

Gaussowska funkcja gęstości prawdopodobieństwa $p(50, \dot{u})$ jest jednowymiarowa (patrz rys.9.6), a wartość całki (9.40) w granicach od $\dot{u}=0$ do $\dot{u} \rightarrow \infty$ (dotyczy obszaru zakreskowanego na rys.9.6) jest wartością średnią liczby przekroczeń w jednostce czasu odchyłki +50 m w kierunku z dołu do góry, czyli dla $\dot{u} > 0$ (nie interesujemy się liczbą powrotów z góry do dołu, czyli dla $\dot{u} < 0$). Wymiarem n jest s^{-1} . Wielkość n nazywana jest czasową gęstością prawdopodobieństwa wykroczenia sygnału stochastycznego poza dany poziom (w tym przypadku +50 m), a uzasadnienie wzoru (9.40) można uzyskać także na innej drodze [25].

Uwzględniając (9.37) oraz (9.38) i (9.39) po wykonaniu całkowania, otrzymuje się:

$$n = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{u}}}{\sigma_u} \exp\left(-\frac{50^2}{2\sigma_u^2}\right). \quad (9.41)$$

We wzorze (9.41) nie są jeszcze znane σ_u i $\sigma_{\dot{u}}$. Z rys.9.5 wynika, że

$$\sigma_u^2 = A. \quad (9.42)$$

Do obliczenia wartości $(\sigma_{\dot{u}})^2$ korzysta się, podobnie jak w zadaniu 9.2 ze wzorów (9.32)+(9.35), a wtedy

$$(\sigma_{\dot{u}})^2 = A(\alpha^2 + \beta^2). \quad (9.43)$$

Wyrażenia (9.42) i (9.43) podstawia się do (9.41) uwzględniając dane liczbowe wraz z jednostkami i otrzymuje się

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(0,01)^2 + (0,1)^2} \exp\left(-\frac{50^2}{2 \cdot 400}\right) = 0,0007 \text{ s}^{-1}.$$

Biorąc pod uwagę, że lot trwa $T=5 \cdot 3600$ s oraz, że średnia liczba przekroczeń na jednostkę czasu odchyłki -50 m jest także równa n , oblicza się całkowitą liczbę przekroczeń N

$$N = 2nT \approx 25.$$

9.3. GĘSTOŚĆ WIDMOWA MOCY SYGNAŁU STOCHASTYCZNEGO

Funkcje korelacyjne są funkcjami czasu τ mierzonego inaczej niż czas t . Mimo to można poddawać je przekształceniu Fouriera. W przypadku funkcji korelacji własnej otrzymuje się

$$S_{u_1, u_1}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{u_1, u_1}(\tau) d\tau. \quad (9.44)$$

Funkcja $S_{u_1, u_1}(\omega)$ nazywa się gęstością widmową mocy sygnału $u_1(t)$. Stosuje się także przekształcenie odwrotne o postaci

$$R_{u_1, u_1}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_{u_1, u_1}(\omega) d\omega. \quad (9.45)$$

Jeżeli transformacji Fouriera podda się funkcję korelacji wzajemnej $R_{u_1, u_2}(\tau)$, to w wyniku otrzyma się funkcję wzajemnej gęstości widmowej mocy $S_{u_1, u_2}^*(j\omega)$. Funkcje gęstości widmowych mocy sygnałów są funkcjami rzeczywistymi, ponieważ funkcje autokorelacji są parzyste (własność 9.24), a transformaty Fouriera funkcji parzystych są funkcjami rzeczywistymi [16]. Natomiast funkcje wzajemnej gęstości widmowej mocy są na ogół funkcjami zespolonymi.

Przykład 9.4

Wyznaczyć gęstość widmową mocy $S_{u, u}(\omega)$ sygnału $u(t)$, którego funkcja korelacji własnej przedstawiona jest wzorem (9.29).

