

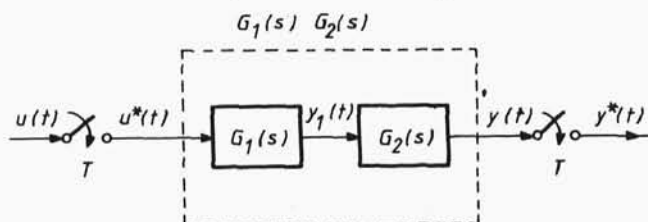
Nieformalność zapisu prawej strony równania (8.36) polega na tym, że transformacji Z można poddać funkcję czasu $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ a nie transformatę Laplace'a $G(s)$. Stosując jednak tę skróconą formę wynik przykładu można zapisać jako

$$G(z) = Z[G_1(s)] Z[G_2(s)]. \quad (8.37)$$

Przykład 8.7

Dla układu przedstawionego na rys.8.6 otrzymano

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z[Y^*(t)]}{Z[U^*(t)]} = Z\left\{\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)G_2(s)]\right\} = Z[G_1(s)G_2(s)]. \quad (8.38)$$



Rys.8.6. Połączenie szeregowe dwóch członów ciągłych i dwóch impulsatorów

Z porównania przykładów 8.6 i 8.7 wynika, że dla różnych rozmieszczeń impulsatorów w układzie otrzymuje się różne impulsowe transmitancje zastępcze.

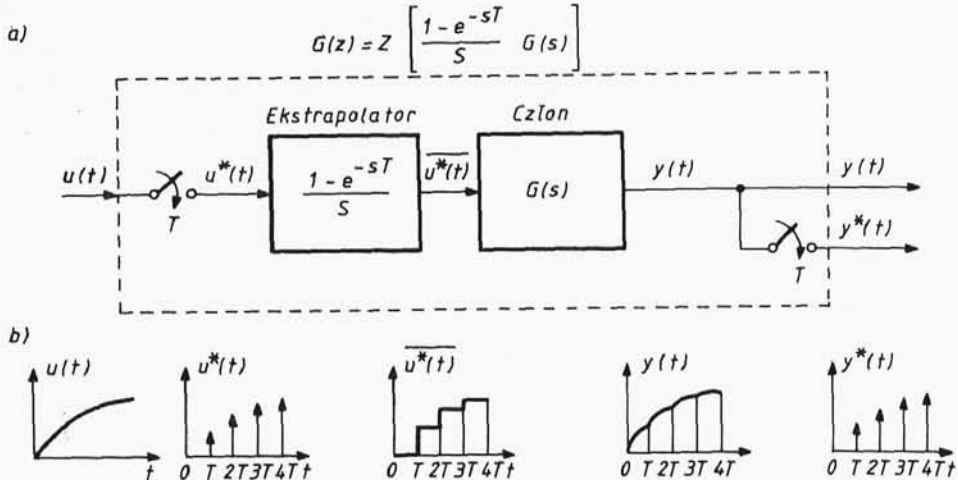
8.8. MODELE MATEMATYCZNE DYSKRETYCH CZŁONÓW PODSTAWOWYCH

W układach dyskretnych istnieją odpowiedniki modeli członów podstawowych znanych z układów ciągłych. Opisuja one fragmenty układu, których fizyczne realizacje są następujące:

- człon realizowany jest "w maszynie cyfrowej" w postaci równania różnicowego zapisanego odpowiednim programem, lub
- człon ciągły jest włączony w układ dyskretny w sposób pokazany na rys.8.7.

Zazwyczaj rozważany człon poprzedzany jest dodatkowym członem zwanym ekstrapolatorem (członem podtrzymującym), którego zadaniem jest filtrowanie szumów wysokoczęstotliwościowych pojawiających się w układzie na skutek procesu impulsowania. Niefiltrowane szumy zakłócałyby proces sterowania lub regulacji. Najczęściej stosuje się ekstrapolatory zerowego rzędu, których transmitancja operatorowa ma postać

$$G_e(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}, \quad (8.39)$$



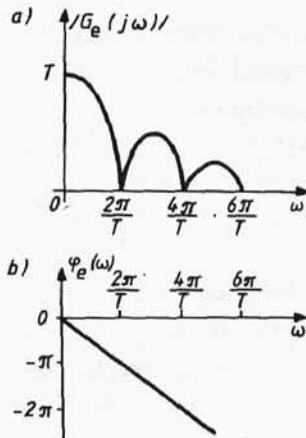
Rys.8.7. Ciągły człon o transmitancji $G(s)$ poprzedzony ekstrapolatorem zerowego rzędu: a) schemat blokowy, b) sygnały

