

Rys.2.14. Układ drgający o jednym stopniu swobody

(siła) $u(t)$. Ciało osadzone jest na sprężynie liniowej o sztywności k . Rozpraszanie energii drgań modelowane jest siłą proporcjonalną do prędkości ciała, ze współczynnikiem proporcjonalności c . Wyjściem układu jest przemieszczenie ciała $y(t)$. Należy podać modele matematyczne układu: typu wejście-wyjście oraz w przestrzeni stanu.

Model typu wejście-wyjście stanowi równanie ruchu masy m mające postać

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = u. \quad (2.48)$$

Po przyjęciu za zmienne stanu położenia masy $x_1 = y$ oraz jej prędkości $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$ otrzymuje się dwa równania stanu o postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{aligned} \quad (2.49)$$

oraz jedno równanie wyjścia

$$y = x_1. \quad (2.50)$$

Dla określenia zakresu stosowalności modelu matematycznego potrzebna jest w tym przypadku bliższa znajomość rzeczywistego układu, któremu odpowiada przyjęty model fizyczny.

2.4. SYMULACJA KOMPUTEROWA

Jeżeli rozwiązanie analityczne równań stanowiących model matematyczny układu jest niemożliwe lub pracochłonne, to na podstawie modelu matematycznego opracowuje się odpowiedni model symulacyjny, który następnie wykorzystywany jest do studium dynamiki układu na drodze symulacji komputerowej. Symulacja komputerowa jest to rozwiązywanie, metodą całkowania numerycznego, równań stanu opisujących badany układ, dla różnych wymuszeń (sterowań) i różnych warunków początkowych, a także dla różnych wartości parametrów reprezentujących określone własności układu. Podczas tzw. badań symulacyjnych komputer może być również wykorzystywany do takich celów jak:

- analiza i prezentacja graficzna wyników symulacji np. w postaci przebiegów czasowych;
- dokonywanie oceny jakości układu na podstawie wyników symulacji;
- automatyczny dobór zestawu parametru zapewniającego najlepsze własności układu.

Symulacja komputerowa, z uwagi na dużą szybkość obliczeń oraz możliwość stosowania dokładnych modeli matematycznych (bez uproszczeń), jest istotnym uzupełnieniem badań doświadczalnych prowadzonych na modelach laboratoryjnych i prototypach, a ostatnio w coraz szerszym zakresie je zastępuje.

Dla ułatwienia symulacji na komputerach IBM PC opracowano uniwersalny program symulacyjny CSSP oraz jego uproszczoną wersję o nazwie DSP³⁾. Korzystanie z tych programów wymaga szczegółowego zapoznania się z instrukcją ich używania oraz elementarnych wiadomości z programowania w języku Pascal. W niniejszym skrypcie przedstawiono tylko ogólne informacje o tych programach oraz opis przebiegu symulacji wraz z przykładami.

Model symulacyjny opracowany przez użytkownika w postaci procedury Eq, jest zawarty w segmencie CSSPEQ (lub DSPEQ). Równania stanu i inne związki występujące w modelu są zapisane za pomocą następujących symboli:

t - czas,

i - numer zmiennej lub parametru,

y[i], dy[i], y0[i] - zmienne stanu, ich pochodne względem czasu oraz wartości początkowe,

p[i] - parametry modelu,

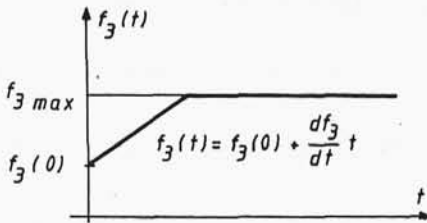
f[i] - zmienne wyjściowe, których wartości są wyznaczone w trakcie symulacji wraz ze zmiennymi stanu.

Sposób przygotowania modelu symulacyjnego i prowadzenia symulacji przy użyciu programu CSSP ilustruje przykład 2.9.

Przykład 2.9

Wykorzystując opracowany w przykładzie 2.7 model matematyczny układu hydraulicznego należy wyznaczyć przebiegi czasowe zmiennych stanu $h_1(t)$ i $h_2(t)$ oraz zmiennej wyjściowej $Q_3(t)$

³⁾ Autorem tych programów jest mgr inż. I. Siwicki z Zakładu Teorii Maszyn i Robotów ITLiMS PW.



wywołane zmianami sygnału sterującego $f_3(t)$ zgodnie z rys.2.15, przy zadanej stałej wartości sygnału wejściowego $Q_1(t)$, dla różnych wariantów początkowych i różnych wartości parametrów geometrycznych.

