

3.3. TRANSMITANCJA WIDMOWA, CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE I WYZNACZANIE ODPOWIEDZI USTALONYCH NA WYMUSZENIE HARMONICZNE

W przypadku wymuszenia okresowego interesujący jest zwykle nie cały przebieg sygnału wyjściowego, ale odpowiedź po zaniknięciu procesu przejściowego. Wyznaczenie odpowiedzi ustalonej z zależności $y=L^{-1}[U(s)G(s)]$, dla czasu dążącego do nieskończoności jest bardzo kłopotliwe. Nie można bowiem w tym przypadku korzystać z twierdzenia o wartości końcowej, ponieważ nie istnieje granica $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Dlatego też stosuje się tu inną metodę polegającą na korzystaniu z tzw. charakterystyk częstotliwościowych określających odpowiedzi ustalone na wymuszenia harmoniczne.

Analityczny sposób wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych podany jest niżej.

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego (2.41), jak wiadomo z teorii liniowych równań różniczkowych, jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego opisuje proces przejściowy, który z czasem zanika, jeżeli układ jest stabilny³⁾. W tym przypadku rozwiązanie szczególne opisuje ustalony proces wymuszony, czyli odpowiedź ustaloną na sygnał wejściowy. Szczególnie ważny jest przypadek, kiedy sygnał wejściowy jest harmoniczną funkcją czasu określona wzorem

$$u = u_m \cos(\omega t + \psi), \quad (3.32)$$

gdzie u_m jest amplitudą, a ψ - kątem fazowym.

Dla wygody sygnał ten przedstawiony jest w postaci

$$u = \frac{u_m}{2} [e^{j(\omega t + \psi)} + e^{-j(\omega t + \psi)}] = U_1 e^{j\omega t} + U_{-1} e^{-j\omega t}, \quad (3.32a)$$

gdzie:

$$U_1 = \frac{u_m}{2} e^{j\psi} \quad \text{oraz} \quad U_{-1} = \frac{u_m}{2} e^{-j\psi},$$

³⁾ Liniowy układ jest stabilny wtedy, kiedy wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego mają ujemne części rzeczywiste. Analiza stabilności jest przedstawiona w rozdziale 6.

są amplitudami zespolonymi sygnału wejściowego $u(t)$, które opisano w rozdz.2.2.2.

Rozwiązanie szczególne równania (2.41) przewiduje się również w postaci funkcji harmonicznnej o tej samej pulsacji ω i o nie znanych na razie: amplitudzie y_m i kącie fazowym γ

$$y = y_m \cos(\omega t + \gamma) = y_1 e^{j\omega t} + y_{-1} e^{-j\omega t}, \quad (3.33)$$

gdzie

$$y_1 = \frac{y_m}{2} e^{j\gamma} \quad \text{oraz} \quad y_{-1} = \frac{y_m}{2} e^{-j\gamma},$$

są amplitudami zespolonymi. Wprowadzając (3.32a) i (3.33) do (2.41) otrzymuje się równanie

$$\begin{aligned} & [a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0] y_1 e^{j\omega t} + \\ & + [a_n(-j\omega)^n + \dots + a_1(-j\omega) + a_0] y_{-1} e^{-j\omega t} = \\ & = [b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0] u_1 e^{j\omega t} + \\ & + [b_m(-j\omega)^m + \dots + b_1(-j\omega) + b_0] u_{-1} e^{-j\omega t}, \end{aligned}$$

które jest spełnione dla dowolnej chwili t tylko wtedy, kiedy współczynniki przy $e^{j\omega t}$ oraz $e^{-j\omega t}$ po obydwu stronach równania są sobie równe, tzn. kiedy zachodzą związki

$$\frac{y_1}{u_1} = G(j\omega) \quad (3.34)$$

oraz

$$\frac{y_{-1}}{u_{-1}} = G(-j\omega), \quad (3.34a)$$

gdzie

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = G(s) \Big|_{s=j\omega}. \quad (3.35)$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że stosunek amplitudy zespolonej odpowiedzi ustalonej $y(t)$ na harmoniczne wymuszenie $u(t)$ do amplitudy zespolonej tego wymuszenia jest funkcją zmiennej $j\omega$, którą można otrzymać z wyrażenia na transmitancję

operatorową $G(s)$, podstawiając $s=j\omega$. Funkcja ta nosi nazwę transmitancji widmowej. Jest ona nieparzysta względem zmiennej $j\omega$ i dla dodatnich wartości ω przedstawia stosunek Y_1/U_1 , który można wyrazić za pomocą wzoru

$$G(j\omega) = \frac{Y_1}{U_1} = \frac{Y_m}{U_m} e^{j(\gamma-\psi)}. \quad (3.36)$$

Natomiast dla ujemnych wartości ω transmitancja widmowa przedstawia stosunek zespolonych amplitud sprzężonych z Y_1 i U_1 tzn. Y_{-1}/U_{-1} .

