około słońca stanowi podstawę do obliczenia lat.
Odróżnić należy rok tropiczny i rok syderyczny.
Rok tropiczny jest czas, jakiego potrzebuje ziemia by wyszedłszy

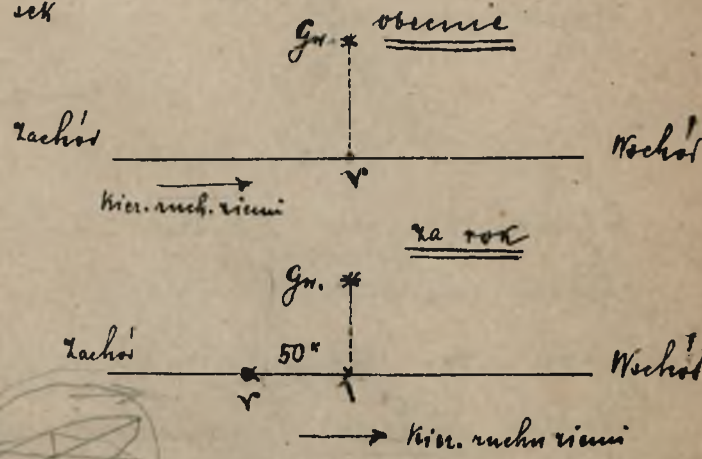
z punktu wiosennego [illegible] — do tegoż powróciła.

$\vartheta = \alpha + t$

Wynosi to:

365.24222.... średnich dni, czyli

365 dni, 5 godz 48 minut, 47.8 sek



Ponieważ ale punkt wiosenny porusza się rocznie o 50" ze wschodu na zachód, przeto ziemia, która biegnie na wschód, a więc jemu naprzeciw, osiągnie prędzej punkt wiosenny aniżeli pewną gwiazdę, która rok temu znajdowała się w punkcie wiosennym, przeto musi być czas jakiego potrzebuje ziemia by opuściwszy pewną gwiazdę stałą znowu do niej powrócić większy niż rok tropiczny. -

Nazywamy ten odstęp czasu rokiem siderycznym i liczy on

365,25637 dni średnich t.j.

365 dni 6h 9m 10s.7

Podstawą dla długości roku powszechnego jest rok tropiczny a to ze względu by był w zgodności z porami roku.

Rok powszechny wynosi 365 dni i dla tego to rozpoczyna się zawsze o 5h 48m 47s8 wcześniej, aby to wyrównać, dodaje się co czwarty rok w miesiącu lutym jeden dzień, tak że właściwie rok powszechny wynosi średnio 365 i jedną czwartą dnia. Bierzemy więc 6 godzin całych zamiast

5h 48m 47s8 czyli co rok o 11m 12.2 za wiele. Wynosi to za 100 lat nieco więcej jak 18h za 400 lat około 72 godziny t.j 3 dni. Otyle dostajemy za wiele, aby to wyrównać opuszczamy w przeciągu 400 lat owe 3 dni, a mianowicie w tych latach, których liczba setek nie jest przez 4 bez reszty podzielną, tak więc w latach 1700, 1800, 1900 opuściliśmy po jednym dniu. Lata te nie są latami przestępnymi

R. 2000 [illegible]

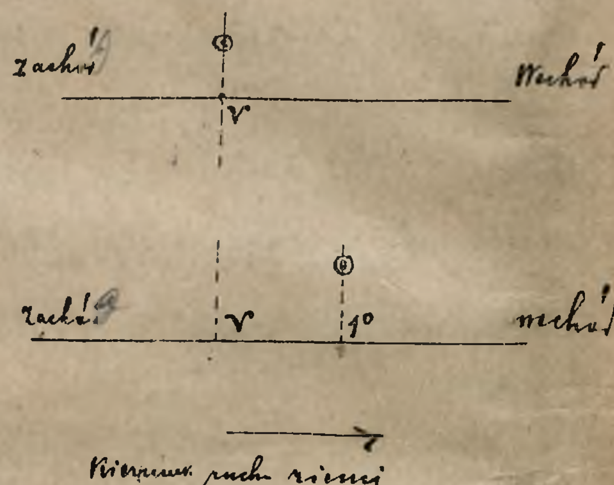
Średnie słońce przebiega jednostajnie równik w roku tropicznym, a ponieważ precessya w tymże samym kierunku ze słońcem jest liczona, to przybiera ona dla średniego słońca w jednym roku tropicznym $360° = 24^h$ a więc w jednym średnim dniu

$$\frac{360°}{365,2422} = 0°9856472 = 59'\,8''33$$ średnio

t.j. prawie jeden stopień.

O taką długość posuwa się średnie słońce dziennie na niebie ze zachodu na wschód.

Jeżeli więc w pewnym dniu przechodzi średnie słońce równocześnie z punktem wiosennym przez górny południk, to następnego dnia w chwili górnej kulminacyi punktu wiosennego będzie słońce średnie $0°\,59'\,8''33$ na wschód od tegoż południka, tem samem musi ziemia o tę wielkość około osi się obrócić, by południk przechodził przez słońce. Do tego potrzebuje:



$$59'\,8''33 = 3^m\,56^s.555$$

czasu gwiazdowego, dlatego jest

dzień średni = dniowi gwiazdowemu + $3^m\,56^s555$ cz. gw.

dlatego, że

$$3^m\,56^s555 = \frac{24^h}{365,2422}$$

będzie $3^m\,56^s555 \times 365,2422 = 24^h$ gw. = 1 dniowi

a ponieważ $\underbrace{365,2422}_{\text{dnia średniego} = 365,2422}$ dnia gwiazd. + $3^m\,56^s.5 \times 365.24$

= 365,2422 dni gw. + 1 dzień gwiazd.

to mamy równanie:

365,2422... dni średniego = 366,2422... dn. gwiazd.

Wskutek tego wykonuje punkt Barana w przeciągu roku dokładnie o jeden obrót dzienny więcej aniżeli słońce.

z tego powodu, że dzień średni jest większy niż dzień gwiazdowy, znajduje się każda gwiazda stała co dzień dwa razy w górnej kulminacyi. Z ostatniego równania okazuje się związek między czasem średnim a gwiazdowym a mianowicie

$$\boxed{1 \text{ dz. średni} = \frac{366,2422}{365,2422} \text{ dnia gwiazd.}}$$

$$1. \text{ dz. gwiazd} = \frac{365,2422}{366,2422} \text{ dnia średn.}$$

a więc

$$\boxed{1 \text{ dz. śr.} = 1 + 3^m\ 56^s.56 \text{ cz. gw.}}$$ ważne

$$1 \text{ dz. gw.} = 1 - 3^m\ 55^s.91 \text{ cz. śred.}$$

przeto wyrażonej przez T dobę średnią, przez ϑ dobę gwiazdową mamy

$$\frac{T}{\vartheta} = \frac{366.2422}{365.2422} = 1.00273791$$

dla tego

$$T = \vartheta \times 1.00273791 = \vartheta + 0.00273791\,\vartheta$$

$$\vartheta = T \times 0.99726957 = T - 0.00273043\,T$$

Przy redukcyi (w rzeczywistości), posługujemy się tablicami, które są umieszczone na końcu Efemeryd, jak n.p. w roczniku Berlińskim (r. 1896.). znajdują się te tablice na stronie 383, 384.

Aby n.p. odstęp czasu

$10^h\ 41^m\ 12^s$ czasu gwiazdowego, zamienić na średni, mamy według tabl. I. str. 384.

dla $10^h\ 10^m\ 24^s$ | czasu gwiazdowego, redukcyą $-1^m\ 40^s$.

pozostało $30^m\ 48^s$.

Następna liczba podana w IIgiej tabl. 384 str. jest

$30^m\ 31^s$, | temu odpowiada redukcya $-5^s.0$

Reszta 17^s | temu " według tabl. III $-0^s.05$

a więc sumie

$10^h\ 41^m\ 12^s$ | odpowiada suma redukcyi $-1^m\ 45^s.05$

wyciągnięty obrachowany

$10^h\ 39^m\ 26.95$

to mamy: Interwałowi $10^h\ 41^m\ 12^s$ czasu gwiazdowego, odpowiada interwał czasu średniego $10^h\ 39^m\ 26^s.95$, ale nie trzeba tego tak rozumieć, jakoby czas gwiazdowy $10^h\ 41^m\ 12^s$ odpowiadał 10^{ciu} godz 39^{ciu} $^{\text{min}}$ 26.95^{sek} czasu średniego.
Według Hansena było r. 1850 d. 0 Jan. 0^h średniego czasu Paryskiego:

$$\Theta_0 = 18^h\ 39^m\ 9^s.261$$

I teraz można obliczyć czas gwiazdowy dla jakiegokolwiek czasu i południka.
Niech będzie λ różnica długości pewnego miejsca, odniesiona do Paryża i wyrażona w godzinach (na zachód + na wschód −) to jest

$$\theta_\lambda = 18^h\ 39^m\ 9^s 261 + \frac{\lambda}{24} \times 3^m\ 56^s 55 \ldots$$

lub $\theta_\lambda = 18^h\ 39^m\ 9^s 261 + 9^s 8565\ \lambda$

czas gwiazdowy dla meridianu λ r. 1850 0 Jan 0^h średniego czasu miejscowego. $\Theta = 18^h\ 39^m\ 9^s 261 + \lambda$

Lwów leży n.p.

$1^h\ 26^m\ 50^s 26$ na wschód od Paryża mamy przeto

$\lambda = -1^h.4472$ i dla czasu gwiazdowego w średnie południe dnia 0 J 1850 dla Lwowa

$$\begin{array}{r} 18^h\ 39\ \ 9^s 261 \\ -\quad 14.140 \\ \hline 18^h\ 38^m\ 55^s.121 \end{array}$$

Ponieważ czas gwiazdowy od średniego południa do południa wzrasta o
$3^m\ 56^s 555$
można go znaleźć dla jakiegokolwiek bądź czasu mnożąc liczbę następujących dni od r. 1850 0 Jan 0 przez
$3^m\ 56^s 555$
i odciągając tyle razy po 24 ile razy to będzie możliwe
Wielkość
$\frac{\lambda}{24} \times 3^m\ 56^s.555$
wynosi dla Lwowa na Berlin
$-6^s.87$.

Podajemy sobie następujące zagadnienie do rozwiązania. Jaki jest [illegible] dnia 18 listopada 1896 o $8^h\ 20^m\ 30^s$ czasu średniego czasu

Według „Berl. Jahrb." jest czas gwiazdowy 1. listopada 1896 r. w średnie berlińskie południe:

$$14^h\ 44^m\ 56\overset{s}{.}22$$

do tego $\qquad - \qquad 6.87$

$$\Theta_0 = 14^h\ 44^m\ 49.35$$ jako czas gwiazdowy w średnie lwowskie południe dnia 1. XI. 96.

Od 12tej w południe do $8^h 20^m 30^s$ wieczór, upłynęło $8^h 20^m 30^s$ czasu średniego.
Ten odstęp czasu musi być zamieniony na interwał czasu gwiazdowego, — podług rocznika berl. daje to redukcya:

$$+1^m\ 22\overset{s}{.}22.$$

mamy przeto:

$$8^h\ 21^m\ 52\overset{s}{.}22$$

do tego czas gwiazdowy w południe o 12^h

$$14\quad 44\quad 49\overset{s}{.}35$$

daje $23^h\ 6^m\ 41\overset{s}{.}57$ jako czas gwiazdowy w dniu 1go listopada 1896 r. o godz. $8^h 20^m 30^s$ wieczór czasu średniego lwowskiego.

Do zamiany czasu gwiazdowego Θ na czas średni M mamy zatem następujący wzór

$$\underline{M = (\Theta - \Theta_0) - \mu(\Theta - \Theta_0)}$$

przyczem:

$\mu = 9\overset{s}{.}82898$ jeśli $(\Theta - \Theta_0)$ wyrażamy w godzinach
$\mu = 0\overset{s}{.}1638$ " " " w minutach
$\mu = 0.0027$ " " " w sekundach

Na odwrót, dla zamiany czasu średniego M na czas gwiazdowy Θ mamy:

$$\underline{\Theta = \Theta_0 + M + m M}$$

przyczem:
$m = 9\overset{s}{.}8568$ jeśli M wyrażamy w godzinach
$m = 0\overset{s}{.}1643$ " " " w minutach
$m = 0\overset{s}{.}0027$ " " " w sekundach

Θ_0 jest czas gwiazdowy w południe danego miejsca i mamy wzór ogólny

$$\Theta_0 = \Theta_0 \text{ Berlińskie} + \lambda \times 9^s{,}8558 \quad \text{—} \quad \lambda \begin{cases} + & \text{na zachód} \\ - & \text{na wschód} \end{cases}$$

O wiele trudniejszem jest zagadnienie przemiany czasu prawdziwego na średni i na odwrót.

Nazywamy różnicę czasu średniego M i czasu prawdziwego W zrównaniem czasu (Zeitgleichung) Z.

a więc $Z = M - W$

a także $\begin{cases} M = Z + W \\ W = M - Z \end{cases}$

Zrównanie czasu znajdujemy już obliczone w efemerydach z dnia na dzień. Równanie czasu wynosi na początku roku około $+4$ minut, dosięga pierwszego maximum ku końcowi lutego, gdzie ma wartość około $+14$ minut), w połowie kwietnia staje się równem 0^m, następnie staje się ujemne aż do -4 minut (środek maja), potem znowu 0^m (w połowie czerwca) dalej staje się dodatnie $+6^m$ (połowa lipca) zero, początek września; -16, początek listopada; i raz zero w drugiej połowie grudnia.

Równanie czasu zmienia się z roku na rok ale nieznacznie.

Tak jak czas średni był kątem godzinnym średniego słońca, tak znowu czas prawdziwy jest kątem godzinnym prawdziwego słońca. Ponieważ następnie Rektascensja jest równa czasowi gwiazdowemu gdy gwiazda kulminuje, to można równanie czasu także tak zdefiniować:

$$Z = \alpha_\odot \text{ średniego} - \alpha_\odot \text{ prawdziwego}.$$

W astronomii praktyk używamy czasu prawdziwego i dla tego, uważam to ważny powyżej powiedziałem, że zupełnie wyłączające, zaznaczam tylko, że zegary słoneczne idą podług prawdziwego czasu słonecznego, mając więc podług nich uregulować zegar kieszonkowy musimy znać równanie czasu.

Ephemerydy. (roczniki astronomiczne).

Ephemerydy są to zestawienia różnych dat astronomicznych odniesione do pewnego oznaczonego południka.
Takie roczniki wydają obserwatorya w Berlinie, Paryżu, Greenwich.
Daty podane odnoszą się do ich południka miejsca. Berlińskie ephemerydy mają nazwę „Berliner Jahrbuch"
Paryskie „Connaissance des Temps"
Greenwichskie „Nautical Almanach", ostatnie dwa roczniki są nadzwyczaj tanie.
Dla techników szczególnie byłby do polecenia Kalendarz „Annuaire" który stosunkowo tani (kosztuje tylko 1 fr. 50 ct), a zawiera prócz dat astronomicznych wiele innych wzorów dla technika bardzo cennych.
Najważniejszem czasopismem dla wszystkich astronomów jest „Astronomische Nachrichten" wychodzące w Kiel, ono powiada systematycznie i bez przerwy o najnowszych odkryciach i zjawiskach astronomicznych.
Ważniejsze odkrycia bywają zazwyczaj udzielane wszystkim Obserwatoryom telegraficznie.

Nawiasem wspomnę jeszcze o dwu pojęciach, które są ważne przy użyciu ephemeryd.
Geograficzna długość, jest to różnica czasu pewnego południka miejsca względem jakiegoś południka dowolnie jako początkowy przyjętego. Geograficzna długość liczy się: { na wschód, jako ujemna, na zachód jako dodatnia }, tak n.p.
Lwów leży na wschód od Berlina, jego długość geograficzna jest dlatego ujemna i wynosi $-42^m\ 36^s,43$
Liczba ta ma następujące znaczenie:
Przyjmijmy że jakaś gwiazda stała przechodzi dokładnie w południe przez południk berliński to we Lwowie była ona już

Dla redukcyi dat na Berlin, Paryż, Greenwich posłużą następujące liczby:

Lwów = Kraków	+		16^m	21^s	{ to znaczy: czas miejscowy we Lwowie = cz. m. w Krakowie + 16^m 21^s }
Lwów = Wiedeń	+		30^m	50^s	
Lwów = Berlin	+		42^m	36^s	
Lwów = Paryż	+	1	26	50	
Lwów = Greenwich	+	1	36	11	
Lwów = Ferro	+	2	46	50	
Berlin = Paryż	+	0	44	14	
Berlin = Greenwich	+	0	53	35	
Berlin = Kraków	−	0	26	15.	

Południk Ferro leży dokładnie 20° tj. 1^h 20^m na zachód od południka Paryża. Przy pomocy tych dat jesteśmy w stanie zamienić czas danego miejsca na czas tego południka dla którego mamy ephemerydy obliczone.

Przykład: Jaki jest czas berliński gdy we Lwowie mamy: 10^h 20^m 13^s. —?

Odp.
$$\begin{array}{r} 10^h\ 20^m\ 13^s \\ -\ 42\ \ 36 \\ \hline 9^h\ 37^m\ 37^s \end{array}$$
to znaczy: gdy we Lwowie jest godzina 10^h 20^m 13^s to w Berlinie dopiero 9^h 37^m 37^s.

2.) Ephemerydy są obliczone: albo dla każdego dnia, albo też na każdy dziesiąty dzień, a rzadziej już na każdą godzinę jak n.p. dla Księżyca. Jeżeli potrzebujemy dat, dla pewnego innego czasu, który nie jest podany w ephemerydach, to znajdujemy go interpolując.

Niech będzie f. funkcya argumentu a i dalej

f_a $\quad f'(a)$

f_{a+n} $\quad f'(a+n)$ $\quad f''(a)$ $\quad f'''(a)$

f_{a+2n} $\quad f'(a+2n)$ $\quad f''(a+n)$

przyczem

$$f'(a) = f(a+n) - f(a)$$

$$f'(a+n) = f(a+2n) - f(a+n) \quad \text{i t.d.}$$

$$f''(a) = f'(a+n) - f'(a) \quad \text{i t.d.}$$

$$f'''(a) = f''(a+n) - f''(a) \quad \text{i t.d.}$$

w ogólności jeżeli

$$0 > x > 1$$

$$f(a+xn) = f(a) + x f'(a) + \frac{x(x-1)}{1.2} f''(a) + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} f'''(a) + \ldots$$

To równanie znane jest pod nazwą Reguły interpolacyi Newtona.

Przykład:

Znaleźć rektascensyę Księżyca dla 5go marca 1856, 6^h czasu greenwichskiego.

W ephemerydach znajdujemy:

1856 marca 5.	0^h	$\alpha =$ 21	58	28.4	$= f(a)$
	12^h	= 22	27	15.4	$= f(a + 1.12^h)$
6.	0^h	22	55	25.5	$= f(a + 2.12^h)$
	12^h	23	23	3.4	$= f(a + 3.12^h)$

$xn = 6^h$, $n = 12^h$ tedy $x = \frac{6^h}{12^h} = \frac{1}{2}$

$$\frac{x(x-1.)}{1.2} \quad -\frac{1}{8}$$

$$\frac{x.(x-1)(x-2)}{1.2.3} = +\frac{1}{16}$$

Dalej mamy:

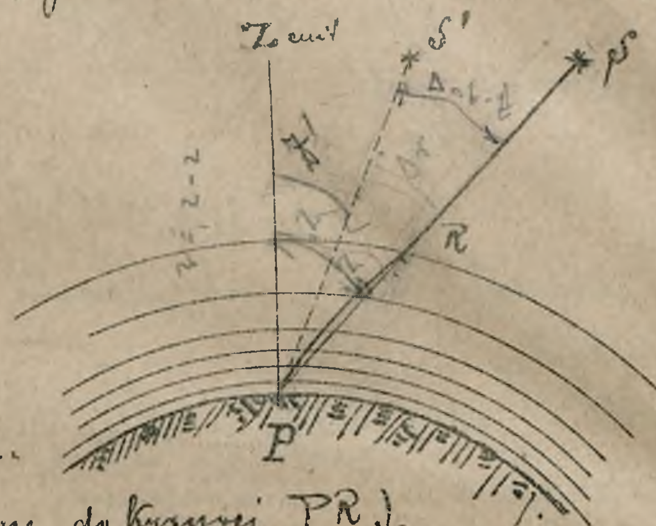
$f(a)$			$f'(a)$		$f''(a)$	$f'''(a)$
21^h	58^m	28.4^s				
22	27	15.4	$+28^m$	47.0^s		
22	55	25.5	+28	10.0	-37.0^s	
23	23	3.4	+27	37.9	-32.1	$+4.9^s$

~~czyli~~ otrzymamy:

$f(a)$	21	58	28.4	
$x f'(a)$	+	14	23.5	$= + \frac{1}{2} \cdot +28 \; 47.5$
$\frac{x.x-1}{1.2} f''(a)$		+	4.6	$= - \frac{1}{8} \cdot -37.0$
$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} f'''(a)$		+	0.3	$+ \frac{1}{16} \cdot +4.9$

Refrakcya, wschód i zachód gwiazd.

Ziemię otacza atmosfera, która sprawia, że my w ogólności widzimy gwiazdy nie w tem miejscu, gdzie one w istocie się znajdują. –



Jeżeli bowiem promień światła SR trafia granicę atmosfery, to nie przechodzi on dalej prostolinijnie, ale opisuje krzywą RP. Jeżeli obserwator znajduje się w punkcie P, to widzi on gwiazdę nie w kierunku PS, ale w kierunku PS' (przyczem PS' jest styczną do krzywej PR.).

Jeżeli więc spostrzegamy odległość zenitową z jakiejkolwiek gwiazdy – wtedy nie otrzymamy kąt

$$z = ZPS \quad \text{ale inny } \measuredangle \quad z' = ZPS'$$

Widzimy więc gwiazdę w kierunku PS', chociaż ona znajduje się w kierunku PS.

Wartość $\Delta r = z - z'$

zowie się korrekcya dla refrakcyi i jest zawisła od stanu atmosferycznego, od temperatury i stanu barometru.

Jeżeli zastąpimy zenitową odległość z wysokością h według równania

$$h + z = 90^\circ \qquad z = 90 - h \qquad z' = 90 - h'$$

$$\Delta r = z - z' = 90 - h - 90 + h' = h' - h$$

wtedy mamy

$$\Delta r = h' - h$$

przeto: $h = h' - \Delta r$ . . . . 1.

i podobnie: $z = z' + \Delta r$ . . . . 2.

to znaczy: Aby otrzymać prawdziwą wysokość h, lub prawdziwą zenitową odległość z, musimy w pierwszym przypadku Δr ~~dodać~~ odjąć a w drugim przypadku Δr ~~odjąć~~ dodać od wartości obserwowanej.