gdzie T musi być takie, jak okres próbkowania. Podstawiając $s=j\omega$ i dokonując odpowiednich przekształceń otrzymuje się charakterystyki: amplitudowa

$$|G_e(j\omega)| = T \left| \operatorname{si} \frac{\omega T}{2} \right| \quad (8.40)$$

i fazowa

$$\varphi_e(\omega) = -\omega \frac{T}{2} \quad (8.41)$$



Rys.8.8. Charakterystyki częstotliwościowe ekstrapolatora zerowego rzędu: a) amplitudowa, b) fazowa

ekstrapolatora zerowego rzędu. Charakterystyki (8.40) i (8.41) pokazano na rys.8.8. Przebieg charakterystyki amplitudowej potwierdza, że człon ten silnie tłumi wyższe harmoniczne.

Przykład 8.8

Wyznaczyć charakterystykę impulsową ekstrapolatora zerowego rzędu (rys.8.7a), czyli jego odpowiedź na wymuszenie sygnałem wejściowym o postaci $u^*(t) = \delta(t)$, gdzie $\delta(t)$ - impuls jednostkowy o transformacie Laplace'a $U^*(s) = 1$

Ze wzoru (8.34) wynika

$$\bar{U}^*(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} U^*(s). \quad (8.42)$$

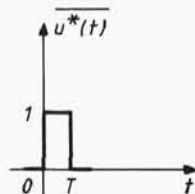
Dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a równania (8.42) otrzymuje się

$$\overline{u^*(t)} = L^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT} \right],$$

skąd

$$\overline{u^*(t)} = 1(t) - 1(t-T). \quad (8.43)$$

Wykres zależności (8.43) pokazano na rys.8.9. Z charakterystyki tej wynika zasada działania ekstrapolatora zerowego rzędu, który ciąg impulsów $u^*(t)$ przekształca w funkcję schodkową $\overline{u^*(t)}$.



Rys.8.9. Charakterystyka impulsowa ekstrapolatora zerowego rzędu

W układzie przedstawionym na rysunku 8.7 zachodzi związek

$$U(z) = Z[u(t)] = Z[u^*(t)] = Z[\overline{u^*(t)}].$$

Powyższe wynika z tego, że w chwilach próbkowania $u(t)=u^*(t)=\overline{u^*(t)}$. Tak więc transmitancja dyskretna ekstrapolatora zerowego rzędu $G_0(z)=1$. Można to potwierdzić dowodem analitycznym, a mianowicie

$$G_0(z) = Z[G_0(s)] = Z\{L^{-1}[G_0(s)]\}.$$

Przekształcając dalej otrzymuje się

$$G_0(z) = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}\right]\right\} = Z[1(t)-1(t-T)],$$

a po wykorzystaniu zależności (8.22)

$$G_0(z) = Z[1(t)] - z^{-1} Z[1(t)] = (1-z^{-1}) Z[1(t)],$$

czyli

$$G_0(z) = (1-z^{-1}) \frac{z}{z-1} = 1.$$

Przykład 8.9

Dla układu pokazanego na rys.8.7a znaleźć zależność między transformatami Z sygnału wyjściowego $Y(z)=Z[y(t)]=Z[y^*(t)]$ i wejściowego $U(z)$ przy zerowych warunkach początkowych.

Szeregowe połączenie ekstrapolatora i członu pozwala na zastosowanie wyniku przykładu 8.7, wzór (8.38). Na tej podstawie otrzymano

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= Z \left[\frac{1-e^{-sT}}{s} G(s) \right] = Z \left[\frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s} e^{-sT} \right] = \\ &= Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] - Z \left[\frac{G(s)}{s} e^{-sT} \right]. \end{aligned}$$

Do drugiego składnika sumy można zastosować wzór (8.22) dla $n=1$, skąd

$$G(z) = Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] - z^{-1} Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] = (1-z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right]. \quad (8.44)$$

Z równania (8.39) wynika, że

$$Y(z) = (1-z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] U(z). \quad (8.45)$$

Dokonując odwrotnego przekształcenia Z powyższego równania dla danego $U(z)$ można otrzymać równanie różnicowe opisujące związek między $y^*(t)$ a $u^*(t)$ (lub $y(n)$ i $u(n)$ dla czasu bezwymiarowego). Oczywiście równanie to nie opisuje jednoznacznie związku między $y(t)$ a $u(t)$, co wynika z omawianej poprzednio niejednoznaczności przekształcenia Z^{-1} .