Rys.2.15. Założony przebieg sygnału wejściowego $f_3(t)$

Zamieszczony niżej wydruk komputerowy przedstawia segment

CSSPEQ zawierający model symulacyjny badanego procesu wraz z komentarzem opisującym znaczenie poszczególnych symboli. Tekst tej procedury znajduje się na dyskietce w zbiorze ZBIORNIK.PAS.

Unit CSSPEQ; {Modelowanie przepływu przez zbiorniki - przykład 2.9 skryptu z DAU.

Zmienne stanu: $y[1]=h_1$, $y[2]=h_2$.

Warunki początkowe: $y_0[1]=0.8m$, $y_0[2]=0.8m$.

Parametry:

$p[1]=F_1=0.1m^3/m$

$p[2]=F_2=0.1m^3/m$

$p[3]=f_2=0.002m^3/m$

$p[4]=ksi_2=1$

$p[5]=ksi_3=1$

$p[6]=f_3(0)=0.001m^3/m$

$p[7]=df_3/dt=0.0001m^3/m/s$

$p[8]=f_{3max}=0.002m^3/m$

$p[9]=Q_1=0.005m^3/s$

Plotted variables:

$y_1=y_1(t)$

$y_2=y_2(t)$

$f[1]=f(t)=10*Q_3(t)$

Axis data: $Xmin=0$; $Xmax=200$; $Ymin=0$; $Ymax=1$

Time of simulation: $tss=0$; $tes=200s$

$2g=19.62$

Adaptował do CSSP - A.Oleńdzki 90-11-15}

INTERFACE

Uses CsspGbs;

PROCEDURE Eq(Init,Equat,Func:boolean);

IMPLEMENTATION

```
FUNCTION SN(x:real):real;
BEGIN
  if x<0 then SN:=-1
  else SN:=1
end;
(** local variables **)
Var
  S,y12,g2:real;
PROCEDURE Eq;
BEGIN {Eq}
  if Init then begin (** initial **)
    g2:=19.62
  end; (** initial **)
  if Equat then begin (** equations **)
    S:=p[6]+p[7]*t;
    if S>p[8] then S:=p[8]
    else if S<0 then S:=0;
    y12:=y[1]-y[2];
    dy[1]:=(p[9]-p[3]*SN(y12)*sqrt(abs(y12)*g2/p[4]))/p[1];
    dy[2]:=(p[3]*SN(y12)*sqrt(abs(y12)*g2/p[4])
      -S*sqrt(g2*y[2]/p[5]))/p[2];
  end; (** equations **)
  if Func then begin (** functions **)
    f[1]:=10*S*sqrt(g2*y[2]/p[5]);
  end; (** functions **)
END;{Eq}
END.{unit CsspEq}
```

Po uruchomieniu programu CSSP na ekranie pojawia się jego tytuł a następnie użytkownik wprowadza dane dotyczące liczby równań (2), liczby parametrów (9), warunków początkowych, wielkości parametrów występujących w równaniach, dopuszczalnych błędów całkowania, wykreślanych przebiegów i nazwy zbioru, w którym zostaną umieszczone wyniki obliczeń.

Wyniki symulacji w trakcie obliczeń są zapamiętywane w pamięci dyskowej, a także są widoczne na ekranie w postaci odpowiednich wykresów. Zmienne stanu badanego układu mogą być wy-

kreślone w funkcji czasu lub we wzajemnych, zdefiniowanych przez użytkownika, relacjach. W trakcie obliczeń wyświetlana jest wartość aktualnego kroku całkowania.

Działanie programu może być w dowolnej chwili przzerwane w celu np. skopiowania wykresów na drukarce, lub też wprowadzenia zmian w danych wejściowych. Następnie obliczenia mogą być kontynuowane od punktu przzerwania, lub ponownie od początku.

Przy symulacjach wymagających bardzo długich czasów obliczeń możliwe jest wykonywanie ich etapami. Obliczenia mogą być w dowolnej chwili przzerwane i następnie kontynuowane w czasie późniejszym.

Wyniki obliczeń mogą być drukowane za pomocą drukarki w postaci danych liczbowych lub też odpowiednich wykresów.

Główna lista rozkazów programu (menu) zawiera następujące komendy:

- 1 - initial conditions - wprowadzanie wartości warunków początkowych.
- 2 - parameters - wartości parametrów występujących w równaniach.
- 3 - time of simulation - wprowadzenie początkowego i końcowego czasu symulacji oraz czasu rejestracji wyników w pamięci dyskowej komputera.

