

Podstawiając (6.38) do (6.37), znaleziono

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 e^{j\omega_0 t} = x_0 \left(\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t) \right), \\x_2 &= x_0 e^{-j\omega_0 t} = x_0 \left(\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t) \right).\end{aligned}\quad (6.39)$$

Obydwa rozwiązania (6.39) są zespolone. Jeżeli teraz przyjmie się, że $x = (x_1 + x_2)/2$, to z (6.39) otrzyma się odpowiedź rzeczywistą (i zgodną z intuicją)

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t). \quad (6.40)$$

6.3.2. Kryterium Routha-Hurwitza

Równanie charakterystyczne układu liniowego (6.31) lub (6.35) można przedstawić w postaci⁴⁾

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (6.41)$$

Warunkiem koniecznym globalnej stabilności asymptotycznej układu o równaniu charakterystycznym (6.41) jest wymóg aby wszystkie współczynniki a_i równania (6.41) spełniały warunek

$$a_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Warunkiem dostatecznym - aby wszystkie podwyznaczniki Δ_i ($i=2, 3, \dots, n-1$) wyznacznika Δ_n o budowie:

$$i=2: \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad i=3: \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \text{itd aż do } i=n-1 \quad (6.42)$$

były większe od zera.

Jeżeli jeden lub więcej niż jeden podwyznacznik (6.42) jest równy zeru, to układ jest stabilny globalnie ale nie asymptotycznie (w układzie występują niegasnące drgania o stałej amplitudzie).

⁴⁾ Spotyka się również inną postać tego równania: współczynnik przy najwyższej potęgze s , a więc s^n jest a_n , a nie a_0 . Czytelnik za chwilę sprawdzi, że postać (6.41) prowadzi do łatwiejszych do zapamiętania algorytmów badania stabilności.

Przykład 6.6

Równanie charakterystyczne układu ma postać $2s^3 + 4s^2 + 10s + 3 = 0$. Sprawdzić stabilność układu.

Warunek konieczny jest tu spełniony, bo wszystkie współczynniki wielomianu są dodatnie i różne od zera. Dla sprawdzenia warunku dostatecznego wprowadza się oznaczenia: $a_0=2$, $a_1=4$, $a_2=10$ oraz $a_3=3$. Stopień n wielomianu charakterystycznego jest tu równy 3. Wystarczy więc sprawdzić jeden podwyznacznik:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 6 = 34 > 0.$$

Układ jest więc stabilny globalnie i asymptotycznie.

Przykład 6.7

Ponawia się zadanie przykładu 6.6 dla równania charakterystycznego: $3s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 4 = 0$.

Warunek konieczny jest tu spełniony. Badania podwyznaczników dają

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -13 < 0.$$

Badany układ jest niestabilny.

Przykład 6.8

W tym przykładzie równanie charakterystyczne ma postać $4s^3 + 2s^2 + 4,5s + 2,25 = 0$.

Warunek konieczny jest tu spełniony, ale

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2,25 \\ 4 & 4,5 \end{vmatrix} = 0.$$

Tym samym układ jest stabilny globalnie ale nie asymptotycznie.

Przykład 6.9

Rozpatruje się podobne równanie charakterystyczne jak w przykładzie 6.7 ale dla $a_2=0$: $3s^4 + 2s^3 + 3s + 4 = 0$.

Układ jest niestabilny ponieważ nie jest spełniony warunek konieczny ($a_2=0$).

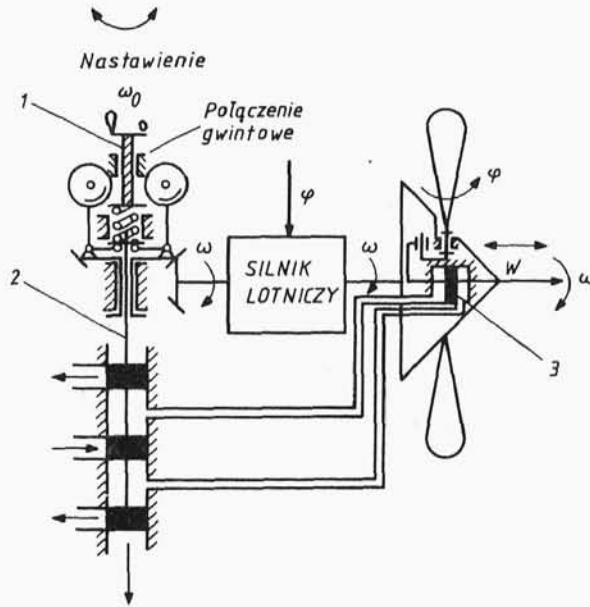
Przykład 6.10

Dla utrzymania stałości prędkości kątowej ω śmigła samolotu niezbędne jest przestawianie kąta natarcia φ śmigła w zależność