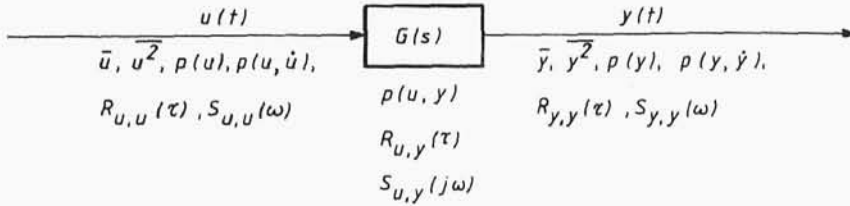
Stosując wzór (9.44) otrzymuje się

$$S_{u, u}(\omega) = \frac{2A}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}. \quad (9.46)$$

We wzorze (9.46) częstotliwość występuje w mianowniku w czwartej potęgze. Wynika stąd, że w sygnale $u(t)$ opisanym funkcją autokorelacji (9.29) decydującą rolę spełniają niskoczęstotliwościowe harmoniczne. Dla $\omega \rightarrow \infty$, $S_{u, u}(\omega) \rightarrow 0$.

9.4. PRZENOSZENIE SYGNAŁÓW STOCHASTYCZNYCH PRZEZ UKŁADY DYNAMICZNE

Jeżeli liniowy układ dynamiczny o transmitancji $G(s)$ podlega działaniu stochastycznego sygnału wejściowego $u(t)$, to jego odpowiedź $y(t)$ jest także sygnałem stochastycznym. Omówimy pokrótce najważniejsze relacje zachodzące między parametrami i funkcjami obu sygnałów (rys.9.7).



Rys.9.7. Parametry i funkcje stochastycznych sygnałów wejściowego i wyjściowego

Brak jest ogólnej metody postępowania przy wyznaczaniu gęstości prawdopodobieństwa $p(y)$ na podstawie $p(u)$ i $G(s)$. Znalezione są tylko rozwiązania dla niektórych przypadków szczególnych. Na ogół gęstości $p(u)$ i $p(y)$ mają różne kształty, mimo że sygnał stochastyczny $u(t)$ przenoszony jest przez układ liniowy. Wyjątkiem jest sygnał wejściowy o charakterze gaussowskim, na który odpowiedź jest także gaussowska. Ogólny związek istnieje natomiast między funkcjami korelacyjnymi sygnałów stochastycznych (stacjonarnych, ergodycznych) w postaci równania całkowego Wienera-Hopfa. Ma ono postać

$$R_{u,y}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t) R_{u,u}(\tau-t) dt, \quad (9.47)$$

gdzie:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)]. \quad (9.48)$$

Interpretując równanie (9.47) można stwierdzić, że funkcja autokorelacyjna $R_{u,u}(\tau)$ podawana na wejście układu o charakterystyce impulsowej $g(t)$ przekształcana jest na funkcję korelacji wzajemnej $R_{u,y}(\tau)$.

Można wykazać [9], iż dokonując transformacji Fouriera obu stron równania (9.47) otrzymuje się

$$S_{u,y}(j\omega) = G(j\omega) S_{u,u}(\omega) \quad (9.49)$$

lub w innej postaci

$$G(j\omega) = \frac{S_{u,y}(j\omega)}{S_{u,u}(\omega)}. \quad (9.50)$$

Ponadto dowodzi się także [1,6], że gęstości widmowe mocy obu sygnałów związane są następująco:

$$\frac{S_{u,y}(j\omega)}{S_{u,u}(\omega)} = |G(j\omega)|^2. \quad (9.51)$$

Związki (9.50) i (9.51) wykorzystywane są do identyfikacji (estymacji charakterystyk częstotliwościowych) układów dynamicznych w przypadku gdy sygnały wejściowe (a więc i wyjściowe) mają charakter losowy. Z sytuacją taką mamy do czynienia np. wtedy, gdy nie ma możliwości przzerwania procesu technologicznego i dlatego nie jest możliwe zorganizowanie eksperymentu identyfikacyjnego polegającego na wprowadzeniu do układu standardowych sygnałów wejściowych typu zdeterminowanego (funkcje impulsowe, skokowe, wymuszenia częstotliwościowe itp.) i badaniu uzyskanych odpowiedzi. Zależności (9.50) i (9.51) pozwalają na dokładne wyznaczenie charakterystyk amplitudowo-fazowych tylko w przypadku idealnym, tzn. gdy nie występują zakłócenia sygnałów wejściowych i wyjściowych. W przypadku występowania zakłóceń metoda identyfikacji musi uwzględniać ich rodzaj i miejsce występowania (wejście lub wyjście). Zagadnieniu temu poświęcono wiele monografii, np. [4,6].