Przykład 8.10

Wyznaczyć równanie różnicowe i następnie charakterystykę skokową układu pokazanego na rys.8.7 w przypadku gdy

$$G(s) = \frac{k}{T_1 s + 1}.$$

Na podstawie (8.44) otrzymuje się transmitancję impulsową dyskretnego członu inercyjnego

$$G(z) = (1-z^{-1}) Z \left[\frac{k}{s(T_1 s + 1)} \right] = (1-z^{-1}) Z \left[k \frac{\frac{1}{T_1}}{s \left(s + \frac{1}{T_1} \right)} \right].$$

W tablicach transformat Z znaleziono

$$Z \left[\frac{a}{s(s+a)} \right] = \frac{z}{z-1} \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}. \quad (8.46)$$

Stosując powyższe do omawianego przypadku, otrzymano

$$G(z) = (1-z^{-1}) k \frac{z}{z-1} \frac{1-\beta}{z-\beta} = \frac{Y(z)}{U(z)},$$

gdzie: $\beta = e^{-T/T_1}$. Po dokonaniu dalszych przekształceń

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = k \frac{1-\beta}{z-\beta} = \frac{k (1-\beta) z^{-1}}{1-z^{-1}\beta}, \quad (8.47)$$

a po uporządkowaniu otrzymano

$$Y(z) - \beta z^{-1} Y(z) = k (1-\beta) z^{-1} U(z). \quad (8.48)$$

Stosując twierdzenie o przesunięciu opisane wzorem (8.22) dokonano odwrotnego przekształcenia Z obu stron równania (8.48), skąd

$$y(n) - \beta y(n-1) = k (1-\beta) u(n-1),$$

czyli

$$y(n) = \beta y(n-1) + k (1-\beta) u(n-1). \quad (8.49)$$

Równanie różnicowe (8.49) opisuje związek między sygnałami wyjściowym $y^*(t)$ i wejściowym $u^*(t)$. Jego postać jest dogodna do wyznaczenia odpowiedzi na dowolne wymuszenia (przy zerowych warunkach początkowych) metodą rekurencyjną (patrz przykład 8.1). Warto zwrócić uwagę na przekształcenie (8.47). Podzielono tam licznik i mianownik przez największą potęgę zmiennej z w mianowniku (w tym przypadku pierwszą). Dzięki temu po lewej stronie równania (8.49) uzyskano $y(n)$. Gdyby tego nie zrobiono, to po lewej stronie (8.49) byłoby $y(n+1)$. Równanie byłoby oczywiście nadal słuszne, ale przedstawiałoby sytuację w czasie przesuniętą o jeden okres próbkowania w lewo.

Charakterystykę skokową badanego układu można wyznaczyć w postaci analitycznej. Z zależności (8.47) wynika

$$Y(z) = k \frac{1-\beta}{z-\beta} U(z).$$

Przyjmując, że $U(z)$ jest transformatą dyskretnego skoku jednostkowego (patrz wzór 8.28) otrzymano

$$y(n) = k (1-\beta) z^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)(z-\beta)} \right].$$

Stosując wzór (8.31) znajduje się postać analityczną charakterystyki skokowej dyskretnego członu inercyjnego pierwszego rzędu w układzie jak na rys.8.7 (z ekstrapolatorem na wejściu)

$$y(n) = k \cdot (1-\beta) \cdot 1(n). \quad (8.50)$$

Tablica 8.2

Modele matematyczne wybranych dyskretnych członów podstawowych
(z uwzględnieniem ekstrapolatora zerowego rzędu na wejściu)

