

## 9. ZARYS DYNAMIKI UKŁADÓW STOCHASTYCZNYCH

### 9.1. WSTĘP

W układach dynamicznych mogą, oprócz sygnałów zdeterminowanych, występować sygnały stochastyczne (losowe). Przykładami takich sygnałów są: obciążenia aerodynamiczne samolotu wywołane burzliwością atmosfery, obciążenie konstrukcji morskiej platformy wiertniczej spowodowane falowaniem morza i wiatrem, obciążenie turbogeneratorsa zależne od zmiennej losowo liczby odbiorców energii elektrycznej. Do sygnałów stochastycznych zaliczamy także zakłócenia (np. szumy radiokomunikacyjne).

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie podstawowych metod służących do opisu matematycznego układów, w których występują takie sygnały.

Treść rozdziału zakłada, że Czytelnik zna podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa, takie jak: prawdopodobieństwo, prawdopodobieństwo warunkowe, dystrybuanta, funkcja gęstości (rozkład) prawdopodobieństwa, opisane m.in. w pracach [1,7,12,15,17,18,23,25].

### 9.2. OPIS MATEMATYCZNY SYGNAŁÓW STOCHASTYCZNYCH

#### 9.2.1. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa pierwszego rzędu

Niech  $P$  określa prawdopodobieństwo, że chwilowa wartość sygnału  $u(t)$  jest zawarta w przedziale  $(u, u+\Delta u)$

$$P(u) = P[u < u(t) \leq u + \Delta u]. \quad (9.1)$$

Gęstość prawdopodobieństwa pierwszego rzędu  $p(u)$  określa się jako granicę

$$p(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{P(u)}{\Delta u} = \frac{dF(u)}{du}, \quad (9.2)$$

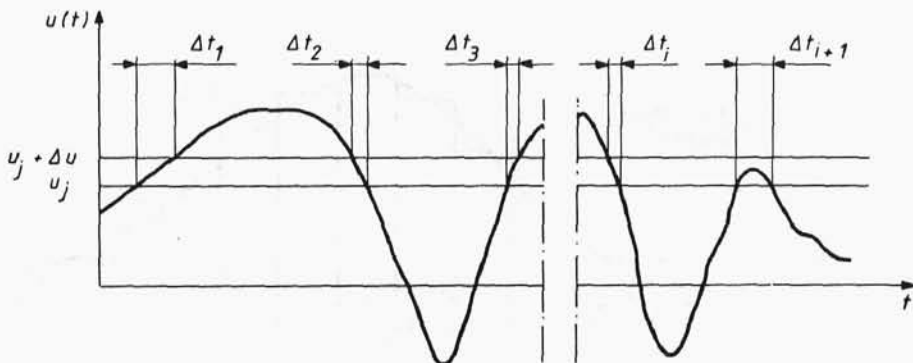
gdzie  $F(u) = \int_{-\infty}^u p(u) du$  jest dystrybuantą sygnału  $u(t)$ , przy czym  $F(-\infty)=0$  a  $F(+\infty)=1$ . W praktyce gęstość prawdopodobieństwa pierwszego rzędu danego sygnału losowego można wyznaczyć dwiema metodami. Metoda czasowa (rys.9.1) polega na obserwacji sygnału  $u(t)$  w ciągu dostatecznie długiego (teoretycznie nieskończenie długiego) czasu  $T$  i sumowaniu odcinków czasu  $\Delta t_i$ , w których sygnał zawarty jest w małym przedziale  $(u_j, u_j + \Delta u)$ . Prawdopodobieństwo, że w pewnej dowolnej chwili sygnał znajdzie się w wymienionym przedziale jest równe

$$P[u_j < u(t) \leq u_j + \Delta u] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum \Delta t_i}{T} . \quad (9.3)$$