Wartość średnia sygnału stochastycznego przy przechodzeniu przez układ liniowy przekształca się tak, jak sygnał zdeterminowany. Jeżeli np. $G(s)=k$, to $\bar{y}=k\bar{u}$.

Wartość średniokwadratowa sygnału wyjściowego \bar{y}^2 nie jest bezpośrednio zależna od \bar{u}^2 . Jej związek z sygnałem wejściowym ma postać

$$\bar{y}^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)R_{u,u}(\tau_1-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (9.52)$$

gdzie: $g(\tau)$ określone jest zależnością (9.48).

Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, że niekiedy po przejściu przez układ liniowy sygnał losowy traci cechę stacjonarności. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 9.5 (wg [25])

Błędy wskazań przyrządu elektrycznego są sygnałem $u(t)$ stochastycznym, gaussowskim o wartości średniej $\bar{u}=0$ i funkcji ko-

relacji własnej

$$R_{u,u}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|), \quad (9.53)$$

gdzie: $A=10 \text{ V}^2\text{s}^{-1}$, $\alpha=0,5 \text{ s}^{-1}$.

Wskazania przyrządu stanowią sygnał wejściowy do członu liniowego o transmitancji operatorowej $G(s)=\frac{1}{s}$. Ponieważ człon jest liniowy, to obowiązuje zasada superpozycji. Można więc przyjąć, że sygnał właściwy i błąd "przechodzą" przez człon niezależnie. Znaleźć wariancję σ_y^2 sygnału wyjściowego $y(t)$ będącego odpowiedzią na błąd $u(t)$ po czasie $t=20 \text{ s}$. Warunki początkowe są zerowe.

Z podanej przepustowości operatorowej wynika związek między sygnałami $u(t)$ i $y(t)$ o postaci

$$y(t) = \int_0^t u(t') dt'. \quad (9.54)$$

Zależność (9.54) zwana jest całką sygnału (procesu) stochastycznego. W teorii tej całki dowodzi się [21], że wariancja stochastycznego sygnału wyjściowego

$$\sigma_y^2(t) = 2 \int_0^t (t-\tau) R_{u,u}(\tau) d\tau \quad (9.55)$$

jest w ogólnym przypadku funkcją czasu, czyli że sygnał $y(t)$ nie jest stacjonarny. Całkując otrzymuje się

$$\sigma_y^2(t) = \frac{2A}{\alpha^2} [(2\alpha t - 3) + e^{-\alpha t}(\alpha t + 3)].$$

Po podstawieniu danych liczbowych oblicza się $\sigma_y^2(20)=1360 \text{ V}^2$.

W przypadku układów nieliniowych nie ma ogólnych związków między parametrami lub funkcjami sygnałów wejściowego i wyjściowego.

Dość liczną i często spotykaną w praktyce klasę układów nieliniowych stanowią tzw. członny bezinercyjne, czyli takie, dla których związek między sygnałami wejściowym i wyjściowym opisany jest równaniem algebraicznym (patrz dalej rozdz.10).

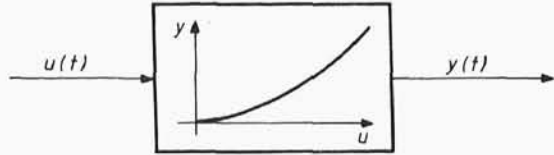
Jeżeli związek ten (czyli charakterystyka statyczna członu - przykład na rys. 9.8) ma postać

$$y = y(u), \quad (9.56)$$

to funkcja gęstości prawdopodobieństwa sygnału wyjściowego określona jest wzorem

$$p(y) = p^*(y) \left| \frac{du}{dy} \right|, \quad (9.57)$$

gdzie: $p^*(y) = p(u) \big|_{u=u(y)}$, $u=u(y)$ jest funkcją odwrotną funkcji (9.56), a $\frac{du}{dy}$ jest pochodną tej funkcji odwrotnej.



Rys.9.8. Bezinercyjny człon nieliniowy o jednoznacznej charakterystyce statycznej

9.5. SZUMY W UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Układy dynamiczne, w tym szczególnie układy regulacji, podlegają zakłóceniom, które przeważnie nie są zdeterminowane. Wśród sygnałów zakłócających szczególną rolę odgrywają szумы.

