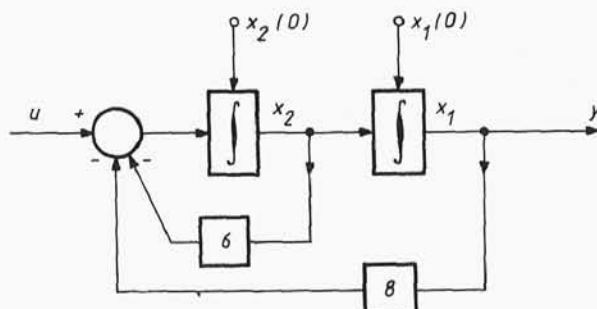


Schemat układu pokazano na rys.5.15. Stan układu jest drugiego rzędu, a równaniami stanu są

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 8x_2 + u.$$

Ze schematu analogowego nie wynika niebezpieczeństwo nieograniczonego wzrostu sygnałów.



Rys.5.15. Drugi wariant schematu analogowego do przykładu 5.8

Po zastosowaniu uproszczenia zgubiono więc ważną informację o układzie fizycznym, a zatem drugie rozwiązanie zadania jest niepoprawne.

5.2. ROZWIĄZYWANIE LINIOWYCH RÓWNAŃ STANU

Czasowe przebiegi zmiennych stanu i wyjścia, przy znanym stanie początkowym $\underline{x}(t_0)$ w chwili t_0 i sterowaniu $u(t)$, można wyznaczyć drogą symulacji komputerowej lub przez rozwiązanie równań stanu. Ten drugi sposób jest zawsze możliwy dla układów liniowych. W związku z tym, że zapis macierzowy jest wygodny w zastosowaniu do układów wysokiego rzędu, rozwiązywanie równań stanu zostanie przedstawione za pomocą tego zapisu. Zapis taki pozwala ponadto na uniknięcie żmudnych obliczeń "ręcznych" po zastosowaniu maszyn cyfrowych i wykorzystaniu bibliotek rachunku macierzowego.

W pierwszej kolejności zostanie przedstawione rozwiązanie równań stanu przy zerowym wymuszeniu, czyli równania jednorodnego o postaci

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0. \quad (5.61)$$

Elementy macierzy \underline{A} są całkowalnymi funkcjami czasu a więc układ jest niestacjonarny. Jeżeli wektory $\underline{x}_1(t)$, $\underline{x}_2(t)$... $\underline{x}_n(t)$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (5.61), to macierz \underline{X} , której kolumny są wektorami \underline{x}_i jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\dot{\underline{X}} = \underline{A}(t)\underline{X}. \quad (5.62)$$

Macierz X nazywana jest macierzą podstawową. Podobnie, każda macierz $\Phi(t, t_0)$ taka, że $\Phi(t, t_0) = KX$ spełnia równanie (5.62) jeżeli macierz K jest nieosobliwa i stała. Można tak dobrać K , żeby macierz $\Phi(t, t_0)$ dla $t=t_0$ była macierzą jednostkową I . Przy powyższych założeniach, dowolne rozwiązanie $x(t)$ równania (5.61) można przedstawić jako przekształcenie liniowe warunku początkowego x_0 :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0). \quad (5.63)$$

Macierz $\Phi(t, t_0)$ jest nazywana macierzą przejścia lub tranzycyjną. Odwołując się do interpretacji geometrycznej stanu jako punktu w przestrzeni n -wymiarowej, można traktować $\Phi(t, t_0)$ jako macierz, która prowadzi punkt $x(t)$ po trajektorii od punktu początkowego x_0 - stąd nazwa macierzy tranzycyjnej. Równość (5.63) można łatwo sprawdzić po jej zróżniczkowaniu. Otrzymuje się wówczas

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0)x(t_0).$$

Ponieważ, jak założono na wstępie, macierz $\Phi(t, t_0)$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad (5.64)$$

więc

$$\dot{x}(t) = A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0),$$

skąd wobec równania (5.61) wynika prawdziwość (5.63).