Transmitancję widmową zapisuje się zwykle w postaci

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3.37)$$

gdzie:

$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$ - moduł transmitancji widmowej,

$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ - argument transmitancji widmowej.

Ze wzorów (3.34), (3.36) i (3.37) wynika, że moduł transmitancji widmowej równa się stosunkowi amplitudy y_m odpowiedzi ustalonej do amplitudy u_m wymuszenia

$$|G(j\omega)| = \frac{y_m}{u_m}, \quad (3.38)$$

a argument transmitancji widmowej równa się kątowi przesunięcia fazowego między odpowiedzią ustaloną $y(t)$ i sygnałem wejściowym $u(t)$

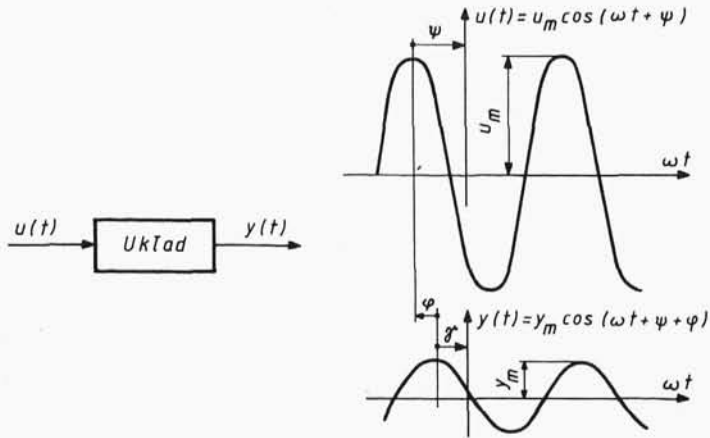
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \gamma - \psi. \quad (3.39)$$

Często przyjmuje się $\psi=0$ i wtedy $\gamma=\varphi$.

Z przeprowadzonych wyżej rozważań wynika również, że odpowiedź ustalona na sygnał harmoniczny $u=u_m \sin(\omega t)$ ma postać

$$y = y_m \sin[\omega t + \varphi(\omega)], \quad (3.40)$$

gdzie: y_m i $\varphi(\omega)$ są określone przez wzory (3.38) i (3.39). Aby to wykazać wystarczy przyjąć we wzorze (3.32) $\psi=-\pi/2$. Na rys.3.4 przedstawiono przykład wymuszenia harmonicznego $u(t)$ i odpowiedzi ustalonej układu $y(t)$. Przykład ten dotyczy typowego przypadku, kiedy $\varphi(\omega)<0$, tzn. kiedy ustalony sygnał wyjściowy jest opóźniony w stosunku do wymuszenia.



Rys.3.4. Przechodzenie sygnału harmonicznego przez układ liniowy w stanie ustalonym

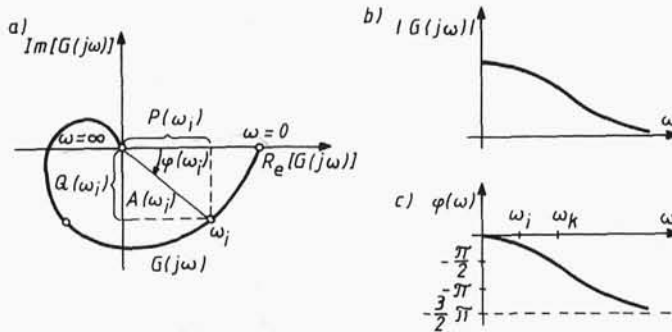
Wykres transmitancji widmowej $G(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej nazywa się charakterystyką amplitudowo-fazową lub charakterystyką Nyquista. Każdy punkt tego wykresu odpowiada innej pulsacji ω i reprezentuje liczbę zespoloną, której moduł $|G(j\omega)|$ oznacza stosunek amplitudy odpowiedzi ustalonej do amplitudy wymuszenia, a argument $\varphi(\omega)$ przesunięcie fazowe między odpowiedzią a wymuszeniem. Przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej podano na rys.3.5a. Zamiast wykresu $G(j\omega)$ można podać oddzielnie wykres $|G(j\omega)|$ zwany amplitudową charakterystyką częstotliwościową (rys.3.5b) oraz wykres $\varphi(\omega)$ zwany fazową charakterystyką częstotliwościową (rys.3.5c).