Matematyczna teorya Refrakcyi jest bardzo zawiła, nas interesowuje tylko jej zastosowanie.

Najwięcej używane są tablice Bessla. Według Bessla możemy położyć:

$$\Delta r = \alpha \,\mathrm{tg}\, z \cdot \beta^{A} \cdot \gamma^{\lambda} \quad \ldots \quad 3.)$$

Przytem oznacza

$$\Delta r_0 = \alpha \,\mathrm{tg}\, z$$

tak zwaną średnią refrakcyę; α jest prawie stałym spół: czynnikiem zależnym od odległości zenitalnej z, A i λ są wartości zależne od argumentu z mało różne od 1.

Dalej mamy

$$\beta = BT$$

gdzie B jest funkcyą argumentu, którym jest odczytany stan barometru, a T jest wartością, która zależy od temperatury rtęci, a więc od termometru na barometrze, γ jest wreszcie funkcyą temperatury powietrza.

Te wartości wyznaczył Bessel i ułożył je w tablicę, przytem wziął formuły, która pozwala jeszcze prostsze wyrażenie zlogarytmujemy. Mamy tedy:

$$\log \Delta r = \log\alpha + \log \mathrm{tg}\, z + A\{\log B + \log T\} + \lambda \log \gamma.$$

Tablice Bessla są zawarte w dziele: „Tabulae Regiomontanae"

Wyciąg z tabl. Bessla

[tabl. 1.]

odległ. zenit. z	$\log \alpha$	λ	A
0°	1.76156	1.0000	1.0000
40°	1.76119	1.0000	1.0000
50°	1.76082	1.0023	1.0000
60°	1.76001	1.0046	1.0000
70°	1.75771	1.0111	1.0000
75°	1.75457	1.0197	1.0000
80°	1.74623	1.0420	1.0041
85°	1.71020	1.1229	1.0127
86°	1.68908	1.1624	1.0172
87°	1.65114	1.2215	1.0244
88°	1.57995	1.3141	1.0368
89°	1.40764	1.4653	1.0593

Tablica II.

mm.	log B	celsius.	log T
720	−0.01860	−20	+0.00140
730	−0.01261	−10	+0.00070
740	−0.00670	0	0.00000
750	−0.00087	+10	−0.00070
760	+0.00488	+20	−0.00140
770	+0.01056	+30	−0.00210
780	+0.01616		

Tablica III.

t	log γ
−20	+0.04734
−10	+0.03060
0	+0.01448
+5	+0.00664
+10	−0.00106
+15	−0.00863
+20	−0.01607
+25	−0.02338
+30	−0.03057

Średnia refrakcya odpowiada B=752.7
$T = +10°C$ $t = 9°{,}31C$

z	r	z	r.
0°	0	50°	1′ 8″.7
10°	10″.2	60°	1′ 39″.7
20°	21″.0	70°	2′ 37″.3
30°	33″.3	80°	5′ 16″
40°	48″.4	90°	34′ 54″

$r = 57.5 \operatorname{tg} z$

Przykład

Niech będzie: $z' = 75°$
Stan barometru = 760 mm
Termometr na barometrze = + 10°
Ciepłota powietrza = + 15°

Tu mamy:

$\log \alpha = 1.75457$ $\qquad \log T = -0.00070$
$\lambda = 1.0197$ $\qquad \log \gamma = -0.00863$
$A = 1.0000$ $\qquad \log \operatorname{tg} z = 0.571[illegible]$
$\log B = +0.00488$

przeto:

$$\log \Delta r'' = 1.75457 + 0.57195 + 1.0000\{+0.00488 - 0.00070\} + 1.0197 \cdot -0.00863$$

albo

$$\log \Delta r'' = 2.32190 \quad ; \Delta r'' = 209''8 = 3'29''8$$

Prawdziwa zenitowa odległość jest zatem

$$z = 75^\circ + 3'29''8 = 75^\circ\, 3'\, 29''8$$

Przy zenitowych odległościach mniejszych niż 70° wygodny jest wzór:

$$\Delta r_0 = 57''5 \operatorname{tg} z$$

$$\{\log 57''5 = 1.759668\}$$

dla tego n.p. dla

$z = 70^\circ$ mamy

$\log \Delta r_0 = 2.19860$

wtedy

$\Delta r_0 = 2'\ 38''0$

$$\begin{array}{r} 1.759668 \\ 0.438934 \\ \hline 2.198602 \end{array} = \log 158{,}0$$

według Bessla jest

$\Delta r_0 = 2'\ 37''3$.

Refrakcya w poziomie równa się około 35', dlatego widzimy jeszcze gwiazdy gdy jest pół stopnia pod poziomem. Jeżeli więc pachujemy wschód lub zachód gwiazd, musimy (wielkość) wziąć pod rozwagę, czynimy to w ten sposób, że my w wyrażeniu:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

wielkość $z = 90^\circ$, zastąpimy przez $z = 90^\circ + 35'$.

Jeżeli z przejdzie w $z + \Delta z$, zmieni się
t . . . . w $t + \Delta t$.

dlatego mamy:

$$\cos(z + \Delta z) = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(t + \Delta t)$$

albo: $\cos z + \Delta z \sin z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$
$+ \cos\varphi \cos\delta \sin t\, \Delta t$

a ponieważ:

$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$, zatem $[z = 90^\circ]$

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} \qquad 5.)$$

W poziomie jest: $\Delta z = 35' = 140^s$

i będzie dlatego

$$\Delta t^s = \frac{140^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t}$$

O tyle sekund wschodzi gwiazda wcześniej, a zachodzi później.
Obliczenie czasu wschodu i zachodu gwiazd jest więc następujące:
Mamy równość:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

a dla wschodu lub zachodu $z = 90^\circ$

wtedy

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

zatem $\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$

Nadajemy wyrażeniu temu inną formę:

Wiadomo że: $2\cos^2 \frac{t}{2} = 1 + \cos t$

$2\sin^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos t$

dla tego $\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{1+\cos t}$ albo $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}t = \frac{1+\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta}{1-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta} = \frac{\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta - \sin\varphi \sin\delta}$

tedy

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t = \pm\sqrt{\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)}} \quad \ldots\ldots \quad 7.$$

Dalej jest czas gwiazdowy:

$$\begin{cases} \text{zachodu} = \alpha - t - \Delta t & \ldots\ldots \quad 8. \\ \text{wschodu} = \alpha + t + \Delta t & \ldots\ldots \quad 9. \end{cases}$$

Przykład:

Kiedy wschodzi i zachodzi gwiazda α Tauri (Aldebaran) we Lwowie r. 1895.0?

Według Berl. Jahrb. mamy:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 4^h\ 29^m\ 53^s.7 \\ \delta &= +16^\circ\ 17'\ 52'' \\ \varphi &= +49^\circ\ 50' \end{aligned}\right\} 1895{,}0$$

$\varphi = +49^\circ 50'$

$\delta = +16^\circ\ 17'\ 52''$

$\varphi - \delta = 33^\circ\ 32'\ 8''$

$\varphi + \delta = 66^\circ\ 7'\ 52''$

$\log\cos\varphi-\delta = 9.92093$

$\log\cos\varphi+\delta = 9.60730$

$\log\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}t = 0.31363$

$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}t = 0.15631$

$\frac{1}{2}t = 55.\ 7\ \ 31$

$t = 110\ \ 15\ \ 2$

$t = 7^h\ 21^m\ 0$

$\log\cos\varphi \quad 9.80957$

$\log\cos\delta \quad 9.98221$

$\log\sin t \quad 9.97229$

$\log 1402 \quad 2.14613$

$\log \Sigma \quad 9.76407$ (Σ)

$\log \Delta t^s \quad 2.38206$

Dlatego mamy: czas gwiazdowy wschodu = $21^h\ 4^m\ 53^s$
czas gwiazdowy zachodu = $11^h\ 54\ 55^s$

Postawmy sobie teraz następne pytanie, kiedy wschodzi gwiazda Aldebaran we Lwowie w dniu 10^o grudnia 1895 r.?

Tu potrzeba zamienić czas gwiazdowy na czas średni.

Według Berl. Jahrb. mamy:

Czas gwiazdowy w średnie berlińskie południe dnia 10^o grudnia $\theta_0^B = 17\ 15\ 42{\cdot}39$

a we Lwowie (różnica długości $-0^h\ 42^m\ 29^s$) . . $17\ 15\ 42{\cdot}39 - 6^s{\cdot}96 =$

$\theta_0^L = 17^h\ 15^m\ 35^s$

Czas wschodu $= 21\ 4\ 53$

Różnica w czasie gwiazdowym $(\Delta) = 3\ 49\ 22$

Jeżeli zamienimy na czas średni otrzymamy $\Delta = 3^h\ 48^m\ 44^s$

Średni czas wschodu będzie zatem $= \Delta$ jeżeli czas wschodu jest większy $\}$ jak czas gwiazdowy
$= 12 - \Delta$ " " " jest mniejszy $\}$ w średnie południe.

a więc Aldebaran wschodzi we Lwowie 10. grudnia 1895 r. o $3^h\ 48^m\ 44^s$ po południu.

Mając znaleźć owe punkta na Horyzoncie w których pewna gwiazda wschodzi lub zachodzi, należy tylko w równaniu: $\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A$, położyć, że $h = 0$ to otrzymamy:

$$\cos A_0 = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad a).$$

Wartość ujemna A_0 jest azymutem gwiazdy, gdy ona wschodzi,
" dodatnia A_0 jest azymutem gwiazdy, gdy ona zachodzi.

Odległości gwiazdy od prawdziwego punktu wschodu lub zachodu, nazywamy odległością poranną lub wieczorną pewnej gwiazdy., oznaczmy ją przez A_1 to otrzymamy:

$A_0 = 90 + A_1$ w jednym wypadku,

a $A_0 = 270 - A_1$ w drugim wypadku

a więc

$$\sin A_1 = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad b).$$

gdzie A_1 jest dodatnie, gdy punkt wschodu lub zachodu leży na północ $\}$ od prawdziwego wschodu lub zachodu.
" ujemne, gdy punkt wschodu lub zachodu leży na południe $\}$

Wzór b na odległość poranną lub wieczorną możemy w innej formie przedstawić:

$$\frac{1+\sin A_1}{1-\sin A_1} = \frac{\sin\psi + \sin\delta}{\sin\psi - \sin\delta} \qquad \text{gdzie } \psi = 90 - \varphi$$

skąd otrzymamy:

$$\tan\left(45 - \frac{A_1}{2}\right)^2 = \frac{\tan\frac{\psi-\delta}{2}}{\tan\frac{\psi+\delta}{2}}$$

Zjawisko zmroku.

Przez Refrakcyi, wywołuje atmosfera otaczająca naszą ziemię, zjawisko zmroku. — Słońce zachodzi dla górnej atmosfery później, niż obserwatorowi znajdującemu się na powierzchni ziemi, przeto są górne warstwy atmosfery jeszcze przez słońce oświetlone, promienie te rozchodzą przez atmosferę załamane wywołują zjawisko zmroku.

Skonstatowano doświadczeniem, że gdy słońce znajduje się 18° pod Horyzontem, to przestaje już oświetlać górny odcinek atmosfery, znajdującej się nad horyzontem, a więc w chwili gdy dosięga odległości zenitalnej 108° mamy początek albo koniec astronomicznego zmroku [zwyczajny (potoczny) zmrok zaczyna się już gdy słońce znajduje się 6½° pod Horyzontem].

Oznaczmy odległość zenitalną słońca na końcu lub na początku zmroku przez $90+c$, kąt godzinny przy wschodzie i zachodzie t_0, a przez T czas trwania zmroku, to mamy:

$$-\sin c = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(t_0+T)$$

a więc
$$\cos(t_0+T) = -\frac{\sin\varphi\sin\delta + \sin c}{\cos\varphi\cos\delta}$$

czyli gdy
$$H = 90^\circ - \varphi + \delta$$

jest
$$\sin\tfrac{1}{2}(t_0+T) = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(H+c)\cos\frac{1}{2}(H-c)}{\cos\varphi\cos\delta}}$$

z czego można znaleźć T gdy t_0 jest obliczone.

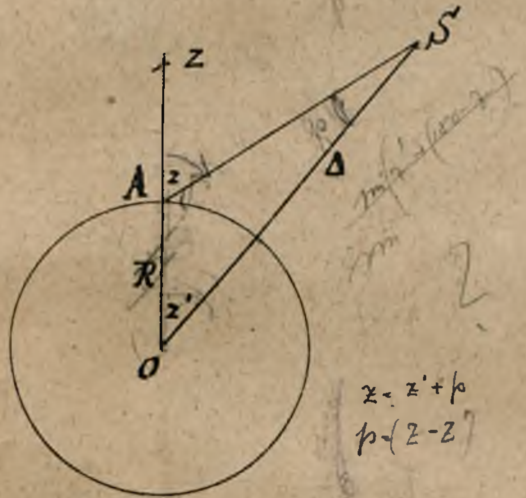
przyczem należy ustawić $c = 5\tfrac{1}{2}^\circ$ dla zwykłego (potocznego) zmroku

$c = 18^\circ$ dla astronomicznego zmroku.

Astronomia sferyczna.

/Część II ga./

Odległość gwiazd stałych od ziemi jest tak wielka że nie robi to różnicy czy mierzymy zenitową odległość pewnej gwiazdy S na powierzchni ziemi w punkcie A czyli ze środka ziemi od punktu O. Inaczej rzecz się ma jeżeli ową gwiazdą jest księżyc lub inna jakaś gwiazda bliska ziemi. –



Niech w trójkącie ASO

SO = Δ oznacza odległość gwiazdy

OA = R — promień ziemi

$\sphericalangle ZAS = z$, $\sphericalangle ZOS = z'$

to:

$$\sin(z - z') = \frac{R}{\Delta} \sin z \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

lub, jeżeli

$z - z'$

jest mała wielkość, tak że można wstawić

$$\sin(z - z')'' = (z - z')'' \sin 1''$$

$$(z - z')'' = \frac{R}{\Delta \sin 1''} \sin z$$

$z = z' + p$

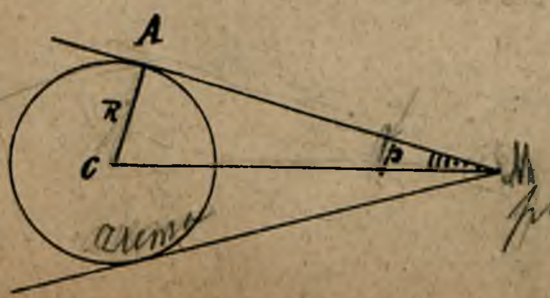
$p = (z - z')$

albo $(z - z')'' = 206265 \frac{R}{\Delta} \sin z$

Wielkość tę $p = 206265 \frac{R}{\Delta}$ . . . . 2.

nazywamy „Paralaxą poziomą".

Przytem należy odległość Δ wyrazić w jednostkach promienia R.



Paralaksa pozioma pewnej planety, wyraża pozorną wielkość w jakiej się przedstawia promień ziemi obserwatorowi znajdującemu się w środku tejże planety, – jeżeli M wyobraża księżyc a C środek kuli ziemskiej, przedstawionej przez okrąg koła to kąt p = AMC jest paralaksą poziomą.

księżyca.
Tak n.p. Odległość księżyca równa się sześćdziesięciu promieniom ziemskim. W takim razie mamy

$p = 206265 \frac{1}{60}$ czyli $p = 57'18''$

Ponieważ średnica księżyca przedstawia się nam pod kątem $1/2$ stopnia, musi więc średnica ziemi widziana z księżyca być 4. razy tak wielką.
Z równania

$$p = 206265 \frac{R}{\Delta}$$

wynika $\Delta = 206265 \frac{R}{p}$ . . . . 3.

stąd można obliczyć odległości ciała niebieskiego znając paralaksę.
Dla słońca mamy w przybliżeniu

$$p = 8''8$$

z czego wynika

$$\Delta = \frac{206265}{p} \cdot R$$

czyli $\Delta = 23439\,R$

Wobec tego jest słońce około 400 razy bardziej od ziemi oddalone jak księżyc.
Ogólnie otrzymamy jeśli ~~[illegible]~~ :

$R = 6377397$ m $= 859{\cdot}436$ mil geograficznych

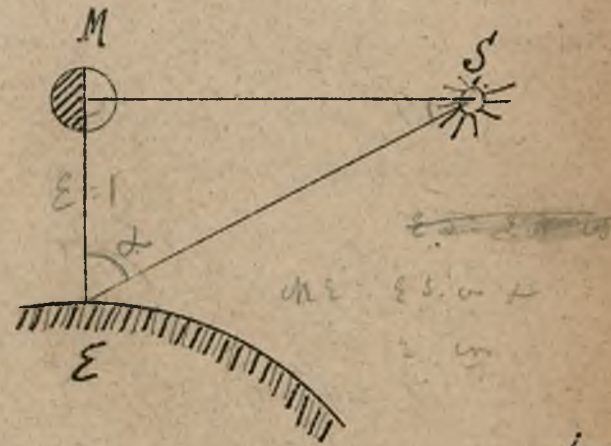
p	R	Δ mil	Δ Kilometrów
1°	57	49237	365361
1'	3437	2954526	21923805
8"9	23176	19918750	147801000
8"8	23439	20144490	149805000
8"7	23708	20375030	151198600

Pośrednio między 8"9 – 8"7 znajduje się nowsze wartości na paralaksę słońca

Metoda wyznaczenia paralaksy.

Pierwszą metodę do wyznaczenia paralaksy podał Aristarch, żyjący za czasów Aristotelesa.

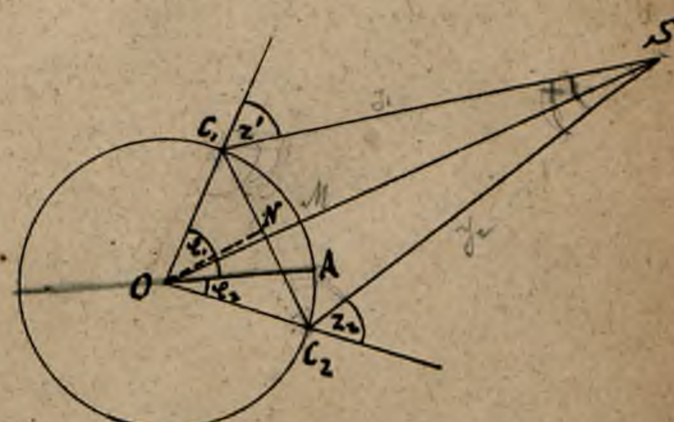
Aristarch obserwował chwilę, gdy księżyc był dokładnie do połowy oświe-
cony. Obrazowo da się to położenie
w ten sposób przedstawić.



Jeżeli odległość księżyca od ziemi przyjmiemy $EM = 1$ to można kąt zawarty
między słońcem a księżycem
$\alpha = MES$ zmierzyć
a stąd także odległość słońca od ziemi
ES obliczyć.-
W prostokątnym trójkącie EMS mamy

$$ES = \frac{EM}{\cos\alpha} \quad \ldots 4.$$

Równania tego nie można ale praktycz-
nie zastosować, ponieważ α nie wiele różni się od 90^{ciu} stopni,
przeto błąd z powodu $\frac{1}{\cos\alpha}$ znacznie się powiększa.
W rzeczywistości zbliża się $\frac{ES}{EM}$ do 400
Lepsza metoda wyznaczenia paralaksy, które tylko dla księżyca i Marsa
da się użyć, byłaby następująca:
Niech będzie:
O środkiem ziemi
S miejscem gwiazdy
MA równikiem



Obserwujemy gwiazdę z dwu miejsc
C_1 i C_2, których szerokości geogra-
ficzne są: φ_1 i φ_2
i które leżą w tym samym połud-
niku. Odległości zenitowe gwiazdy
w chwili przejścia przez południk
są:

$$z_1 \text{ i } z_2$$

? co to jest odległ. zenitowa

Z tego można odległość $OS = x$
w następujący sposób obliczyć: Wykreślmy cięciwę $C_1 C_2$ mamy

./.

$OC_1 = OC_2 = R$ = promieniowi ziemi

dalej kąt

$\sphericalangle C_1 M C_2 = \varphi_1 + \varphi_2$

więc

$C_1C_2 = 2R \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

Bo gdy zrobimy ON prostopadle na C_1C_2 to jest

$C_1N = C_2N$

i $\sphericalangle C_1ON = \sphericalangle C_2ON = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

dalej mamy:

$C_1N = \frac{1}{2} C_1C_2 = R \sin \sphericalangle C_1ON$ potrzeba $\perp$ do C_1C_2

lub $\tfrac{1}{2} C_1C_2 = R \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

i z tego wynika że

$C_1C_2 = 2R \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

zaś w trójkącie C_1C_2S mamy

$C_1S = y_1 \quad C_2S = y_2$

jako niewiadome.

Znamy ale bok C_1C_2, dalej kąt $\sphericalangle SC_1C_2 = 180 - z - OC_1C_2$; OC_1C_2 jest kątem przy podstawie w trójkącie równoramiennym OC_1C_2, którego kąt wierzchołkowy równa się $\varphi_1 + \varphi_2$

dlatego jest

$$\sphericalangle OC_1C_2 = \frac{1}{2}\{180 - (\varphi_1 + \varphi_2)\}$$

a więc mamy $\sphericalangle SC_1C_2 = 180^\circ - z - \frac{1}{2}\{180 - (\varphi_1 + \varphi_2)\}$

lub $\sphericalangle SC_1C_2 = 90^\circ - z_1 + \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$

podobnie znajdziemy

$$\sphericalangle SC_2C_1 = 90 - z_2 + \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Znamy więc w trójkącie SC_1C_2 jeden z boków C_1C_2 i oba przyległe kąty C_2C_1S i C_1C_2S

stąd znajdziemy

$$y_1 = C_1C_2 \frac{\sin\{90 - z_2 + \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\}}{\sin \text{ przy } S}$$

$\sphericalangle$ przy $S = 180^\circ - [\sphericalangle SC_1C_2 + \sphericalangle SC_2C_1]$

lub $\delta = 180° - \{90 - z_2 + 1/2(\varphi_1+\varphi_2)\} - \{90 - z_1 + 1/2(\varphi_1+\varphi_2)\}$

i dla tego $\delta = z_1 + z_2 - (\varphi_1+\varphi_2)$

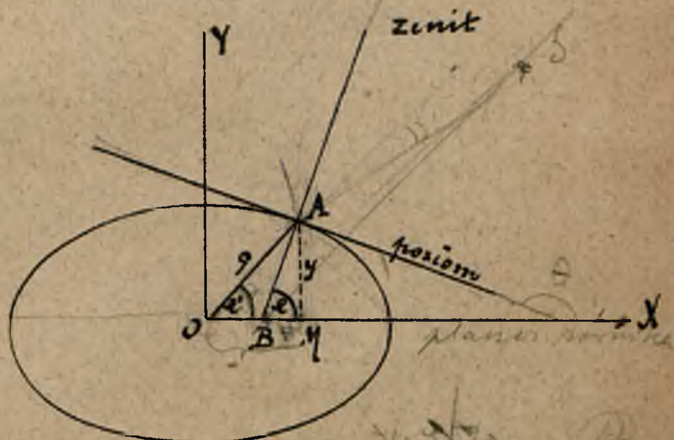
tak że otrzymamy

$$y = c_1 c_2 \frac{\cos\{z_2 - \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)\}}{\sin\{z_1+z_2\} - (\varphi_1+\varphi_2)\}}$$

a w końcu

$$x = \sqrt{y_1^2 + R^2 - 2y_1 R\cos(180 - z_1)}$$

Ażeby móc paralaksę jakiejś gwiazdy wyznaczyć dla pewnego miejsca na powierzchni ziemi trzeba każdy punkt na ziemi odnieść do środka tejże. Ziemia jest z przybliżeniem powierzchnią obrotową powstałą przez obrót elipsy około jej małej osi.