Rozwiązanie niejednorodnego równania stanu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.65)$$

można wyznaczyć, zakładając że jest ono przekształceniem liniowym wektora $u(t)$, czyli

$$x(t) = \Phi(t, t_0)u(t).$$

W takim przypadku otrzymuje się (pomijając oznaczenie zależności od czasu)

$$\dot{x} = \Phi \dot{u} + \dot{\Phi} u.$$

Z uwagi na (5.64) oraz (5.65) można napisać

$$\Phi \dot{u} + A\Phi u = A\Phi u + B u,$$

skąd wynika, że

$$\dot{\Phi} \underline{w} = B \underline{u}. \quad (5.66)$$

Macierz Φ jest nieosobliwa, bowiem jej kolumny są z założenia liniowo niezależne. Tym samym, po scałkowaniu (5.66), otrzymuje się

$$\underline{w}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau + \underline{w}(t_0).$$

Ponieważ $\underline{w}(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_0) \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, to rozwiązanie $\underline{x}(t)$ można przedstawić w postaci

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{w}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{x}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau. \quad (5.67)$$

Podstawiając $\Phi(t, t_0) \Phi^{-1}(\tau, t_0) = \Phi(t, \tau)$, otrzymuje się ostatecznie

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\Phi(t, t_0) \underline{x}_0}_{\underline{x}_p(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau}_{\underline{x}_s(t)}. \quad (5.68)$$

Uzyskany wynik (5.68) jest sumą rozwiązania $\underline{x}_p(t)$ zależnego tylko od warunków początkowych \underline{x}_0 oraz rozwiązania szczególnego $\underline{x}_s(t)$ zależnego od sterowania $\underline{u}(t)$.

Rozwiązanie analityczne równań stanu ze wzoru (5.68) jest kłopotliwe z uwagi na trudności w obliczeniu macierzy przejścia $\Phi(t, t_0)$. Do obliczania elementów $\Phi(t, t_0)$ stosuje się więc metody numeryczne.

Dla układów stacjonarnych, dla których A jest stała, rozwiązywanie równań stanu jest łatwiejsze. Można bowiem założyć, że

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}. \quad (5.69)$$

Słuszność założenia sprawdza się przez podstawienie do równania jednorodnego

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) \quad (5.70)$$

rozwiązania $\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0)$ i uwzględniając, że

$$\frac{d}{dt} \left[e^{A(t-t_0)} \right] = A e^{A(t-t_0)}.$$

Rachubę czasu można zawsze rozpocząć od $t_0=0$, rozwiązaniem równania jednorodnego jest więc

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0. \quad (5.71)$$

Elementami macierzy tranzycyjnej e^{At} są wyrażenia typu

$$t^k e^{\lambda_i t}, \quad k=0,1,2,\dots,m_i-1, \quad (5.72)$$

w których oznaczają: λ_i - i -ta wartość własna macierzy A , m_i - krotność i -tej wartości własnej λ_i .

Wyrażenia (5.72) są nazywane częstotliwościami lub modami układu (równania 5.70). Przypomina się, że wartości własne stałej macierzy A mogą być liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, parami sprzężonymi: $\lambda_i = a_i + j b_i$. Warto w tym miejscu zauważyć, że dla $a_i > 0$ i $b_i > 0$ mody układu rosną nieograniczenie dla $t \rightarrow \infty$.

Rozwiązanie równania stacjonarnego pełnego

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t), \quad (5.73)$$

można znaleźć zapisując to równanie w postaci $\dot{\underline{x}}(t) - A \underline{x}(t) = B \underline{u}(t)$ a następnie mnożąc lewostronnie przez e^{-At} . Otrzymuje się

$$e^{-At} [\dot{\underline{x}}(t) - A \underline{x}(t)] = e^{-At} B \underline{u}(t). \quad (5.74)$$

Wyrażenie po lewej stronie jest pochodną iloczynu $\frac{d}{dt} [e^{-At} \underline{x}(t)]$ więc po scałkowaniu (5.74) w granicach od 0 do t otrzymuje się

$$e^{-At} \underline{x}(t) = \int_0^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau + \underline{C}_0.$$

Stałą całkowania wyznacza się z warunków początkowych dla $t=0$ otrzymując $\underline{C}_0 = \underline{x}_0$. Rozwiązaniem równania (5.73) jest ostatecznie

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{At} \underline{x}_0}_{\underline{x}_p(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau}_{\underline{x}_s(t)}. \quad (5.75)$$

Jest ono sumą dwóch rozwiązań - rozwiązanie $\underline{x}_p(t)$, zgodnie z (5.71), równania jednorodnego (5.70) zależnego tylko od stanu układu \underline{x}_0 w chwili $t=0$ oraz rozwiązania szczególnego $\underline{x}_s(t)$ zależnego od sterowania $\underline{u}(t)$.