Wartość funkcji gęstości  $p(u_j)$  określona jest granicą

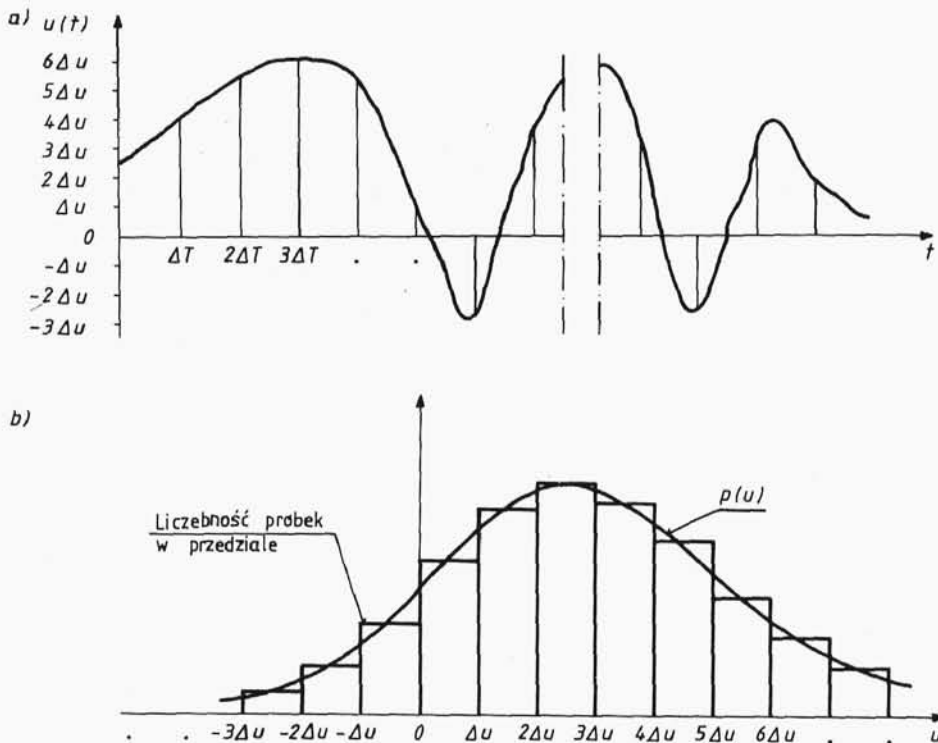
$$p(u_j) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta u \rightarrow 0}} \frac{\sum \Delta t_i}{\Delta u T} . \quad (9.4)$$

W praktyce korzysta się ze wzoru (9.4) przyjmując skończone wartości  $T$  i  $\Delta u$  takie, że przyjęcie większego  $T$  i mniejszego  $\Delta u$  nie zmienia istotnie wartości  $p(u_j)$  obliczonej dla danego przedziału. Obliczenia powtarza się dla wielu  $u_j$  zawartych w granicach zmienności sygnału od  $u_{\min}$  do  $u_{\max}$ . Pozwala to na wyznaczenie tablicy (lub wykresu) funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $p(u)$  danego sygnału.



Rys.9.1. Ilustracja metody czasowej wyznaczania funkcji prawdopodobieństwa pierwszego rzędu

Metoda statystyczna (rys.9.2) polega na próbkowaniu sygnału i zliczaniu (najczęściej za pomocą komputera z przetwornikiem analogowo-cyfrowym na wejściu) liczebności próbek w wielu przedziałach o wartości  $\Delta u$ . Częstość próbkowania wynika z twierdzenia Shannona-Kotielnikowa (patrz punkt 8.2). Jeżeli czas obserwacji  $T$  jest wystarczająco długi a wartości  $\Delta u$  wystarczająco małe, to na podstawie histogramu pokazanego na rys.9.2b można oszacować wykres funkcji  $p(u)$ . Postać analityczna  $p(u)$  może być wyznaczona przy użyciu aparatu statystyki matematycznej oraz na podstawie wiedzy pozamatematycznej o danym zjawisku. Stosując testy statystyczne, można zweryfikować hipotezę o kształcie danego rozkładu. Sprawa ta omawiana jest w podręcznikach z tego zakresu, m.in. w pracach [15] i [22].



Rys.9.2. Ilustracja metody statystycznej wyznaczania funkcji gęstości prawdopodobieństwa pierwszego rzędu: a) próbkowanie sygnału, b) histogram rozkładu

**Przykład 9.1** (wg [3])

Należy wyznaczyć funkcję gęstości prawdopodobieństwa  $p(u)$  sygnału sinusoidalnego  $u(t)$ , którego okres i amplituda  $u_m$  są stałe (rys.9.3a), a kąt fazowy  $\varphi(t)$  jest zmienną losową, ponieważ nie jest znana wartość  $\varphi(0)$  w chwili  $t=0$ . Z tego powodu nie można podać wartości sygnału  $u(t)$  w dowolnej chwili, a więc należy traktować go jako sygnał stochastyczny. Kąt  $\varphi(t)$  zawiera się w przedziale od 0 do  $2\pi$ , przy czym  $P[0 \leq \varphi \leq 2\pi] = 1$ . Ze względu na okresowość funkcji  $u(t)$  obie granice  $\varphi=0$  i  $\varphi=2\pi$  zaliczamy do przedziału. Sygnał  $u(t)$  ma postać