Jeżeli φ oznacza kąt nachylenia, który tworzy normalna w jakimkolwiek punkcie A na ziemi z kierunkiem dodatniej osi OX, to mamy:

$$tg\,\varphi = -\frac{dx}{dy}$$

jeżeli $y = MA$ jest rzędną (ordinate) a $x = OM$ odcinkiem (abscisse) punktu A znajdującego się na powierzchni ziemi.

Dalej mamy $x = OA\cos\varphi'$
$y = OA\sin\varphi'$

czyli $tg\,\varphi' = \frac{y}{x}$

Kąt φ zowie się „szerokością geograficzną", kąt φ' „szerokością zredukowaną".

Niech będzie $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ równaniem elipsy, gdzie a jest jej wielką, b jej małą osią. –

Mamy $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 y}{a^2 x}$

a to ze względu na równanie 1 i 2. | $tg\,\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,tg\,\varphi$ . . . . . .

Dalej jest

$OA = \rho = \sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$ $\qquad x\sqrt{1+tg^2\varphi} = x\sqrt{\sec^2\varphi}$

a ponieważ $\quad \frac{y}{x} = tg\,\varphi'$

więc otrzymamy równanie

$$\rho = \frac{x}{\cos\varphi'}$$

Koniecznie zaś

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+tg\,\varphi\,tg\,\varphi'}} \qquad *)$$

czyli

$$\rho = a\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi'-\varphi)}} \qquad **)$$

Aby dla równań 8) i 9) odpowiednie rozwinięcie wyskać rozwiniemy niektóre wzory w szereg, które w nauce astronomii są bardzo często używane.
Niech $\quad \underline{tg\,x = n\,tg\,y}\quad$ przyczem n jest bardzo blisko $=1$.
więc mamy

$$tg\,x - tg\,y = (n-1)\,tg\,y$$

albo
$$\sin(x-y) = (n-1)\sin y\cos x$$
$$= (n-1)\sin y\cos[(x-y)+y]$$

$(n-1)\sin y[\cos(x-y)\cos y + \sin(x-y)\sin y]$

wtedy
$$tg(x-y) = \frac{m\sin 2x}{1-m\cos 2y}$$
gdzie postawiono
$$m = \frac{n-1}{n+1}$$
Wyrażenie to mamy rozwinąć w szereg; W tym celu wyjdźmy ze znanego równania
$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}\right)$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}\right)$$
więc
$$tg\,\alpha = \frac{1}{i}\,\frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}$$

---

*) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad y = x\,tg\,\varphi'$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 tg^2\varphi'}{b^2} = 1 \qquad i \qquad \frac{x^2}{a^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}tg^2\varphi'\right) = 1$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}tg^2\varphi'}} = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}tg\,\varphi'\,tg\,\varphi'}} = \frac{a}{\sqrt{1+tg\,\varphi\,tg\,\varphi'}}$$

**) $\rho = \frac{a\sec\varphi'}{\sqrt{1+tg\,\varphi\,tg\,\varphi'}} = a\frac{\sqrt{\cos\varphi}}{\sqrt{\cos\varphi'\cos(\varphi'-\varphi)}}$

pomnożymy przez $e^{\alpha i}$

otrzymamy: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2\alpha i}-1}{e^{2\alpha i}+1}$

wstawiwszy $\alpha = x - y$

otrzymamy
$$\frac{e^{2(x-y)i}-1}{e^{2(x-y)i}+1} = \frac{m\{e^{2yi}-e^{-2yi}\}}{2-m(e^{2yi}+e^{-2yi})}$$

czyli
$$e^{2(x-y)i} = \frac{1-me^{-2yi}}{1-me^{+2yi}}$$

Ogólnie jest ale:
$$\log nat(1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \dots\dots$$
$$\log e^{2(x-y)i} = 2(x-y)i = \log(1-me^{-2yi}) - \log(1-me^{+2yi})$$

albo
$$x-y = m\frac{1}{2i}\{e^{+2yi}-e^{-2yi}\} + \frac{1}{2}m^2\frac{1}{2i}\{e^{+4yi}-e^{-4yi}\} + \frac{1}{3}m^3\frac{1}{2i}\{e^{+6yi}-e^{-6yi}\} +$$

wtedy ponieważ
$$\frac{1}{2i}(e^{2yi}-e^{-2yi}) = \sin 2y$$
$$\frac{1}{2i}(e^{4yi}-e^{-4yi}) = \sin 4y$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x-y = m\sin 2y + \frac{1}{2}m^2\sin 4y + \frac{1}{3}m^3\sin 3y + \dots\dots$$

wstawmy $x = \varphi'$; $y = \varphi$; $n = \frac{b^2}{a^2} = 1-\varepsilon^2$; $m = \frac{n-1}{n+1} = -\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}$

więc otrzymamy
$$\varphi'-\varphi = -\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{(2-\varepsilon^2)^2}\sin 4\varphi - \dots\dots$$

Dla Bessela mamy

$a = 6377397$ metrów

$b = 6356079$ metrów

Jeżeli więc obrachujemy wielkości m i n i wyrazimy je w mierze łukowej to otrzymamy:

$$\varphi' = \varphi - 11'\,30''65\sin 2\varphi + 1''16\sin 4\varphi - 0''003\sin 6\varphi + \dots\dots$$

<u>Przykład</u>: Dla Obserwatoryum we Lwowie jest

$\varphi = +49^\circ\ 50'\ 11''$

$2\varphi = 99\ \ 40\ \ 22''$

$4\varphi = 199\ \ 20\ \ 44''$

dla tego mamy:

$\log 11'30''65 = \log 690''65 = 2.839258$

$\log \sin 2\varphi = 9.993782$

2.833040

$\log 1''16 = 0.064458$

$\log \sin 4\varphi = 9.520175$

9.584633

$$\left.\begin{array}{ll} \text{mmm} & -\ 680''\,83 \\ \text{mmm} & +\ \ \ 0''\,38 \end{array}\right\} -680''.45$$

$$\varphi' - \varphi = -11'\ 20''45$$

$$\varphi = 49\ 50'\ 11.00$$

$$\varphi' = 49\ 38\ 51.55$$

Podobnie poprawimy wzór na odległość miejsca obserwacyi od środka ziemi

Jeżeli mamy

$$\beta^2 = 1 + p^2 - 2p\cos 2y$$

to możemy napisać

$$\beta^2 = (1 - pe^{2yi})(1 - pe^{-2yi})$$

i dla tego

$$\frac{2\log\beta}{\text{Mod}} = -pe^{2yi} - \tfrac{1}{2}p^2e^{4yi} - \ldots\ldots \\ -pe^{-2yi} - \tfrac{1}{2}p^2e^{-4yi} - \ldots\ldots$$

Tak że mamy

$$\log\beta = -\text{Mod}\{p\cos 2y + \tfrac{1}{2}p^2\cos 4y + \tfrac{1}{3}p^3\cos 6y + \ldots\ldots$$

Pośrednio mieliśmy

$$s^2 = \frac{a^2\sec^2\varphi'}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi'} = \frac{a^4 + b^4\operatorname{tg}^2\varphi}{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2\varphi}$$

i ponieważ ogólnie jest $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}$

otrzymamy

$$s^2 = \frac{a^4 + b^4 + (a^4 - b^4)\cos 2\varphi}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\varphi}$$

weźmiemy tutaj

$$a^4 + b^4 = \mu^2 + \nu^2 \qquad a^2 + b^2 = \mu_1^2 + \nu_1^2$$

$$a^4 - b^4 = -2\mu\nu \qquad a^2 - b^2 = -2\mu_1\nu_1$$

to otrzymamy

$$(\mu - \nu)^2 = 2a^4 \qquad (\mu_1 - \nu_1)^2 = 2a^2$$

$$(\mu + \nu) = 2b^4 \qquad (\mu_1 + \nu_1)^2 = 2b^2$$

Tak że będzie:

$$s^2 = \frac{\mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos 2\varphi}{\mu_1^2 + \nu_1^2 - 2\mu_1\nu_1\cos 2\varphi} = \frac{\mu}{\mu_1}\,\frac{1 + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2 - 2\frac{\nu}{\mu}\cos 2\varphi}{1 + \left(\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^2 - 2\frac{\nu_1}{\mu_1}\cos 2\varphi}$$

lub

$$2\log\rho = \log\frac{\mu}{\mu_1} + \log[1+(\frac{\nu}{\mu})]^2 - 2(\frac{\nu}{\mu})\cos 2\varphi]$$
$$-\log[1+(\frac{\nu_1}{\mu_1})^2 - 2(\frac{\nu_1}{\mu_1})\cos 2\varphi]$$

albo $\log\rho = \log\frac{\mu}{\mu_1} - Mod\{(\frac{\nu}{\mu} - \frac{\nu_1}{\mu_1})\cos 2\varphi + \frac{1}{2}[(\frac{\nu}{\mu})^2 - (\frac{\nu_1}{\mu_1})^2]\cos 4\varphi - \frac{1}{3}[(\frac{\nu}{\mu})^3 - (\frac{\nu_1}{\mu_1})^3]\cos 6\varphi +$

tu jest:

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{a^2+b^2}{a+b} \qquad \frac{\nu}{\mu} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \qquad \frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{b-a}{b+a}$$

Dla Bessela jest: $a = 6377397\ m$
$b = 6356079\ m$

Jeżeli obliczymy wielkości $\mu, \nu \dots$ to otrzymamy

$\log\rho = 9.9992747 + 0.0007271\cos 2\varphi - 0.0000018\cos 4\varphi + \dots\dots$ 15.)

Przykład: Dla Lwowa mamy: (Obserwatoryum).

$\varphi = 49^\circ\ 50'\ 11''$

a więc $\log 0.0007271 = 6.86159$ $\log 0.0000018 = 4.255$

$\log\cos 2\varphi = 9.22545$ $\log\cos 4\varphi = 9.975$

$= 6.08704$ $= 4.230$

$n = +1222$

$n' = -17$

9.9992747

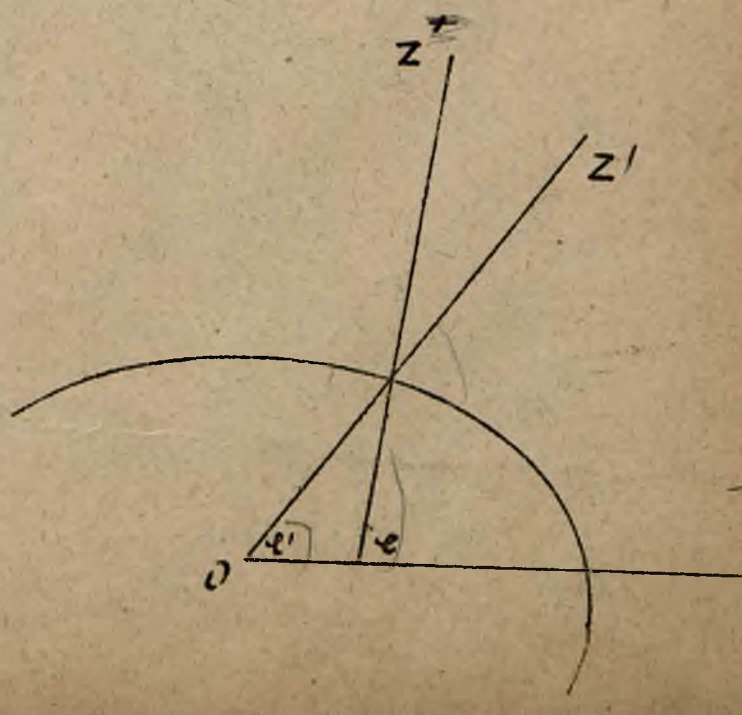
Stąd zaś jest $\log\rho = 9.9993952$

Mamy do odróżnienia:

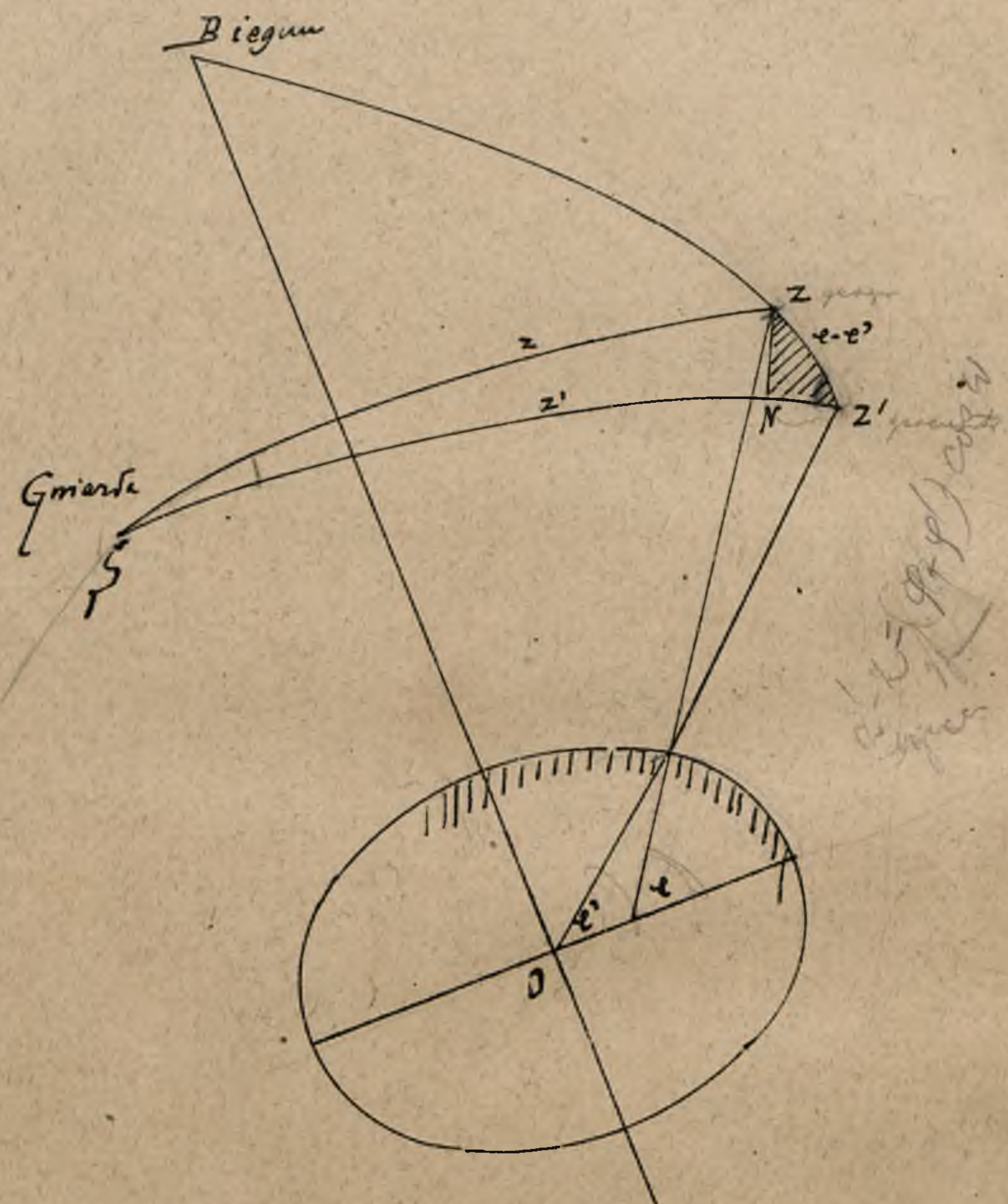
1. Zenit geograficzny z
2. geocentryczny z'

Geocentryczny jest wyznaczony przez linię łączącą miejsce obserwacyi ze środkiem ziemi a geograficzny przez kierunek pionu.

By do geograficznej odległości zenitowej n. prz. $ZS = z$ wyprowadzić odpowiednią geocentryczną $z' = Z'S'$



wykreślmy sobie następujący trójkąt: Biegun, gwiazda, z'.



Poprowadźmy z Z prostopadłą na SZ' to powstanie trójkąt Z'NZ w którym SN jest prawie równe SZ = z. W takim razie jest

$z' - z = NZ'$

Powstały mały trójkąt możemy uważać jako płaski to będzie:

$z' - z = (\ell - \ell')\cos ZZ'N$

ZZ'N przedstawia nam azymut gwiazdy liczony od bieguna. Oznaczmy go przez $\bar{\omega}$ to mamy

$$z' = z + (\ell - \ell')\cos\bar{\omega}$$

a więc tym sposobem wyraziliśmy odległość geocentryczną przez zenitalną.-

Paralaksa wpływa też naturalnie na deklinacyę i rektascenzyę, w tym celu mamy następujące zbliżone wzory:

$$\alpha' - \alpha = -\frac{8''8\,\varrho\cos\varphi'}{\Delta}\cdot\frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\cos\delta}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos(\theta - \alpha)}$$

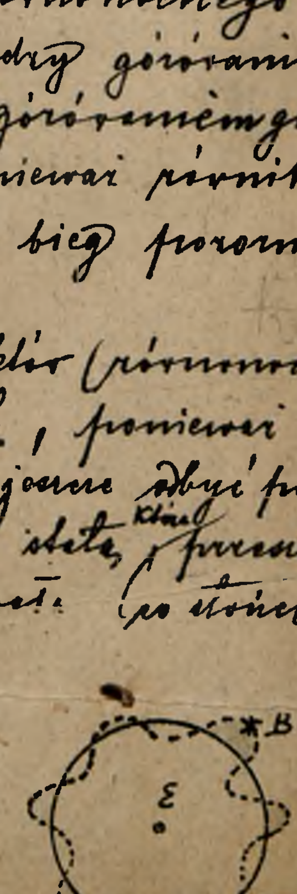
$$\delta' - \delta = -\frac{8''8\,\rho\sin\varphi'}{\Delta}\cdot\frac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin\gamma}$$

przytem są α i δ obserwowane, α' i δ' poprawione geocentryczne kąty z powodu paralaxy, γ: zaś kąt pomocniczy. Wielkość Δ należy wyrazić w średniej drogi ziemi; ρ jest odległości miejsca obserwacyi od środka ziemi (według wzoru 15), θ: czas gwiazdowy spostrzeżenia, φ': wreszcie geocentryczna szerokość (według wzoru 14.) Rozwinięcie tego wzoru zaprowadziło by nas za daleko. –

Precesya, Nutacya, Aberacya gwiazd.
Katalogi gwiazd stałych.

Położenie gwiazd stałych oznaczone jest przez ich deklinacyą δ (zboczenie) i przez rektascensyą (prosto wzniesienie) α. Ostatnia liczy się od punktu aequinoctialnego (równonocnego) wiosennego na równiku i jest różnicą czasu między górowaniem punktu aequinoctialnego wiosennego (♈) a górowaniem gwiazdy. Punkt aequinoctialny nie jest ale stały, ponieważ równik posuwa się po ekliptyce, po której słońce odbywa bieg pozorny. Rok rocznie daje inny punkt przecięcia.

To zjawisko zowiemy cofaniem się punktów (równonocnych) aequinoctialnych lub precesyą gwiazd stałych, ponieważ słońce dobiegłszy punktu aequinoctialnego, musi jeszcze odbyć pewną krótką drogę, aby zrównać się z tą gwiazdą stałą, która przeszłego roku w tym samym ~~kole~~ zbocznie się znajdowała ze słońcem. – To się tłumaczy tem, że biegun świata opisuje około bieguna ekliptyki wskutek ciążenia słońca i księżyca (stałego kierunku precessi) krzywą podobną do epicykloidy. Praecessya wynosi rocznie 50" tak że w przeciągu lat 26000 biegun B opisze zupełny okrąg około bieguna E.



——— pra

······· nu

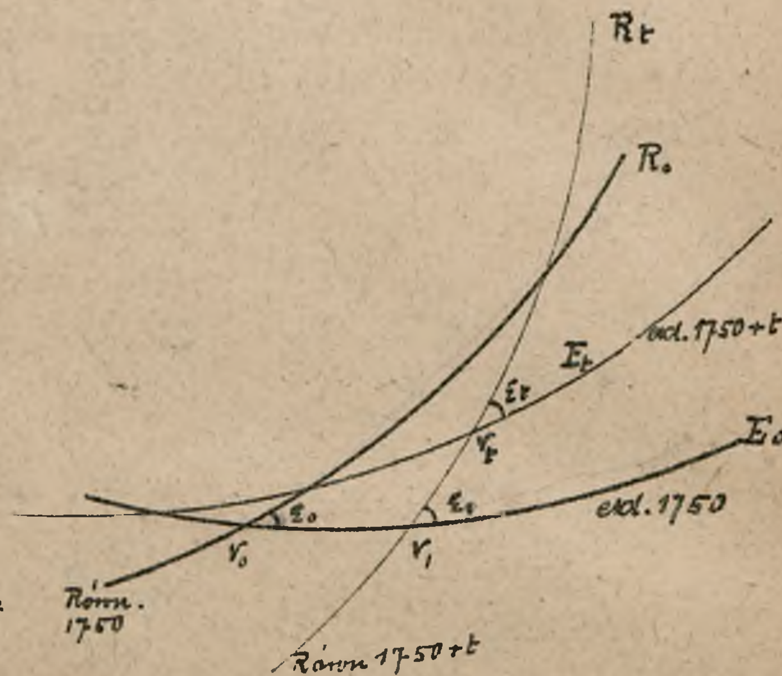
Aby uwydatnić tę zmianę, wskutek precesyi narysujmy sobie ekliptykę (E_o) i równik (R_o) n.p. z początku roku 1750,0.
W czasie 1750+t, przyczem $\underline{t}$ w juliańskich latach liczyć należy (rok po 365,25 dni) przyjmą R i E pewne inne położenie R_t i E_t.
Nazwijmy kąt między R i E, ε.
Kąt ten zowie się nachyleniem ekliptyki.
W szczególności mamy kąt między

$R_o E_o$,.. $\varepsilon_o = 23°28'18''{,}0$

$R_t E_o$ .. $\varepsilon_t = 23°28'18''{,}0 + 0''{,}00000 98423 t^2$

$R_t E_t$ .. $\varepsilon_t = 23°28'18''{,}0 - 0''{,}48368\, t -$

$- 0''{,}0000 272295\, t^2$



Kąt ε_t ma nazwę „średniego nachylenia ekliptyki"
Dalej jest odległość $\gamma_o\, \gamma_1 = 50''{,}37572 - 0''{,}000121 79 45\, t^2$
Wartość ta zowie się roczną lunisolarną precesyą.
Ponieważ my spółrzędne gwiazd (deklinacyę i rektascensyę) do tych płaszczyzn odnosimy (a w szczególności dekl. i rekt. do równika) to zdaje się pokazuje się że i te spółrzędne z czasem zmienić się muszą.
Znajdziemy przeto zawiłym rachunkiem, którego przeprowadzenia tutaj nie przedstawiam dla tych zmian następujące wartości:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha$$

przyczem $m = 46''{,}02824 + 0''{,}000 308645\, t$

$n = 20''{,}06442 - 0''{,}000097 0204\, t$

$\underline{t}$ należy jak pierwiej rachować w juliańskich latach
Niech będzie:

α_o rektascensya } roku 1750 α_t .... } 1750+t
δ_o deklinacya } δ_t ....

to otrzymamy:

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) dt$$

$$\delta_t = \delta_0 + \int_0^t \left(\frac{d\delta}{dt}\right) dt$$

Zamiast tych równań używamy dla gwiazd, które nie znajdują się blisko bieguna innych wzorów.