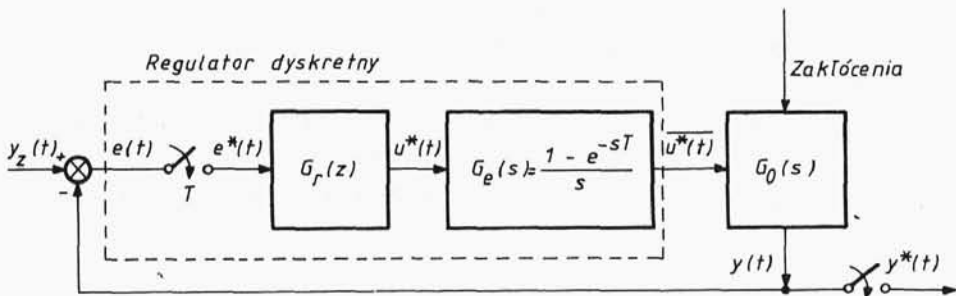
Nazwa członu	Transmitancja impulsowa $G(z)=$	Równanie różnicowe $y(n)=$	Uwagi
Proporcjonalny	k	$k u(n)$	k-wzmocnienie statyczne członu
Inercyjny rzędu pierwszego	$\frac{k \cdot (1-\beta) \cdot z^{-1}}{1-z^{-1}\beta}$	$\beta y(n-1) + k \cdot (1-\beta) \cdot u(n-1)$	$\beta = e^{-T/T_1}$ T-okres próbkowania T_1 -stała inercji
Całkujący	$\frac{T}{T_i} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$y(n-1) + \frac{T}{T_i} u(n-1)$	T_i -stała całkowania
Różniczkujący idealny	$\frac{T_d}{T} (1-z^{-1})$	$\frac{T_d}{T} [u(n)-u(n-1)]$	T_d -stała różniczkowania
Różniczkujący z inercją rzędu pierwszego	$\frac{1}{\alpha} \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}\beta^*}$	$\beta^* y(n-1) + \gamma [u(n)-u(n-1)]$	$\beta^* = e^{-T/T_d}$ $\alpha = \text{const}$ $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ dla $T_d \neq 0$ $\gamma = 0$ dla $T_d \rightarrow 0$
Opóźniający	z^{-1}	$u(n-1)$	Uwaga! Gdy $G(z)=z^{-2}$ to $y(n)=u(n-2)$, itd.

Porównując otrzymany wynik (8.50) ze wzorem (8.32) z przykłądu 8.4 można stwierdzić, że szeregowo przyłączenie ekstrapolatora zerowego rzędu na wejście ciągłego członu inercyjnego nie zmienia charakteru odpowiedzi (przebieg z komponentą wykładniczą, $y(0)=0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n)=k$), chociaż wartości liczbowe w odpowiednich chwilach n są różne.

W tablicy 8.2 zestawiono transmitancje dyskretne i równania różnicowe wybranych modeli dyskretnych członów podstawowych.

8.9. REGULATORY DYSKRETNE

Na rys.8.10 przedstawiono schemat blokowy typowego układu regulacji dyskretnej, w którym regulator dyskretny (np. cyfrowy) współpracuje w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego z obiektem ciągłym.



Rys.8.10. Schemat blokowy układu regulacji dyskretnej: $y_z(t)$ - wartość zadana, $y(t)$ - wielkość regulowana, $e(t)$ - uchyb regulacji

Regulatorem cyfrowym jest zazwyczaj komputer wraz z odpowiednimi urządzeniami wejścia i wyjścia. Urządzenie wejściowe (impulsator) próbkuję⁴⁾ ciągły sygnał uchybu $e(t)$. Amplitudy ciągu impulsów $e^*(t)$ stanowią dane wejściowe do programu zapisanego w pamięci operacyjnej komputera w postaci równania różnicowego typu (8.6). Z równania tego można wyprowadzić transmitancję dyskretną regulatora $G_r(z)$. Wynikiem działania programu jest sygnał $u^*(t)$ przesyłany do ekstrapolatora, gdzie przetwa-

⁴⁾ Impulsator stanowi zazwyczaj fragment urządzenia wejściowego zwanego przetwornikiem analogowo-cyfrowym.

rzany jest na sygnał schodkowy $\overline{u^*(t)}$. Należy podkreślić, że procesor komputera i ekstrapolator muszą pracować w takcie o okresie T zgodnym z impulsatorem.

Impulsowanie na wejściu regulatora powoduje powstawanie szumów wysokoczęstotliwościowych w torze głównym układu. Są one tłumione przez ekstrapolator i przez inercyjność obiektu. Nie-wytłumiona część szumów trafia jednak do pętli sprzężenia zwrotnego i może zakłócać proces regulacji. Z tego powodu w torze sprzężenia zwrotnego stosuje się niekiedy człon inercyjny pierwszego rzędu jako filtr analogowy (nie zastosowano go w układzie pokazanym na rys.8.10). Z doświadczenia wynika, że stała czasowa filtru winna być nie mniejsza niż $\frac{T}{2}$ (gdzie T - okres próbkowania). Nie może być też zbyt duża, gdyż pogarsza to jakość regulacji. Oprócz (lub zamiast) filtru analogowego w pętli sprzężenia zwrotnego można zastosować do tłumienia szumów filtr cyfrowy w torze głównym w postaci dodatkowego programu zapisanego w pamięci operacyjnej komputera.