Do znalezienia rozwiązania $\underline{x}(t)$ ze wzoru (5.75) potrzebna jest macierz przejścia $e^{At} = \Phi(t)$. Można ją obliczyć w sposób przybliżony pomijając w zbieżnym jednostajnie szeregu nieskończonym

$$e^{At} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}, \quad (5.76)$$

wyrazy, które można uznać za małe w porównaniu z pozostałymi.

Inna praktyczna metoda wyznaczania macierzy e^{At} polega na zastosowaniu przekształcenia Laplace'a. Dokonując transformacji równania jednorodnego (5.70) przy warunku początkowym $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ otrzymuje się $s\underline{X}(s) - \underline{x}_0 = A\underline{X}(s)$, skąd $[sI - A]\underline{X}(s) = \underline{x}_0$, a następnie $\underline{X}(s) = [sI - A]^{-1} \underline{x}_0$.

Ponieważ przewidywane rozwiązanie ma postać $\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0$, to

$$\underline{X}(s) = L[e^{At}] \underline{x}_0 = [sI - A]^{-1} \underline{x}_0.$$

Macierz przejścia można więc obliczyć z przekształcenia odwrotnego Laplace'a

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\}. \quad (5.77)$$

Szczególnie prostą postać ma macierz e^{At} dla różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ macierzy A . Wprowadzając w miejsce $\underline{x}(t)$ zmienną $\underline{v}(t)$ spełniającą zależność $\underline{x}(t) = P\underline{v}(t)$, gdzie P jest macierzą nieosobliwą, jednorodne równanie stanu sprowadza się do postaci

$$\dot{\underline{v}}(t) = P^{-1}AP\underline{v}(t).$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\underline{v}(t) = e^{P^{-1}APt} \underline{v}_0.$$

Ponieważ $\underline{x}(t) = P\underline{v}(t)$, to wracając do współrzędnych $\underline{x}(t)$ uzyskuje się

$$\underline{x}(t) = P e^{P^{-1}APt} P^{-1} \underline{x}_0.$$

Jeżeli A ma różne wartości własne, to P można dobrać w ten sposób, że macierz $\Lambda = P^{-1}AP$ jest diagonalna, a na diagonalu znajdują się wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. W takim przypadku macierz przejścia ma postać

$$e^{At} = P e^{P^{-1}AP} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Sposób dobierania macierzy diagonalizującej P był omawiany wcześniej.

Przykład 5.9

Dany jest układ równań stanu i wyjścia

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u},$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u},$$

o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = 0.$$

Zakładając sygnały wejściowe w postaci funkcji skokowych $u_1=0,5 \cdot 1(t)$, $u_2=1(t)$, obliczyć odpowiedź układu $\underline{y}(t)$ przy warunkach początkowych $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

W celu skorzystania ze wzoru (5.77) oblicza się

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

oraz

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 3} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{(s+1)(s+3)}.$$

Korzystając z tablic transformat Laplace'a wyznacza się

$$e^{At} = L^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-t}) & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Dla stanu początkowego \underline{x}_0 uzyskuje się rozwiązanie równania jednorodnego

$$\underline{x}_p(t) = e^{At} \underline{x}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Po obliczeniu całek w rozwiązaniu (5.75) znaleziono rozwiązanie szczególne

$$\underline{x}_s(t) = \begin{bmatrix} 2,583(2-1,74e^{-t}-0,258e^{-3t}) \\ 1,083(2-2,77e^{-t}-0,154e^{-3t}) \end{bmatrix}.$$

Wektor sygnału wyjściowego można wyznaczyć z zależności

$$\underline{y} = C(\underline{x}_p + \underline{x}_s).$$

W rozwiązaniu występują dwie "częstotliwości" (mody) e^{-t} i e^{-3t} , co można było przewidzieć obliczając wartości własne macierzy A . Wyznacznik charakterystyczny układu jest równy

$$\det[\lambda I - A] = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ są $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -3$.

5.3. ZWIĄZEK TRANSMITANCJI MACIERZOWEJ Z RÓWNIANAMI STANU

Z definicji transmitancji macierzowej $G(s)$ wynika, że

$$\underline{Y}(s) = G(s)\underline{U}(s). \quad (5.78)$$

Transmitancję $G(s)$ można wyznaczyć, określając zależność między transformatą wyjścia $\underline{Y}(s)$ i transformatą wejścia $\underline{U}(s)$, obliczonych na podstawie równań stanu i wyjścia.