$$u(t) = u_m \sin[\omega t + \varphi(t)]. \quad (9.5)$$

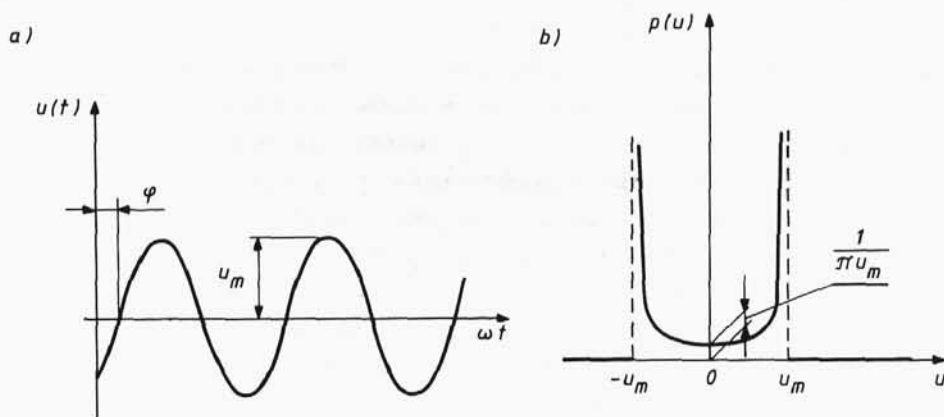
Każda wartość  $\varphi$  z przedziału  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  jest równoprawdopodobna. Gęstość prawdopodobieństwa  $p(\varphi)$  jest zatem równomierna i wynosi

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{dla } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 & \text{dla } \varphi < 0 \text{ i } \varphi > 2\pi. \end{cases} \quad (9.6)$$

Z równania (9.5) wyznacza się

$$\varphi(t) = \arcsin \frac{u(t)}{u_m} - \omega t. \quad (9.7)$$

Z definicji funkcji gęstości prawdopodobieństwa pierwszego rzędu (wzór 9.2) wynika, że



Rys.9.3. Wyznaczanie prawdopodobieństwa sygnału sinusoidalnego o przypadkowej fazie: a) sygnał, b) gęstość prawdopodobieństwa

$$p(u) = \frac{dF}{du} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{du}. \quad (9.8)$$

gdzie:  $\frac{dF}{d\varphi} = p(\varphi)$  - gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\varphi(t)$  określona wzorem (9.6).

Z równania (9.7) wyznacza się

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/u_m)^2}} \frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{u_m^2 - u^2}}. \quad (9.9)$$

Podstawiając (9.6) i (9.9) do (9.8), otrzymuje się

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{u_m^2 - u^2}} \cdot 2 & \text{dla } -u_m \leq u \leq u_m, \\ 0 & \text{dla } u < -u_m \text{ i } u > u_m. \end{cases} \quad (9.10)$$

Mnożnik 2 we wzorze (9.10) wynika z tego, że  $u(t)$  przyjmuje takie same wartości dla dwóch różnych kątów w przedziale  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Rozkład gęstości prawdopodobieństwa  $p(u)$  przedstawiono na rys. 9.3b.

### 9.2.2. Stacjonarność sygnałów stochastycznych, hipoteza o ergodyczności

Teoria sygnałów stochastycznych zakłada, że dany sygnał  $u(t)$  zaczyna się w chwili  $t=0$  i trwa nieskończenie długo. W praktyce musimy ograniczyć się do obserwacji i rejestracji danego sygnału w skończonym czasie. Przebieg danego sygnału  $u(t)$  zarejestrowany w przedziale czasu o długości  $T$  nazywamy realizacją badanego sygnału. Przypuśćmy, że w celu wyznaczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $p(u)$  zarejestrowano nie jedną lecz wiele realizacji danego sygnału, przy czym każda realizacja była rejestrowana w jednakowym, odpowiednio dobranym przedziale czasu  $(t, t+T)$ .

Jeżeli wyznaczony doświadczalnie kształt funkcji  $p(u)$  jest taki sam dla każdej realizacji, niezależnie od czasu, w którym dokonano jej rejestracji, to taki sygnał nazywamy stacjonarnym. W przeciwnym przypadku sygnał jest niestacjonarny i funkcja gęstości prawdopodobieństwa zależy od dwóch zmiennych, czyli  $p=p(u, t)$ .

Intuicyjnie wyczuwa się, że dla sygnałów stacjonarnych kształt funkcji  $p(u)$  nie zależy od metody wyznaczania (czasowa lub statystyczna). Nie istnieje jednak ogólny dowód równoważności obu metod. W praktyce inżynierskiej równoważność tę zakłada się jako tak zwaną hipotezę ergodyczną (z języka greckiego: ergon - praca, działanie; hodos - droga, podróż).