Wstawmy: $\int_0^t \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) dt = f(t)$

Potem będzie:

$$\alpha_t = \alpha_0 + f(t)$$

$$\alpha_{t'} = \alpha_0 + f(t')$$

dla tego $\alpha_{t'} - \alpha_t = f(t') - f(t)$

Wstawmy dalej

$$\tfrac{1}{2}(t+t') = x$$

$$\tfrac{1}{2}(t'-t) = \Delta x$$

to będzie:

$$f(t') = f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x) + \tfrac{1}{2}\Delta x^2 f''(x) + \dots$$

$$f(t) = f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x\, f'(x) + \tfrac{1}{2}\Delta x^2 f''(x) - \dots$$

i dla tego

$$f(t') - f(t) = 2\Delta x\, f'(x)$$

następnie ponieważ

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}(t'-t)$$

i

$$\underline{\alpha_{t'} - \alpha_t = (t'-t)\, f'\left(\tfrac{t+t'}{2}\right)}$$

Jest ale

$$\int_0^t \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) dt = f(t)$$

to będzie

$$\frac{d\alpha}{dt} = f'(t)$$

dla tego $\alpha_{t'} - \alpha_t = (t'-t)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\frac{t'+t}{2}}$

tak że mamy

$$\alpha_{t'} - \alpha_t = \left(m + n \operatorname{tg} \frac{\delta_t + \delta_{t'}}{2} \sin \frac{\alpha_t + \alpha_{t'}}{2}\right)(t'-t)$$

i podobnie

$$\delta_{t'} - \delta_t = \left(n \cos \frac{\alpha_t + \alpha_{t'}}{2}\right)(t'-t)$$

przyczem będzie

$$m = 46''02824 + 0''000308645\, \frac{t+t'}{2}$$

$$n = 20''06442 - 0''0000970204\, \frac{t+t'}{2}$$

Wartości m i n otrzymamy najkrócej przez interpolacyę z następującej tablicy:

m		$\log \frac{n}{15} = n^s$	$\log n''$
1800	3°06968	0·126146	.1. 302238
10	6987	128	219
20	7006	109	200
30	7025	90	182
40	7044	72	163
50	7063	53	144
60	7081	34	125
70	7100	15	107
80	7119	5996	88
90	7138	78	69
1900	7157	59	50

W tych wzorach powinniśmy znać szukane wielkości α_1' i δ_1' zawarte po prawej stronie równania.
Wystarczy ale przybliżona ich znajomość, gdyż będą one przez mało ilości pomnożone. W tym celu podają już Katalogi gwiazd przybliżone wartości.
Urządzenie Katalogów jest w ogólności następujące:

1. Liczba spostrzeganej gwiazdy
2. Jej nazwisko
3. Jej wielkość
4. Rektascenzya (preduktowana na pewną oznaczoną epokę)
5. Epoka (rok) obserwacyi
6. Liczba jak często gwiazda była obserwowana
7. Precesya rektascenzyi

W następnych rubrykach podane są wartości podobne jak (4–7) ale dla deklinacyi.

Przykład z Katalogu gwiazd Yarnall.

1	2	3	4	5	6	7	4'	5'	6'	7'
Number	Name of Star	Magnitude	Mean Right Ascension 1860,0	Mean Year	Number of Observ.	Annual Precession 1860.0	Mean Declination 1860.0	Mean Year	Number of Observ.	Annual Precession 1860.0
14.	α Andromedae	2.0	$0^h\ 1^m\ 9^s 37$	1854.4	222	$+3^s 075$	~~1860,0~~ $+28°\ 19'\ 3''9$	1851.8	114	$+20'' 06$

Zestawimy sobie dla dalszego użytku podobnie taki katalog gwiazd pierwszej wielkości.

Nazwisko gwiazd	Wielkość	α 1896.0	$\frac{d\alpha}{dt}$	δ 1896.0	$\frac{d\delta}{dt}$
α Andromedae	2.0	$0^h\ 3^m\ 0^s.64$	$+3^s.092$	$+28^\circ\ 30'\ 58''.6$	$+19''.90$
α Cassiopeiae	2.5	0 34 36.18	+3.374	+55 58 0.8	$+19''.78$
α Tauri	1	4 29 57.11	+3.437	+16 17 59.9	+7.49
α Aurigae	1	5 9 0.34	+4.426	+45 53 30.8	+4.00
α Orionis	1.2	5 49 32.44	+3.247	+7 23 15.1	+0.94
α Can. maj	1	6 40 34.03	+2.644	−16 34 25.3	−4.73
α Can. min	1	7 33 51.48	+3.143	+5 29 29.0	−9.01
α. Leonis	1.3	10 2 50.00	+3.199	+12 28 31.7	−17.47
α Virginis	1	13 19 42.77	+3.154	−10 37 6.6	−18.87
α Bootis	1	14 10 55.03	+2.733	+19 43 26.4	−18.84
α Scorpii	1.3	16 23 1.77	+3.670	−26 12 4.6	−8.26
α Lyrae	1	18 33 25.04	+2.031	+38 41 13.1	+3.21
α Aquilae	1.3	19 45 42.53	+2.927	+8 35 37.2	+9.31
α Cygni	1.6	20 37 53.19	+2.044	+44 54 31.2	+12.75
α Pisc. Aust.	1.3	22 51 54.22	+3.323	−30 10 25.1	+19.01

Przypuśćmy że chcielibyśmy współrzędne α Andromedae na rok 1896.0 oznaczyć.

Według katalogu mamy:

$t = 1860.0\ ;\ \alpha = 0^h\ 1^m\ 9^s.37\ ;\ \delta = 28^\circ\ 19'\ 3''.9\ ;\ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{1860.0} = +3^s.076\ ;\ \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_{1860.0} = +20''.6$

dalej jest $t' = 1896.0$

$$\frac{t+t'}{2} = 18\,\frac{60+96}{2} = 18(30+48) = 1878$$

Szukajmy przybliżonych wartości

$\alpha_{t'},\ \delta_{t'}$

to będzie $\alpha_{t'} = 0^h\ 1^m\ 9^s.37 + 3^s.076\cdot(1896-1860) = 0^h\ 3^m\ 0^s.11$

$\delta_{t'} = +28^\circ\ 19'\ 3''.9 + 20''.06\cdot(1896-1860) = +28^\circ\ 31'\ 6''.1$

i dalej $\frac{\alpha_{t'}+\alpha_t}{2} = 0^h\ 2^m\ 4^s.74$

$\frac{\delta_{t'}+\delta_t}{2} = +28\ 25\ 5''.0$

Wartości m i n otrzymujemy najkrócej przez interpolacyę z tablic dla 1878 mamy

$m = 3^s 07115 \; [0.126000]$ $\qquad n'' = \frac{n^s}{15}$

$n'' = [1.302092]$

tak że mamy

$\log (t'-t)$	1.556303	$\log t'-t)$	1.556303
l	0.126000		1.302092
$\lg \sin \frac{\alpha+\alpha'}{2}$	9.948282	$\log \cos \frac{\alpha+\alpha'}{2}$	9.999983
$\lg \operatorname{tg} \frac{\delta+\delta'}{2}$	9.733282		
Σ …	9.363877	S	2.858378
Num Σ =	0.23		721.7
$36 \times 3^s 07118$ =	+1' 50" 56	Num S	12' 1"7
α 1880	0^h 1 9"37	δ_t	28 19 3"9
	0^h 3^m 0"16	δ_{1878}	28 31 5"6

Porównawszy wartość otrzymaną rachunkiem z tym co nam (Berl. Jahrb.) rocznik Berliński podaje znajdziemy znaczną różnicę, zwłaszcza dla gwiazdy α Andromedae. Takie różnice są częste a to z powodu, że wyniki podane w Katalogach zawierają błędy samej obserwacyi. Jeżeli więc redukujemy współrzędne gwiazd na pewną epokę i znajdziemy różne wartości mniejsze i większe to średnia arytmetyczna daje nam wartość najprawdopodobniejszą. Zawsze jednak tak nie jest.

Często znajdujemy że współrzędne mają pewny doroczny postęp dodatni lub ujemny. Powodem tego jest własny ruch gwiazd.

Jeżeli α_t względnie δ_t są współrzędne pewnej gwiazdy w czasie t
a $\alpha_{t'}$ " $\delta_{t'}$ " " " " t'

to $\mu_\alpha = \frac{\alpha_{t'}-\alpha_t}{t'-t}$; $\mu_\delta = \frac{\delta_{t'}-\delta_t}{t'-t}$

własny ruch gwiazd (motus proprius).

Własny ruch gwiazd (motus proprius).

Ruch własny roczny wynosi u gwiazdy

61 Cygni	$+0^s36$	$+3''3$
α Centauri	-0^s47	$+0''8$
α Bootis	-0^s08	$+2''0$

a u gwiazdy α Andromedae według Berliner Jahrbuch

$+0^s0095 \quad -0''156$

Mamy przeto dla

$$t'-t = 36$$

$$\mu_\alpha(t'-t) = 36 \cdot 0{,}0095 = +0^s23$$

$$\mu_\delta(t'-t) = 36 \cdot 0''156 = -5''6$$

Poprzednio otrzymaliśmy

$$\alpha_{1896} = 0^h\,3^m\,0^s16 \qquad \delta_{1896} = +28^\circ\,31'\,5''6$$

Teraz jest

$$\mu_\alpha(t'-t) = +0^s23 \qquad -5''6$$

$$\alpha_{1896} = 0^h\,3^m\,0^s39 \qquad \delta_{1896} = +28^\circ\,31'\,0''0$$

B. J. daje $\quad 0^h\,3^m\,0^s64 \qquad +28^\circ\,30'\,58''62$

Wskutek Precessyi zmienia biegun niebieski wciąż wiekówo miejsce swoje pomiędzy gwiazdami; w różnych więc czasach różne gwiazdy były najbliżej bieguna.

Za czasów Hipparcha, który właśnie odkrył zjawisko precesyi, była obecna gwiazda biegunowa (α Ursae minoris) 12° od bieguna oddaloną, teraz stoi ona w odległości prawie ½°; najbliżej zaś będzie w roku 2100. Około roku 7500 będzie α Cephei gwiazdą biegunową.

Dalszym skutkiem precessyi jest cofanie się punktów równonocnych. Kiedy słońce znajduje się w zrównaniu wiosennem, mamy początek wiosny. Po roku przyjdzie słońce do tego miejsca o 20 minuty wcześniej, bo punkt równonocny porusza się po równiku w kierunku przeciwnym ruchowi pozornemu słońca. Okres czasu, po którym słońce dobiegnie do tego samego punktu przestrzeni niebios (n.p. do tej samej gwiazdy stałej) nazywa się rokiem gwiazdowym (annus sideralis), okres zaś czasu po którym słońce wróci do tego samego punktu równonocnego rokiem zwrotnikowym (annus tropicus); ostatni jest więc o 20^m krótszy od pierwszego. Różnica ta wynosi po 1000 lat już 14 dni.

Dla tego ma rok gwiazdowy 365 dni $6^g\ 9^m\ 9^s.314$

zwrotny 365 dni $5^g\ 48^m\ 46^s.069 - 0^s.53675\left(\frac{t-1850}{100}\right)$

Rok cywilny bierze tylko równo 365 dni jest tedy krótszy od roku zwrotnikowego o $5^g\ 48^m\ 46^s$. Z tego powodu dodają do każdego 4$^{\text{tego}}$ roku jeden dzień w lutym i zowią ten rok rokiem przestępnym (annus intercalaris). Dodaje się przez to za dużo, bo

$4 \times 5^g\ 48^m\ 46^s = 23^g\ 15^m\ 4^s$ jest tylko $= 24^g - (44^m\ 56^s)$

Dlatego postanowiono że nie wszystkie 4$^{\text{te}}$ lata są przestępne, a mianowicie na 400 lat jeden tylko rok ~~100~~ (setny) jest przestępny (którego setki są przez 4 podzielne) inne zaś lata setne są zwyczajnymi.

Dlatego będzie rok 1900 rokiem zwyczajnym, chociaż jego cyfra w całości (nie) jest przez 4 podzielną.—

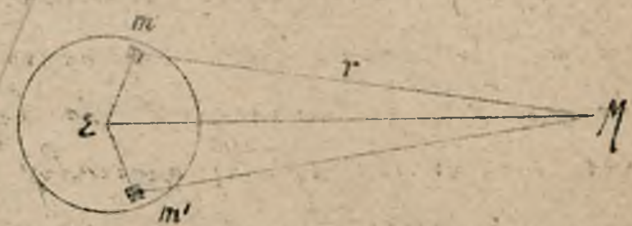
Obok zmian miejsca wskutek precessyi mamy jeszcze i inne zmiany położenia gwiazd, zawisłe od stanowisk słońca i księżyca, jakie te ciała względem siebie zajmują. Te zmiany są peryodyczne o krótkim okresie, podczas gdy okres precesyi wynosi 26000 lat. Takie zmiany o krótkim okresie zowiemy nutacyą gwiazd.

Precesya i nutacya powstają wskutek wzajemnego przyciągania się gwiazd (ciał niebieskich).

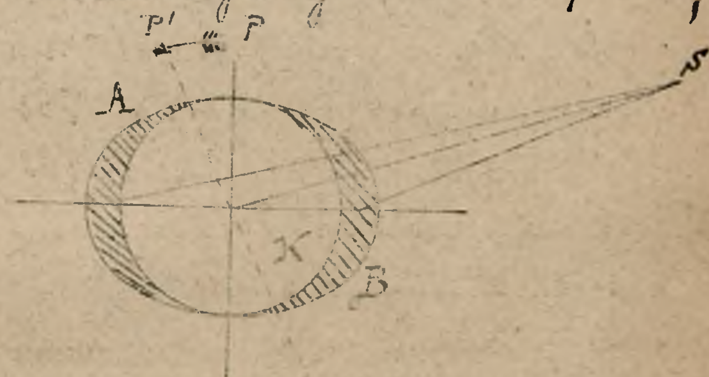
Wiemy: 1.) Ciała przyciągają się stosownie do wielkości mas :

t. j. masy podwójne przyciągają się z podwójną siłą
2.) że ciała te przyciągają się w odwrotnym stosunku do kwadratów oddalenia, tak że jeżeli M i m są dwie masy, r jest oddalenie to siła przyciągania da się wyrazić

$$\frac{m \cdot M}{r^2}$$



Niech S oznacza słońce, E środek ziemi, przypuśćmy że ziemia jest kulą jednostajną, dalej że słońce przyciąga ziemię tak jakby cała masa ziemi skoncentrowana była w jej środku. Ziemia jest jednakże ellipsoidą, składa się z kuli i warstwy zewnętrznej, co w przekroju przedstawi się jako koło K i dwa odcinki A i B. Słońce przyciąga część bliższą B więcej niż część dalszą A, dlatego oś ziemska odchyli się od P ku P'. Podobny skutek wywiera i księżyc. Wskutek tego opisuje oś ziemska nie linię kolistą około bieguna ekliptyki ale krzywą nieregularną podobną do wskazanej na figurze.



Wartość nutacyi zależy od położenia słońca i księżyca i pisze się według następujących formuł:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -15''83 \sin ☊ - (6''86 \sin ☊ \sin\alpha + 9''21 \cos ☊ \cos\alpha)\, tg\,\delta$$
$$- 1''16 \sin 2\odot - (0''50 \sin 2\odot \sin\alpha - 0''55 \cos 2\odot \cos\alpha)\, tg\,\delta$$
$$+ \dots$$

przytem jest:

⊙ długość słońca

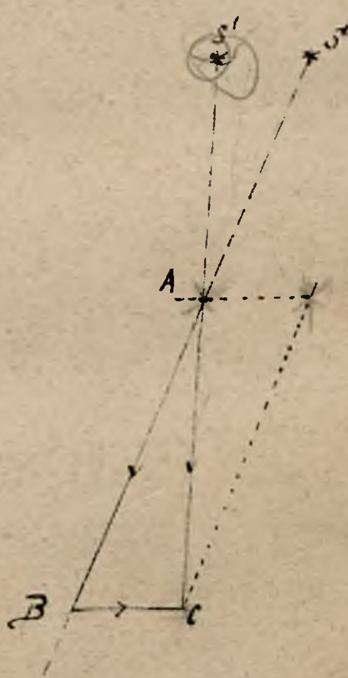
☊ długość węzła wschodzącego księżyca. -

<u>Nutacya</u> zmienia także pochylenie ekliptyki: Dla wyrównania mamy równość: gdyż zmienia przyczyną także i słońce.

$$\varepsilon = \varepsilon_{prec} + 9''22 \cos ☊ + 0''55 \cos 2 ☉$$

<u>Precesya i nutacya</u> zmieniają położenie punktu równonocnego wiosennego. Punkt, w którym by ekliptyka przecinała równik gdyby nie było nutacyi zowie się <u>średnie</u> <u>aequinoctium.</u> Punkt zaś w którym równik przecina ekliptykę rzeczywiście w danym czasie, zowie się <u>prawdziwe</u> <u>aequinoctium.</u> Gdyby <u>nutacyi nie było</u>, byłoby średnie aequinoctium takie samo jak prawdziwe.-

Jest jeszcze inna przyczyna wpływająca na zmianę prawdziwego położenia gwiazd, jest to <u>Aberacya światła.</u>



Światło bowiem potrzebuje pewnego czasu aby od punktu świetlnego doszło do naszego oka, a że ziemia także na pewnej swej drodze postępuje, nie widzimy więc gwiazdy w tem miejscu gdzie się w istocie znajduje w S ale w innem miejscu n.p. S'

Niech AB oznacza drogę światła w pewnym czasie, w którym przebiega ziemia drogę BC, tedy zdaje się nam jakoby gwiazda znajdowała się w miejscu S' a nie w S t.j. na kierunku złożenia ruchu AB światła i BC ziemi.

<u>Wskutek</u> <u>Aberacyi</u> mamy dwa różne zjawiska:

Po pierwsze: Znajduje się obserwator na ziemi, to wykonuje on z nią wszystkie ruchy. Wynika stąd Aberacya światła ma nazwę <u>Aberacyi gwiazd stałych.</u>

Ta może być dwojaka:

1. <u>dzienna</u> wskutek dziennego obrotu ziemi około swej osi
2. <u>roczna</u> wskutek obrotu ziemi około Słońca.

Dzienną znajdziemy z formuły:

$$\alpha'-\alpha = 0''322 \cos\varepsilon \cos(\theta-\alpha)\sec\delta$$

$$\delta'-\delta = 0''322 \cos\varepsilon \sin(\theta-\alpha)\sin\delta$$

By roczną znaleźć, należy założyć:

$$-20''445 \cos\Theta \cos\varepsilon = h \sin H$$

$$-20''445 \sin\Theta = h\cos H$$

$$h \sin H \,.\, \operatorname{tg}\varepsilon = i$$

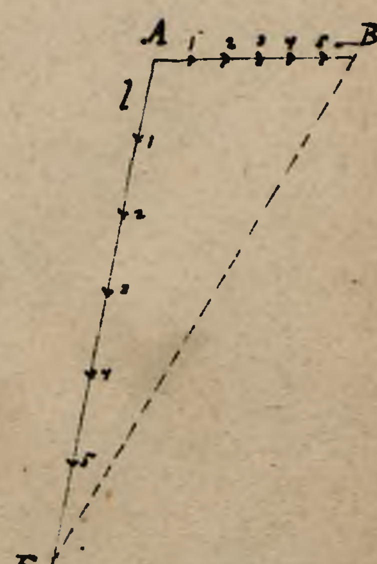
gdzie Θ jest długość słońca ε nachylenie ekliptyki.

Potem jest

$$\alpha'-\alpha = h \sin(H+\alpha)\sec\delta$$

$$\delta'-\delta = h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta$$

Oprócz Aberacyi gwiazd stałych, jest jeszcze przy planetach i Kometach tak zwana Aberacya planet, która powstaje przez własny ruch planet lub komet.



Przyjmijmy, że ziemia stoi stale w E. W czasie t znajduje się planeta w A i wysyła fale światła l. Nim ta do ziemi dojdzie, posunęło się ciało do B. Tymczasem widzimy go jeszcze w kierunku AE, gdy ono się w istocie w kierunku BE znajduje. Niech T będzie czasem drugiego spostrzeżenia, jako też ρ odległość A od E. Wtedy potrzebuje światło, jeżeli ρ będzie mierzone jednostką średnicy drogi ziemi

$$498^s 65 . \rho$$

by przyjść z B do E. Dlatego znajduje się planeta w A w czasie

$$T - 498^s 65 \rho$$

z czego wynika że:

$$t = T - 498^s 65 \rho \, .\; —$$

498^s65 jest czasem którego potrzebuje światło by przebyć średnicę drogi po której ziemia się porusza.

Zadaleko by nas to zaprowadziło, gdybyśmy chcieli wyprowadzać teoryę aberacyi, uwagę powyższe wydała się mi jednak konieczną dla zrozumienia zjawiska. —

Jeżeli redukujemy zmianę współrzędnych gwiazdy (wskutek samej precesyi i własnego ruchu gwiazd), podług pewnej epoki n.p. 1860,0 na inny rok n.p. 1896,0 to mówimy że zredukowany ad locum medium.