Charakterystyki amplitudowe i fazowe są często przedstawiane we współrzędnych logarytmicznych i noszą następujące nazwy:

- logarytmiczna charakterystyka amplitudowa $M(\omega) = 20 \log |G(j\omega)|$, gdzie $M(\omega)$ wyrażona jest w dB⁴⁾,
- logarytmiczna charakterystyka fazowa $\varphi(\omega)$.

⁴⁾ Bel i decybel są legalnymi jednostkami wzmocnienia i tłumienia należącymi do układu SI. Bel jest to takie wzmocnienie (tłumienie), przy którym podwojony logarytm dziesiętny stosunku dwóch wartości U_1 i U_2 wielkości proporcjonalnej do pierwiastka kwadratowego z mocy (np. napięcia, prądu, ciśnienia) jest równy jedności

$$1 \text{ B} \triangleq \left[2 \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right) = 1 \right], \quad 1 \text{ dB} = 0,1 \text{ B} \triangleq \left[20 \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_2} \right) = 1 \right].$$



Rys.3.5. Typowy przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej a) i charakterystyk częstotliwościowych: b) amplitudowej, c) fazowej

Na tych wykresach, zwanych charakterystykami Bodego podziałka częstotliwości ω jest logarytmiczna, dekadowa tzn. każdej dekadzie⁵⁾ odpowiada odcinek o jednakowej długości.

Charakterystyki częstotliwościowe wyznacza się analitycznie, wykorzystując wzory (3.35), (3.38) i (3.39) lub doświadczalnie. Najprostszy sposób doświadczalnego wyznaczania tych charakterystyk polega na doprowadzaniu na wejściu układu sygnału harmonicznego o nastawianej częstotliwości i pomiarze, np. za pomocą oscyloskopu, amplitud sygnałów wejściowego i wyjściowego oraz kąta przesunięcia fazowego między tymi sygnałami przy różnych częstotliwościach.

Przykład 3.3

Na układ rozważany w przykładzie 3.2 działa wymuszenie $u = u_m \sin(\omega t) \cdot 1(t)$, gdzie $u_m = 2$, $\omega = 0,5 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1}$. Należy wyznaczyć:

- przebieg sygnału wyjściowego (rozwiązanie ogólne równania różniczkowego);
- przebieg ustalonego sygnału wyjściowego (rozwiązanie szczególne równania różniczkowego), wykorzystując wyniki punktu a);
- przebieg ustalonego sygnału wyjściowego wykorzystując transmitancję widmową.

⁵⁾ Dekada, oktawa i tercja są względnymi miarami częstotliwości. Jednej dekadzie odpowiada stosunek częstotliwości równy 10, oktawie - równy 2, a tercji $\sqrt[3]{2}$.

Transmitancja operatorowa rozważanego układu wyraża się wzorem $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$, gdzie $T=20$ s. Odpowiedź układu wyznacza się korzystając z przekształcenia Laplace'a

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{u_m \omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Rozkładając na ułamki proste wyrażenie

$$\frac{1}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)} = \frac{A}{Ts+1} + \frac{Bs+C}{s^2 + \omega^2} = \frac{As^2 + A\omega^2 + BTs^2 + Bs + CTs + C}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)},$$

otrzymuje się $A+BT=0$, $B+CT=0$, $A\omega^2+C=1$, skąd

$$A = \frac{T^2}{T^2\omega^2+1}, \quad B = -\frac{T}{T^2\omega^2+1}, \quad C = \frac{1}{T^2\omega^2+1} \quad \text{oraz}$$

$$Y(s) = \frac{u_m \omega}{T^2\omega^2+1} \left(\frac{T^2}{Ts+1} - \frac{Ts}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right).$$

Następnie korzystając z tablicy 3.1, wyznacza się

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

gdzie:

$$y_1(t) = u_m \frac{T\omega}{T^2\omega^2+1} e^{-t/T}$$

opisuje proces przejściowy, ponieważ $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$, natomiast

$$y_2(t) = \frac{u_m}{T^2\omega^2+1} \left(\sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t) \right)$$

opisuje ustalony sygnał wyjściowy. Wyrażenie w nawiasie można sprowadzić do postaci

$$\sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t) = \sqrt{T^2\omega^2+1} \sin(\omega t + \varphi),$$

gdzie $\varphi = \arctg(-T\omega)$.