Proces losowy stacjonarny  $u(t)$ , dla którego na podstawie tylko jednej jego realizacji można wyznaczyć  $p(u)$  oraz charakteryzujące go parametry (patrz punkt 9.2.4) nazywamy procesem stacjonarnym ergodycznym. Oznacza to, że każda oddzielna realizacja tego procesu jest "pełnomocnym przedstawicielem" całego zbioru realizacji. Jeżeli proces ma tę własność, to dowolny jego parametr może być obliczony z jednej realizacji (dla dostatecznie długiego czasu obserwacji  $T$ ) lub ze zbioru realizacji (dla dostatecznie dużej ich liczby) na podstawie zbioru wartości sygnału wziętych po jednej z każdej realizacji w tej samej (mierząc od początku realizacji) chwili.

Rozważanie sygnałów stochastycznych przy założeniu, że są one stacjonarne i ergodyczne upraszcza ich analizę. Przed przystąpieniem do analizy zaleca się sprawdzanie tego założenia za pomocą metod opisanych w piśmiennictwie [1,16,24].

### 9.2.3. Rozkład prawdopodobieństwa drugiego rzędu

Niech

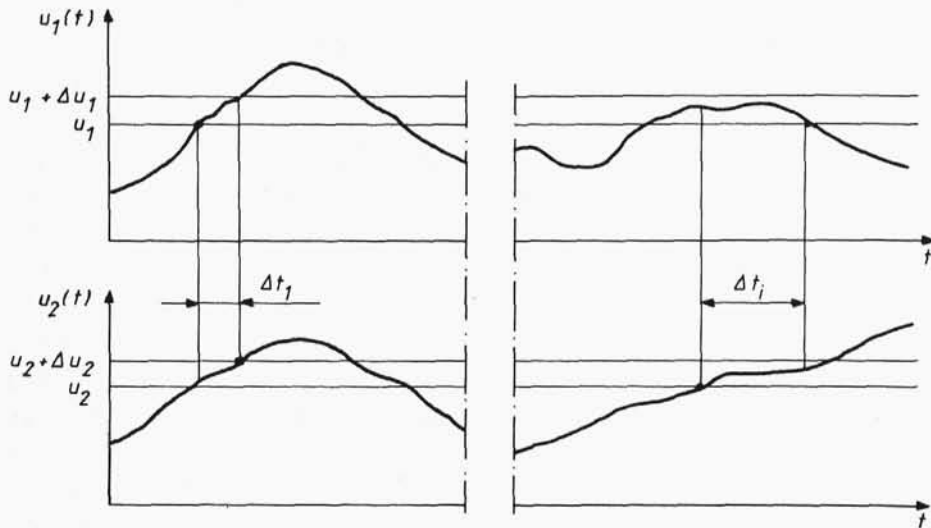
$$P(u_1, u_2) = P[u_1 < u_1(t) \leq u_1 + \Delta u_1, u_2 < u_2(t) \leq u_2 + \Delta u_2] \quad (9.11)$$

określa prawdopodobieństwo, że chwilowe wartości sygnałów  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  są zawarte odpowiednio w przedziałach  $(u_1, u_1 + \Delta u_1)$  i  $(u_2, u_2 + \Delta u_2)$  (rys.9.4). Jeżeli  $\Delta u_1$  i  $\Delta u_2$  są dostatecznie małe, to w granicy otrzymuje się gęstość prawdopodobieństwa drugiego rzędu (łączną gęstość prawdopodobieństwa)

$$p(u_1, u_2) = \lim_{\substack{\Delta u_1 \rightarrow 0 \\ \Delta u_2 \rightarrow 0}} \frac{P(u_1, u_2)}{\Delta u_1 \Delta u_2} = \frac{\partial^2 F(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad (9.12)$$

gdzie:  $P(u_1, u_2)$  jest łączną dystrybuantą sygnałów  $u_1$  i  $u_2$ .

Funkcja gęstości (9.12) określa związek probabilistyczny między dwoma sygnałami stochastycznymi  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$ . Można wy-



Rys.9.4. Ilustracja pojęcia prawdopodobieństwa drugiego rzędu. Zaznaczono odcinki czasu  $\Delta t_1$ , w których oba sygnały  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  są zawarte równocześnie w odpowiednich przedziałach

znaczyć ją z pomiarów metodą czasową lub statystyczną. Dla ustalonej wartości jednego z sygnałów (np.  $u_1(t) = u_1 = \text{const}$ ) wyznacza się jedną z tych metod jednowymiarowy rozkład  $p(u_1, u_2)$ . Powtarzając postępowanie dla wielu  $u_1$  zawartych w granicach zmienności od  $u_{1\min}$  do  $u_{1\max}$  otrzymuje się zbiór rozkładów jednowymiarowych, który jest podstawą do wyznaczenia rozkładu dwuwymiarowego np. typu pokazanego na rys.9.6 (na tym rysunku  $u_2(t) = \dot{u}_1(t)$  co jest szczególnym przypadkiem wynikającym z treści przykładu 9.3).