Dlatego mamy:

Reductio ad locum medium (średnie miejsce, mittlerer Ort)

$$\alpha_{t'} = \alpha_t + (t'-t)\left\{m + n\,tg\,\frac{\delta_t+\delta_{t'}}{2}\sin\frac{\alpha_{t'}+\alpha_t}{2}\right\} + \mu_\alpha(t'-t)$$

$$\delta_{t'} = \delta_t + (t'-t)\left\{n\cos\frac{\alpha_t+\alpha_{t'}}{2}\right\} + \mu_\delta(t'-t)$$

Są to dla odpowiedniego początku roku t' zredukowane spółrzędne $\alpha_{t'}$ i $\delta_{t'}$; średnie miejsce jest w ciągu roku w tej samej stałe. Abyśmy otrzymali miejsce pozorne to należy wziąć dla początku roku poprawkę z powodu precesyi i nutacyi, aberacyi jakoteż własnego ruchu gwiazdy.

Jeżeli więc od początku roku upłynęło τ dni, to będzie redukcya (na miejsce pozorne (reductio ad apparens):

Preces.
$$\alpha_t = \alpha_t + \mu_\alpha\frac{\tau}{365} + \frac{\tau}{365}\{m + n\,tg\,\delta\sin\alpha\}$$

Nut.
$$-15''83\sin\Omega + 6''86\sin\Omega\sin\alpha\,tg\,\delta + 9''22\cos\Omega\cos\alpha\,tg\,\delta$$
$$-1''26\sin 2\odot - 0''50\sin 2\odot\sin\alpha\,tg\,\delta +$$
$$0''50\cos 2\odot\cos\alpha\,tg\,\delta$$

Aber.
$$+h\sin(H+\alpha)\sec\delta$$

$$\delta_t = \delta_t + \mu_\delta\frac{\tau}{365} + \frac{\tau}{365}\,n\cos\alpha$$
$$-6''86\sin\Omega\cos\alpha + 9''22\cos\Omega\sin\alpha$$
$$-0''50\sin 2\odot\cos\alpha + 0''55\cos 2\odot\sin\alpha$$
$$+h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta$$

Możemy napisać

$$\alpha_t = \alpha_t + \mu\frac{\tau}{365} + \frac{\tau}{365}m - 15''83\sin\Omega - 1''16\sin 2\odot$$
$$+\left\{\sin\alpha\left\{\frac{\tau}{365}n - 6''86\sin\Omega - 0''50\sin 2\odot\right\}\right.$$
$$\left.+\cos\alpha\left\{9''22\cos\Omega + 0''55\cos 2\odot\right\}\right\}tg\,\delta$$
$$+h\sin(H+\alpha)\sec\delta$$

$$\delta_T = \delta_t + \mu\delta \frac{T}{365} +$$
$$\Big\{\sin\alpha \left\{9''22 \cos\Omega + 0''55 \cos 2\odot\right\}$$
$$+ \cos\alpha\left\{-6''86 \sin\Omega + \frac{T}{365} n - 0''50 \sin 2\odot\right\}\Big\} \operatorname{tg}\delta$$
$$+ h \cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta$$

i oznaczmy

$$\frac{T}{365} m - 15''83 \sin\Omega - 0''50 \sin 2\odot = f$$
$$\frac{T}{365} n - 6''86 \sin\Omega - 0''50 \sin 2\odot = g\cos G$$
$$9''22\cos\Omega + 0''55\cos 2\odot = g\sin G$$

to otrzymamy

$$\alpha_T = \alpha_{t'} + \mu_\alpha \frac{T}{365} + f + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta + h\sin(H+\alpha)\sec\delta$$
$$\delta_T = \delta_{t'} + \mu_\delta\frac{T}{365} + g\cos(G+\alpha) + h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta$$

Wartości f, g, h, i, G i α znajdujemy w efemerydach już wyrachowane.-

Przykład. α Andromedae:

locus Medius 1896.0 ; $\alpha = 0^h\ 3^m\ 0^s64$ $\delta = +28^\circ\ 30'\ 58''6$

locus Apparens t.j. miejsce pozorne dnia 30 Kwietnia 1896 r według Berliner Jahrb. strona 337. mamy:

$f = +21''98$

$\log g = 1.0963$ $G = 319^\circ 56'$ $\mu_\alpha = +0^s0095$

$\log h = 1.2901$ $H = 226^\circ\ 29'$ $\mu_\delta = -0''0156$

$\log(-i) = 0.7879$

Dalej jest

$0^h 3^m 0^s64 = 0^\circ\ 45'\ 9''6$ $H+\alpha = 227^\circ\ 14'$

i dnia 30/IV. $\frac{T}{365} = \frac{121}{365} = 0.33$ $G+\alpha = 320^\circ\ 41'$

$\sin(g+\alpha) =$	9.8018
$\log g$ -	1.0963
$\cos(g+\alpha)$	9.8885
$\log g\cos(g+\alpha)$	0.9848

$\lg\sin(H+\alpha)$	9.8657
$\log h$	1.2901
$\log\cos(H+\alpha)$	9.8319

$\log \sin\delta =$	9.6789	$\log\cos\delta$	$= 9.9438$	$\log\sec\delta$	0.0562
$\log h\cos(H+\alpha) =$	1.1220_n	$\log i$	$= 0.7879_n$	$\log h\sin(H+\alpha) =$	1.1558_n
	0.8009_n		0.7317_n		1.2120_n

$$g\sin(g+\alpha) = 0.8981_n$$
$$\operatorname{tg}\delta = 9.7350$$
$$\operatorname{tg}\delta\, g\sin(g+\alpha) = 0.6332_n$$

Dla tego mamy:

$$f = +21''98$$
$$\operatorname{tg}\delta\, g\sin(g+\alpha) = -4''30$$
$$h\sin(H+\alpha)\sec\delta = -16''29$$
$$+1''39$$

$$f + g\sin(g+\alpha) + h\sin(H+\alpha)\sec\delta =$$
$$= +0^s 09$$
$$\mu_\alpha \frac{T}{365} = +0.00$$
$$\alpha_0 = 0^h\, 3^m\, 0.64$$
$$\alpha = 0^h\, 3^m\, 0^s 73$$

$$g\cos(g+\alpha) = +9.66$$
$$h\cos(H+\alpha)\sin\delta = -6.32$$
$$i\cos\delta = -5.39$$

$$\Sigma \quad -2''05$$
$$\mu_\delta \frac{T}{365} \quad -0''00$$
$$\delta_0 \; +28 \quad 30 \quad 58.60$$
$$\delta = +28^\circ\, 30'\, 56''.5$$

Rok tablicowy: (annus fictus):

Rok tablicowy (annus fictus) służy w tym celu, by tablice wyrachowane na pewną epokę, służyły również na każdy okres czasu.
Rok tablicowy zaczynamy od chwili w której rektascenzya (α) słońca średniego wynosi

$$18^h\ 40^m = 280^\circ\ (-20''78)$$

To następuje co rok 1^{go} stycznia ale coraz na innym południku kuli ziemskiej, a to dlatego ~~a to dlatego~~ ponieważ rok zwrotny czyli cywilny ~~kalendarzowy~~ nie kończy się całkowitą liczbą 365 dni średnich, ale słońce po 365 dniach, jeszcze 5 godzin $48^m\ 46^s166$ biegnie by dojść do punktu równonocnego wiosennego i dopełnić roku zwrotnego. W przeciągu tych $5^h\ 48^m\ 46^s$ ziemia nietylko postępuje po ekliptyce, ale i nie przestaje obracać się około swej osi, wskutek czego się dzieje, że słońce dopełnia rektascenzyę $18^h 40^m$ na innym dopiero południku niż w roku poprzedzającym.
Jeżeli w pewnym roku słońce średnie wstępując na południk berliński miało

$$\alpha = 280^\circ = 14^h\ 20^m$$

tedy w następnym roku słońce będzie górować przed południkiem berlińskim gdzie będzie miało

$$\alpha = 280^\circ = 14^h\ 20^m$$

Dlatego przypadnie ~~południk~~ początek roku na inny południk, który różni się od berlińskiego 5 godzinami 48m 46s.
To miejsce jest blisko New-Yorku w Ameryce.
Dlatego więc roku będzie początek roku w czasie, gdy słońce będzie górowało w New Yorku.
Od tego czasu potrzebno zachować wartość T.
Początek tego roku (annus fictus) zowie się dla Bessela dies reductus.–
Dlatego znamy początek roku cywilnego dnia 31. grudnia o 12^h T

godzinie z rana, a początek roku zwrotnego (astronomicznego) w czasie gdy rektascensya słońca średniego wynosi 280° - (20"48)

Wyrażamy odległość południka na którym się zaczyna "annus fictus" od Paryża na wschód przez +k, a na zachód przez -k.

To otrzymamy K z następującej tabliczki:

1890	$+2^h$	23^m	$8^s.32$
1891	-3	25	38.96
1892	$+14$	15	33.30
1893	$+8$	56	46.30
1894	$+3$	7	59.48
1895	-2	40	47.99
1896	$+15$	30	24.77
1897	$+9$	41	37.52
1898	$+3$	52	50.21
1899	-1	55	57.23
1900	$+16$	15	16.57

Ogólnie mamy według Bessela dla epoki 1800+t

$$K = -2^h\,25^m\,32^s.598 + t.\,11^m\,12^s.18791 + t^2.\,0^s.002975 - f.\,6^h$$

f oznacza liczbę porządkową lat zwyczajnych następujących po przestępnym, tak, że np.

dla roku 1880 który jest przestępnym jest f = 0
" " 1881 jest f = 1
" " 1882 " f = 2
" " 1883 " f = 3
" " 1884 " f znowu = 0 ponieważ rok 1884 jest rokiem przestępnym.

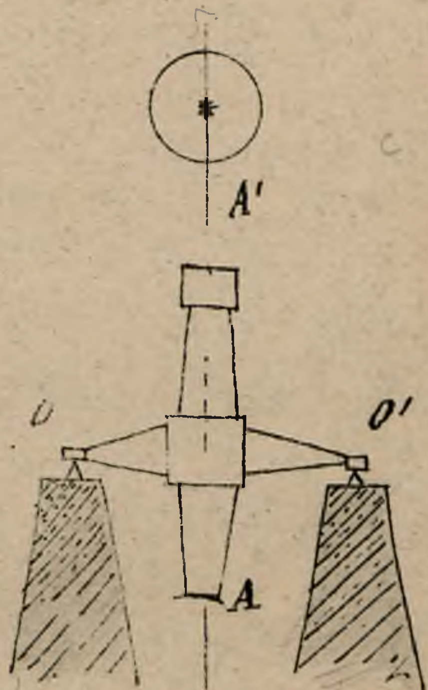
W Paryżu będzie nie początek roku tablicowego lub zwrotnego roku 1891 już

r. 1890 dnia 31 grudnia o $12^h - 3^h\,25^m\,39^s = 8^h\,34^m\,21^{sek}$ wieczorem

Luneta południkowa.

Pojęcia wstępne.

Oko nie jest w stanie oznaczyć kierunku linii, w której przypada południk danego miejsca; dlatego dla obserwacyj ustawia się stale lunetę, która jest ruchomą tylko około osi poziomej OO' a obracającą się około niej tak, że jej dłuższa oś AA' odpowiada zupełnie kierunkowi południka danego miejsca.



Luneta w ten sposób ustawiona zowie się lunetą południkową (meridianową): a służy do oznaczenia czasu.

Gdyż mamy równość:

$$\theta - \alpha = t$$

słowami: Czas gwiazdowy zmniejszony o rektascensyą gwiazdy równy jest kątowi godzinnemu

czyli $\theta = \alpha + t$

Jeżeli ~~...~~ $t = 0$ będzie $\theta = \alpha$.

Stosownie w południku (czyli dla górowania górnego) czas gwiazdowy równa się rektascensyi gwiazdy, a dla górowania dolnego

$$\theta = \alpha + 12^h$$

W ten sposób oznaczamy prawdziwy czas gwiazdowy a następnie potrzebny czas średni. Luneta południkowa ma w polu widzenia krzyż którego nitka pionowa (rzeczywista) przedstawia południk.

Obserwuje się o jakim czasie T pewna gwiazda, której rektascensyą α przechodzi przez nitkę. —

Jeżeli zegar chodzi podług czasu gwiazdowego to:

$$\Delta T = \alpha - T$$

daje poprawkę zegaru.

N.p.

Obserwujemy, że gwiazda α Aquarii, której deklinacya według Berl. Jahrb. jest 6go grudnia

$$\alpha = 22^h\, 16^m\, 16^s.84$$

przechodziła przez nitkę pionową (meridianową) w czasie

$$T = 22^h\, 15^m\, 10^s.76$$ (według zegaru obserwatora)

to $$\alpha - T = \Delta T = +1^m\, 6^s.08$$

daje poprawkę zegaru dnia 6go grudnia w czasie: $22^h\, 15^m\, 10^s.76$

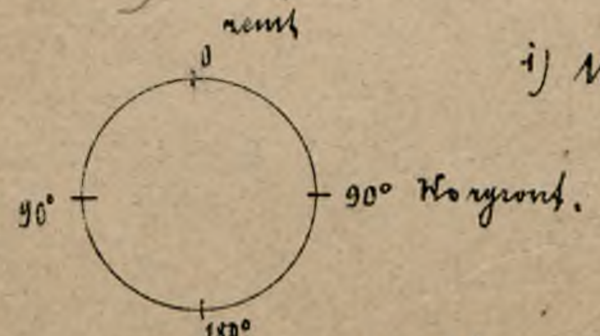
ΔT zowie się stanem zegaru (Uhrstand).

Jeżeli w podobny sposób znajdziemy poprawkę zegaru dnia następnego o tymże czasie:

$$\Delta T' = +1^m\, 8^s.24$$

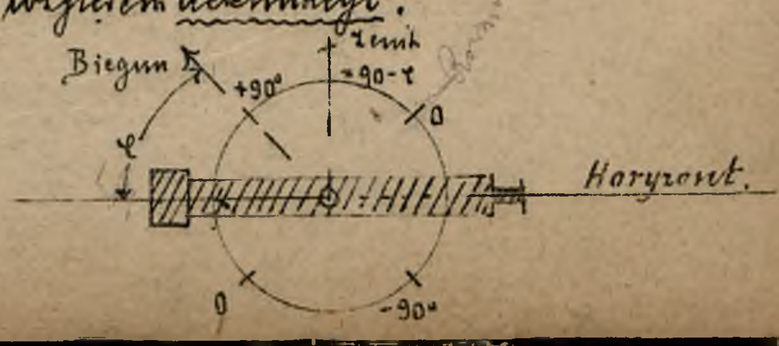
to nazwiemy $\Delta T' - \Delta T = +2.16$ chodem zegaru (Uhrgang).

Luneta południkowa ma koło podzielone na 360 równych części czyli stopni, których podział może być w dwojaki sposób umieszczony:



1) Ustawienie względem zenitu.

2) Ustawienie względem deklinacyi.



Dla tego mamy dwa sposoby ustawienia celowej na gwiazdę

1. względem poziomu (Horyzontu)
2. " deklinacyi

Odległość gwiazdy od równika zowie się **deklinacyą** i oznaczać będziemy przez δ.

Niech z oznacza zenitową odległość, to w południku

jeżeli $\delta = +$ i $\delta < \varphi$
jest $z + \delta = \varphi$ $\Big\}$ 1.)

a jeżeli $\delta = -$
$z - \delta = \varphi$ $\Big\}$ 2.)

Mamy tedy

$$\left.\begin{array}{l} z = \varphi - \delta \text{ jeżeli } \delta + \text{ i } \delta < \varphi \\ z = \varphi + \delta \quad " \quad \delta - \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1'.) \\ 2'.) \end{array}$$

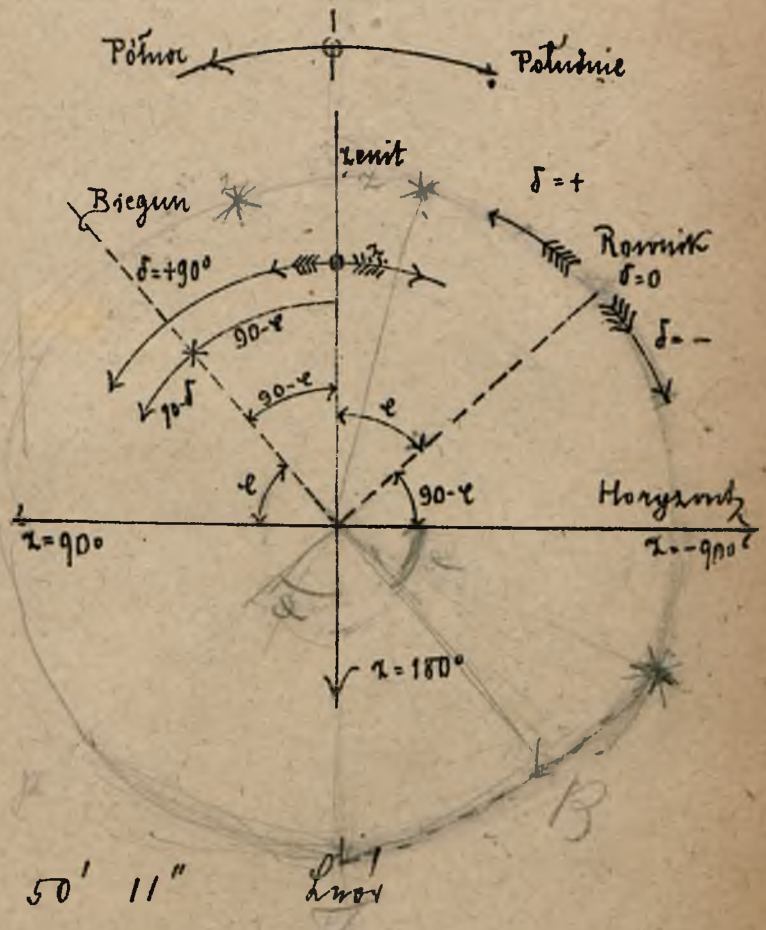
Dla górowania górnego a północnie

jeżeli $\left.\begin{array}{l}\delta > \varphi \\ z = \delta - \varphi\end{array}\right\}$ 3.)

Dla górowania dolnego mamy:

$$z = (90 - \varphi) + (90 - \delta)$$

albo $z = 180° - (\varphi + \delta)$ . . . 4.)



N. p.

a). Górowanie górne. $\varphi = +49° \ 50' \ 11''$

α Andromedae. $\delta = +28° \ 30' \ 39''$ dla równań 1.)

$$\begin{array}{rrrr} \varphi = & +49° & 50' & 11'' \\ \delta = & +28 & 30' & 39'' \\ \hline z = & 21° & 19 & 32 \end{array}$$

Ku południu

δ ceti. $\delta = -8° \ 43' \ 31''$ dla równania 2.

$$\begin{array}{rrrr} \varphi = & +49° & 50' & 11'' \\ \delta = & \mp 8° & 43 & 31 \\ \hline z = & 58 & 33 & 42 \end{array}$$

Ku południu

α. Ursae minoris (gwiazda biegunowa). $\delta = +88°\,44'\,53''$

$$\delta = +88°\;44'\;53''$$
$$\varphi = \pm 49°\;50'\;11''$$
$$z = 38\;\;54\;\;42$$

dla porownania 3.

ku północy

b.) Górowanie dolne.

α Ursae minoris.

$$\varphi = +49°\;50'\;11''$$
$$\delta = +88°\;44'\;53$$
$$180° = 180°$$
$$\varphi + \delta = 138°\;35'\;4''$$
$$z = 41\;\;24\;\;56$$

ku północy.

2. Ustawienie względem deklinacyi.

Przy ustawieniu dla deklinacyi odczytujemy sposób δ, co nie potrzebuje dalszych wyjaśnień.

× Teorya błędów lunety południkowej.

Dotąd przypuszczaliśmy, że luneta południkowa jest bez błędów (jest idealnie dobrą, co jednak nigdy nie jest.
Żaden instrument nie jest wolny od błędu, a zbliża się tylko mniej lub więcej do stanu idealnego dobrego.
Każda usterka od stanu idealnego ma wpływ na rezultat spostrzeżeń, dlatego musimy zastanowić się bliżej jakie pokaźne błędy mogą powstać przy lunecie południkowej.

Nim przystąpię do rzeczy wśród samej, wpierw jednego ważnego twierdzenia:

Niech będzie: $y = f(x + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots \Delta x_n)$
dowolną funkcyą wielkości x Δx_1; Δx_2 Δx_3 $\ldots$ Δx_n
i przyjmijmy, że rozwinięcie

$$y = f(x) + \Delta x_1 \frac{df}{\partial \Delta x_1} + \cdots\cdots + \Delta x_n \frac{df}{\partial \Delta x_n} + R$$

(gdzie R znaczy resztę szeregu rozwinięcia) jest możliwe i że można powiedzieć $R = 0$

to będzie w razie jeżeli $\Delta x_1 \ldots \Delta x_n$ uważamy błędy cząstkowe

$$\Delta F = \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$ sumą błędów.

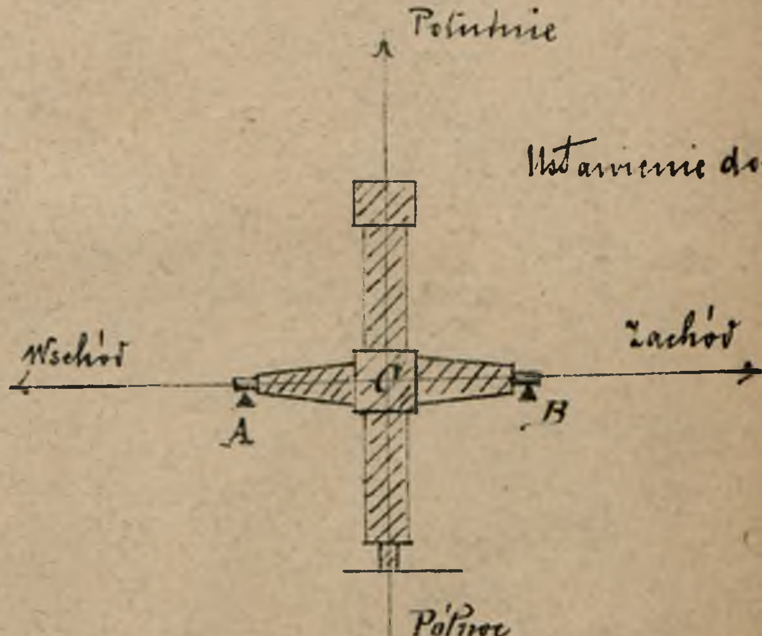
Jest więc $R=0$ to składa się ΔF ze sumy cząstkowych błędów.
Możemy więc każdy osobno wziąć pod rozwagę, następnie błędy cząstkowe zsumować i ostatecznie otrzymamy rezultat błędów.