Start of simulation - czas początku symulacji.

End of simulation - czas końca symulacji.

Record time - odstęp czasu pomiędzy kolejnymi rejestracjami wyników w pamięci dyskowej komputera.

Variable - zmienny czas rejestracji wyników. Przy kroku całkowania mniejszym od Record time zapisywanie wyników w pamięci dyskowej oraz wykreślanie ich na ekranie monitora odbywa się z odstępem czasu w przybliżeniu równym Record time, natomiast jeżeli jest on większy od Record time, rejestracja wyników następuje z odstępem czasu równym krokowi całkowania.

Constant - stały czas rejestracji wyników. Zapisywanie wyników w pamięci dyskowej odbywa się stale z odstępem czasu równym dokładnie podanej wartości Record time. Krok całkowania nigdy nie jest większy od Record time, nawet jeżeli pozwalają na to błędy całkowania.

- 4 - errors - dopuszczalne błędy przy całkowaniu. Należy wprowadzić wartości dopuszczalnych błędów całkowania - błędu bezwzględnego AERR oraz błędu względnego RERR. Dopuszczalny całkowity błąd całkowania

$$TERR[i]=AERR+Y[i]*RERR.$$

- 5 - plotted variables - wybór wykreslanych zmiennych $Y[i]$ i funkcji $F[i]$. Możliwe jest wykreślenie na ekranie monitora oraz na ploterze przebiegu wybranych zmiennych $Y[i]$ lub $F[i]$ w zależności od czasu lub innej zmiennej. Dla każdego wykreslanego przebiegu należy wprowadzić nazwy zmiennych odpowiadających osiom X i Y, a w przypadku kart graficznych EGA i VGA także kolor wykreslanej linii. Dostępne kolory wyświetlane są u dołu ekranu.

Np.

No. of plotting line	Axis Y	Axis X	Color
1	Y1	T	10
2	Y2	F1	11

Liczba wykreslanych jednocześnie przebiegów nie może być większa od dziesięciu.

- 6 - axis data - minimalne i maksymalne wartości na osiach wykresu.

Xmin, Xmax - minimalna i maksymalna wartość na osi x wykresu.

Ymin, Ymax - minimalna i maksymalna wartość na osi y wykresu.

- 7 - record file - nazwa zbioru, w którym będą zapisywane wyniki symulacji.

- 8 - start of simulation - rozpoczęcie obliczeń symulacyjnych.

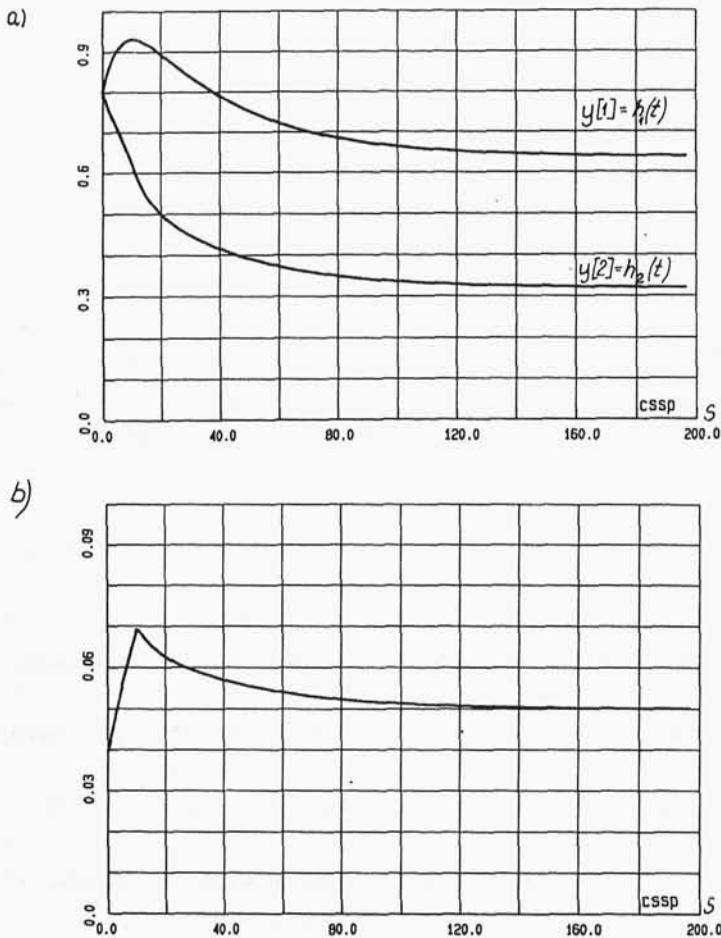
- 9 - cont. of simulation - kontynuacja obliczeń symulacyjnych.