Stąd

$$y_2(t) = \frac{u_m}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} \sin[\omega t - \arctg(T\omega)].$$

Odpowiedź ustaloną można wyznaczyć znacznie szybciej na podstawie charakterystyk częstotliwościowych. Korzystając ze wzorów (3.38)+(3.40) otrzymuje się od razu odpowiedź ustaloną w postaci

$$y_2(t) = u_m A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)],$$

gdzie: $A(\omega) = |G(j\omega)|$; $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$.

$A(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ wyznacza się na podstawie wzoru określającego transmitancję widmową w następujący sposób

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1}{jT\omega + 1} \frac{-jT\omega + 1}{-jT\omega + 1} = \frac{1}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

$$\text{gdzie: } P(\omega) = \frac{1}{T^2\omega^2 + 1}; \quad Q(\omega) = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Stąd

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(T^2\omega^2 + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg(T\omega).$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymuje się

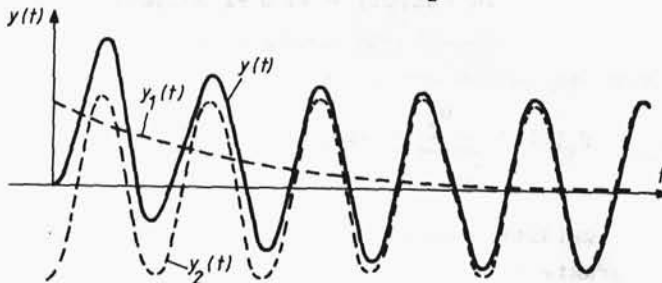
$$y_1(t) = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 20}{20^2 \cdot 0,5^2 + 1} e^{-t/20} = 0,198 e^{-0,05t},$$

$$A(0,5) = \frac{1}{\sqrt{20^2 \cdot 0,5^2 + 1}} = 0,0995,$$

$$\varphi(0,5) = -\arctg(20 \cdot 0,5) = -1,471,$$

$$y_2(t) = 0,199 \sin(0,5t - 1,471).$$

Na rys.3.6 przedstawiono liniami przerywanymi przebiegi $y_1(t)$ i $y_2(t)$, a linią ciągłą przebieg $y(t)$. Dla czasu $t > 3T$ przebieg przejściowy $y_1(t)$ praktycznie zanika i przebieg sygnału wyjściowego ustala się, tzn. $y(t) \approx y_2(t)$.



Rys.3.6. Przebieg składowej przejściowej $y_1(t)$ i składowej ustalonej $y_2(t)$ odpowiedzi układu na wymuszenie harmoniczne

3.4. PRZECHODZENIE SYGNAŁÓW OKRESOWYCH I NIEOKRESOWYCH PRZEZ UKŁADY LINIOWE

Korzystając z zasady superpozycji, można wyznaczyć odpowiedź ustaloną układu liniowego na dowolne wymuszenie okresowe. Wymaga to znajomości charakterystyk częstotliwościowych układu oraz widma częstotliwości wymuszenia. Jeżeli okresowy sygnał wejściowy jest przedstawiony w postaci szeregu Fouriera

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} U_n e^{jn\omega_1 t},$$

gdzie:

ω_1 - częstotliwość podstawowa sygnału wejściowego,

$U_n = |U_n| e^{j\psi_n}$ - amplituda zespolona n-tej harmonicznej sygnału wejściowego,

to ustalony sygnał wyjściowy można przedstawić również w postaci szeregu Fouriera określonego wzorem

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (3.41)$$

gdzie:

$$Y_n = U_n G(jn\omega_1) = |Y_n| e^{j\gamma_n} \quad (3.42)$$

oznacza amplitudę zespoloną n-tej harmonicznej sygnału wyjściowego.

Widmo amplitudowe sygnału wyjściowego jest określone przez związek

$$|Y_n| = |U_n| |G(jn\omega_1)|, \quad (3.43)$$

który oznacza, że amplituda n-tej harmonicznej sygnału wyjściowego równa się iloczynowi amplitudy n-tej harmonicznej sygnału wejściowego przez moduł transmitancji widmowej układu dla częstotliwości $\omega = n\omega_1$.