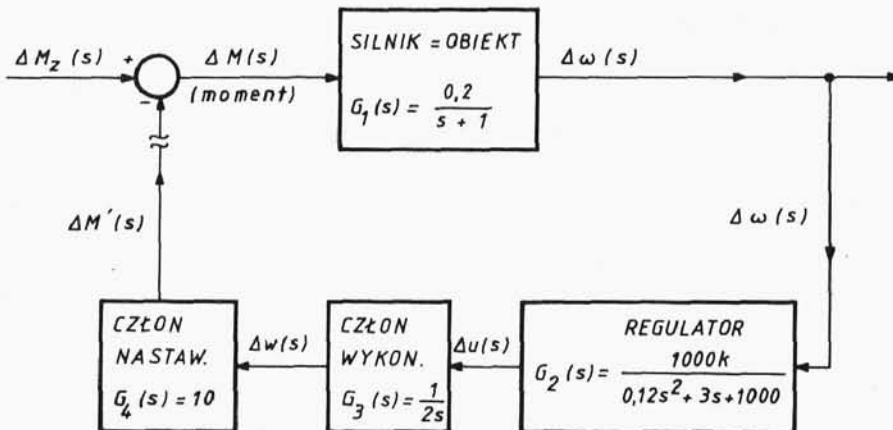
ci od wysokości lotu.

Na rys.6.4a pokazano układ automatycznej regulacji prędkości ω przez zmianę kąta φ (schemat aparaturowy). Schemat blokowy tego układu pokazano na rys.6.4b.

a)



b)



Rys.6.4. Układ automatycznej regulacji kąta φ natarcia śmigła samolotu: a) schemat aparaturowy; b) schemat blokowy

Transmitancja operatorowa układu otwartego

$$G_0(s) = \frac{1000 k}{(s+1)(0,12s^2+3s+1000)s}$$

Należy określić wartość k , dla której układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym jest jeszcze stabilny.

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego otrzymuje się po uwzględnieniu (6.45): $(s+1)(0,12s^2+3s+1000)s+1000k=0$, czyli $0,12s^4+3,12s^3+1003s^2+1000s+1000k=0$. Ponieważ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3,12 & 1000 \\ 0,12 & 1003 \end{vmatrix} > 0$, to należy określić Δ_3 i znaleźć taką wartość k , dla której $\Delta_3=0$, czyli zachodzi stabilność obojętna

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3,12 & 1000 & 0 \\ 0,12 & 1003 & 1000k \\ 0 & 3,12 & 1000 \end{vmatrix} = 3,12(1003 \cdot 1000 - 3,12 \cdot 1000k) + - 1000 \cdot 0,12 \cdot 1000 = 0.$$

Po rozwiązaniu równania $\Delta_3=0$ względem k otrzymano $k=309,15$. Układ jest więc stabilny asymptotycznie gdy $k < 309,15$.

6.3.3. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista pozwala na określenie stabilności układu zamkniętego na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego, wyznaczonej analitycznie lub doświadczalnie. Ma ono duże znaczenie praktyczne, szczególnie w przypadku układów rzeczywistych, które może być trudno opisać analitycznie. Na rys.6.5 pokazano, jak z układu zamkniętego uzyskuje się układ otwarty (przerwanie pętli sprzężenia zwrotnego przed węzłem sumacyjnym). Transmitancje operatorowe układów zamkniętych $G_{z,a}(s)$ oraz $G_{z,b}(s)$ dla przypadku a) i b) są różne ale transmitancje obydwu układów otwartych są takie same

$$G_0(s) = \frac{L_1(s)L_2(s)}{M_1(s)M_2(s)}. \quad (6.43)$$

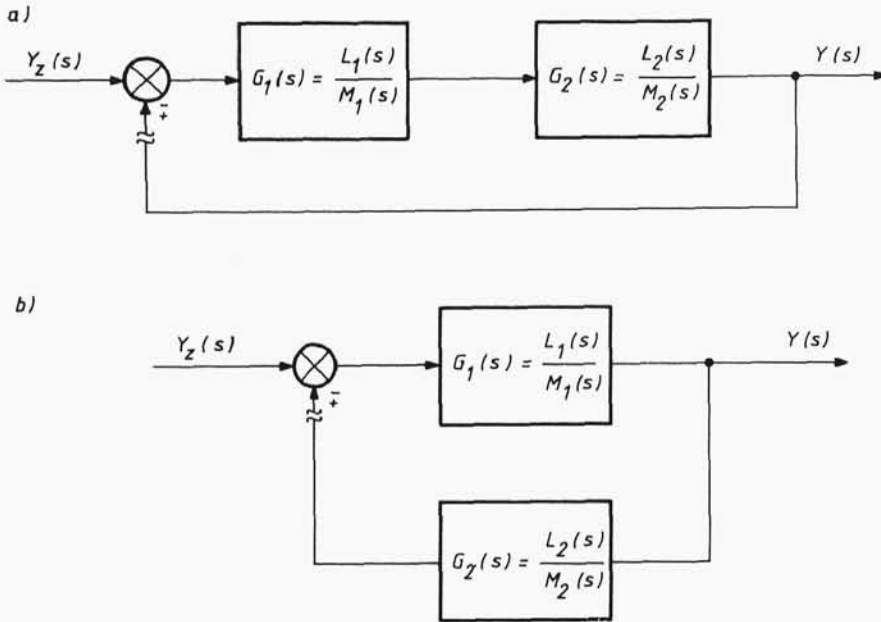
Warto tu wyjaśnić, że równania charakterystyczne układów otwartych

$$\varphi_0(s) = M_1(s)M_2(s) = 0 \quad (6.44)$$

oraz zamkniętych

$$\varphi_z(s) = L_1(s)L_2(s) + M_1(s)M_2(s), \quad (6.45)$$

są w obydwu przypadkach również identyczne.