Podstawowym typem regulatora dyskretnego⁵⁾, podobnie jak w układach ciągłych, jest regulator proporcjonalno-sumująco-różnicujący (PID). Równanie różniczkowo-całkowe idealnego regulatora ciągłego PID można wyprowadzić z jego transmitancji operatorowej (patrz rozdz.7). Ma ono postać

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (8.51)$$

gdzie k_p , T_i , T_d - stałe, nastawy regulatora.

Można wykazać, że analogonem równania (8.51) jest w przypadku dyskretnym równanie różnicowe o postaci

$$u(n) = k_p \left[e(n) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^n e(j) + T_d \frac{e(n) - e(n-1)}{T} \right]. \quad (8.52)$$

Poszczególne składniki prawej strony równania (8.52) odpowiadają kolejno akcjom: proporcjonalnej, sumującej i różnicującej. Ze wzoru (8.52) wynika, że akcja sumująca jest przybliżonym

⁵⁾ W przypadku gdy regulator zbudowany jest z układów cyfrowych, to nazywa się regulatorem cyfrowym.

całkowaniem (z uwzględnieniem podziałki $\frac{k_p}{T_1}$) metodą sumowania pól prostokątów o podstawie T i wysokości e_j , a akcja różnicowania polega na przybliżaniu pochodnej za pomocą różnicy wstecznej (z uwzględnieniem podziałki $k_p T_d$).

Ze wzoru (8.52) wynika, że w regulatorze dyskretnym akcje sumowania i różnicowania zależą jawnie od okresu próbkowania T . Jeżeli regulator zrealizowany jest jako program zapisany w maszynie cyfrowej, to między poszczególnymi akcjami nie ma sprzężenia (interakcji), co jak wiadomo jest często spotykaną wadą regulatorów ciągłych.

Transformując kolejno poszczególne składniki równania (8.52) przy zerowych warunkach początkowych otrzymuje się

$$Z[u(n)] = U(z), \quad (8.53)$$

$$Z[k_p e(n)] = k_p E(z), \quad (8.54)$$

$$Z\left[\frac{k_p T}{T_1} \sum_{j=0}^n e(j)\right] = k_p \frac{T}{T_1} \frac{z}{z-1} E(z), \quad (8.55)$$

$$\begin{aligned} Z\left[k_p T_d \frac{e(n) - e(n-1)}{T}\right] &= \frac{k_p T_d}{T} \left\{ Z[e(n)] - Z[e(n-1)] \right\} = \\ &= \frac{k_p T_d}{T} \left\{ E(z) - z^{-1} E(z) \right\} = \frac{k_p T_d}{T} \frac{z-1}{z} E(z). \end{aligned} \quad (8.56)$$

Przekształcenie (8.55) otrzymuje się z własności (8.20) przekształcenia Z . Należy podkreślić, że wzór (8.55) opisujący akcję sumującą rozważanego regulatora idealnego nie jest tożsamy ze wzorem opisującym działanie idealnego ciągłego członu całkującego poprzedzonego ekstrapolatorem zerowego rzędu (patrz tablica 8.2).

Wykorzystując transformaty (8.53)+(8.56) wyznacza się transmitancję dyskretną idealnego regulatora dyskretnego PID

$$G_r(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = k_p \left[1 + \frac{z}{z-1} \frac{T}{T_1} + \frac{z-1}{z} \frac{T_d}{T} \right]. \quad (8.57)$$

Przykład 8.11

Wyznaczyć odpowiedź $u(n)$ idealnego regulatora dyskretnego PID na wymuszenie dyskretną funkcją skokową $e(n) = e_0 1(n)$.

Ze wzoru (8.57) wynika

$$U(z) = G_r(z) E(z). \quad (8.58)$$

Z treści zadania wiadomo, że

$$E(z) = e_0 \frac{z}{z-1}. \quad (8.59)$$

Podstawiając do (8.58) zależności (8.57) i (8.59) otrzymano

$$U(z) = k_p e_0 \left[\frac{z}{z-1} + \frac{T}{T_i} \frac{z^2}{(z-1)^2} + \frac{T_d}{T} \frac{1}{z-1} \right]. \quad (8.60)$$

Odwrotna transformacja Z powyższego równania prowadzi do zależności

$$u(n) = k_p e_0 \left\{ Z^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] + \frac{T}{T_i} Z^{-1} \left[\frac{z^2}{(z-1)^2} \right] + \frac{T_d}{T} Z^{-1} [1] \right\}. \quad (8.61)$$