Po przekształceniach Laplace'a równania stanu (przy zerowych warunkach początkowych: $\underline{x}_0 = 0$) otrzymuje się

$$\underline{X}(s) = [sI - A]^{-1}B\underline{U}(s),$$

a po podstawieniu $\underline{X}(s)$ do transformowanego równania wyjścia

$$\underline{Y}(s) = C\underline{X}(s) + D\underline{U}(s),$$

równanie to przyjmuje postać

$$\underline{Y}(s) = \{C[sI - A]^{-1}B + D\}\underline{U}(s). \quad (5.79)$$

Porównując (5.78) z (5.79) otrzymuje się transmitancję macierzową wyrażoną przez macierze A , B , C , D

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D. \quad (5.80)$$

Przypomina się, że sumując elementy w wierszach transmitancji, otrzymuje się wektor kolumnowy, którego składowe są odpowiedziami układu (w dziedzinie zmiennej zespolonej s) na wymuszenie impulsowe. Wzór (5.80) można więc wykorzystać do obliczania odpowiedzi impulsowej układu.

5.4. STEROWALNOŚĆ I OBSERWOWALNOŚĆ UKŁADÓW LINIOWYCH

Sterowalność

Podstawowym zagadnieniem w teorii sterowania jest ustalenie teoretycznej możliwości sterowania danym obiektem. Sprowadza się to do uzyskania odpowiedzi na pytanie - czy istnieje sterowanie $u(t)$, które przeprowadzi wektor wyjścia od wartości początkowej $y(t_0)$ do wartości $y(t_1) \in Y$. Obiekty, dla których to jest możliwe nazywa się sterowalnymi względem wyjścia. Podobnie można sformułować zagadnienie sterowalności względem stanu. Sterowalność względem stanu jest pojęciem bardziej ogólnym od sterowalności względem wyjścia. Jeżeli na przykład, w układzie drugiego rzędu możliwe jest sterowanie tylko przebiegiem jednej zmiennej $x_1(t)$, a wyjście jest jednowymiarowe i $y = cx_1$, to taki układ jest sterowalny względem wyjścia, a nie jest sterowalny względem stanu. Ze sterowalności względem stanu wynika sterowalność wyjścia. Odwrotna zależność nie musi zachodzić. W dalszym ciągu pod pojęciem sterowalności będzie rozumiana sterowalność względem stanu i zagadnienie to będzie omawiane tylko dla układów stacjonarnych.

Definicja:

Układ jest sterowalny jeżeli istnieje nieograniczony wektor sterowania $u(t)$, który przeprowadzi dowolny stan początkowy $x(t_0)$ do dowolnego stanu końcowego $x(t_1)$ w przedziale czasu $t_0 \leq t \leq t_1$.

Z braku miejsca, kryteria sterowalności zostaną podane bez dowodów.

Jeżeli układ jest opisany równaniem

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}_n \underline{u}(t), \quad (5.81)$$

w którym oznaczono: $\underline{A} = \underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M}$ oraz $\underline{B}_n = \underline{M}^{-1} \underline{B}$, gdzie macierz \underline{A} jest diagonalna (\underline{A} ma różne wartości własne), to taki układ jest sterowalny, jeżeli macierz \underline{B}_n nie ma zerowego wiersza. Dla układów nierozprzężonych kryterium sterowalności wymaga, żeby macierz

$$\underline{P} = [\underline{B} \mid \underline{A}\underline{B} \mid \underline{A}^2\underline{B} \mid \dots \mid \underline{A}^{n-1}\underline{B}] \quad (5.82)$$

była rzędu n .

Macierz \underline{P} ma n wierszy i $n \times r$ kolumn (n jest liczbą wierszy macierzy \underline{A} a r jest liczbą kolumn macierzy \underline{B}).

Obserwowalność

Kolejnym podstawowym zagadnieniem w teorii sterowania jest identyfikacja własności dynamicznych obiektu, przeprowadzana na podstawie pomiaru przebiegów sygnałów wyjściowych $\underline{y}(t)$. Zagadnienie to występuje też w układach regulacji, w których algorytm sterowania korzysta z informacji o obiekcie, niesionych przez wektor $\underline{y}(t)$ doprowadzony do układu sterującego przez pętlę sprzężenia zwrotnego. Istotną kwestią jest tu możliwość określenia stanu $\underline{x}(t_0)$ w chwili t_0 przez pomiar wyjścia $\underline{y}(t)$ w skończonym przedziale czasu. Układ, w którym ta możliwość istnieje nazywany jest obserwowalnym.