Rys.6.5. Pojęcie układu otwartego i zamkniętego

Przed sformułowaniem kryterium Nyquista rozpatruje się wstępnie równanie charakterystyczne dowolnego układu (zamkniętego lub otwartego), wykorzystując (6.31), zakładając występowanie tylko pierwiastków jednokrotnych oraz podstawiając $s=j\omega$

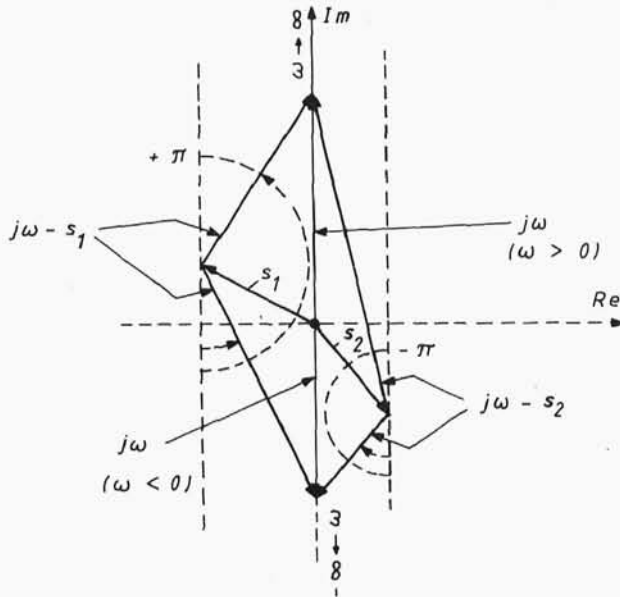
$$\varphi(j\omega) = (j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n) = 0. \quad (6.46)$$

W równaniu tym n jest stopniem równania charakterystycznego a s_i są jego pierwiastkami.

Równanie (6.46) jest iloczynem liczb zespolonych, tym samym

$$|\varphi(j\omega)| = \prod_{i=1}^n |(j\omega - s_i)| \quad \text{oraz} \quad \arg \varphi(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - s_i). \quad (6.47)$$

Na rys.6.6 przedstawiono poglądowo na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s różnicę dwóch wektorów $j\omega$ i s_1 , umieszczając przykładowo dwa pierwiastki w lewej i prawej półpłaszczyźnie. Jeżeli pulsacja ω zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$ to wektor $j\omega - s_1$ dokonuje obrotu o $+\pi$ dla pierwiastka s_1 znajdującego się w lewej półpłaszczyźnie s i obrotu o $-\pi$ dla pierwiastka s_1 w prawej półpłaszczyźnie.



Rys.6.6. Obroty wektorów $j\omega - s_k$ przy zmianie pulsacji ω od $-\infty$ do $+\infty$

Jeżeli wszystkie pierwiastki (6.46) leżą w lewej półpłaszczyźnie (jest to warunek stabilności asymptotycznej badanego układu) to dla ω zmieniającego się od $-\infty$ do $+\infty$ wektor $\varphi(j\omega)$ powinien obrócić się o kąt równy $n\pi$. Po przedstawieniu (6.46) ponownie w postaci (6.41) i podstawieniu $s=j\omega$ można wykazać, że $\varphi(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$. Łatwo udowodnić, że $P(\omega)=P(-\omega)$ oraz $Q(\omega)=-Q(-\omega)$. Wystarczy tu więc rozpatrzyć zmianę pulsacji ω od 0 do $+\infty$, ponieważ *hodograf*⁵⁾ $\varphi(j\omega)$ jest symetryczny na płaszczyźnie s względem osi rzeczywistej. Tym samym dla ω zmieniającego się od 0 do $+\infty$ wektor $\varphi(j\omega)$ powinien obrócić się o kąt $\pi \frac{n}{2}$, jeżeli układ ma być stabilny asymptotycznie. Jest to dowodem poprawności kryterium stabilności Michajłowa: układ dynamiczny jest stabilny asymptotycznie, gdy *hodograf wektora* $\varphi(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s , przy zmianie pulsacji ω od 0 do ∞ , zakresła drogę kątową $\pi \frac{n}{2}$.

⁵⁾ Krzywa zakreslona na płaszczyźnie s przez koniec wektora $\varphi(j\omega)$.

Z braku miejsca kryterium to nie będzie w dalszym ciągu ilustrowane przykładami.