#### 9.2.4. Parametry sygnałów stochastycznych

Dla sygnału stochastycznego  $u(t)$  nie udaje się uzyskać opisu analitycznego w postaci funkcji czasu. Można jednak wyznaczyć różne jego parametry, które ułatwiają ocenę i porównywanie różnych sygnałów.

Wartość średnia  $\bar{u}$  określona jest wzorem

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (9.13)$$

Czas całkowania  $T$  dobiera się według poprzednio podanej zasady. Wartość  $\bar{u}$  określa składową stałą sygnału stochastycznego. Z teorii rachunku prawdopodobieństwa wiadomo, że

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du. \quad (9.14)$$

Kolejnym parametrem jest wartość średnia kwadratowa

$$\overline{u^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt. \quad (9.15)$$

Jest ona miarą średniej mocy sygnału. Wartość skuteczną sygnału  $u(t)$  oblicza się ze wzoru

$$u_{sk} = \sqrt{\overline{u^2}}. \quad (9.16)$$

Ponadto obowiązuje zależność

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u) du. \quad (9.17)$$

Wariancja  $\sigma^2$  sygnału  $u(t)$  nazywa się wartością średnią o postaci

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - \bar{u}]^2 dt = \overline{u^2} - (\bar{u})^2. \quad (9.18)$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji  $\sigma$  nazywany jest odchyleniem średnim (odchyleniem standardowym).

Wymienione parametry należą do najczęściej stosowanych do opisu sygnałów stochastycznych.

Wiele spotykanych w praktyce sygnałów stochastycznych ma charakter gaussowski (postać analityczną gęstości prawdopodobieństwa sygnału gaussowskiego przypomniano dalej, patrz np. wzór (9.30)). Ważną cechą takiego sygnału jest to, że zarówno jego całka jak i pochodna po czasie są sygnałami gaussowskimi.



### 9.2.5. Współczynnik korelacji, funkcje korelacyjne

Między dwoma sygnałami może występować zależność polegająca na tym, że jeden z nich reaguje na zmiany drugiego. Jako miarę zależności między sygnałami losowymi (stacjonarnymi, ergodycznymi) przyjmuje się współczynnik korelacji o postaci

$$\rho_{u_1, u_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t) u_2(t) dt. \quad (9.19)$$

Przy doświadczalnym wyznaczaniu współczynnika  $\rho_{u_1, u_2}$  wartość czasu całkowania  $T$  wpływa na dokładność oszacowania. Na ogół  $T$  dobiera się tak, aby błąd wyznaczania  $\rho_{u_1, u_2}$  nie przekroczył zadanej z góry wartości.

Współczynnik korelacji jest wartością średnią iloczynu dwóch sygnałów stochastycznych. Tak więc, przez analogię ze wzorem (9.14), można podać drugą postać jego wzoru definiującego

$$\rho_{u_1, u_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 p(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (9.20)$$

Jeżeli współczynnik  $\rho_{u_1, u_2} = 0$ , to sygnały  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  są nieskorelowane (ortogonalne). Oznacza to, że są one niezależne i każdy z nich nie reaguje na zmiany drugiego.

Współczynnik korelacji nie daje możliwości wykrycia zależności między dwoma sygnałami, nawet o identycznych przebiegach, ale przesuniętych względem siebie na osi czasu. Dlatego współczynnik ten uzależniono od względnego przesunięcia w czasie dwóch sygnałów o wartość  $\tau$  tworząc w ten sposób funkcję korelacji  $R_{u_1, u_2}(\tau)$  o postaci

$$R_{u_1, u_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t) u_2(t-\tau) dt. \quad (9.21)$$

W przypadku, gdy  $u_1(t) = u_2(t)$  mówi się o funkcji korelacji wzajemnej (interkorelacji); jeżeli  $u_1(t) = u_2(t)$  - o funkcji ko-

relacji własnej (autokorelacji). Najważniejsze własności funkcji korelacyjnych są następujące:

$$R_{u_1, u_2}(0) = \rho_{u_1, u_2}, \quad (9.22)$$

$$R_{u_1, u_1}(0) = \rho_{u_1, u_1} = \overline{u_1^2}, \quad (9.23)$$

$$R_{u_1, u_1}(\tau) = R_{u_1, u_1}(-\tau) \text{ (parzystość)}, \quad (9.24)$$

$$R_{u_1, u_2}(\tau) = -R_{u_1, u_2}(-\tau) \text{ (antysymetria)}, \quad (9.25)$$

$$|R_{u_1, u_1}(\tau)| \leq R_{u_1, u_1}(0), \quad (9.26)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{u_1, u_1}(\tau) = (\bar{u}_1)^2, \quad (9.27)$$

$$R_{\dot{u}_1, \dot{u}_1}(\tau) = - \frac{d^2 R_{u_1, u_1}(\tau)}{d\tau^2}. \quad (9.28)$$

Ponadto, jeżeli sygnał zawiera składowe okresowe, to funkcja korelacji własnej także zawiera składowe okresowe o tym samym okresie. Tę własność wykorzystuje się do wydzielenia głównej składowej okresowej z sygnału stochastycznego.