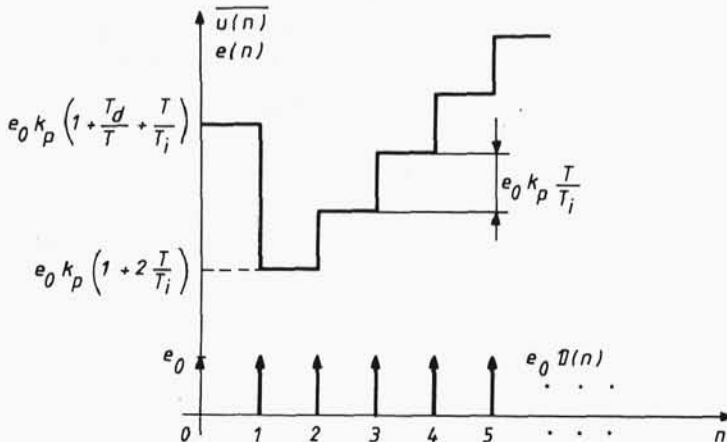
W tablicach transformat znaleziono

$$Z^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = 1(n),$$

$$Z^{-1} \left[\frac{z^2}{(z-1)^2} \right] = Z^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} \right] = n \cdot 1(n) + 1(n) = (n+1) \cdot 1(n),$$

$$Z^{-1} [1] = \delta(0) \cdot 1(n),$$

gdzie $\delta(0)$ - impuls Diraca w chwili $n=0$.



Rys.8.11. Charakterystyka skokowa idealnego liniowego regulatora dyskretnego PID

Ostatecznie otrzymuje się

$$u(n) = k_p e_0 \left[1 + \frac{T}{T_i} (n+1) + \frac{T_d}{T} \delta(0) \right] 1(n). \quad (8.62)$$

Charakterystykę skokową regulatora (8.62) w postaci funkcji schodkowej $\overline{u(n)}$ (po przejściu sygnału przez ekstrapolator) przedstawiono na rys.8.11. Przez odpowiedni dobór nastaw $k_p \frac{T}{T_i}$ oraz $k_p \frac{T_d}{T}$ można wyłączać akcje sumującą lub różnicującą otrzymując w zależności od potrzeb regulatory typu P, PI lub PD.

8.10. STABILNOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH

8.10.1. Podstawy teoretyczne

Pojęcie stabilności układu dyskretnego jest analogiczne do stabilności układu ciągłego. W praktyce inżynierskiej przyjmuje się, że liniowy układ dyskretny jest stabilny, jeżeli każdemu ograniczonemu sygnałowi wejściowemu odpowiada zawsze ograniczony sygnał wyjściowy.

Dokonując obustronnej transformacji Z przy zerowych warunkach początkowych równania (8.6) opisującego jednowymiarowy liniowy układ dyskretny można wyznaczyć dla tego układu transmiencję dyskretną o postaci

$$G(z) = \frac{M(z)}{N(z)}, \quad (8.63)$$

gdzie:

$$N(z) = c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + \dots + c_{p-1} z + c_p. \quad (8.64)$$

Wielomian p-tego rzędu zmiennej z (8.64) przyrównany do zera jest równaniem charakterystycznym równania różnicowego (8.6). Z teorii równań różnicowych wiadomo, że rozwiązanie równania uproszczonego (dla $\varphi(n)=0$) (8.6) można przedstawić w postaci

$$y(n) = \sum_{\nu=1}^p \alpha_{\nu} z_{\nu}^n, \quad (8.65)$$

gdzie: z_{ν} - pierwiastki równania charakterystycznego, α_{ν} - współczynniki.

Jeżeli pierwiastki te spełniają warunek

$$|z_v| \leq 1, \quad (8.66)$$

to każdy ze składników sumy (8.65) jest ograniczony dla $n \rightarrow \infty$.
Badanie stabilności liniowego układu dyskretnego sprowadza się zatem do sprawdzenia, czy pierwiastki równania charakterystycznego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z leżą wewnątrz okręgu o promieniu równym jedności.

Podobnie jak dla układów ciągłych, do badania stabilności liniowych układów dyskretnych stosuje się opracowane do tego celu kryteria.

8.10.2. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista, znane z teorii układów ciągłych, można także stosować do badania stabilności układów dyskretnych, których opis matematyczny jest znany lub znana jest uzyskana doświadczalnie charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego

$$G_{otw}(j\omega) = G_{otw}(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}, \quad (8.67)$$

gdzie: T - okres próbkowania.