Dla obydwu schematów na rys.6.5 mianownik transmitancji $G_z(s)$ układu zamkniętego jest równy $1+G_0(s)$. Po podstawieniu $s=j\omega$ można napisać

$$1+G_0(j\omega) = \frac{L_1(j\omega)L_2(j\omega)+M_1(j\omega)M_2(j\omega)}{M_1(j\omega)M_2(j\omega)} = \frac{\varphi_z(j\omega)}{\varphi_0(j\omega)}. \quad (6.48)$$

Tym samym zmianę argumentu funkcji $1+G_0(j\omega)$ przedstawia się w postaci

$$\Delta \arg [1+G_0(j\omega)] = \Delta \arg [\varphi_z(j\omega)] - \Delta \arg [\varphi_0(j\omega)]. \quad (6.49)$$

$0 \leq \omega \leq \infty$ $0 \leq \omega \leq \infty$ $0 \leq \omega \leq \infty$

Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie i ma pozostać tak samo stabilny po zamknięciu, to przyrost argumentu $1+G_0(j\omega)$ dla $0 \leq \omega \leq \infty$ powinien być równy zeru, zgodnie z kryterium Michajłowa, ponieważ wielomiany $\varphi_0(s)$ i $\varphi_z(s)$ są tego samego stopnia n . Warunek ten jest spełniony, gdy dla hodografu $1+G_0(j\omega)$ na płaszczyźnie s rozpoczynającego się na osi rzeczywistej ($\omega=0$) i na niej kończącego ($\omega=\infty$), punkt $(-1, j0)$ znajduje się na zewnątrz hodografu.

Wykres $G_0(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s jest charakterystyką amplitudowo-fazową układu otwartego. Jeżeli charakterystyka ta dla $0 \leq \omega \leq \infty$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$, to punkt ten znajduje się na zewnątrz hodografu $1+G_0(j\omega)$. Tym samym układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie, jeżeli odpowiadający mu układ otwarty jest również stabilny, a wykres $G_0(j\omega)$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

Kryterium Nyquista dla tego przypadku można ująć następująco.

Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie, to pozostaje tak samo stabilny po zamknięciu, gdy charakterystyka $G_0(j\omega)$ dla $0 \leq \omega \leq \infty$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$. Gdy charakterystyka $G_0(j\omega)$ przechodzi przez punkt $(-1, j0)$, to układ zamknięty jest na granicy stabilności (stabilny ale nie asymptotycznie).

Przykład 6.11

$$\text{Z badać stabilność układu, dla którego } G_0(s) = \frac{ke^{-sT_1}}{T_2 s + 1}.$$

Po podstawieniu $s=j\omega$ otrzymuje się po przekształceniach

$$G_0(j\omega) = \frac{k}{1+(T_2\omega)^2} \left[\left(\cos(T_1\omega) - T_2\omega \sin(T_1\omega) \right) + \right. \\ \left. - j \left(\sin(T_1\omega) + T_2\omega \cos(T_1\omega) \right) \right]. \quad (6.50)$$

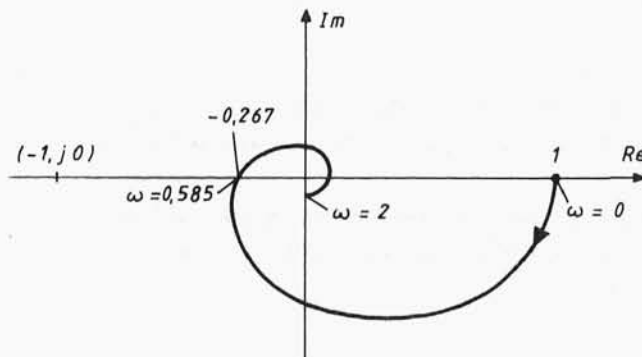
Z zależności tej wynika, że dla $\omega=0$ $G_0(j\omega)=k$.

Punkt przecięcia charakterystyki amplitudowo-fazowej z osią rzeczywistą znajduje się po przyrównaniu do zera części urojonej (6.50). Daje to równanie

$$T_2\omega_k + \operatorname{tg}(T_1\omega_k) = 0. \quad (6.51)$$

Można je rozwiązać względem ω_k wykreślnie lub numerycznie (np. metodą Newtona). Po podstawieniu znalezionej w ten sposób wartości ω_k do części rzeczywistej (6.50) sprawdza się, czy jest ona większa lub mniejsza od -1 , co w tym przypadku wystarcza do oceny stabilności badanego układu po jego zamknięciu. (Na tym etapie można wyznaczyć również tzw. zapas modułu, o którym jest mowa w dalszym ciągu tego punktu).