Pod względem więc, że zawsze tylko jeden błąd istnieje możemy przeprowadzić teoryę błędów lunety południkowej w sposób następujący:

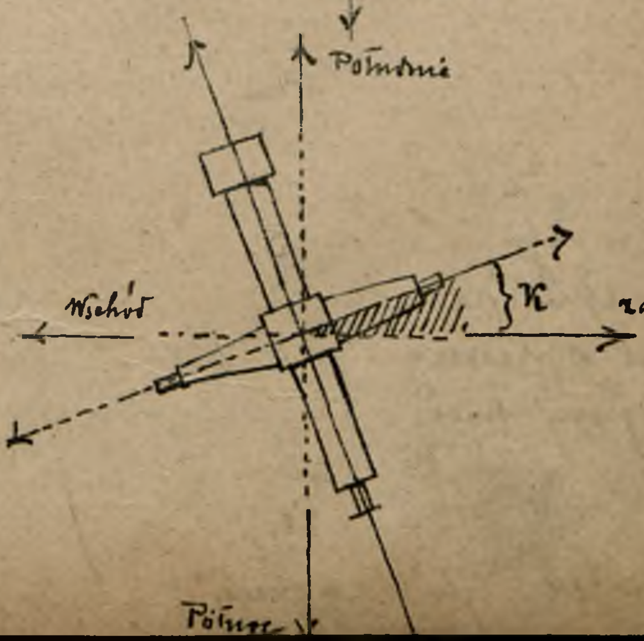
Błędy zachodzące przy lunecie południowej mogą być trojakie i noszą nazwę:

1. Azymutu
2. Kolimacyi
3. Pochylenia.

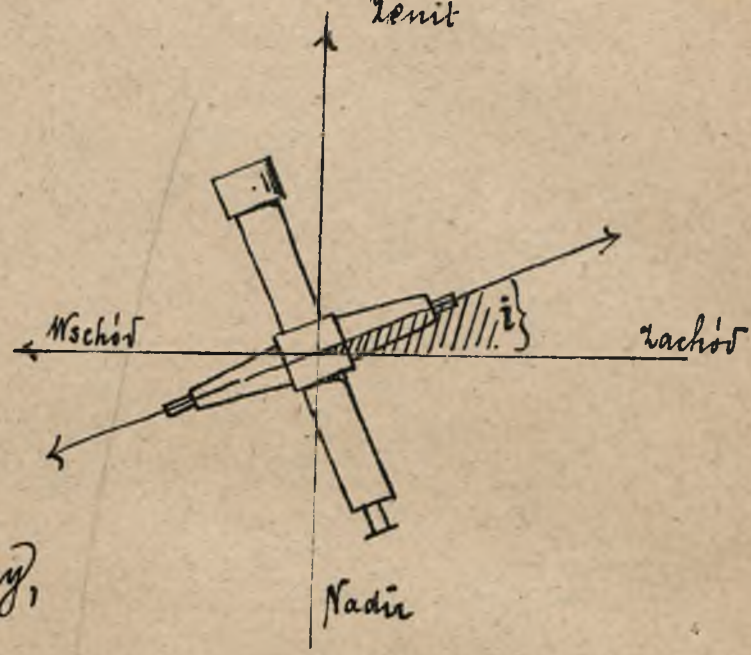
1. Oś obrotu lunety południkowej powinna leżeć dokładnie w kierun. linii ze wschodu na zachód. Odchyłka osi obrotu od kierun. linii „Wschód-Zachód" zowie się azymutem lunety i oznaczamy literą K.



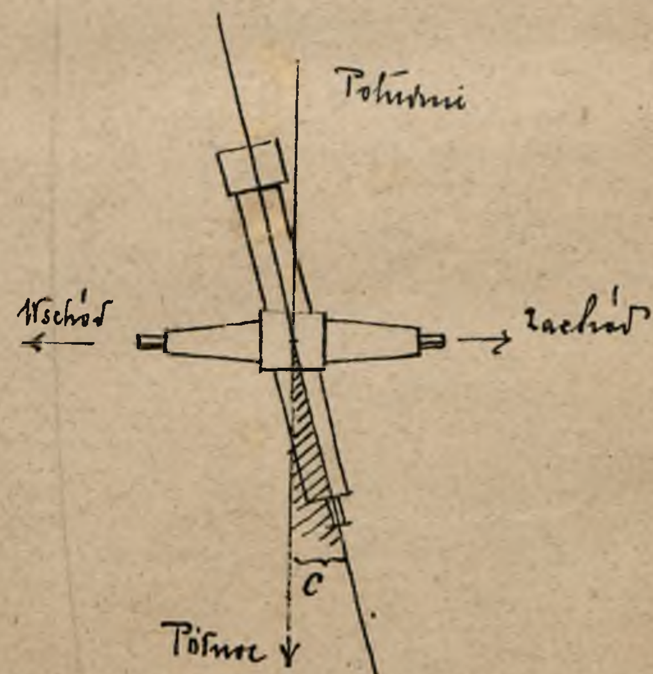
Nawet gdybyśmy początkowo ustawili instrument dokładnie w płaszczyźnie południka to przecież z czasem wyjdzie on z tego położenia albo z powodu ruchów bądź to periodycznych bądź przypadkowych jakim podlegają filary na których instrumenty umieszczone.



2.) Oś obrotu lunety południkowej powinna leżeć dokładnie w płaszczyźnie poziomej.
Odchylenie od płaszczyzny poziomej nazywa się: pochyleniem osi lunety i oznaczać będziemy literą i.
To cośmy wyżej powiedzieli przy Azymucie (ruch filarów), odnosi się i do pochylenia. Błąd z powodu pochylenia jest najczęstszy, i najbardziej zmienny.—



3.) Dokładnie musi oś optyczna lunety, stać prostopadle do osi obrotu lunety.—
Jeżeli tak nie jest powstaje błąd zwany błędem kolimacyi i oznaczać go będziemy literą c.
Błąd kolimacyi jest zazwyczaj stały, ale podlega także małym zmianom.—

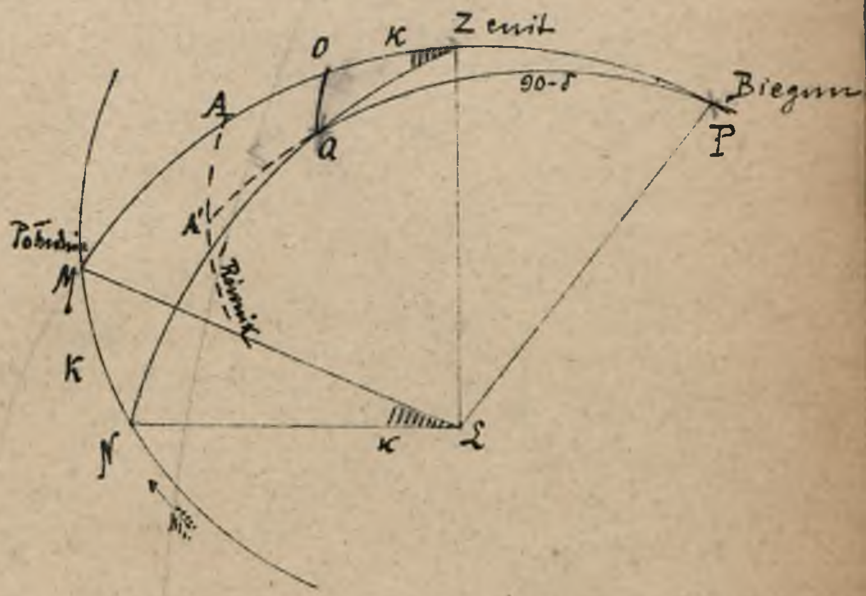


Jeżeli oś ~~optyczna~~ obrotu lunety południkowej nie leży dokładnie w kierunku ze wschodu na zachód to nitka pionowa w lunecie nie jest w płaszczyźnie południka danego miejsca.
Nazwijmy przez:

P... biegun,
Z... zenit

a tak PZM wykreślony przez punkty P, Z południkiem.—

Wyobraźmy sobie dalej że oś optyczna lunety południkowej przedłużona do spotkania się ze sklepieniem nieba trafi poziom w punkcie N, to kąt $MLN = K$ będzie azymutem lunety.



Luneta ruchoma około osi obrotu opisuje w takim razie łuk ZN zamiast łuku ZM. Gwiazda Q, której deklinacya jest δ, przechodzi przez nitkę nie w czasie gwiazdowym α ale w czasie

$$\alpha - OQ$$

jeżeli punkt N leży na wschód a w czasie

$$\alpha + OQ$$

jeżeli punkt N leży na zachód. Przytem rozumiemy OQ wyrażone w czasie gwiazdowym.

W sferycznym trójkącie OQZ mamy

łuk $OZ = z$

kąt $\overline{OZQ} = K$

" $ZOQ = 90^\circ$

wtedy $\operatorname{tg} \overline{OQ} = \operatorname{tg} k \cdot \sin z$ .... 5.)

Dalej jest w sferycznym trójkącie OPQ

łuk $PQ = 90 - \delta$

a dla tego $\sin \overline{OQ} = \sin \overline{OPQ} \cdot \cos \delta$ .... 6.)

W równaniach 5) 6) są OQ, K, OPQ małe wielkości, można tedy wstawić:

$$\operatorname{tg}. \overline{OQ} = \overline{OQ}, \quad \operatorname{tg} K = K$$

$$\sin \overline{OQ} = \overline{OQ}, \quad \sin \overline{OPQ} = \overline{OPQ}$$

z czego otrzymamy:

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = OQ \\ A = OPQ \\ c = 90 - \delta \end{array}\right\} \text{ad } 6.)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = K \\ a = OQ \end{array}\right\} \text{ad } 5.)$$

$$OQ = K \sin z$$

$$OQ = \widehat{OPQ} \cdot \cos\delta$$

i dalej $\widehat{OPQ} \cdot \cos\delta = K \sin z$

albo $\widehat{OPQ} = K \dfrac{\sin z}{\cos\delta}$ . . . . . . 7.)

Jeżeli gwiazda, której deklinacya jest δ a rektascensya α przechodzi przez nitkę lunety (meridianowej) południkowej to mamy równanie:

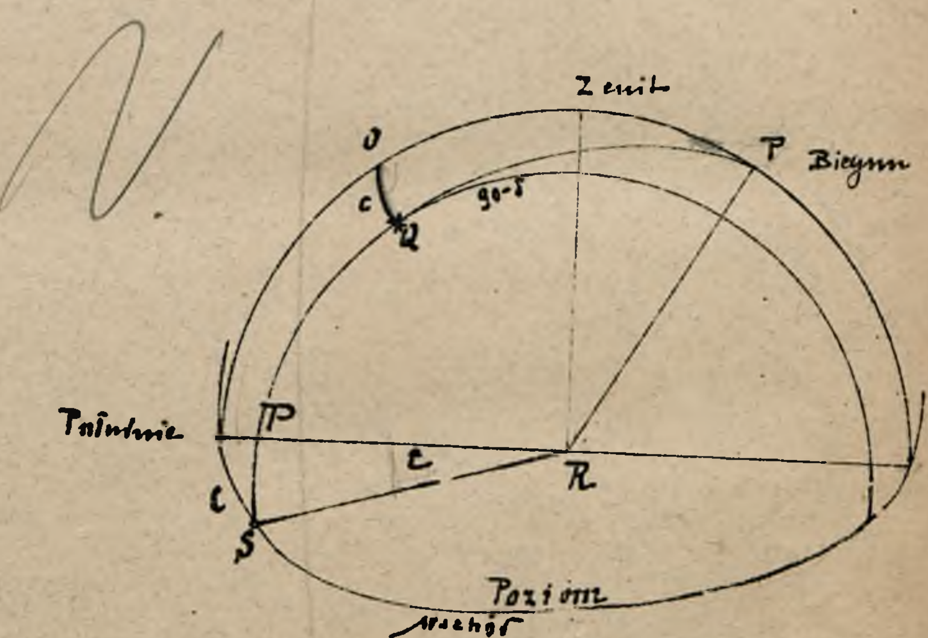
$$T = \alpha - K \frac{\sin z}{\cos\delta} \qquad 7.'$$

przyjmując że punkt N leży na zachód

i dalej $T = \alpha + K \dfrac{\sin z}{\cos\delta}$ ... jeżeli punkt N leży na wschód. — 7.''

Kolimacya.

Jeżeli oś optyczna lunety południkowej nie stoi dokładnie prostopadle na osi obrotu lunety, to luneta przy obrocie, nie odpowiada kierunkowi południka tylko kołu, które jest równoległe do południka i odległe od tegoż o wielkość kolimacyi c.



Niech Z oznacza zenit

P biegun

$c = PRS$. wielkość kolimacyi, to mamy z sferycznym trójkącie OPQ, (jeżeli Q jest miejscem gwiazdy przechodzącej przez nitkę w lunecie):

łuk $OQ = c$, łuk $QP = 90 - \delta$ $\measuredangle POQ = 90°$

a stąd $OPQ = \dfrac{\sin OQ}{\sin PQ} = \dfrac{\sin OQ}{\sin 90-\delta}$

albo

$\sin OPQ = \dfrac{\sin c}{\cos\delta}$; OPQ i c są małe wielkości można tedy ustawić

$$OPQ = \frac{c}{\cos\delta} \qquad 8.)$$

Dla tego mamy, jeśli gwiazda, (której deklinacya jest δ i której rektascensya jest α) przechodzi przez nitkę lunety południkowej która ma kolimacyę c w czasie T

równanie $T = \alpha - \frac{c}{\cos\delta}$ przyjmując że punkt S leży na wsch'ie . . . 8')

i $T = \alpha + \frac{c}{\cos\delta}$ " " " S " " zachodzie . . . 8'')

Pochylenie.

Przyjmujmy obecnie, że oś obrotu lunety południkowej jest do horyzontu pod kątem i nachylona.

Luneta południkowa obracając się około pochylonej osi obrotu odpowiada łukowi AB, który przecina południk pod kątem i.

W trójkącie sferycznym AOQ

mamy AO prawie $= 90 - z$

możemy napisać równanie:

$tg\, OQ = tg\, OAQ \cdot \sin OA =$

$= tg\, OAQ \sin(90 - z)$

albo $tg.\, OQ = tg\, i \cdot \cos z$.

i dalej z trójkąta OQP

$\sin OQ = \sin OPQ \cdot \cos\delta$

Ponieważ OQ, OPQ, i

są małe wielkości tak

że możemy założyć:

$OQ = i \cos z$

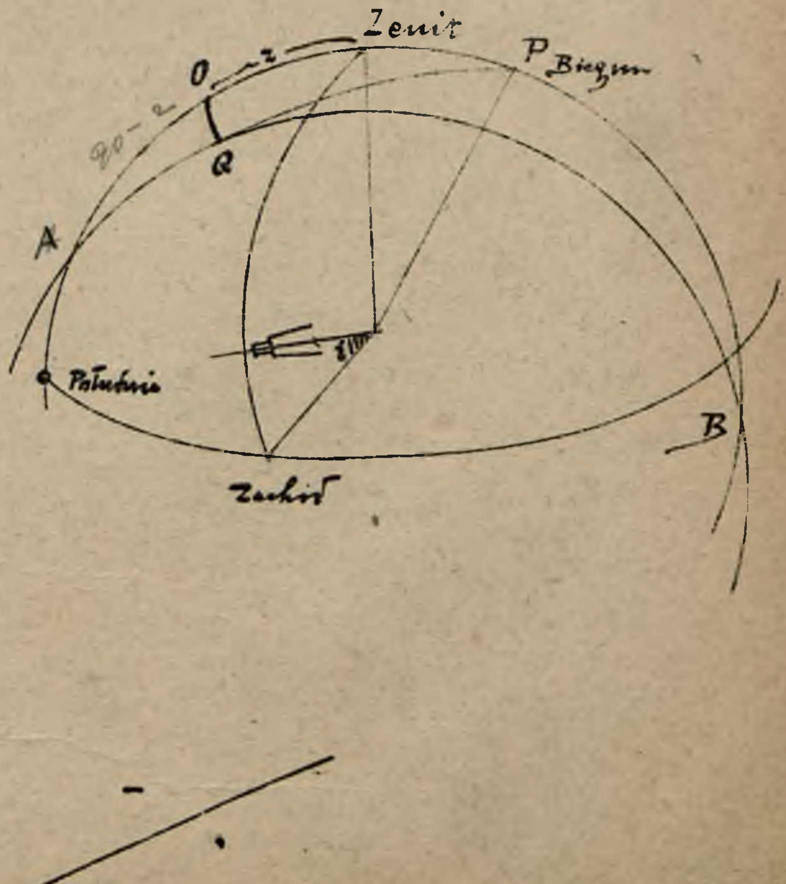
$OPQ = \frac{OQ}{\cos\delta}$

albo $OPQ = i\, \frac{\cos z}{\cos\delta}$ . . . 9)

Dalej mamy

$T = \alpha - i\, \frac{\cos z}{\cos\delta}$ . . . 9')

$T = \alpha + i\, \frac{\cos z}{\cos\delta}$ . . . 9'')



Zbieramy to (wszystko) cośmy poprzej omawiali to okaże się:

$$\alpha = T + \Delta T + i\,\frac{\cos z}{\cos\delta} + K\,\frac{\sin z}{\cos\delta} + c\sec z \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10.$$

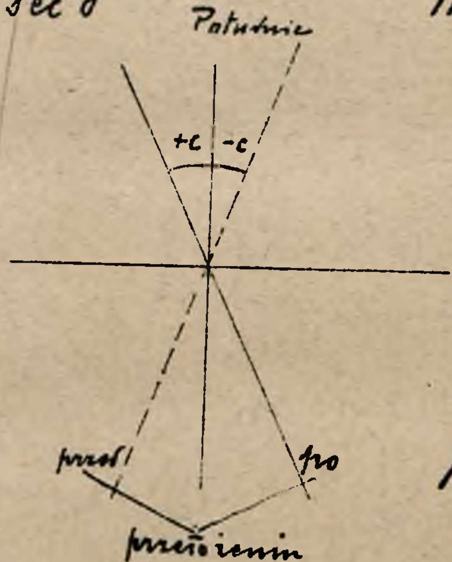
gdzie
- α : znaczy rektascensya gwiazdy
- T : czas na zegarze
- ΔT : stan zegaru
- i : Pochylenie
- K : Azymut } lunety południkowej
- C : Kolimacya
- z : odległość zenitową
- δ : deklinacya } gwiazdy.

przez przełożenie lunety usuwają się te błędy

Możemy napisać

$$\Delta T = \alpha - T - i\,\frac{\cos z}{\cos\delta} - K\,\frac{\sin z}{\cos\delta} - c\sec\delta \quad 11.$$

Przełóżmy instrument to nie zmieni się K tylko $\left.\begin{matrix} c \\ i \end{matrix}\right\}$ zmieni się w $\left.\begin{matrix} -c \\ i' \end{matrix}\right\}$ ołóż to ~~nowe~~ położenie przedstawi się jak widać na figurze →

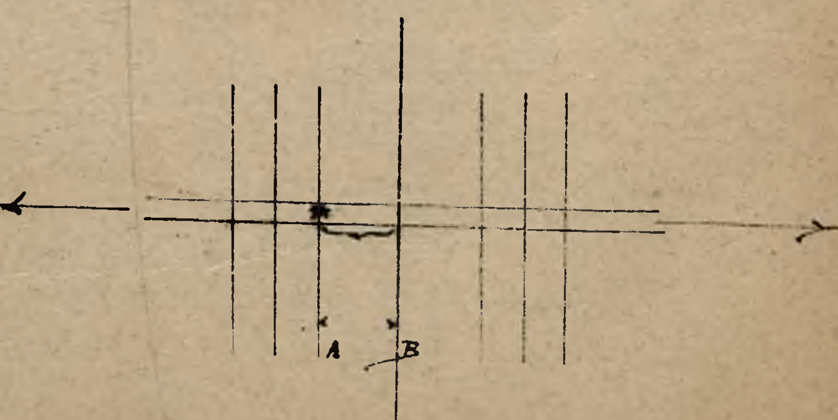


a dla tego:

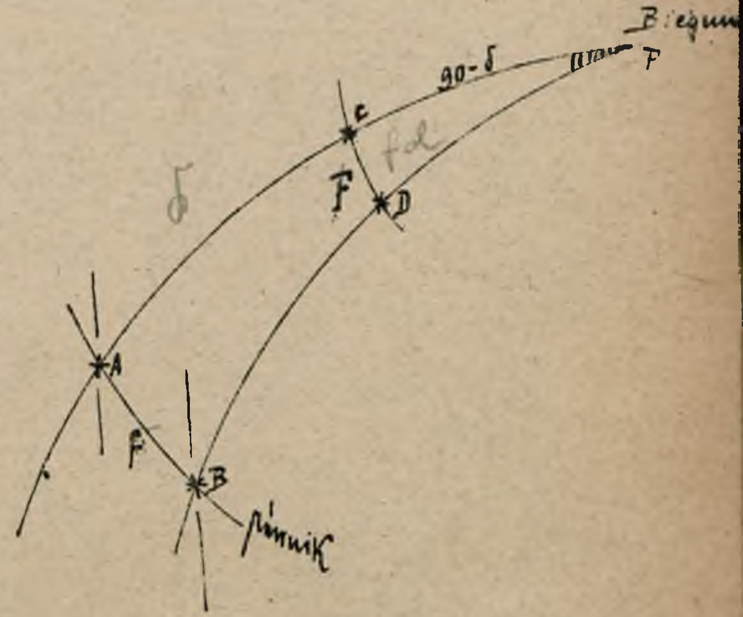
$$\Delta T' = \alpha - T' - i'\,\frac{\cos z}{\cos\delta} - K\,\frac{\sin z}{\cos\delta} + C\sec\delta \ldots\ldots \quad 12.$$

Pole widzenia lunety południkowej

Luneta południkowa ma w polu widzenia kilka nitek. Nitka pionowa w środku pola zowie się „nitką średnią". Oddalenie pewnej nitki od nitki średniej wyrażone w czasie gwiazdowym nazywa się „odległością nitek" „Fadendistanz"



Ruch gwiazd tem jest powolniejszy im gwiazdy są bliżej bieguna.
Dlatego przebiega gwiazda w równiku nieba się znajdująca odległość dwu nitek AB w krótszym czasie aniżeli gwiazda znajdująca się bliżej bieguna.