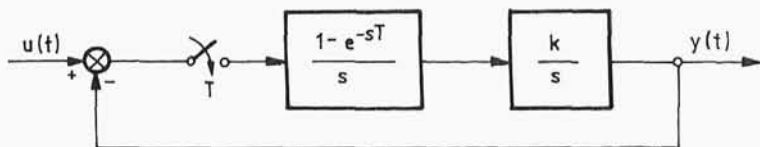
Oczywiście charakterystykę taką uzyskuje się doświadczalnie dla częstotliwości sygnału wejściowego $u(t)$ nastawianych w przedziale $0 \leq \omega \leq \omega_g$, gdzie ω_g - jak w punkcie 8.2.

Kryterium stabilności Nyquista dla zamkniętych układów dyskretnych sformułowane jest tak samo jak dla układów ciągłych:

Jeżeli układ otwarty jest stabilny, to układ zamknięty będzie stabilny asymptotycznie, jeżeli hodograf wektora (8.67) przy zmianie częstotliwości ω od 0 do $\omega_g = \frac{\pi}{T}$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Przykład 8.12

Za pomocą kryterium Nyquista zbadać jaki związek muszą spełniać wartości parametrów k (stała rozbiegu) i T (okres impulsowania) aby zamknięty układ regulacji impulsowej przedstawiony na rys.8.12 był stabilny asymptotycznie.



Rys.8.12. Schemat blokowy układu regulacji z przykładu 8.12

Transmitancja operatorowa części ciągłej układu otwartego opisana jest zależnością

$$G_0(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{k}{s^2}.$$

Transmitancję impulsową układu otwartego wyznacza się, stosując przekształcenie opisane w przykładzie 8.9 (wzór 8.44) oraz korzystając z tablicy 3.1

$$G_0(z) = Z[G_0(s)] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{k}{s^2}\right] = \frac{z-1}{z} k \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{kT}{z-1}. \quad (8.68)$$

Równanie charakterystyczne układu otwartego ma więc postać

$$z-1 = 0.$$

Pierwiastek tego równania spełnia warunek (8.66), układ otwarty jest stabilny.

Na podstawie (8.67) i (8.68) transmitancję widmową otwartego układu impulsowego opisuje zależność

$$G_0(j\omega) = \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{kT}{\cos(\omega T) + j\sin(\omega T) - 1} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (8.69)$$

gdzie:

$$P(\omega) = -\frac{kT}{2},$$

$$Q(\omega) = \frac{kT}{2} \frac{\sin(\omega T)}{1 - \cos(\omega T)}.$$

Dla danych $k = \text{const}$ i $T = \text{const}$

$$P(\omega) = \text{const} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_g,$$

$$Q\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0$$

oraz

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Q(\omega) = 0.$$

Przy wyprowadzaniu tej ostatniej zależności należy skorzystać z reguły de l'Hospitala.

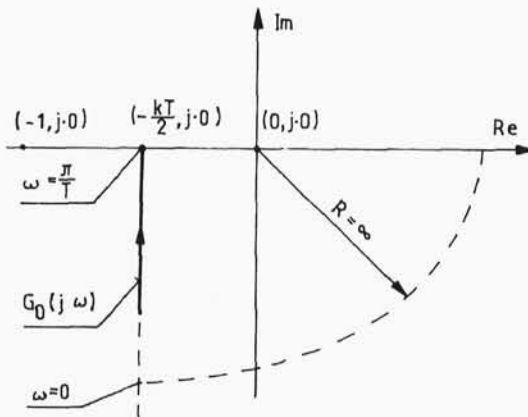
Na rys.8.13 przedstawiono wykres transmitancji widmowej (8.69) układu otwartego, z którego wynika, że układ zamknięty będzie stabilny (charakterystyka nie obejmuje punktu $-1, j0$), jeżeli

$$\frac{kT}{2} < 1,$$

czyli

$$T < \frac{2}{k}.$$

Niniejszy przykład ilustruje bardzo ważną cechę układów dyskretnych: stabilność układu zależy między innymi od czasu próbkowania T .