9.5.1. Szum biały

Sygnał stochastyczny $u(t)$ o wartości średniej $\bar{u}=0$ oraz funkcji korelacji własnej

$$R_{u,u}(\tau) = C \delta(\tau), \quad (9.58)$$

gdzie: $C>0$ - stała, $\delta(\tau)$ - impuls Diraca, nazywa się szumem białym.

Korzystając z zależności (9.44) wyznacza się gęstość widmową mocy tego sygnału

$$S_{u,u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = C. \quad (9.59)$$

Obliczenie całki (9.59) ułatwia fakt, że wartość wyrażenia pod całką jest niezerowa tylko dla $\tau=0$. Wynika to z własności impulsu Diraca - patrz p.2.2. Dla $\tau=0$

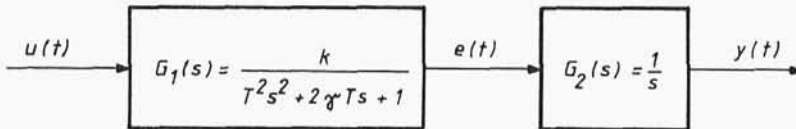
$$S_{u,u}(\omega) = C \int_{-0}^{+0} \delta(\tau) d\tau = C \cdot 1 = C.$$

Z (9.59) wynika, że szum biały zawiera składowe harmoniczne o jednakowych amplitudach w pasmie częstotliwości $-\infty \leq \omega \leq +\infty$. Jest to wyidealizowany model zakłócenia, który oczywiście nie może być fizycznie zrealizowany. Badając odporność układu dynamicznego na zakłócenie szumem białym uzyskuje się gwarancję, że w warunkach rzeczywistych (zakłócenie szumem o węższym pasmie częstotliwości) jakość układu (np. wyrażona wartościami wskaźników jakości regulacji) nie będzie gorsza od obliczonej.

Nazwa szumu białego wynika z analogii do widma światła białego (szerokie pasmo częstotliwości).

Przykład 9.6

Prędkość drgań mierzona jest za pomocą akcelerometru o transmitancji $G_1(s)$ i układu całkującego o transmitancji $G_2(s)$ (rys.9.9). Znaleźć wariancję $\sigma_y^2(t)$ prędkości drgań w przypadku gdy sygnał wejściowy $u(t)$ jest szumem białym, warunki początkowe są zerowe a czas trwania procesów przejściowych jest pomijalnie mały w porównaniu z czasem pomiaru T_c .



Rys.9.9. Schemat blokowy procesu pomiaru prędkości

Z zależności (9.51) otrzymuje się gęstość widmowa mocy sygnału $e(t)$ na wyjściu akcelerometru

$$S_{e,e}(\omega) = |G_1(j\omega)|^2 S_{u,u}(\omega), \quad (9.60)$$

gdzie: $S_{u,u}(\omega) = C$ (zgodnie ze wzorem (9.59)) oraz

$$|G_1(j\omega)|^2 = \frac{k^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\gamma T \omega)^2}. \quad (9.61)$$

Korzystając ze wzoru (9.55), otrzymuje się

$$\sigma_y^2(t) = 2 \int_0^T (T_c - \tau) R_{e,e}(\tau) d\tau. \quad (9.62)$$

Z treści zadania wiadomo, że $\tau \ll T_c$. Ponadto, ze wzoru (9.44) wynika, że

$$\int_0^{\infty} R_{e,e}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} S_{e,e}(0). \quad (9.63)$$

Poszukiwana wariancja może być więc wyznaczona ze wzoru przybliżonego

$$\sigma_y^2(t) \approx 2T_c \int_0^{\infty} R_{e,e}(\tau) d\tau = T_c S_{e,e}(0). \quad (9.64)$$

Podstawiając dane otrzymuje się

$$\sigma_y^2(t) = k^2 C T_c. \quad (9.65)$$

Z rozwiązania (9.65) wynika, że wariancja sygnału prędkości zależy od czasu całkowania T_c , czyli stochastyczny sygnał wyjściowy jest niestacjonarny.