Przykładem jest tu łączność z pojazdami kosmicznymi, gdzie ze względu na duże odległości sygnały radiowe docierające do stacji odbiorczej są niekiedy bardzo słabe, z nałożonymi na nie zakłóceniami stochastycznymi o amplitudach znacznie większych od sygnału właściwego. Jeżeli jednak informacja zakodowana jest w częstotliwości sygnału nadawanego, to jej "wydobycie" z silnie zakłóconego sygnału odbieranego jest możliwe za pomocą funkcji autokorelacji.

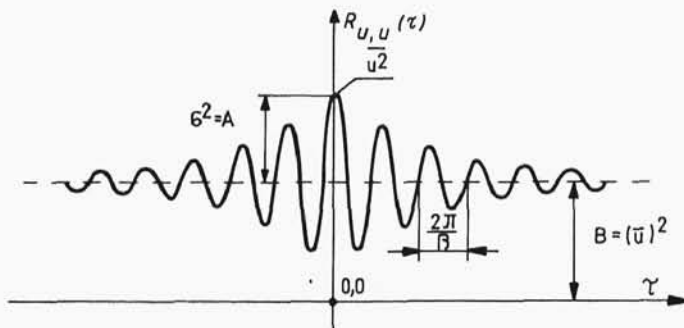
### Przykład 9.2

Do pomiaru drgań konstrukcji zastosowano aparaturę elektrometryczną, która sygnał mechaniczny (odkształcenie) przetwarza na sygnał elektryczny. Umożliwiło to poddanie sygnału

elektrycznego obróbce numerycznej za pomocą komputera<sup>1)</sup>. Dzięki temu stwierdzono, że badany sygnał  $u(t)$  ma charakter stochastyczny, stacjonarny, gaussowski, a jego funkcja korelacji własnej ma postać pokazaną na rys.9.5. Wykres ten aproksymowano zależnością

$$R_{u,u}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \left( \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right) + B, \quad (9.29)$$

gdzie:  $A = 4 \text{ V}^2$ ,  $B = 5 \text{ V}^2$ ,  $\alpha = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 2 \text{ s}^{-1}$ .



Rys.9.5. Wykres autokorelacji sygnału losowego do przykładu 9.2. Podane na rysunku związki między  $A$  i  $B$  oraz  $\overline{u^2}$ ,  $(\bar{u})^2$  i  $\sigma^2$  wynikają ze wzoru (9.29) przy uwzględnieniu własności (9.23) i (9.27) oraz wzoru (9.18). W przypadku gdy  $B=0$  wykres ten jest typowy dla funkcji autokorelacji sygnału zwanego szumem wąskopasmowym

Taka postać funkcji autokorelacji jest typowa dla wielu procesów stochastycznych w przyrodzie i technice, a jej parametry mają następujące interpretacje fizyczne:  $A$  - wartość średnia kwadratowa sygnału stochastycznego,  $B$  - kwadrat wartości średniej sygnału,  $\beta$  - częstotliwość dominującej harmonicznej,  $\alpha$  - parametr charakteryzujący nieregularność dominującej

<sup>1)</sup> Do tego celu stosuje się wyspecjalizowane pakiety oprogramowania służące do wyznaczania gęstości widmowej, funkcji auto- i interkorelacyjnych, gęstości widmowej mocy (patrz dalej punkt 9.4) i innych funkcji i parametrów zarejestrowanych doświadczalnie sygnałów. Produkowana jest także specjalna, skomputeryzowana aparatura do analizy sygnałów stochastycznych. Najbardziej znanymi producentami są Brüel & Kjaer i Hewlett-Packard. W Polsce Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej produkuje zestaw pod nazwą Programowany Analizator Sygnałów GC-89.

harmonicznej. Należy obliczyć prawdopodobieństwo  $P$ , że wartość sygnału  $\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt}$  nie przekroczy  $\sqrt{5} \text{ Vs}^{-1}$  (co po uwzględnieniu odpowiedniej podziałki jest pewną wartością prędkości drgań).

Rozwiązując powyższe zadanie korzysta się z własności, że pochodna po czasie sygnału gaussowskiego jest także sygnałem gaussowskim, a zatem funkcja gęstości sygnału  $\dot{u}(t)$  ma postać

$$p(\dot{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{u}}} \exp \left[ - \frac{(\dot{u} - \bar{\dot{u}})^2}{2(\sigma_{\dot{u}})^2} \right]. \quad (9.30)$$

We wzorze (9.30) nieznane są:  $\bar{\dot{u}}$  - wartość średnia i  $\sigma_{\dot{u}}^2$  - wariancja pochodnej sygnału  $u(t)$ .