Oznaczmy przez f, drogę, którą opisuje gwiazda znajdująca się na równiku w czasie gwiazdowym <u>t</u>.
Inna gwiazda, której deklinacya <u>δ</u> w tymże czasie <u>t</u> opisuje drogę <u>f_δ</u>
Mamy równanie

$$\sin f_\delta = \sin F \sec\delta \qquad \ldots \qquad 13.)$$

albo jeżeli f i F są małe wielkości

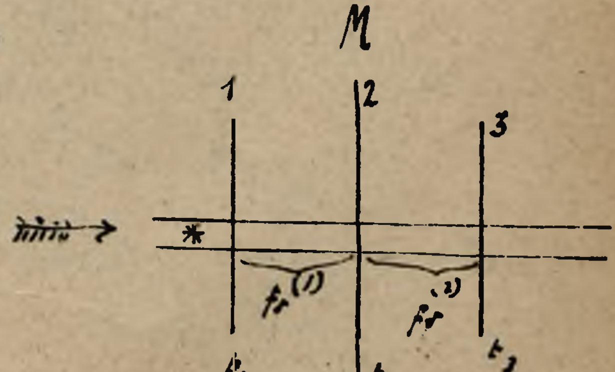
$$f_\delta = F \sec\delta \qquad \ldots. \qquad 14.)$$

Jeżeli tedy gwiazda w równiku się znajdująca potrzebowała F sekund by przejść przez dwie nitki to gwiazda, której deklinacya <u>δ</u>, potrzebuje f_δ sekund czasu gwiazdowego.
Zwyczajnie zamiast na jednej nitce obserwujemy czas przejścia gwiazd przez kilka nitek i ten <u>redukujemy na nitkę średnią.</u>
Niech więc będą 3 nitki to mamy jeżeli

$$t_1,\ t_2,\ t_3,$$

oznaczają czasy przejścia przez nitki

1, 2, 3



a jeżeli nitka 2 jest środkowa, to

$$t_1 = t_2' - f_\delta^{(1)}$$
$$t_2 = t_2''$$
$$t_3 = t_2''' + f_\delta^{(3)}$$

albo

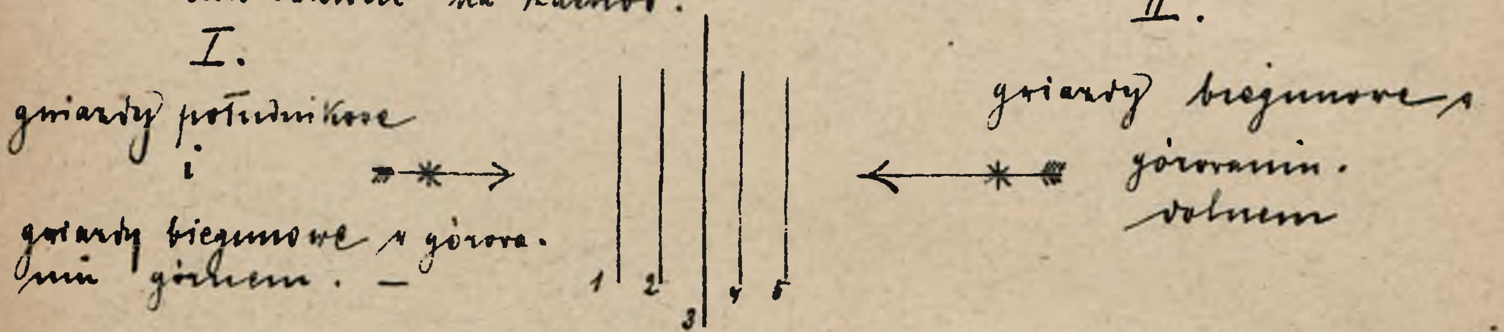
$$t_2' = t_1 + f_\delta^{(1)}$$
$$t_2'' = t_2$$
$$t_2''' = t_3 - f_\delta^{(3)}$$

i stąd $T = \frac{1}{3}(t_2' + t_2'' + t_2''')$ gdzie T jest czas przejścia przez nitkę środkową.

Porządek nitek ~~jest następujący~~; to znaczy sposób jak rozmaite gwiazdy według tego (jak ustawiony jest instrument) (prawidłowy czy nie) przez nitki oznaczone 1, 2, 3, 4, 5 przechodzą, przedstawia następujący schemat:

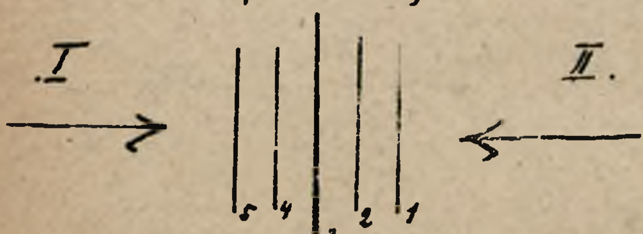
a) Luneta prosta.

1. Koło podzielone na zachód.



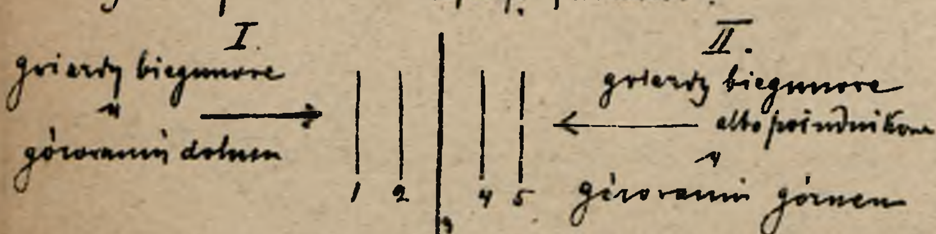
to znaczy gwiazda południowa t.j. gwiazda na południe od zenitu się znajdująca przechodzi w kierunku strzałki przez siatkę.

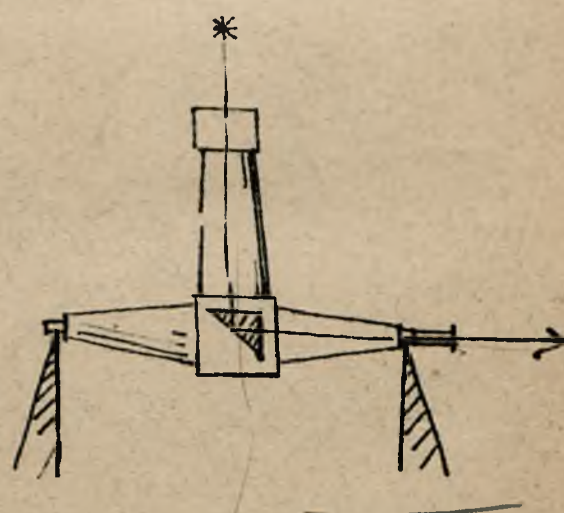
2) Koło z podziałką na wschód. (prawidłowy instr.)



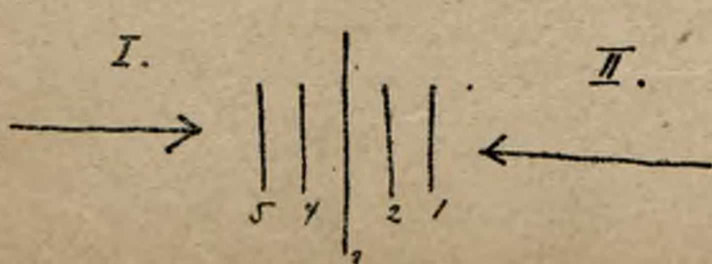
b.) Luneta łamana.

1). Koło podzielone znajduje się na zachód.





2). Koło podzielone na wschód (czyli luneta przełożona).



Wielkość F t.j. czas jakiego potrzebuje gwiazda mająca deklinacyę $\delta = 0$ by przejść przez dwie nitki wyznaczone się naprzeciwcę gwiazd biegunowych.

Przykład: I. Wyznaczenie odległości nitek.

Universal Ertel — 18$^{\text{e}}$ marca 1896. — Lwów Obserwatoryum

*51 Hev. Cephei.

Nitka	Czas obserwacyi			Redukcya na nitkę średnią			
4.	6^h	45	43.0	$+5^m$	23.3	=	F_4
5.		47	4.0	+4	2.3	=	F_5
6.		48	20.8	+2	45.5	=	F_6
Średnia		51	6.3	0	0		
8		53	51.0	−2	47.7	=	F_8
9		55	12.0	−4	5.7	=	F_9
10		56	26.0	−5	19.7	=	F_{10}

Deklinacya gwiazdy wynosiła według Berl. Jahrb.

$$\delta = +87^\circ\ 13'\ 3''17$$

Według formuły $\sin f = \sin F \cos\delta$ otrzymamy

$f_4 = +15^s594$ $\quad f_8 = -7^s,996$

$f_5 = +11^s.763$ $\quad f_9 = -11^s,458$

$f_6 = +8^s.034$ $\quad f_{10} = -15^s,520$

Jeżeli my z ten sposób wielkości f oznaczymy, możemy natychmiast każde spostrzeżenie na nitkę średnią zredukować.

Przykład II. Redukcya na nitkę średnią.

Universal Ertel — 2 czerwca 1896. — Obserwatoryum Lwów

τ Virginis OC. KO. $\delta = +2^\circ\ 2'\ 35.''7$

Nitka	Czas obserwacyi			Redukcya na nitkę środkową			
4	13^h	56^m	$52^s,0$	$f_4 = +15.70$	13^h	57^m	$7^s.70$
5			53.9	$f_5 = +11.77$			7.67
6			59.6	$f_6 = +8.04$			7.64
Średnia		57^m	7.6	—			7.60
8			15.6	$f_8 = -8.00$			7.60
9			19.7	$f_9 = -11.97$			7.73
10			23.3	$f_{10} = -15.53$			7.70

Tu rachujemy

$$F = f \sec\delta.$$

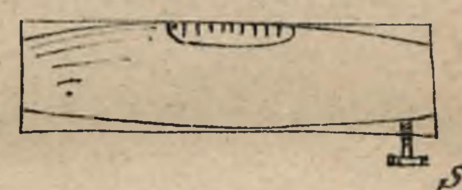
$\sec\delta = 0.00027$	$\log F$
$\log f_4 = 1.19573$	$1.19600 = F_4$
$f_5 = 1.07052$	$1.07079 = F_5$

$\sec\delta = 0.00027$	$\log F$
$\log f_8 = 0.90287$	$0.90314 = F_8$

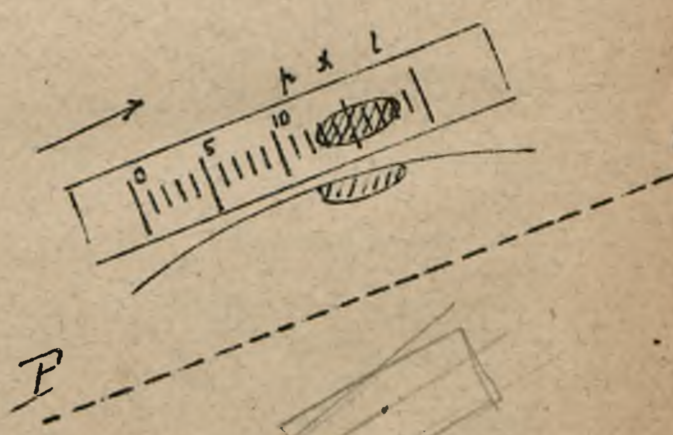
Libela — wyznaczenie pochylenia.

Główną częścią libeli jest walec dęty, którego wewnętrzne ścianie są powierzchnią, powstałą przez obrót bardzo płaskiego łuku około osi równoległej do cięciwy łuku, która to oś nazywa się osią libeli. Jeżeli libela powstaje niejako przez zgięcie rury szklanej to zowie się prostą, jeżeli jej ścianie (wewnętrzne wydrążenia) tworzą powierzchnię obrotową zowiemy libelą Rewersyjną (Reversionslibelle). –

Na powierzchni walca wykreślone są podziały. Wnętrze cylindra wypełnione jest eterem spirytusu lub eterem nafty, lecz nie całkowicie tak że powstaje bańka, której środek (według prawa ciążenia) zajmować musi zawsze najwyższe miejsce.



Oś libeli da się zapomocą śrubki (pionowej) S podnieść lub zniżyć, oprócz tej śrubki są jeszcze dwie (poziome), sobie przeciwległe, które dozwalają zmienić położenie osi libeli w płaszczyźnie poziomej.



Przedstawmy sobie teraz płaszczyznę PQ i połóżmy libelę na tej płaszczyźnie, to środek bańki zajmie pewne położenie odpowiadające jakiemuś punktowi x podziałki, który oznaczymy, odczytawszy ilość kresek l i p od punktu zerowego. Tak że mamy

$$J = \frac{1}{2}(l-p).$$

jeżeli punkt zerowy leży po lewej stronie odczytów (z tej strony) (l)

Przypuśćmy dalej że oś libeli i oś cylindra, w którym libela się mieści są ku sobie nachylone pod kątem β, a że podstawa libeli jest nachylona do poziomu pod kątem α to otrzymamy kąt nachylenia osi libeli do poziomu:

$$J = \alpha \pm \beta.$$

Po przełożeniu libeli o 180° otrzymamy:

$$J' = \beta \mp \alpha$$

więc $\alpha = \frac{1}{2}(J - J')$

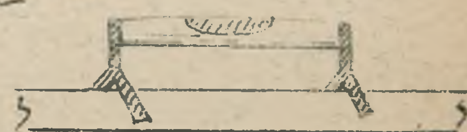
Jeżeli w ten sposób oznaczymy kąt α, to znajomość kąta β jest niepotrzebna.

Wartość kątowa μ'' odstępu dwu kresek wyznacza się jak z Geodezyi niższej wiadomo. Jak:

$$\alpha'' = \tfrac{1}{2}\mu''(J - J') \qquad \text{19.)}$$

Rozróżniamy libele nasadkowe (Aufsatzlibellen) i dźwigarkowe (Hängelibellen). Uważnem jest nadmieniać że libellę chronić należy od jednostronnego ogrzania.

nasadkowa.



dźwigarkowa.

Przykład.

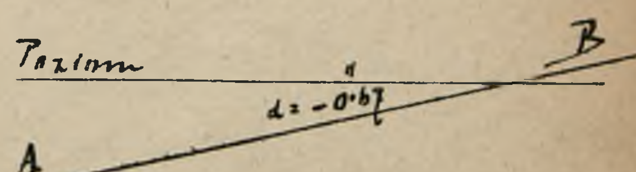
Libella instrumentu uniwersalnego obserwatoryum c.k. szkoły Politechn. ma wartość kątową

$$\mu = 1''5$$

	w prawo	w lewo	
AB	15.9	11.0	wtedy $i = 13.5$
a po przełożeniu	12.0	16.8	$i' = 14.4$

Z tego mamy $\alpha'' = \tfrac{1}{2}(-14.4 + 13.5) \cdot 1''5 = -0''67$

A więc oś obrotu była nachylona w prawo pod kątem $0''67$ do poziomu.



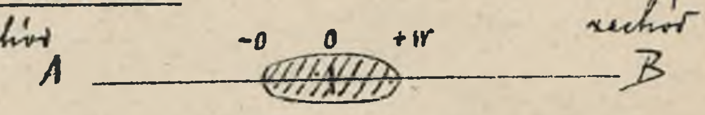
Podziałka na libelli może być dwojako umieszczona albo w jej środku albo zero podziałki znajduje się na jednym końcu.

Obecnie mamy w kwestii potrzebnikowej, jeżeli i oznacza nachylenie osi obrotu i jeżeli i jest dodatnie

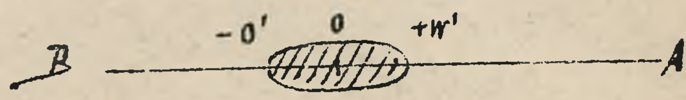
$$i'' = \frac{\mu''}{4}\left\{(w+o)+(w'+o')\right\} \qquad \text{20.)}$$

A.) Jeżeli punkt zerowy jest w środku

1. Położenie AB $\left\{ \begin{array}{l} w = +(w) \\ 0 = -(0) \end{array} \right\}$

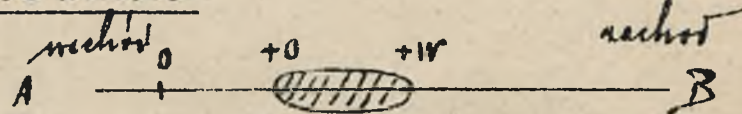


2. Położenie BA $\left\{ \begin{array}{l} w' = +(w') \\ 0' = -(0') \end{array} \right\}$



B.) Jeżeli punkt zerowy jest na końcu

1. Położenie (zero na wschodzie) AB $\left\{ \begin{array}{l} w = +(w) \\ 0 = +(0) \end{array} \right\}$



2/ Położenie zero na zachodzie BA $\left\{ \begin{array}{l} w' = -(w') \\ 0' = -(0') \end{array} \right\}$

Przytem oznacza (w) odczyt po stronie zachodu
(0) " " " wschodu

a dosyć dla poprzedniego przykładu:

1. Położenie	Zachód	Wschód	
	15.9 (w)	11.1 (0)	← zero |
2. Położenie | zero →	12.0 (w')	16.8 (0')	

$$w = +15.9 \qquad 0' = -16.8$$
$$0 = +11.1 \qquad w' = -12.0 \quad \Big\} \ \mu = 1''5$$

$$i = \frac{1''5}{4}\left\{+15.9 + 11.1 - 16.8 - 12.0\right\} = -0''68$$

Wyznaczenie kolimacyi

Według ogólnych formuł mamy

$$\Delta T = \alpha - T - i\,\frac{\cos z}{\cos\delta} - k\,\frac{\sin z}{\cos\delta} - c\sec\delta$$

a jeżeli instrument przełożymy

$$\Delta T = \alpha - T' + i'\,\frac{\cos z}{\cos\delta} - k\,\frac{\sin z}{\cos\delta} + c\sec\delta$$

stąd będzie $T' - T = -2c\sec\delta - (i' - i)\cos z\sec\delta$

albo $c = \tfrac{1}{2}(T - T')\cos\delta + \tfrac{1}{2}(i - i')\cos z$ 21.)

obserwujemy przejście pewnej gwiazdy biegunowej przez średnią nitkę, i następnie przekładamy lunetę i obserwujemy przejście znowu przez tę samą nitkę. Naturalnie nie zawsze to będzie możliwe, dlatego potrzeba zredukować na nitkę średnią spostrzeżenia wykonane na innych nitkach. Przed i po przełożeniu instrumentu musi być naturalnie nachylenie wyznaczone.

Wyznaczenie stanu zegaru Δt i azymutu.

Podaliśmy powyżej sposoby oznaczenia ilości: T, c i i; pozostałe ilości Δt i K wyrachujemy obserwując jedną gwiazdę której deklinacya jest mała, i jedną gwiazdę biegunową. – to mamy

$$\left.\begin{aligned} \Delta T + K\frac{\sin z}{\cos\delta} &= M \\ \Delta T + K\frac{\sin z'}{\cos\delta'} &= M' \end{aligned}\right\} \qquad 22.)$$

gdzie
$$M = \alpha - T - i\frac{\cos z}{\cos\delta} - c\sec\delta$$
$$M' = \alpha' - T' - i'\frac{\cos z'}{\cos\delta} - c\sec\delta'$$

a z dwóch lub więcej równań oznaczamy potem Δt i K. Nachylenie wyznaczamy w znany sposób z odczytów na libeli.

Wyznaczenie czasu z postrzeżeń wysokości gwiazd.

Nie zawsze mamy lunetę południkową do oznaczenia czasu. Często mamy tylko teodolit lub sextans. – Za pomocą tych możemy wyznaczyć odległość zenitową z a jeżeli znamy szerokość geograficzną miejsca obserwacyi oraz deklinacyę gwiazdy, którą obserwujemy, to mamy tem samem wszystko co do rachunku jest potrzebnem. — Według znanych formuł ogólnych mamy:

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$

i stąd
$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta} \qquad 1.)$$

Dla tego będzie:

$$1-\cos t = \frac{\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta - \cos z}{\cos\varphi\cos\delta}$$

$$1+\cos t = \frac{\cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta + \cos z}{\cos\varphi\cos\delta}$$

lub

$$\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \frac{\cos(\varphi-\delta) - \cos z}{\cos(\varphi+\delta) + \cos z}$$

ale

$$\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = tg^2\frac{t}{2}$$

$$\frac{\cos(\varphi-\delta)-\cos z}{\cos(\varphi+\delta)+\cos z} = -\frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta+z)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta-z)}{2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta+z)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)}$$

albowiem mamy dł. ogólnych formuł:

$$\cos m + \cos n = 2\cos\tfrac{1}{2}(m+n)\cos\tfrac{1}{2}(m-n)$$
$$\cos m - \cos n = -2\sin\tfrac{1}{2}(m+n)\sin\tfrac{1}{2}(m-n)$$

Przyjmijmy że:

$$m = \varphi-\delta \quad \text{lub } \varphi+\delta$$
$$n = z$$

to otrzymamy równanie powyżej przytoczone.

Wstawmy: $\varphi+\delta+z = 2s$

to będzie:

$$\varphi+\delta-z = 2(s-z)$$
$$\varphi-\delta+z = 2(s-\delta)$$
$$\varphi-\delta-z = -2(s-\varphi)$$

i dla tego:

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta+z)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta-z)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta+z)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)} = \frac{\sin(s-\delta)\sin(s-\varphi)}{\cos s\cos(s-z)}$$

tak że będzie:

$$tg\,\tfrac{1}{2}t = \pm\sqrt{\frac{\sin(s-\delta)\sin(s-\varphi)}{\cos s\cos(s-z)}} \quad \ldots\ldots \quad 2.)$$

Przykład

25 Sierpnia 1851. r. obserwowano we Wiedniu o czasie (Uhrzeit) $u = 21^h\,5^m\,24^s.0$ odległość zenitową górnej krawędzi słońca $z = 51^\circ\,23'\,36''.4$. — Stan przyrządów ombrometrycznych był następujący: Barom: 333.6 Par. Lin.; Inn. Therm. $+18^\circ.5$ R; Auss. Therm. $+19^\circ.6$ R. Wysokość bieguna (Polhöhe) miejsca obserwacyi $\varphi = 48^\circ\,11'\,43''.6$. Przy tlinanu stan chronometru idącego podług czasu średniego $= -15^s$.

Używszy do zamiany „Berl. astr. Jahrb." to otrzymamy w przybliżeniu $21^h 5^m 24^s - 15^s = 21^h 5^m 9^s$ jako przybliżony wiedeński średni czas (Mittlere Zeit) obserwacyi, który, ze względu że Berlin leży $11^m 56^s$ na zachód od Wiednia odpowiada berlińskiemu czasowi średniemu $20^h 53^m 13^s$. Ten czas musimy ale, ponieważ Berl. Jahrb. współrzędne równikowe (Aequatorial-Coordinaten) słońca, jakoteż równanie czasu (Zeitgleichung) w prawdziwe południe berlińskie podaje, zamienić na czas prawdziwy (Wahre Zeit). – Równanie czasu dla najbliższego prawdziwego południa mamy (Aug 22) $+2^m 48^s$, mamy tem samem odpowiedni przybliżony czas prawdziwy berliński $20^h 50^m 25^s$.

Z tego otrzymamy przez interpolacyę, [przyczem jeżeli rachunek ma być ściśle przeprowadzony jeszcze różnice 2go rzędu (die 2ten Differenzen) uwzględnić należy], następujące równanie czasu:

(Zeitgleichung) $= M.Zt - W.Zt = +2^m 49^s.83$; $\delta = +11^\circ 58' 29''.1$. –

dalej:

Średnica słońca $= 15' 50''.43$; Paralaxa pozioma $p = 8''.48$;

Obserwow. pozorna odległość zenitl.		51° 23′ 36″.4
Refrakcya (Refraction) . . .	+	1 8.47
Średnica (Halbmesser)	+	15 50.43
Wysokości paralaksa (Höhenparallaxe)	−	6.65
Prawdziwa odległ. zenitalna	$z =$	51 40 28.7

Przyczem zauważyć należy, że trzeba obliczyć refrakcyę z obserwowaną odległością zenitalną 51° 23′ 6 i podobnie wysokości paralaxy (Parallax Höhe) z pomocą z.