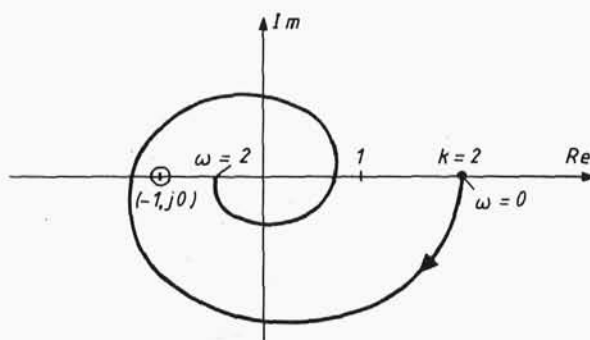
Niech dane liczbowe przykładu wynoszą $T_1=\pi$ s, $T_2=2\pi$ s oraz $k=1$. Numerycznie znaleziono z (6.51) $\omega_k=0,585$ rd/s. Wykres $G_0(j\omega)$ pokazano na rys.6.7. Z analizy przebiegu wykresu na tym rysunku wynika, że przy danych liczbowych zadania, badany układ jest stabilny po zamknięciu, ponieważ charakterystyka $G_0(j\omega)$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$, a układ otwarty jest stabilny.



Rys.6.7. Ilustracja do przykładu 6.11. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu, który po zamknięciu jest stabilny

Jeżeli dla tych samych stałych: $T_1 = \pi$ s i $T_2 = 2\pi$ s przyjmie się inną niż 1 wartość k , to początkiem charakterystyki $G_0(j\omega)$ będzie punkt k na osi Re , a punktem jej przecięcia z tą osią - punkt $-0,267k$. Łatwo stąd wyznaczyć wartość graniczną $k_{gr} = 3,75$, powyżej której badany układ po zamknięciu staje się niestabilny.

Na rys.6.8 pokazano charakterystykę, którą dla tego samego układu uzyskano dla $k=2$, $T_1=4$ s i $T_2=2$ s. Tym razem układ po zamknięciu będzie niestabilny, bo charakterystyka obejmuje punkt $(-1, j0)$.



Rys.6.8. Charakterystyka układu niestabilnego po zamknięciu

Ważną zaletą kryterium Nyquista, której nie mają inne kryteria, jest łatwość określenia zapasu stabilności badanego układu.

W pobliżu granicy stabilności stany nieustalone są oscylacyjne o tym mniejszym tłumieniu, im bliżej tej granicy znajduje się układ. Wynika stąd wymóg zapewnienia układowi odpowiedniego zapasu stabilności.

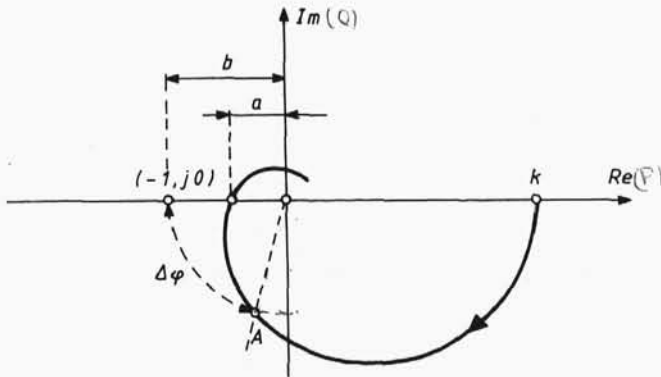
Operując pojęciami charakterystyk częstotliwościowych układów stabilnych, określa się dla nich dwie wielkości:

- zapas modułu
- oraz
- zapas fazy.

Zapasz modułu jest współczynnikiem α , przez jaki należy przemnożyć wzmocnienie układu, przy nie zmienionym argumencie transmitancji widmowej układu otwartego, aby doprowadzić układ

do granicy stabilności. Zapas fazy $\Delta\varphi$, mierzony w stopniach, określa wartość zmiany argumentu transmitancji widmowej układu otwartego przy nie zmienionym wzmacnieniu, która przynosi ten sam skutek.

Na rys.6.9 pokazano przypadek charakterystyki $G_0(j\omega)$ układu, dla którego obydwie wielkości wyznacza się w łatwy sposób wykreślnie. Jeżeli podziałki osi Im i Re są jednakowe, to punkt A przecięcia okręgu jednostkowego zakreślonego z początku układu współrzędnych z charakterystyką $G_0(j\omega)$ wyznacza kąt $\Delta\varphi$. Zapas modułu α wyznacza się z zależności $\alpha = \frac{b}{a}$. Dla układu z rys. 6.9 znaleziono w ten sposób $\Delta\varphi=75^\circ$ oraz $\alpha=2,43$.



Rys.6.9. Wyznaczanie zapasu modułu i fazy

Zapasy stabilności można również określić analitycznie (por. przykład 6.11). Wymaga to określenia pulsacji ω_k , dla której część urojona $G_0(j\omega)$ ma wartość zerową, a następnie wyznaczenia dla tej pulsacji części rzeczywistej $G_0(j\omega)$. W ten sposób określa się zapas modułu α . Określenie zapasu fazy $\Delta\varphi$ wymaga znalezienia wartości ω_φ , dla której $|G_0(j\omega)|=1$. Po podstawieniu ω_φ do $G_0(j\omega)$ oblicza się $P(\omega_\varphi)$ oraz $Q(\omega_\varphi)$ i wyznacza $\Delta\varphi$ z zależności: $\Delta\varphi=180^\circ - \arctg(Q(\omega_\varphi)/P(\omega_\varphi))$. W praktyce stosuje się zapas modułu $\alpha \geq 2$ (odpowiada to wzmacnieniu $20 \log 2 = 6 \text{ dB}$) oraz zapas fazy $\Delta\varphi \geq 30^\circ$.