Przypuśćmy, że  $\dot{u}(t)$  uzyskuje się jako sygnał wyjściowy ciągłego członu liniowego różniczkującego, idealnego pierwszego rzędu, na wejście którego podano stochastyczny sygnał  $u(t)$ . Dla rozpatrywanego sygnału stacjonarnego wartość  $\bar{u} = \sqrt{5} \text{ V} = \text{const.}$  Idealny człon różniczkujący nie przenosi składowej stałej, zatem  $\bar{\dot{u}} = 0$ .

Z porównania wzorów (9.18) i (9.23) wynika

$$R_{\dot{u}, \dot{u}}(0) = (\sigma_{\dot{u}})^2 + \left( \bar{\dot{u}} \right)^2. \quad (9.31)$$

Korzystając z własności (9.28) i pamiętając, że  $\bar{\dot{u}} = 0$  otrzymuje się

$$R_{\dot{u}, \dot{u}}(0) = (\sigma_{\dot{u}})^2 = \left[ - \frac{d^2 R_{u, u}(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=0}. \quad (9.32)$$

Oblicza się kolejno:

$$\frac{dR_{u, u}(\tau)}{d\tau} = - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} A e^{-\alpha|\tau|} \sin(\beta|\tau|), \quad (9.33)$$

$$- \frac{d^2 R_{u, u}(\tau)}{d\tau^2} = A(\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos(\beta\tau) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right). \quad (9.34)$$

Dla  $\tau=0$  wyznacza się

$$\sigma_{\dot{u}}^2 = A(\alpha^2 + \beta^2) = 20 \text{ V}^2 \text{ s}^{-2}. \quad (9.35)$$

Poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi

$$P = \int_{-\infty}^{\sqrt{5}} p(\dot{u}) d\dot{u}$$

czyli

$$P = 1 - \int_{\sqrt{5}}^{\infty} p(\dot{u}) d\dot{u} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{20}} \int_{\sqrt{5}}^{\infty} e^{-\dot{u}^2/40} d\dot{u} = 0,6815. \quad (9.36)$$

We wzorze (9.36) wartość całki jest równa prawdopodobieństwu zdarzenia przeciwnego do poszukiwanego. Całkę tę oblicza się za pomocą publikowanej w podręcznikach i poradnikach z zakresu statystyki (patrz np. [18]) tablicy całki prawdopodobieństwa Laplace'a.

### Przykład 9.3

Z doświadczenia wiadomo, że funkcja autokorelacji odchylenia pilotowanego automatycznie samolotu od zadanej wysokości określona jest wzorem (9.29), gdzie:  $A=400 \text{ m}^2$ ,  $B=0$ ,  $\alpha=0,01 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta=0,1 \text{ s}^{-1}$ . Odchyłka  $u(t)$  jest więc sygnałem stochastycznym, stacjonarnym, o funkcji gęstości prawdopodobieństwa gaussowskiej i wartości średniej  $\bar{u}=0$ .

Obliczyć, ile razy średnio w ciągu lotu trwającego  $T=5 \text{ h}$  samolot odchyli się od zadanej wysokości o wartość większą niż  $\pm 50 \text{ m}$ .

Jest oczywiste, że liczba przekroczeń zadanej wartości odchyłki zależy zarówno od sygnału  $u(t)$ , jak i od jego pochodnej  $\dot{u}(t)$ . Dla sygnału szybkozmiennego należy spodziewać się większej liczby przekroczeń. Tak więc liczba przekroczeń może być wyznaczona na podstawie rozkładu dwuwymiarowego o postaci

$$p(u, \dot{u}) = p(u) p(\dot{u}), \quad (9.37)$$

gdzie:

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right) \quad (9.38)$$

oraz

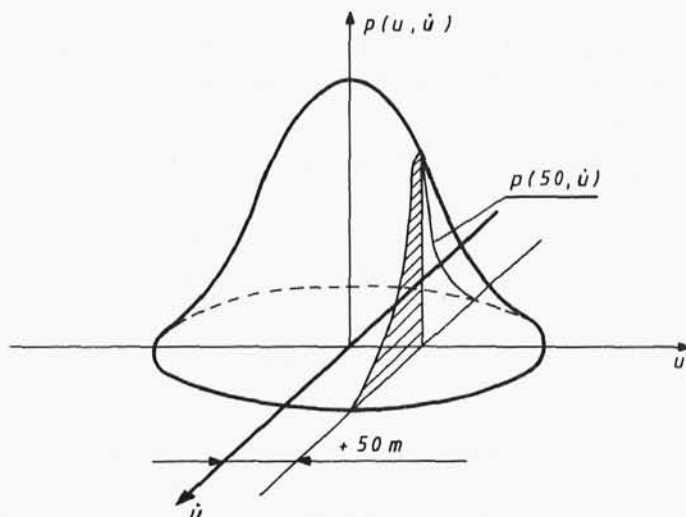
$$p(\dot{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{u}}} \exp\left(-\frac{\dot{u}^2}{2(\sigma_{\dot{u}})^2}\right). \quad (9.39)$$