- 10 - diagram - wykreslanie przebiegów wybranych zmiennych $Y[i]$ i $F[i]$ na ekranie monitora.

- 11 - list of simulation results - przedstawienie wyników symulacji w postaci wartości liczbowych.

- 12 - method of integration - wybór metody całkowania Englanda lub Geara (program DSP ver. 1.5).

Na rys.2.16a przedstawiono przebiegi zmiennych stanu $y[1]$ i $y[2]$ w funkcji czasu, wyznaczone w omawianym przykładzie, i odpowiadające przyjętym danym.



Rys.2.16. Przebiegi symulacyjne wyznaczone w przykładzie 2.9:
a) przebiegi $h_1(t)$ i $h_2(t)$, b) przebieg $10Q_3(t)$

Przebieg zmiennej wyjściowej $f[1]$ w funkcji czasu, pokazany na rys.2.16b, został wyświetlony i skopiowany po zakończeniu symulacji i zmianie wartości Y_{max} przy użyciu komendy axis data.

2.5. LINEARYZACJA

Zachowanie się układów liniowych można badać metodami opisanymi w rozdziałach 3, 4 i 5. Nie wymagają one na ogół stosowania symulacji komputerowej, chociaż może się ona okazać wygodnym narzędziem w przypadkach bardziej skomplikowanych.

Układy rzeczywiste są zwykle nieliniowe. Jeżeli jednakże analiza układu dotyczy jego zachowania się w pobliżu pewnego punktu równowagi (punkt pracy) to równania (2.39) i (2.40) można w większości przypadków zastąpić przybliżonymi zależnościami liniowymi. Nazywa się to linearyzacją równań. Linearyzację można zrealizować w sposób, który najłatwiej wyjaśnić na przykładzie dowolnej wielkości z , opisanej nieliniową funkcją zmiennych u, v, \dots, w

$$z = f(u, v, \dots, w), \quad (2.51)$$

przy czym zarówno z , jak i jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są ciągłe w okolicach pewnego punktu (u_0, v_0, \dots, w_0) . Po rozwinięciu funkcji z w szereg Taylora i pominięciu w nim wyrazów nieliniowych, otrzymuje się

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 \Delta u + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_0 \Delta v + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)_0 \Delta w, \quad (2.52)$$

gdzie: $\Delta z = z - z_0$, $z_0 = f(u_0, v_0, \dots, w_0)$, $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$, \dots $\Delta w = w - w_0$.

Ta liniowa zależność jest słuszna tylko dla niewielkich zmian zmiennych u, v, \dots, w . W różnych przypadkach praktycznych zbiór tych zmiennych może oznaczać jedną wielkość fizyczną i jej kolejne pochodne względem czasu (np. u ; $v = \dot{u}$; $w = \ddot{u}$ itd.) lub kilka różnych wielkości i ich pochodnych.

Przykład 2.10

Należy zlinearyzować równanie różniczkowe $z = 2u^2 + u\dot{u} + 2\ddot{u}^2$ w punkcie równowagi (statycznej) $u_0 = 1$. W punkcie takim $\dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = 0$.

Wykorzystując (2.52), otrzymuje się kolejno:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)_0 = (4u + \dot{u})_0 = 4; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \dot{u}} \right)_0 = u_0 = 1; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \ddot{u}} \right)_0 = 4\ddot{u}_0 = 0.$$

Tym samym $\Delta z \approx 4\Delta u + \dot{u}\Delta u$. W punkcie równowagi $z = z_0 = 2$, czyli

$$z \approx z_0 + 4(u - u_0) + \dot{u}(u - u_0) = 2 + 4u - 4 + \dot{u} = \dot{u} + 4u - 2.$$

Przykład 2.11

W przykładzie 2.7 uzyskano nieliniowy model matematyczny układu zbiorników. Należy przeprowadzić linearyzację w punkcie równowagi, w którym wartości sygnałów wejściowych wynoszą, odpowiednio, $Q_{1,0}$ i $f_{3,0}$.

Po oznaczeniu wskaźnikiem "0" wartości zmiennych w punkcie równowagi i wprowadzeniu oznaczeń: $u_1 = Q_1 - Q_{1,0} = \Delta Q_1$; $u_2 = f_3 - f_{3,0} = \Delta f_3$; $x_1 = h_1 - h_{1,0} = \Delta h_1$; $x_2 = h_2 - h_{2,0} = \Delta h_2$; oraz $y = Q_3 - Q_{3,0} = \Delta Q_3$, przeprowadza się kolejno linearyzację zgodnie z (2.52).