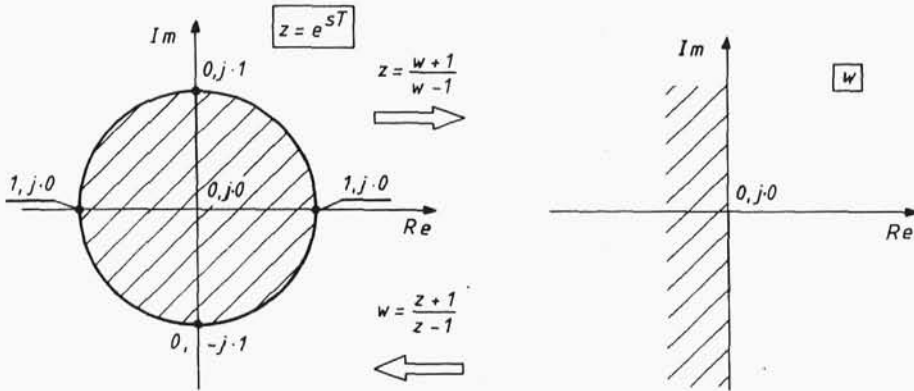
Rys.8.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego z przykładu 8.12

8.10.3. Inne kryteria stabilności

Do badania stabilności liniowych układów dyskretnych można stosować także kryteria algebraiczne: Routha-Hurwitza lub Mardena [1].

W celu zastosowania pierwszego z nich należy przekształcić konforemnie koło o promieniu jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z na lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej w (rys.8.14). Przekształcenie to ma postać

$$z = \frac{w+1}{w-1}. \quad (8.70)$$



Rys.8.14. Odzworowanie koła o promieniu jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z na lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej w

Podstawiając (8.70) do (8.64) otrzymuje się, po wykonaniu zazwyczaj bardzo zmuśnych przekształceń, wielomian $N(w)$, którego stopień względem zmiennej w jest także równy p . Im wyższy stopień p , tym bardziej zmuśne jest przekształcanie konforemne. Wielomian $N(w)$ bada się następnie metodą opisaną w p.6.3.2.

Kryterium Mardena nie wymaga przekształcenia konforemne. Polega ono na bezpośrednim badaniu współczynników równania (8.64) za pomocą procedury podobnej do stosowanej w kryterium Routha-Hurwitza.

Jednakże badanie stabilności za pomocą kryteriów algebraicznych nie pozwala na ocenę zapasu stabilności układu. Dlatego bardziej celowe jest stosowanie kryterium Nyquista bądź postępowanie polegające na wyznaczaniu pierwiastków równania charakterystycznego za pomocą dowolnego programu komputerowego w celu stwierdzenia jak usytuowane są one względem brzegu obszaru stabilności czyli okręgu o promieniu jednostkowym.

Przykład 8.13

Zbadać stabilność liniowego układu dyskretnego o transmissji impulsowej

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 2}{z^4 - 1,5z^3 + 1,83z^2 - 1,101z + 0,218}$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$z^4 - 1,5z^3 + 1,83z^2 - 1,101z + 0,218 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są: $z_1=0,3-j$; $z_2=0,3+j$; $z_3=0,5$; $z_4=0,4$. Moduły dwóch pierwszych pierwiastków $|z_1|=|z_2|=\sqrt{1,09}=1,044$ są większe od jedności - układ jest niestabilny.

Przykład 8.14

Zbadać stabilność, w przypadku gdy transmitancja impulsowa ma postać

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 2}{z^4 - 1,5z^3 + 1,64z^2 - 0,93z + 0,18}.$$

W tym przypadku pierwiastkami równania charakterystycznego są: $z_1=0,3-0,9j$; $z_2=0,3+0,9j$; $z_3=0,5$; $z_4=0,4$. Moduły wszystkich pierwiastków są mniejsze od jedności - układ jest stabilny, chociaż moduły dwóch pierwszych pierwiastków $|z_1|=|z_2|=\sqrt{0,9}\approx 0,95$ wskazują na to, że leżą one blisko brzegu obszaru stabilności.

8.11. REGULACJA IMPULSOWA

Przykład 8.15

W układzie regulacji nadążnej, którego schemat blokowy pokazano na rys.8.10 zastosowano jedną z możliwych wersji dyskretnego regulatora PID rzeczywistego o transmitancji impulsowej

$$G_r(z) = k + k \frac{T}{T_i} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{k}{\alpha} \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}\beta^*}. \quad (8.71)$$

Model matematyczny tego regulatora utworzono przez zsumowanie (równoległe połączenie) zamieszczonych w tablicy 8.2 modeli członów dyskretnych proporcjonalnego, całkującego i rzeczywistego różniczkującego. Można łatwo wykazać, że charakterystyka skokowa tego regulatora jest podobna do charakterystyki regulatora idealnego, pokazanej na rys.8.11. Regulator współpracuje z obiektem o transmitancji

$$G_o(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}. \quad (8.72)$$

Pomiędzy regulatorem i obiektem jest umieszczony szeregowo ekstrapolator zerowego rzędu o transmitancji (8.39).