Natomiast widmo fazowe sygnału wyjściowego określa wzór

$$\gamma_n = \arg Y_n = \arg U_n + \arg G(jn\omega_1). \quad (3.44)$$

Kąt fazowy γ_n n-tej harmonicznej sygnału wyjściowego jest więc równy sumie kąta fazowego n-tej harmonicznej sygnału wejściowe-

go i argumentu transmitancji widmowej układu dla częstotliwości $\omega = n\omega_1$.

Przedstawione wyżej zależności mają charakter ogólny i można z nich korzystać niezależnie od tego czy stosuje się szereg Fouriera w postaci trygonometrycznej (2.15) czy wykładniczej (2.16).

Podobne zależności można również wyprowadzić dla sygnałów nieokresowych przenoszonych przez układ liniowy. Porównując wzór określający przekształcenie Fouriera

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

ze wzorem wyrażającym przekształcenie Laplace'a

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

można łatwo zauważyć, że w przypadku kiedy $f(t)=0$ dla $t<0$ zamiana s na $j\omega$ w transformacie $F(s)$ prowadzi bezpośrednio do wzoru na transformatę Fouriera $F(j\omega)$, tzn.

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}. \quad (3.45)$$

Pozwala to otrzymywać widmo częstotliwości sygnałów nieokresowych bezpośrednio z tablic transformat Laplace'a. Na przykład, dla funkcji $x(t)=1(t)\sin(\omega_1 t)$

$$X(s) = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 + s^2}, \quad \text{stąd} \quad F(j\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Należy jednak zwrócić uwagę, że zależność (3.45) jest słuszna tylko wtedy, kiedy całka Laplace'a określająca transformatę $F(s)$ jest zbieżna dla $s=j\omega$, tzn. dla $\text{Re } s=0$. W przeciwnym przypadku nie istnieje transformata Fouriera $F(j\omega)$.

Założenie, że transformata $F(s)=L[f(t)]$ jest zbieżna dla $\text{Re } s=0$ jest równoważne założeniu, iż bieguny⁶⁾ funkcji $F(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . W przy-

⁶⁾ Biegunem funkcji $f(s)$ nazywa się punkt s_k , dla którego $\lim_{s \rightarrow s_k} |F(s)| = \infty$.

padku transformaty mającej postać ilorazu dwóch wielomianów $F(s)=M(s)/N(s)$ wszystkie pierwiastki wielomianu $N(s)$ mają wtedy ujemne części rzeczywiste. Na przykład dla funkcji $f(t)=1(t)e^{at}$ gdzie $a>0$, jest

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

Jedyny biegun $F(s)$ tzn. $s=a$ leży w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s , co oznacza, że funkcji $f(t)=1(t)e^{at}$ nie można przedstawić za pomocą całki Fouriera.

Wzór (3.45) pozwala w łatwy sposób wyznaczyć widmo odpowiedzi układu liniowego na sygnał wymuszający o znanym widmie. Transformata $Y(s)$ odpowiedzi układu o transmitancji operatorowej $G(s)$ na sygnał $u(t)$ wyraża się wzorem $Y(s)=U(s)G(s)$. Jeżeli istnieje transformata Fouriera sygnału wejściowego $u(t)$ i układ jest stabilny, to wszystkie bieguny funkcji $Y(s)$ leżą po lewej stronie osi urojonej. Zgodnie ze wzorem (3.45) można więc zapisać

$$Y(j\omega) = U(j\omega)G(j\omega), \quad (3.46)$$

gdzie: $Y(j\omega)$ i $U(j\omega)$ są transformatami Fouriera sygnału wyjściowego $y(t)$ i wejściowego $u(t)$, a $G(j\omega)$ jest transmitancją widmową.

Zależności między widmem częstotliwości sygnału wyjściowego i wejściowego określają wtedy związki

$$|Y(j\omega)| = |U(j\omega)||G(j\omega)|, \quad (3.47)$$

$$\arg Y(j\omega) = \arg U(j\omega) + \arg G(j\omega). \quad (3.48)$$

Bibliografia

1. P.De Larminat, Y.Thomas: Automatyka, układy liniowe. t.1. Sygnały i układy. WNT, Warszawa 1983.
2. A.Morecki, K.Nazarczuk: Zarys miernictwa dynamicznego wielkości mechanicznych. WPW, Warszawa 1981.
3. M.Żelazny: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1978.
4. T.Trajdos-Wróbel: Matematyka dla inżynierów. WNT, Warszawa 1965.