Z zależności (2.45) otrzymano

$$y = f_{3,0} \sqrt{\frac{2g}{\xi_3}} \frac{1}{2\sqrt{h_{2,0}}} x_2 + \sqrt{\frac{2gh_{2,0}}{\xi_3}} u_2,$$

czyli zlinearyzowane równanie wyjścia o postaci

$$y = \frac{Q_{3,0}}{2h_{2,0}} x_2 + \frac{Q_{3,0}}{f_{3,0}} u_2, \quad (2.53)$$

a z zależności (2.46) i (2.47) - zlinearyzowane równania stanu

$$\dot{x}_1 = - \frac{Q_{2,0}}{2F_1(h_{1,0} - h_{2,0})} (x_1 - x_2) + \frac{u_1}{F_1}, \quad (2.54)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{Q_{2,0}}{2F_1(h_{1,0} - h_{2,0})} (x_1 - x_2) - \frac{Q_{3,0}(x_2/2h_{2,0} + u_2/f_{3,0})}{F_2}. \quad (2.55)$$

Z zależności (2.42) i (2.43) wynika, że

$$Q_{3,0} = Q_{2,0} = Q_{1,0}. \quad (2.56)$$

Ze wzoru (2.45) otrzymuje się

$$h_{2,0} = \frac{(Q_{1,0}/f_{3,0})^2 \xi_3}{2g}, \quad (2.57)$$

a z (2.44)

$$h_{1,0} = \frac{Q_{1,0}^2 (\xi_2/f_2^2 + \xi_3/f_{3,0}^2)}{2g}. \quad (2.58)$$

Wzory (2.56)+(2.58) są charakterystykami statycznymi badanego układu i określają zależności między sygnałami wejściowymi, a sygnałami wyjściowymi i zmiennymi stanu w stanach ustalonych.

2.6. OPRACOWYWANIE I WERYFIKACJA MODELI

Modelowanie układów istniejących w rzeczywistości lub projektowanych, poprzedzające ich analizę dynamiczną, składa się zwykle z dwóch etapów omówionych w rozdz.1, tzn. z modelowania

fizycznego i modelowania matematycznego. Czasami występuje również etap pośredni, podczas którego model fizyczny o parametrach rozłożonych jest zastępowany modelem dyskretnym o parametrach skupionych. Poza tym, w przypadku stosowania metod komputerowych, końcowym etapem modelowania jest opracowanie programu symulacyjnego.

Etapem najważniejszym i często najtrudniejszym jest modelowanie fizyczne. Bardzo uproszczony model fizyczny może bowiem pomijać istotne cechy układu rzeczywistego, a zbyt dokładny prowadzi do znacznych, czasem niemożliwych do przewyżczenia, trudności matematycznych i ekonomicznych związanych z długim czasem obliczeń. Dlatego też opracowanie właściwego modelu fizycznego wymaga intuicji i znacznego doświadczenia. Duża różnorodność i złożoność układów rzeczywistych powoduje, że nie istnieją żadne uniwersalne "recepty" tworzenia modeli fizycznych. W literaturze [1,2] można znaleźć jedynie pewne wskazówki dotyczące metodyki postępowania oraz wykaz najczęściej stosowanych założeń upraszczających.

Modelowanie rozpoczyna się od określenia zjawisk fizycznych zachodzących w układzie rzeczywistym, które są istotne ze względu na cel zamierzonych badań. Na tej podstawie ustala się zbiór zmiennych wyjściowych⁴⁾ (wektor $y(t)$), których przebiegi czasowe opisują badany proces oraz zbiór zmiennych wejściowych (wektor $u(t)$) wpływających na przebieg procesu ale *niezależnych od jego stanu*. Tylko przy spełnieniu ostatniego (wyróżnionego) warunku układ jest wyodrębniony z otoczenia i może być rozpatrywany oddzielnie. Często warunek ten jest spełniony z pewnym przybliżeniem. Na przykład napięcie na wejściu silnika elektrycznego zmienia się pod wpływem zmian jego obciążenia, ale przy modelowaniu wpływ ten jest pomijany, co pozwala traktować napięcie jako sygnał wejściowy.

Do typowych uproszczeń stosowanych przy modelowaniu układów mechanicznych należą:

1. Traktowanie pewnych elementów jako brył idealnie sztywnych lub mas skupionych, a niektórych jako nieważkich.

⁴⁾ Przyjęte w modelu zmienne wyjściowe nie muszą być sygnałami wyjściowymi układu rzeczywistego, działającymi na inne układy.