Kryterium Nyquista w przypadku astatycznych układów otwartych

Wiele układów regulacji automatycznej zawiera człony całkujące, które są źródłem astatyzmu odpowiadających im układów otwartych. Liczba takich członów, połączonych szeregowo z innymi

członami elementarnymi nie przekracza w praktyce dwóch. Rozpatruje się więc zwykle tylko układy z jednym członem całkującym (układy astatyczne pierwszego rzędu) i z dwoma takimi członami (układy astatyczne drugiego rzędu).

Wykreślenie pełnej charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_0(j\omega)$ dla $0 \leq \omega \leq \infty$ w obydwu przypadkach jest utrudnione nieograniczonym wzrostem modułu $|G_0(j\omega)|$ dla pulsacji zbliżonej do zera. Nie jest to zresztą potrzebne, bo istotne dla badania stabilności układu informacje zawarte są w tych fragmentach, które przebiegają w okolicach punktu krytycznego $(-1, j0)$ i kończą się dla $\omega = \infty$ - w początku układu współrzędnych.

Metoda Nyquista badania stabilności układów, które po otwarciu są astatyczne, jest podobna do omawianej już metody badania układów statycznych. Różnica polega tylko na tym, że charakterystykę amplitudowo-fazową astatycznego układu otwartego uzupełnia się fragmentem umownego okręgu o nieskończenie dużym promieniu, tak aby rozpoczynała się ona na dodatnim odcinku osi Re. Metoda ta, której uzasadnienie teoretyczne jest podane m.in. w pracach [2] i [7], zostanie zilustrowana prostym przykładem.

Przykład 6.12

Rozpatruje się otwarty układ astatyczny pierwszego rzędu o transmitancji $G_0(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$. Jest to dość ogólny przypadek członu całkującego połączonego szeregowo z trzema członami inercyjnymi pierwszego rzędu, które łącznie odpowiadają jednemu członowi inercyjnemu trzeciego rzędu. Przy zerowej wartości jednej ze stałych czasowych otrzymuje się człon inercyjny drugiego rzędu, a gdy tylko jedna stała różni się od zera - pierwszego rzędu.

Po podstawieniu $s=j\omega$ do $G_0(s)$ i odpowiednich przekształceniach otrzymano

$$\operatorname{Re} G_0(j\omega) = P(\omega) = \frac{k(a\omega^2 - b)}{N}, \quad (6.52)$$

$$\operatorname{Im} G_0(j\omega) = Q(\omega) = \frac{-k(1 - \omega^2 c)}{\omega N}, \quad (6.53)$$

$$\arg G_0(j\omega) = \varphi(\omega) = - \operatorname{arctg} \frac{1 - \omega^2 c}{\omega(a\omega^2 - b)}, \quad (6.54)$$

przy oznaczeniach: $a=T_1T_2T_3$; $b=T_1+T_2+T_3$; $c=T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3$ oraz

$$N = \omega^2(a\omega^2 - b)^2 + (1 - \omega^2c)^2. \quad (6.55)$$

Po przyrównaniu $Q(\omega)$ do zera znaleziono pulsację ω_k , dla której charakterystyka $G_0(j\omega)$ przecina oś Re

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{c}}. \quad (6.56)$$

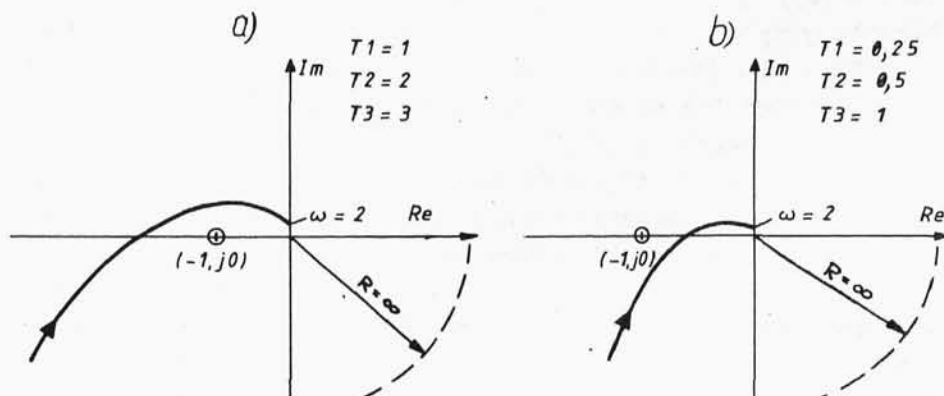
Jeżeli wartości tej odpowiada $P(\omega_k) = -1$, to układ otwarty po zamknięciu znajdzie się na granicy stabilności.