9.5.2. Szum wąskopasmowy

Często spotykanym sygnałem stochastycznym jest szum wąskopasmowy, który na ogół powstaje w wyniku filtrowania szumu szerokopasmowego (np. szumu białego). Rolę filtra może spełniać układ dynamiczny lub jego część. Charakter szumu wąskopasmowego mają m.in. następujące sygnały stochastyczne: falowanie morza (amplituda i częstotliwość fal), szum na wyjściu odbiornika radiowego, drgania sprzęgieł i przekładni, fluktuacja ciśnienia w instalacji hydraulicznej, fluktuacja prędkości powietrza w tunelu aerodynamicznym.

Model matematyczny szumu wąskopasmowego ma postać

$$u(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (9.66)$$

gdzie: $A(t)$ i $\varphi(t)$ - zmienne losowo amplituda i faza sygnału, ω_0 - stała, charakterystyczna dla danego badanego procesu częstotliwość (np. prędkość katowa przekładni).

Wzór (9.66) można przekształcić do postaci

$$u(t) = w(t) \cos(\omega_0 t) - z(t) \sin(\omega_0 t), \quad (9.67)$$

gdzie:

$$w(t) = A(t) \cos(\varphi(t)), \quad (9.68)$$

$$z(t) = A(t) \sin(\varphi(t)). \quad (9.69)$$

Sygnały stochastyczne $w(t)$ i $z(t)$ są ortogonalne ($\rho_{w,z}=0$, patrz punkt 9.2.5), a więc niezależne. W przypadku gdy są one sygnałami gaussowskimi, ich funkcja gęstości prawdopodobieństwa drugiego rzędu wyraża się zależnością

$$p(w, z) = p(w) p(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{w^2+z^2}{2\sigma^2}\right), \quad (9.70)$$

gdzie: $\sigma_w = \sigma_z = \sigma$.

W wielu zadaniach istotna jest znajomość gęstości prawdopodobieństwa amplitudy

$$A(t) = \sqrt{w^2(t) + z^2(t)} \quad (9.71)$$

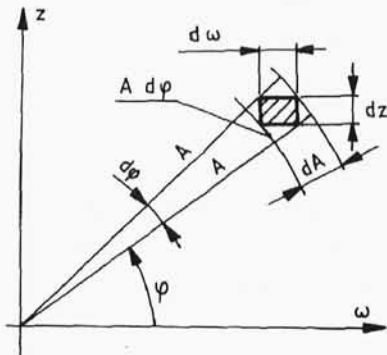
i fazy

$$\varphi(t) = \arctg \frac{z(t)}{w(t)}. \quad (9.72)$$

Porównując elementarne prawdopodobieństwa w układach współrzędnych prostokątnych w, z i biegunowych A, φ otrzymuje się

$$p(w, z) dw dz = p^*(A, \varphi) dA d\varphi, \quad (9.73)$$

gdzie $p^*(A, \varphi)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa drugiego rzędu szumu wąskopasmowego gaussowskiego w układzie biegunowym. Przyjmując, że $dw dz = A dA d\varphi$ (rys. 9.10) otrzymano



Rys.9.10. Porównanie elementarnych pól w układach prostokątnym w, z i biegunowym A, φ . Dla $dw \rightarrow 0$ i $dz \rightarrow 0$ iloczyn $dw dz \rightarrow A d\varphi dA$

$$p^*(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9.74)$$

Z powyższego wynika, że $p^*(A, \varphi)$ nie jest już rozkładem gaussowskim. Rozkłady pierwszego rzędu wyznacza się z następujących przekształceń

$$p^*(A) = \int_0^{2\pi} p^*(A, \varphi) d\varphi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad (9.75)$$

$$p^*(\varphi) = \int_0^{\infty} p^*(A, \varphi) dA = \frac{1}{2\pi}. \quad (9.76)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (9.75) jest rozkładem Rayleigha, a funkcja (9.76) - rozkładem równomiernym. Ponadto współczynnik korelacji $\rho(A, \varphi) \neq 0$, co oznacza że sygnały te nie są nieskorelowane.

Przykład 9.7

Do pomiaru fluktuacji prędkości powietrza w tunelu aerodynamicznym użyto termooanemometru. Czujnik ten może być traktowany jako człon bezinercyjny o nieliniowej, jednoznacznej charakterystyce statycznej o postaci¹⁾

$$y = \begin{cases} a\sqrt{|u|} & \text{dla } u \geq 0, \\ 0 & \text{dla } u < 0, \end{cases} \quad (9.77)$$

gdzie: u - bezwymiarowa amplituda prędkości powietrza, y - bezwymiarowa amplituda sygnału wyjściowego czujnika, a - stała.