2. Zakładanie liniowych charakterystyk elementów sprężystych i tłumiących.
3. Pomijanie mało istotnych oddziaływań między układem a otoczeniem, np. oporu powietrza.
4. Pomijanie mało istotnych oddziaływań między poszczególnymi elementami układu, np. sił tarcia.
5. Przyjmowanie uśrednionych wartości parametrów w przypadku kiedy ich zmiany zachodzące w czasie (niestacjonarność) nie mają istotnego wpływu na zachowanie się układu.
6. Pomijanie wpływu zakłóceń przypadkowych mających postać szumu nałożonego na sygnał zdeterminowany.

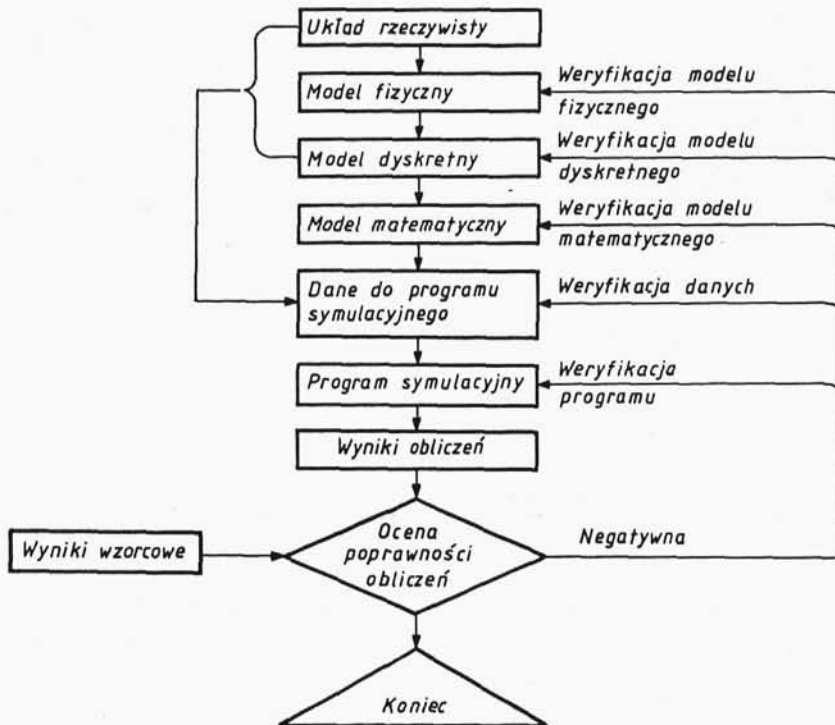
Na podstawie przyjętego modelu fizycznego opracowuje się następnie sformalizowany opis procesu, czyli jego model matematyczny. Korzysta się tu z praw fizyki, takich jak podstawowe prawa mechaniki, równania bilansu energii itp. W przypadku kiedy w modelu fizycznym występują wszystkie wymienione wyżej uproszczenia otrzymuje się prosty model matematyczny np. w postaci zwyczajnego liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach, którego rozwiązanie i analiza nie następuje trudności. W przypadkach bardziej skomplikowanych celowe jest opracowanie programu symulacyjnego i prowadzenie badań przy użyciu komputera. Dotyczy to przede wszystkim układów, których modele fizyczne zawierają elementy o parametrach rozłożonych. Obecnie coraz częściej stosuje się programy komputerowe, które dla takich układów tworzą automatycznie modele dyskretnie metodą elementów skończonych. Spotyka się również programy służące do automatycznego tworzenia modeli matematycznych w postaci równań stanu⁵⁾.

Istotnym problemem występującym podczas modelowania jest wyznaczenie wartości liczbowych parametrów modelu matematycznego. Tylko w niektórych prostych przypadkach ich wartości można wyznaczyć na podstawie danych występujących np. w dokumentacji technicznej urządzenia. Zwykle wartości te wyznacza się doświadczalnie na podstawie tzw. identyfikacji parametrycznej.

⁵⁾ W Zakładzie TMR został np. opracowany przez dr inż. C. Rzymkowskiego pakiet programów zapewniający automatyczne tworzenie modelu symulacyjnego robotów przemysłowych z napędem hydraulicznym i pneumatycznym.