Po podstawieniu (6.56) do (6.52) i przyrównaniu do -1 otrzymano graniczną wartość $k=k_k$, dla której układ po zamknięciu przestaje być stabilny

$$k_k = \frac{b-a/c}{c}. \quad (6.57)$$

Z postaci wzorów (6.56) i (6.57) wynika, że obydwie wartości krytyczne: ω_k i k_k zależą od wartości stałych T_1 , T_2 i T_3 .

Po przyjęciu $k=1$ uzyskano przykładowy wykres fragmentu charakterystyki układu otwartego dla $T_1=1$ s, $T_2=2$ s oraz $T_3=3$ s (rys.6.10a). Dla tych danych układ po zamknięciu będzie niestabilny, ponieważ punkt krytyczny $-1, j0$ jest objęty przez charakterystykę układu otwartego (uzupełnioną ćwierćokręgiem o nieskończenie dużym promieniu). Wynik ten potwierdza uzyskana wartość z (6.57) $k_k=0,4959$, ponieważ $k=1 > k_k=0,4959$. Układ ten będzie stabilny po zamknięciu jeżeli wzmocnienie k zostanie zmniejszone do wartości mniejszej od k_k .



Rys.6.10. Badanie stabilności układów otwartych z astatyzmem pierwszego rzędu: a) układ, który po zamknięciu jest niestabilny; b) układ, który po zamknięciu jest stabilny

Po zmianie wartości stałych na $T_1=0,25$, $T_2=0,5$ oraz $T_3=1$ uzyskano przebieg charakterystyki, która dla $k=1$ nie obejmuje już punktu krytycznego (rys.6.10b), a więc dotyczy układu, który po zamknięciu będzie stabilny.

Ze wzorów (6.52), (6.53) oraz (6.55) wynika, że dla $\omega \rightarrow +0$ $P(\omega) \rightarrow -kb$ oraz $Q(\omega) \rightarrow -\infty$. Charakterystyka układu otwartego dla $\omega \rightarrow +0$ zbliża się do półprostej leżącej w trzeciej ćwiartce, równoległej do osi Im i odległej od niej o kb .

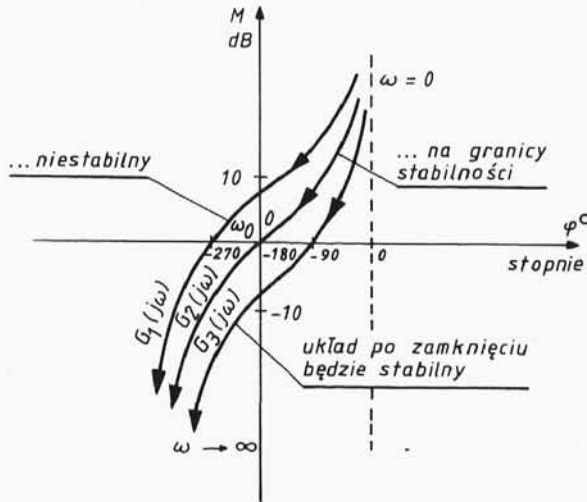
W przykładzie 6.12 omówiono przypadek, w którym przy odpowiednim doborze parametrów można było uzyskać stabilność układu zamkniętego, mimo że układ otwarty był astatyczny. Istnieją jednakże układy, w których żadne zmiany parametrów nie zapewniają stabilności. Na przykład, jeżeli układ otwarty jest szeregowym połączeniem co najmniej dwóch członów całkujących oraz członu inercyjnego dowolnego rzędu, to jego charakterystyka amplitudowo-fazowa (uzupełniona odpowiednim fragmentem okręgu o nieskończenie dużym promieniu) obejmuje punkt krytyczny przy dowolnych (ale dodatnich) wartościach współczynnika wzmocnienia oraz stałych czasowych. Dla zapewnienia stabilności układu jest w tym przypadku niezbędna zmiana jego struktury. Dlatego o takich układach mówi się, że są niestabilne strukturalnie.

Logarytmiczne kryterium Nyquista

Po zastąpieniu modułu $|G_0(j\omega)|$ transmitancji układu otwartego przez $M=20\log|G_0(j\omega)|$ (w decybelach) i wykreśleniu zależności $M(\varphi)$, gdzie $\varphi=\arg G_0(j\omega)$, otrzymuje się logarytmiczną charakterystykę amplitudowo-fazową (Nicholsa), na której odpowiednikiem punktu krytycznego $(-1, j0)$ jest punkt $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$. Kryterium Nyquista można wtedy, z pewnym uproszczeniem, sformułować następująco:

Jeżeli punkt $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$ pozostaje stale po prawej stronie dla obserwatora przemieszczającego się wzdłuż amplitudowo-fazowej charakterystyki logarytmicznej układu otwartego, dla pulsacji ω dążących od 0 do ∞ , to układ po zamknięciu będzie stabilny. Jeżeli punkt ten jest stale po stronie lewej, to układ jest niestabilny, a gdy charakterystyka przechodzi przez punkt krytyczny, to układ jest na granicy stabilności.