We wzorach (9.38) i (9.39) uwzględniono, że  $\bar{u}=0$  i  $\bar{\dot{u}}=0$ . Na rys. 9.6 pokazano wykres gęstości dwuwymiarowej (9.37). Warto zwrócić uwagę na to, że funkcje (9.37), (9.38) i (9.39) nie są związkami liczbowo-liczbowymi, dotyczą bowiem konkretnych wielkości fizycznych. Wymiarem  $u$  (a więc i  $\sigma_u$ ) są metry, a wymiarem  $\dot{u}$  (czyli także  $\sigma_{\dot{u}}$ ) - metry na sekundę. Biorąc to pod uwagę łatwo wykazać, że wymiarem  $p(u)$  jest  $m^{-1}$ , wymiarem  $p(\dot{u})$  jest  $s \cdot m^{-1}$ , a wymiarem  $p(u, \dot{u})$  jest  $s \cdot m^{-2}$ .

Średnią, przypadającą na jednostkę czasu, liczbę przekroczeń  $n$  odchyłki wysokości  $+50$  m można wyznaczyć z zależności

$$n = \int_0^{\infty} p(50, \dot{u}) \dot{u} d\dot{u}. \quad (9.40)$$

Wzór (9.40) można objaśnić przez analogię ze wzorem (9.14). Wartość średnią zmiennej losowej w dowolnym przedziale można bowiem wyznaczyć korzystając z tego wzoru, z tym że należy dostosować odpowiednio granice całkowania.



Rys.9.6. Ilustracja łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $p(u, \dot{u})$

Gaussowska funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $p(50, \dot{u})$  jest jednowymiarowa (patrz rys.9.6), a wartość całki (9.40) w granicach od  $\dot{u}=0$  do  $\dot{u} \rightarrow \infty$  (dotyczy obszaru zakreskowanego na rys.9.6) jest wartością średnią liczby przekroczeń w jednostce czasu odchyłki +50 m w kierunku z dołu do góry, czyli dla  $\dot{u} > 0$  (nie interesujemy się liczbą powrotów z góry do dołu, czyli dla  $\dot{u} < 0$ ). Wymiarem  $n$  jest  $s^{-1}$ . Wielkość  $n$  nazywana jest czasową gęstością prawdopodobieństwa wykroczenia sygnału stochastycznego poza dany poziom (w tym przypadku +50 m), a uzasadnienie wzoru (9.40) można uzyskać także na innej drodze [25].

Uwzględniając (9.37) oraz (9.38) i (9.39) po wykonaniu całkowania, otrzymuje się:

$$n = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{u}}}{\sigma_u} \exp\left(-\frac{50^2}{2\sigma_u^2}\right). \quad (9.41)$$

We wzorze (9.41) nie są jeszcze znane  $\sigma_u$  i  $\sigma_{\dot{u}}$ . Z rys.9.5 wynika, że

$$\sigma_u^2 = A. \quad (9.42)$$

Do obliczenia wartości  $(\sigma_{\dot{u}})^2$  korzysta się, podobnie jak w zadaniu 9.2 ze wzorów (9.32)+(9.35), a wtedy

$$(\sigma_{\dot{u}})^2 = A(\alpha^2 + \beta^2). \quad (9.43)$$

Wyrażenia (9.42) i (9.43) podstawia się do (9.41) uwzględniając dane liczbowe wraz z jednostkami i otrzymuje się

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(0,01)^2 + (0,1)^2} \exp\left(-\frac{50^2}{2 \cdot 400}\right) = 0,0007 \text{ s}^{-1}.$$

Biorąc pod uwagę, że lot trwa  $T=5 \cdot 3600$  s oraz, że średnia liczba przekroczeń na jednostkę czasu odchyłki -50 m jest także równa  $n$ , oblicza się całkowitą liczbę przekroczeń  $N$

$$N = 2nT \approx 25.$$

### 9.3. GĘSTOŚĆ WIDMOWA MOCY SYGNAŁU STOCHASTYCZNEGO

Funkcje korelacyjne są funkcjami czasu  $\tau$  mierzonego inaczej niż czas  $t$ . Mimo to można poddawać je przekształceniu Fouriera. W przypadku funkcji korelacji własnej otrzymuje się