Czasami identyfikacja ma charakter bardziej ogólny i polega na opracowaniu na podstawie danych doświadczalnych zarówno modelu matematycznego układu, jak i jego parametrów. Jest ona często stosowana w automatyce przy modelowaniu złożonych procesów technologicznych, dla których opracowanie modelu fizycznego jest bardzo trudne. Poprawność opracowanych modeli sprawdza się, porównując wyniki obliczeń z wynikami wzorcowymi, za które uważa się wyniki doświadczalne lub otrzymane innymi metodami obliczeniowymi uznanymi za poprawne. Błędne wyniki obliczeń mogą być spowodowane dużymi uproszczeniami w modelu fizycznym lub matematycznym albo błędami programu komputerowego. Dlatego też poszczególne modele powinny podlegać weryfikacji.

W przypadku ogólnym modelowanie przebiega wg schematu przedstawionego na rys.2.17. Zarys postępowania przy tworzeniu modelu fizycznego i matematycznego oraz ich weryfikacji ilustruje zamieszczony przykład.

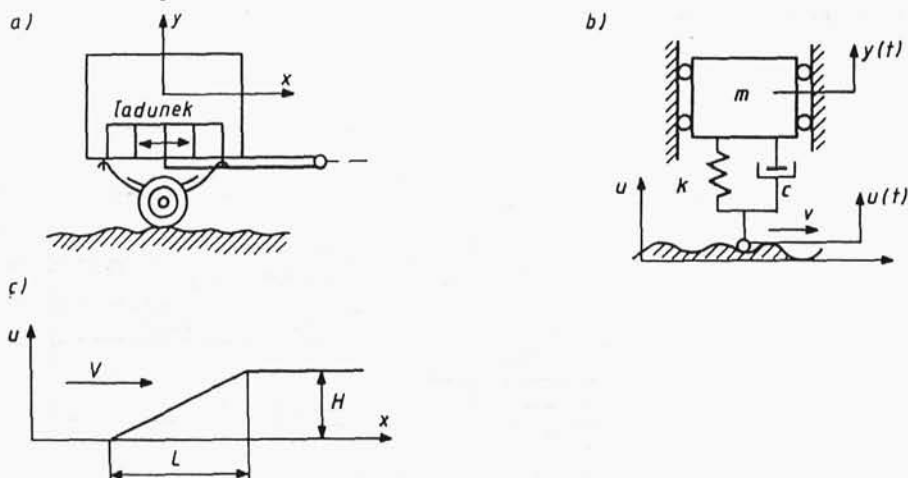


Rys.2.17. Schemat tworzenia modeli i ich weryfikacji

Przykład 2.12

Rozpatruje się układ w postaci jednoosiowej przyczepy samochodowej pokazanej schematycznie na rys.2.18a. W układzie rzeczywistym występują nieresorowane masy kół na pneumatykach, resory (zwykle nieliniowe, co oznacza, że siła resoru nie jest proporcjonalna do ugięcia), podatna skrzynia o masie rozłożonej i ładunek, który może się przemieszczać. Na przyczepę oddziałują nierówności drogi i ciągnący samochód. Układ rzeczywisty ma nieskończenie wiele stopni swobody a jego ruch jest przestrzenny.

Należy opracować model matematyczny układu pozwalający ocenić przydatność przyczepy do przewożenia aparatury wrażliwej na wstrząsy. Wymaga się, aby podczas transportu amplitudy składowych harmonicznym przyspieszenia w zakresie niskich częstotliwości ($\omega < \omega_q$) nie przekraczały wartości dopuszczalnych.



Rys.2.18. Przykład modelowania: a) układ rzeczywisty, b) model fizyczny, c) rampa będąca źródłem testowego wymuszenia

Model fizyczny

W rozważanym przypadku istotne są drgania przyczepy o kierunku pionowym i niskich częstotliwościach wymuszane nierównościami drogi. Tym samym uzasadnione jest przyjęcie prostego modelu fizycznego o jednym stopniu swobody określonym współrzędną y (rys.2.18b). W modelu tym masę skrzyni i ładunku zastąpiono jedną masą skupioną m, pomijając masę kół jako małą w porówna-

niu z pozostałymi⁶⁾. Własności sprężyste pneumatyków i resorów zastąpiono nieważką sprężyną o stałej sztywności k , a tłumienie w układzie - tłumikiem liniowym o stałej c . Oddziaływanie ciągnącego pojazdu pominięto.

Wejściem do układu jest sygnał $u(t)$ - profil drogi, wyjściem - przyspieszenie $\ddot{y}(t)$ masy skupionej.