Wszystkie te trzy przypadki ilustruje rys.6.11.



Rys.6.11. Charakterystyki Nicholisa

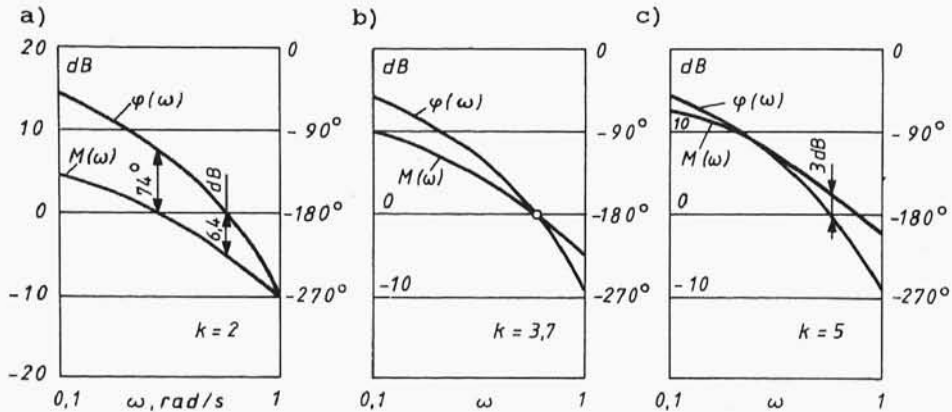
Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe i fazowe wykreslane w funkcji logarytmu pulsacji ω ⁶⁾ są wygodniejsze w zastosowaniach praktycznych od charakterystyk $M(\varphi)$. Przyrosty ω podaje się wtedy zwykle w dekadach, które w skali logarytmicznej są odwzorowane odcinkami o stałej długości. Na charakterystykach takich łatwo jest odczytać ewentualne zapasy stabilności badanego układu, a gdy układ jest niestabilny - podjąć odpowiednie działania, które zapewnią jego stabilność (np. przez wprowadzenie członów korekcyjnych - por. p.7.3).

Na rys.6.12a, b i c podano fragmenty trzech charakterystyk logarytmicznych (tylko dla jednej, najistotniejszej dekady) układu przebadanego w przykładzie 6.11. Układ po zamknięciu jest: stabilny - a, na granicy stabilności - b oraz niestabilny - c. Zastosowano tu takie same stałe czasowe jak w przypadku rys.6.7 ($T_1 = \pi$ s, $T_2 = 2\pi$ s).

Na rys.6.12a można odczytać, że zapas modułu wynosi około 6,4 dB, a zapas fazy - $\Delta\varphi = 74^\circ$.

W przypadku układu niestabilnego z rys.6.12c dla $\varphi = -180^\circ$ wartość modułu jest dodatnia i wynosi ok. 3 dB.

⁶⁾ W literaturze anglosaskiej nazywają je wykresami Bode'go.



Rys.6.12. Logarytmiczne charakterystyki amplitudowe i fazowe:
a) układ po zamknięciu stabilny; b) układ na granicy stabilności;
c) układ niestabilny

Na zakończenie tego przykładu warto zanotować ogólne spostrzeżenie:

Układ otwarty jest po zamknięciu stabilny, gdy:

$$\begin{cases} \text{dla } \varphi(\omega) = -180^\circ & M(\omega) < 0, \\ \text{dla } M(\omega) = 0 \text{ dB} & \varphi(\omega) > -180^\circ. \end{cases}$$

Wykreślanie dokładnych charakterystyk logarytmicznych wymaga żmudnych obliczeń, jeżeli wykonuje się je na kalkulatorze. Stosowana jest więc powszechnie pewna uproszczona metoda, w której charakterystyki $M(\omega)$ zastępuje się odcinkami linii prostych (asymptot przebiegów dokładnych), a przebiegi $\varphi(\omega)$ - szkuje wg pewnych punktów charakterystycznych dla poszczególnych członów. Sposób postępowania wyjaśniony już był w rozdziale 4. Przykłady różnych, rozwiązanych w ten sposób zadań, Czytelnik znajdzie w pracach [2], [5] i [7]. Obecnie znacznie dokładniej i szybciej rozwiązuje się takie zadania przy użyciu komputera. W rozdziale 7 zamieszczono opis programu LOG4, który jest między innymi przeznaczony do tych celów.

Bibliografia

1. Gibson J.E.: Nieliniowe układy sterowania automatycznego. WNT, Warszawa 1968.
2. Kaczorek T.: Teoria układów regulacji automatycznej. Część II, zeszyt 2. WPW, Warszawa 1974.

3. Mazurek J., Vogt H., Żydanowicz W.: Podstawy automatyki. WPW, Warszawa 1983.
4. Нелепин Р.А. (ред.): Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Изд. Наука, Москва 1975.
5. Pełczewski W.: Teoria sterowania. WNT, Warszawa 1980.
6. Thaler G.J., Pastel M.P.: Nieliniowe układy automatycznego sterowania. WNT, Warszawa 1965.
7. Żelazny M.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1967.