Przyjmując, że sygnał wejściowy czujnika jest szumem wąskopasmowym, którego amplituda $u(t)$ ma rozkład podany wzorem (9.75), wyznacza się funkcję $p(y)$ gęstości prawdopodobieństwa amplitudy $y(t)$.

Z charakterystyki statycznej (9.77) oblicza się funkcję odwrotną i jej pochodną

$$u = \frac{y^2}{a^2},$$

$$\left| \frac{du}{dy} \right| = \left| \frac{2y}{a^2} \right|.$$

Do rozwiązania zadania korzysta się ze wzorów (9.57) i (9.75)

$$p(y) = \frac{y^2/a^2}{\sigma^2} \left[\exp \left(- \frac{y^4/a^4}{2\sigma^2} \right) \right] \left| \frac{2y}{a^2} \right|.$$

Dla $y \geq 0$ otrzymuje się

$$p(y) = \frac{2y^3}{a^4 \sigma^2} \exp \left(- \frac{y^4}{2a^4 \sigma^2} \right).$$

¹⁾ W zadaniu przyjęto uproszczoną charakterystykę termooanemometru; w rzeczywistości ma ona postać: $y = b + a\sqrt{|u|}$, gdzie: a, b - stałe.

Bibliografia

1. Bendat J.S., Piersol A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.
2. Dietrich M.: Wstęp do stochastycznej teorii maszyn. PWN, Warszawa 1972.
3. Doebelin E.O.: Measurement systems application and design. McGraw-Hill, London 1966.
4. Eykhoff P.: Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1980.
5. Gibson J.E.: Nieliniowe układy sterowania automatycznego. WNT, Warszawa 1968.
6. Giergiel J., Uhl T.: Identyfikacja układów mechanicznych. PWN, Warszawa 1990.
7. Gutowski R., Świetlicki W.A.: Dynamika i drgania układów mechanicznych. Cz.I, rozdz.4 "Drgania losowe układów mechanicznych". PWN, Warszawa 1986.
8. Hagel R., Zakrzewski J.: Miernictwo dynamiczne. WNT, Warszawa 1984.
9. Hahn S.: Teoria modulacji i detekcji. WPW, Warszawa 1981.
10. Kindler H., Buchta H., Wilfert H.-H.: Zadania z techniki regulacji automatycznej. WNT, Warszawa 1968.
11. Kochenburger R.J.: Modelowanie układów dynamicznych przy użyciu maszyn matematycznych. WNT, Warszawa 1975.
12. Kotlarski I.: Rachunek prawdopodobieństwa dla inżynierów. WNT, Warszawa 1966.
13. de Larminat P., Thomas Y.: Automatyka - układy liniowe, t.1 - Sygnały i układy, t.2 - Identyfikacja, t.3 - Sterowanie. WNT, Warszawa 1983.
14. Niederliński A.: Systemy i sterowanie, wstęp do automatyki i cybernetyki technicznej. PWN, Warszawa 1983.
15. Oderfeld J.: Statystyczne podstawy prac doświadczalnych. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1990.
16. Ozimek E.: Podstawy teoretyczne analizy widmowej sygnałów. PWN, Warszawa-Poznań 1985.
17. Pacut A.: Prawdopodobieństwo, teoria, modelowanie probabilistyczne w technice. WNT, Warszawa 1985.
18. Plucińska A., Pluciński E.: Zadania z probabilistyki. PWN, Warszawa 1983.
19. Skalmierski B., Tylikowski A.: Stochastic processes in dynamics. PWN - Warszawa, Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.
20. Sobczak W.: Metody statystyczne w elektronice. WNT, Warszawa 1971.
21. Sołodownikow W.W.: Dynamika statystyczna liniowych układów sterowania automatycznego. WNT, Warszawa 1964.

22. Szopliński Z.: Elektroniczna technika analogowa. WNT, Warszawa 1968.
23. Szydlowski H.: Teoria pomiarów. PWN, Warszawa 1981.
24. Wojnar A.: Teoria sygnałów. WNT, Warszawa 1988.
25. Wołodin B.G., Ganin M.P., Diner I.J., Komorow L.B., Swiesznikow A.A., Starobin K.B.: Problemy rachunku prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1966.