Model matematyczny

Z zasady d'Alemberta wynika równanie: $m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{u}) + k(y - u) = 0$. Równanie to po uporządkowaniu zgodnie z (2.41) przybiera postać

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{u} + ku. \quad (2.59)$$

Jest to model matematyczny wg schematu z rys.2.18b. Nieznane są w nim chwilowo wartości liczbowe parametrów m , c i k . Masę m można przyjąć równą łącznej masie ładunku i skrzyni, a sztywność k - wyznaczyć statycznie, po zmierzeniu ugięcia skrzyni Δy w kierunku y pod działaniem znanej zmiany obciążenia ΔP ($k = \Delta P / \Delta y$). Najtrudniejszy do oszacowania parametr c można wyznaczyć po zarejestrowaniu drgań swobodnych skrzyni z ładunkiem w kierunku osi y . Nie wnikając tu w szczegóły podaje się tylko zarys postępowania. Przyczepę wprowadza się w drgania pionowe (np. metodą "rozhuśtania") i rejestruje jej drgania pionowe w funkcji czasu. Na uzyskanym w ten sposób wykresie wybiera się dwa sąsiednie przemieszczenia maksymalne o tym samym znaku: y_1 oraz y_2 i oblicza stosunek $b = y_1 / y_2$. Z teorii drgań wynika, że dla układu liniowego o modelu z rys.2.18b $c = 2\sqrt{k/m} \ln b$. Obliczona z tego wzoru wartość może posłużyć za oszacowanie parametru c w badanym układzie. Doświadczenie to można również wykorzystać do sprawdzenia zgodności częstotliwości ω_0 drgań własnych modelu - w przybliżeniu $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - z częstotliwością podstawową drgań własnych przyczepy. Uzyskany w ten sposób model należy zweryfikować doświadczalnie w celu sprawdzenia, czy odpowiedź uzyskiwana z modelu odtwarza z dostateczną dokładnością wyjście układu rzeczywistego. W tym przypadku można to zrealizować w stosunkowo łatwy sposób, najeżdżając ze stałą, niezbyt dużą

⁶⁾ W instrukcji programu symulacyjnego DSP zamieszczony jest przykład EQ2, dotyczący modelowania zawieszenia samochodu, w którym uwzględniono masę kół przyjmując model fizyczny o dwóch stopniach swobody. Zaleca się Czytelnikowi zapoznanie się z tym przykładem.

prędkością v na rampę (rys.2.18c) o małej wartości stosunku H/L i mierząc pionowe przyspieszenia skrzyni $\ddot{y}(t)$.

Wymuszenie pionowe u oraz \dot{u} działające na układ można opisać następująco, oznaczając przez t_1 chwilę najazdu na rampę

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_1, \\ vtH/l & \text{dla } t_1 \leq t \leq L/v+t_1, \\ H & \text{dla } t > L/v+t_1, \end{cases}$$

$\dot{u}(t)=vH/L$ dla $t_1 \leq t \leq L/v+t_1$ oraz $\dot{u}(t)=0$ poza tym przedziałem. Jest to oczywiście opis uproszczony, bo skokowe zmiany prędkości v w chwili $t=t_1$ oraz $t=t_1+L/v$, wynikające z profilu rampy, zostaną odpowiednio zmodyfikowane przez rzeczywiste pneumatyki i rzeczywiste wymuszenia działające na układ będą się w tych chwilach różniły od podanego opisu.

Zarejestrowany doświadczalnie przebieg $y(t)$ lub $\ddot{y}(t)$ porównuje się z rozwiązaniem równania (2.59) uzyskanym dla opisanego wyżej wymuszenia. W tym prostym przypadku można je jeszcze uzyskać analitycznie. Jeżeli rozwiązanie takie różni się ilościowo od wyniku doświadczenia, to należy zmodyfikować model matematyczny przez wprowadzenie odpowiednio zmienionych wartości parametrów m , c i k . Przy wystąpieniu rozbieżności jakościowych może być konieczna zmiana struktury modelu fizycznego, tzn. zwiększenie jego liczby stopni swobody lub uwzględnienie nieliniowości.

Bibliografia

1. Cannon R.H.: Dynamika układów fizycznych. WNT, Warszawa 1973.
2. Gawroński W., Kuszkeski J. i in.: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji.
3. Jaworski J.: Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1975.
4. Kaczorek T.: Teoria sterowania. Tom I. PWN, Warszawa 1977.
5. Markowski A., Kostro J., Lewandowski A.: Automatyka w pytaniach i odpowiedziach. WNT, Warszawa 1979.
6. Morecki A., Nazarczuk K.: Zarys miernictwa dynamicznego wielkości mechanicznych. WPW, Warszawa 1981.