Definicja:

Układ liniowy jest obserwowalny jeżeli stan $\underline{x}(t_0)$ w dowolnej chwili t_0 może być określony na podstawie znajomości $\underline{y}(t)$ w dowolnym skończonym przedziale czasu $t_0 \leq t \leq t_1$.

Dla układów opisanych równaniem stanu (5.81), dla których równanie wyjścia jest w postaci

$$\underline{y}(t) = \underline{C}_n \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t); \quad \underline{C}_n = \underline{C} \underline{M},$$

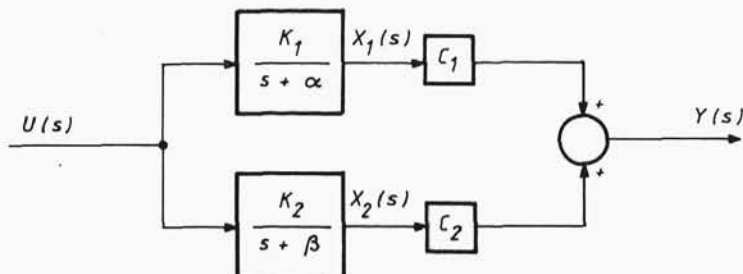
kryterium obserwowalności wymaga, żeby macierz \underline{C}_n nie miała zerowej kolumny. W ogólnym przypadku, gdy macierz \underline{A} niekoniecznie ma różne wartości własne, układ stacjonarny jest obserwowalny, jeżeli rząd macierzy

$$\underline{O} = [\underline{C}^T \mid \underline{A}^T \underline{C}^T \mid (\underline{A}^T)^2 \underline{C}^T \mid \dots \mid (\underline{A}^T)^{n-1} \underline{C}^T] \quad (5.83)$$

jest równy n . Macierz Q ma wymiary $n \times mn$, gdzie m jest liczbą wierszy macierzy C . We wzorze (5.83) symbolem T oznaczono transpozycję macierzy. Formalnie w (5.83) powinny wystąpić macierze sprzężone \bar{A} i \bar{C} . Ponieważ w omawianych układach macierze są rzeczywiste, symbole sprzężenia zostały pominięte.

Przykład 5.10

Zbadać sterowalność i obserwowalność układu, którego schemat blokowy pokazano na rys.5.16.



Rys.5.16. Schemat blokowy układu do przykładu 5.10

Układ może być opisany za pomocą równań stanu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} u$$

i równania wyjścia

$$y = [C_1 \ C_2] x.$$

Macierz P ze wzoru (5.82) jest równa

$$P = \begin{bmatrix} K_1 & -\alpha K_1 \\ K_2 & -\beta K_2 \end{bmatrix}.$$

Układ jest sterowalny, jeżeli $\alpha \neq \beta$.

Macierz Q ze wzoru (5.83) jest równa

$$Q = \begin{bmatrix} C_1 & -\alpha C_1 \\ C_2 & -\beta C_2 \end{bmatrix}.$$

Układ jest obserwowalny, jeżeli $\alpha \neq \beta$.

Przykład 5.11

Sprawdzić, czy układ, dla którego macierze A i B są równe

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest sterowalny.

Macierz P ze wzoru (5.82) po obliczeniach jest równa

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -2 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & -4 & -7 & 13 & 25 \end{array} \right]$$

$$\text{rank}(P) = 3$$

Wyznacznik utworzony na trzech pierwszych kolumnach P jest różny od zera ($= -3$), więc układ jest sterowalny.

Przykład 5.12

Sprawdzić, czy układ, dla którego macierze A i C są równe

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest obserwowalny.

Macierz Q ze wzoru (5.83) po obliczeniach jest równa

$$Q = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

Rząd macierzy Q jest równy 3, więc układ jest obserwowalny.

Bibliografia

1. Katsuhiko Ogata: Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. WNT, Warszawa 1974.
2. P.M. Derusso, R.J. Roy, C.M. Close: Prostranstwo sostojanij w teorii upravlennija. Izd. "Nauka", Moskwa 1970 (przekład z angielskiego).
3. Julius T. Tou: Modern control theory. McGraw-Hill, Inc. 1964, USA.
4. K. Szacka: Teoria układów dynamicznych. WPW, Warszawa 1986.