Dalszy rachunek byłby następujący:

$\varphi = 48^\circ 11' 43.6$
$\delta = 11\ 58\ 29.1$
$z = 51\ 40\ 28.7$
$2s = 111\ 50\ 41.4$
$s = 55\ 55\ 20.7$
$s-\varphi = 7\ 43\ 37.1$
$s-\delta = 43\ 56\ 51.6$
$s-z = 4\ 14\ 52.0$

$\log \sin(s-\varphi) = 9.128569$
$\log \sin(s-\delta) = 9.841360$
8.969929
9.747238
9.222691
$\log tg\ \tfrac{1}{2}t = 9.611345$
$\tfrac{1}{2}t = 22^\circ 13' 37''.5$
$t = 44\ 27\ 15.0 =$
$= 2^h 57^m 49^s.00$ wschd.
$= 21\ 2\ 11.00$

Mamy przeto:

Prawdziwy czas spostrzeżenia wieczorki	21^h	2^m	$11^s.00$
Równanie czasu (Zeitgleichung).	+	2	49.83
Średni czas wieczorki	21	5	0.83
Czas na zegarze (Uhrzeit).	21	5	24.00
Stan zegaru (Uhrstand)	δ = −		23.17

Równanie 2 (str 44). jest dla rachunku logarytmami odpowiednio już przygotowane.
Różniczkujemy wyraz

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

podług z i t to otrzymamy:

$$dz \sin z = \cos \varphi \cos \delta \sin t \, dt$$

ogólnie ale jest

$$\cos \delta \sin t = \sin z \sin a$$

stąd będzie:

$$dt = \frac{dz}{\sin a \cos \varphi} \qquad 3).$$

Jeżeli $a = 90°$ będzie $\sin a = 1$ a wartość
$\sin a \cos \varphi$ nie mniejszą t. zn.
Jeżeli gwiazda, którą obserwujemy znajduje się w
to błąd w zenitowej odległości ma najmniejszy wpływ na oznaczenie czasu. Ponieważ błąd zenitowej odległości w miarę jej zwiększania się także się zwiększa, nie będziemy więc obserwować gwiazd znajdujących się blisko poziomu.

N.B. Ogólniej spostrzegamy zamiast jednej zenitowej odległości, więcej tychże.
Jeżeli robimy kilkakrotne spostrzeżenia nad tą samą gwiazdą to nie potrzebujemy dla każdego spostrzeżenia

Jeżeli są t_1 t_2 t_3 t_4 ... t_n czasy spostrzeżeń to

./.

czasowi $T = \frac{\tau_1+\tau_2+\tau_3+\cdots\tau_n}{n}$

będzie odpowiadała zenitowa odległość z.

Jeżeli $z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots z_n$ są obserwowane zenitowe odległości to możemy napisać:

$$z_1 = z + (\tau_1 - T)\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}(\tau_1 - T)^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \cdots\cdots$$

$$z_2 = z + (\tau_2 - T)\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}(\tau_2 - T)^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n = z + (\tau_n - T)\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}(\tau_n - T)^2\frac{\partial^2 z}{\partial t} + \cdots\cdots$$

Dodajmy to otrzymamy

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\, z_n = nz + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots\, \tau_n - nT)\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{(\tau_1 - T)^2 + \cdots (\tau_n - T)^2\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

lub ponieważ

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = nT$$

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\, z_n}{n} - \frac{1}{2}\left[(\tau_1 - T)^2 + \cdots\cdots (\tau_n - T)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Dla ogólnych formuł mamy:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\sin z \frac{\partial z}{\partial t} = \cos \varphi \cos \delta \sin t$$

lub:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\sin z}$$

i dalej

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial z}{\partial t}\cot t - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \operatorname{cotg} z$$

Ponieważ przy obserwacyach $\tau_k - T$ są małe ilości można założyć

$$1/2\,(\tau_k - T)^2 = 2\sin^2 1/2\,(\tau_k - T)$$

Zatem będzie

$$z = \frac{z_1 + z_2 + \cdots\; + z_n}{n} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot\frac{1}{n}\Sigma\frac{2\sin^2 1/2(\tau_k - T)}{\sin 1''}$$

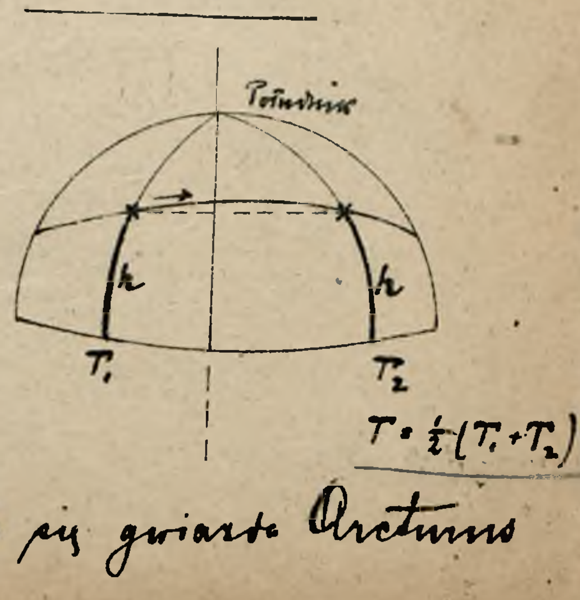
uczyniliśmy to dlatego gdyż my wielkości

$$\sin^2 1/2\,(\tau_k - T)$$

zawsze w Astronomii potrzebujemy, a także ponieważ łatwo można ją z tablic ułożyć.

Tabliczka taka byłaby następująca:

$T_K - T$	$2\sin^2 \frac{1}{2}(T_K - T)$					
	0^s	10^s	20^s	30^s	40^s	50^s
1	0' 2"	3	3	4	5	7
2	0' 8"	9	11	12	14	16
3	0' 18"	20	22	24	26	29
4	0' 31"	34	37	40	43	46
5	0' 49"	52	56	60	63	67
6	1' 11"	15	19	23	27	32
7	1' 36"	41	46	50	55	60
8	2' 6"	11	16	22	27	33
9	2' 39"	45	51	57	63	70
10	3' 16"	23	30	36	43	50
11	3' 58"	65	72	80	87	95
12	4' 43	51	59	67	75	83
13	5' 32"	40	49	58	67	76
14	6' 25	34	43	53	62	72
15	7' 22	32	41	52	62	72
16	8' 22"	33	44	54	65	76
17	9' 27"	38	50	61	73	84
18.	10' 36"	48	60	72	84	96.



Mamy jeszcze inną metodę do oznaczenia czasu a mianowicie metodę „równych wysokości". Jeżeli znamy czasy T_1 i T_2 w których pewna gwiazda przed i po górowaniu ma równe wysokości to jej czas górowania

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) . —$$

N.p. dnia 19go marca 1856 r. znajdowała się gwiazda Arcturus w czasie gwiazdowym

$$T_1 = 11^h\, 4^m\, 51^s_{.5} \quad \text{przed górowaniem}$$

i w czasie $T_2 = 17^h\, 21^m\, 30^s_{.0}$ po górowaniu w tej samej wysokości.

Czas gwiazdowy górowania był według zegaru

$$T = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2) = 14^h\, 13^m\, 10^s.75$$

W tym czasie wynosiła rektascensya Arctura

$$\alpha = 14\ 19\ 7.11$$

Dlatego była poprawka zegaru

$$\underline{\Delta T = T - \alpha = -4^m\, 3^s.64}$$

Zwykle do regulowania zegaru według metody równych wysokości obieramy słońce, ale słońce zmienia swoją deklinacyą w międzyczasie obu spostrzeżeń, dlatego potrzeba poprawić dla zmiany deklinacyi, $\underline{d\delta}$, chwilę górowania.

Niech $\underline{\delta}$ oznacza deklinacyą słońca w średnie południe w miejscu obserwacyi a $\Delta\delta$ zmianę tejże od czasu obserwacyi do południa, dalej niech t oznacza połowę międzyczasu obu spostrzeżeń, a ΔT poprawkę, którą potrzeba dodać do t abyśmy otrzymali czas górowania słońca prawdziwego, to mamy według ogólnych formuł:

$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta - \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta - \Delta\delta) \cos(t + \Delta T)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta + \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta + \Delta\delta) \cos(t - \Delta T)$$

Dlatego:

$$0 = \sin\varphi \{\sin(\delta - \Delta\delta) - \sin(\delta + \Delta\delta)\}$$
$$+ \cos\varphi \{\cos(\delta - \Delta\delta)\cos(t + \Delta T) - \cos(\delta + \Delta\delta)\cos(t - \Delta T)\}$$

$\Delta\delta$ i ΔT są małe ilości, tak że możemy położyć:

$$\sin(\delta \pm \Delta\delta) = \sin\delta \pm \Delta\delta \cos\delta$$
$$\cos(\delta \pm \Delta\delta) = \cos\delta \mp \Delta\delta \sin\delta$$
$$\cos(t \pm \Delta T) = \cos t \mp \Delta T \sin T$$

tak że otrzymamy:

$$2 \sin\varphi \{\Delta\delta \cos\delta\} + \cos\varphi \{-\sin\delta \cos t . \Delta\delta + \cos\delta \sin t . \Delta T\}$$

tak że będzie:

$$\Delta T = -\frac{\Delta\delta \operatorname{tg}\varphi}{\sin t} + \frac{\Delta\delta \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}$$

$\Delta\delta$ jest ale wyrażone w sekundach kątowych, abyśmy otrzymali ΔT w sekundach czasowych potrzeba $\Delta\delta$ podzielić przez 15 a więc:

$$\Delta T = -\frac{\Delta\delta}{15}\,\frac{tg\,\varphi}{\sin t} + \frac{\Delta\delta\, tg\,\delta}{15\, tg\, t}$$

W efemerydach znajdujemy już zmiany godzinne wartości δ dla Słońca obrachowane:
Niech będzie $d\delta$ zmianą godzinną deklinacyi i wyrażamy t w godzinach to jest:

$$\Delta\delta = t . d\delta$$

to otrzymamy

$$\Delta T = -\frac{t}{15}\, d\delta\, \frac{tg\,\varphi}{\sin t} + \frac{t}{15}\, d\delta\, \frac{tg\,\delta}{tg\, t}$$

Oznaczenie azymutu a.

Znając kąt godzinny t deklinacyę δ i szerokość geograficzną φ możemy znaleźć Azymut a przedmiotu znajdującego się na ziemi. – Lub zapomocą wzorów Gaussa:

$$tg\, \tfrac{1}{2}(a-p) = tg\, \tfrac{1}{2}t \cdot \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)}$$

sin a
$\cos h \sin a = \cos\delta \sin t$

$$tg\, \tfrac{1}{2}(a+p) = tg\, \tfrac{1}{2}t\, \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\sin \tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)}$$

gdzie p jest kąt paralaktyczny, ~~gdzie~~ którego obliczać w tym zagadnieniu nie potrzeba; lub dla wzorów ogólnych:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\sin z \cos a = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\sin z \sin a = \cos\delta \sin t$$

Jeżeli założymy:

$$m \sin M = \sin\delta$$
$$m \cos M = \cos\delta . \cos t$$

to będzie:

$$\sin z \cos a = m \sin(\varphi - M)$$
$$\sin z \sin a = \cos\delta \sin t$$

i dla tego $tg\, a = \dfrac{\cos\delta \sin t}{m \sin(\varphi - M)}$

lub ponieważ

$$\cos\delta = \frac{m\cos M}{\cos t}$$

i

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} t \cos M}{\sin(\varphi - M)}$$

przyczem $\operatorname{tg} M = \operatorname{tg}\delta \sec t$

Ażeby azymut pewnego przedmiotu ziemskiego znaleźć, obserwujemy chwilę w której pewna gwiazda, której rektascensya α i deklinacya δ jest wiadoma, przechodzi przez azymut tego przedmiotu. Niech T oznacza czas średni w tej chwili, to można łatwo znaleźć i czas gwiazdowy θ i z tego kąt godzinny t według wzoru

$$t = \theta - \alpha$$

Dalej wyrachujemy

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg}\delta \sec t$$

a także

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} t \cdot \cos M}{\sin(\varphi - M)}$$

Określ. azymutu:
1) ogólnie $\sin\delta = \sin h \sin\varphi$ - [illegible]
2) ponieważ wysok. [illegible] $\cos a$ przed i po górowaniu obserw. [illegible]
$a_0 = \frac{\theta - \theta_2}{}$ [illegible]
3) metoda Zyn. [illegible]

Oznaczenie azymutu i stanu zegaru.

Jeśli obserwujemy przejście dwu gwiazd stałych, przez jedno i to samo koło wierzchołkowe, n.p. za pomocą theodolitu to można znaleźć azymut i stan zegaru w następujący sposób:
Chwilę przejścia obu gwiazd zapisuje się podług zegaru, który w międzyczasie obu spostrzeżeń nie chybia, w przeciwnym razie wiadome być musi spóźnianie lub przyspieszanie tegoż zegaru tedy z ogólnych wzorów mamy:

$$\cos t \sin\varphi - \sin t \operatorname{cotg} a = \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \qquad 1.)$$

$$\cos t_1 \sin\varphi - \sin t_1 \operatorname{cotg} a = \cos\varphi \operatorname{tg}\delta_1 \qquad 2.)$$

$$t_1 - t = (\theta_1 - \theta) - (\alpha_1 - \alpha) \qquad 3.)$$

Czasy gwiazdowe można wziąć ze spostrzeganych czasów średnich. Niewiadome są tu:

$\underline{t_1} - \underline{t_2} -$ i $\underline{a}$

Wiadome

$\vartheta_1, \vartheta, \alpha_1\ \delta_1\ \delta,$ i e.

Nadamy: $\sin e = m \sin M$

$\cot a = m \cos M$

to będzie: $m \sin (M-t) = \cos e \operatorname{tg} \delta$

$m \sin (M-t_1) = \cos e \operatorname{tg} \delta_1$

Nazwiemy dalej

$M-t = x \qquad M-t_1 = y$

to mamy $\underline{\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta_1}}$ . . . . $\underline{I}$.

$x - y = (M-t)-(M-t_1) = t_1 - t$

dla tego $\underline{x-y = (\vartheta_1-\vartheta)-(\alpha_1-\alpha)}$ . . . . $\underline{II}$.

Z tych dwu równań otrzymamy

$\underline{x}$ i $\underline{y}$.

dalej jest $\underline{m = \dfrac{\cos e \operatorname{tg}\delta}{\sin x} = \dfrac{\cos e \operatorname{tg}\delta_1}{\sin y}}$ . . . . $\underline{III}$

i dalej

$\underline{\sin M = \dfrac{\sin e}{m} = \sin x \operatorname{tg} e \operatorname{tg}\delta}$ . . . . $\underline{IV}$

i koniecznie

$\underline{\operatorname{tg} a = \dfrac{1}{m \cos M}}$ . . . . $\underline{V}$.

Abyśmy otrzymali x i y napiszemy:

$$\frac{\sin x}{\sin y} \pm 1 = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta_1} \pm 1$$

i dla tego $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \dfrac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\delta_1}$

Ogólnie jest ale $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}$

dalej $\dfrac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\delta_1} = \dfrac{\sin(\delta+\delta_1)}{\sin(\delta-\delta_1)}$

tak że: $\underline{\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} \cdot \dfrac{\sin(\delta_1+\delta)}{\sin(\delta_1-\delta)}}$ . . . . $\underline{I}'$

$\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\vartheta_1-\vartheta}{\ } - \dfrac{\alpha_1+\alpha}{\ }$ $\underline{II}'$

Dalej otrzymamy:

$$M - t = x$$
$$M - t_1 = y$$

Dalej ze wzorów III i IV wartość M, tak iż będzie

$$t = M - x \quad \ldots\ldots \quad \text{VI}$$
$$t_1 = M - y \quad \ldots\ldots \quad \text{VII}$$

Czasy gwiazdowe spostrzeżeń będą:

$$\theta = \alpha + t \quad \ldots\ldots \quad \text{VIII}$$
$$\theta_1 = \alpha_1 + t_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{IX}$$

× Oznaczenie szerokości geograficznej. 1) ogólna

Metoda I

Znając deklinacyę δ pewnej gwiazdy stałej, otrzymamy wartość na φ z obserwowanej wysokości h.

Ogólnie jest:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

wstawiamy $\sin\delta = \mu \sin m$

$$\cos\delta . \cos t = \mu \cos m$$

to będzie $\sin h = \mu \cos(\varphi - m)$

lub $\cos(\varphi - m) = \frac{\sin h}{\mu}$

przy tem jest:

$$\operatorname{tg} m = \sec t . \operatorname{tg}\delta$$
$$\mu = \frac{\sin\delta}{\sin m}$$

Metoda II.

$$\cos t = 1 - 2\sin^2 \tfrac{t}{2}$$

potem będzie:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{t}{2}$$

wtedy $\cos z = \cos(\delta - \varphi) - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{t}{2}$ OC

lub $\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{t}{2}$ OC

albo $\cos z = \cos(\varphi + \delta) + 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{t}{2}$ UC } gwiazdy

Możemy napisać

$$\cos z - \cos(\delta-\varphi) = 2\sin \tfrac{1}{2}(z+\delta-\varphi)\sin \tfrac{1}{2}(z-\delta+\varphi)$$

zatem mamy: $\sin \frac{1}{2}(z+\delta-\varphi)\sin \frac{1}{2}(z-\delta+\varphi) = -\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}$

wtedy $\sin\frac{1}{2}(z-\delta+\varphi) = -\dfrac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\frac{1}{2}(z+\delta-\varphi)}\sin^2\dfrac{t}{2}$

$z+\delta-\varphi$ jest bliskiem wartości $2z$, $z-\delta+\varphi$ dlatego jest małą wartością

według tego możemy napisać:

$$\sin\tfrac{1}{2}(z-\delta+\varphi) = \tfrac{1}{2}(z-\delta+\varphi)\sin 1''$$
$$z+\delta-\varphi = 2z$$

dalej otrzymamy:

* Na południe od zenitu $\varphi = \delta - z - \dfrac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z}\cdot\dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin 1''}$; górna culminacya (O.C)

* Na północ od zenitu $\varphi = z+\delta + \dfrac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z}\cdot\dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin 1''}$ " " (O.C)

Gwiazda Biegunowa $\varphi = 180 - z - \delta - \dfrac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z}\cdot\dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin 1''}$ dolna culminacya (U.C)

Jeżeli $t=0$, mamy:

* na południe od zenitu $\varphi = \delta - z$ OC

* na północ od zenitu $\varphi = z+\delta$ OC

$\varphi = 180-\delta-z$ UC } gwiazdy biegunowe

Przykład (do 1szej metody). str. 53.

Westphal obserwował dnia 19 Października 1882 w Benisuef w Egipcie średnim czasie $23^h1^m10^s$ Wysokość środka słońca równą $49°17'22.8''$

Deklinacya słońca wynosiła $-10°12'16''.1$,

Równanie czasu: $= -15^m\, 0^s,0$

więc kąt godzinny słońca:

$23^h16^m10^s = -10°57'30''.0$

Otrzymamy

$\tan\delta = 9.2552472\,n$
$\cos t = 9.9920078$
$N = -10°\ 23'\ 23''.57$
$\sin N = 9.2561063\,n$
$\sin\delta = 9.2783695\,n$
0.0077368
$\sin h = 9.8796783$
$z - N: 39°\ 29'\ 54''.37$
$\varphi = 29\ \ 6\ \ 30.84$

Metoda III

Jeżeli w ogólnej formule

$$\sin\varphi \cos t - \cos\varphi \, tg\,\delta = cotg\,\alpha . \sin t \qquad \text{jest } a = 90^\circ$$

t.j. jeżeli skierowanym w pierwszym wertykale to będzie:

$$\sin\varphi \cos t - \cos\varphi \, tg\,\delta = 0$$

i dla tego: $tg\,\varphi = tg\,\delta \sec t_{90^\circ}$

Jeżeli $\cos t_{90^\circ}$ jest blisko 1.

$$tg\,\varphi = \frac{1}{\cos t} \cdot tg\,\delta$$

a korzystając z danej rozwiniętego szeregu dla

$$tg\,y = n\, tg\,x$$

z niego $y = x - \frac{1-n}{1+n} \sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \sin 4x - \dots$

wynika

$$y = \varphi$$
$$x = \delta$$
$$n = \frac{1}{\cos t}$$

dalej będzie: $\varphi - \delta = + \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \sin 2\delta + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right)^2 \sin 4\delta + \dots$

Jest ale $\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = tg^2 \frac{t}{2}$

stąd się otrzymamy

$$\varphi = \delta + tg^2 \frac{t}{2} \sin 2\delta + \frac{1}{2} tg^4 \frac{t}{2} \sin 4\delta + \dots$$

$tg \frac{t}{2}$ zastąpić $\sin \frac{t}{2}$

to otrzymamy

$$(\varphi - \delta)'' = \frac{1}{2} \sin 2\delta \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin 1''} + \dots$$

Metoda IV

Metoda „Horrebow–Talcott"

Według ogólnych formuł mamy, jeżeli gwiazda się znajduje w południku

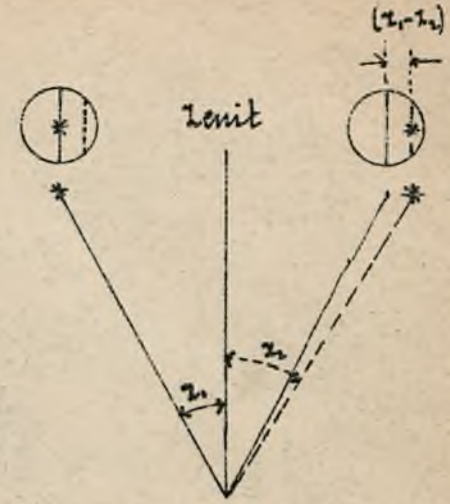
$$\varphi = \delta_1 - z_1 \qquad \text{dla gwiazdy na południe od zenitu}$$

i $\varphi = z_2 + \delta_2$ " "

Dla tego otrzymamy jako sumę:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2) - \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$$

Gwiazdy wybieramy naturalnie tak aby ilość $z_1 - z_2$ była bardzo mała (by nie wynosiła nie wiele minut łukowych).
Zenitowe odległości wybieramy dość małe, aby refrakcya miała mały wpływ.



Gw. bieg. (wraz inne) opisuje koło i wznosi się raz w kulm. gór. drugi raz w kulm. dol.

$$\varphi = \frac{h_{max} + h_{min}}{2}$$