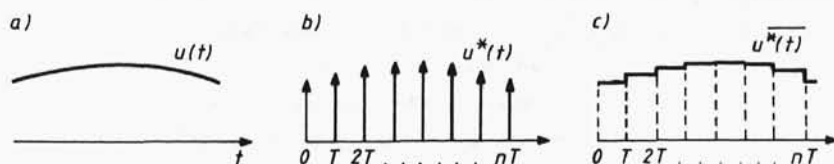


## 8. LINIOWE UKŁADY DYSKRETNE

### 8.1. WSTĘP

Układy sterowania i regulacji, w których występują sygnały zarówno ciągłe (analogowe) jak i dyskretne (rys.8.1) stosowane są coraz częściej w praktyce inżynierskiej. Do układów tych wprowadza się jako ich elementy komputery i mikrokomputery, czyli urządzenia przetwarzające sygnały dyskretne. W opisie matematycznym takich układów szczególnie przydatne są równania różnicowe i dyskretna transformata Laplace'a (przekształcenie Z). Warto dodać, że teoria liniowych układów dyskretnych powstała ponad dziesięć lat wcześniej od pierwszych technicznych ich realizacji [12].

Pojawienie się tanich mikroprocesorów i zbudowanych z nich mikrokomputerów znacznie przyspiesza proces zastępowania regulatorów ciągłych regulatorami cyfrowymi. Układy automatyki z regulatorami cyfrowymi nazywane są niekiedy układami bezpośredniego sterowania cyfrowego (skrót angielski: DDC - direct digital control). Szybkość przetwarzania informacji przez mikrokomputer pozwala na zastępowanie znacznej liczby regulatorów ciągłych jednym mikrokomputerem. Pojedynczy regulator jest zastąpiony odpowiednim programem wprowadzonym do pamięci operacyjnej mikrokomputera, który może jednocześnie przetwarzać wiele takich programów pracując sekwencyjnie z podziałem czasu.



Rys.8.1. Sygnały: a) ciągły, b) dyskretny, c) schodkowy;  
 $T$  - okres próbkowania

Sygnał analogowy wprowadzany do mikrokomputera musi być zastąpiony dyskretnym, a sygnał dyskretny wyprowadzany z komputera często przetwarza się na analogowy. Służą do tego specjalne urządzenia wejścia (przetworniki analogowo-cyfrowe) i wyjścia (przetworniki cyfrowo-analogowe).

Przekształcaniu sygnałów z postaci ciągłej na dyskretną towarzyszą zjawiska, które nie mają odpowiedników w układach ciągłych (np. szumy wysokoczęstotliwościowe). Uzasadnia to stosowanie w dyskretnych układach automatyki pewnych dodatkowych elementów, takich jak np. filtry.

Układy sterowania dyskretnego zawierające mikroprocesory wypierają układy ciągłe ze względu na: większą niezawodność i dokładność działania, mniejsze zużycie energii, miniaturyzację sprzętu automatyki i stale malejący ich koszt.

## 8.2. PRÓBKOWANIE I ODTWARZANIE SYGNAŁÓW CIĄGŁYCH; TWIERDZENIE KOTIELNIKOWA-SHANNONA

Próbkowaniem nazywa się proces pobierania w odstępach czasu  $T$  z ciągłego sygnału  $u(t)$  (rys.8.1a) ciągu dyskretnych wartości (próbek)  $u^*(t)$  (rys.8.1b). Czas próbkowania nie może być dobierany dowolnie. Zasadę doboru określa twierdzenie o próbkowaniu sformułowane przez Kotielnikowa w 1933 roku (zwane też twierdzeniem Kotielnikowa-Shannona):

*Jeżeli sygnał  $u(t)$  nie zawiera składowych o częstotliwościach większych od  $\omega_g$ , to jest on całkowicie określony przez podanie ciągu jego próbek  $u^*(t)$  pobieranych w odstępach czasu nie dłuższych niż  $T=\pi/\omega_g$ .*

W zastosowaniach praktycznych można zalecić, aby przed próbkowaniem sygnału  $u(t)$  określić jego częstotliwość graniczną  $\omega_g$  i odfiltrować wyższe harmoniczne. Wartość  $\omega_g$  wynika z oszacowania zakresu częstotliwości (pasma)  $0 \leq \omega \leq \omega_g$ , jakie powinno być przenoszone przez dany układ, możliwie bez zniekształceń, aby nie stracić istotnych informacji zawartych w sygnale [6]. Przyjmuje się bowiem, że dla  $\omega > \omega_g$  amplitudy składowych harmonicznych są pomijalnie małe. Oszacowanie  $\omega_g$  jest możliwe jeżeli znamy dokładne lub szacunkowe widmo fourierowskie  $U(j\omega)=F[u(t)]$ . Częstotliwość graniczna  $\omega_g$  jest więc pojęciem umownym, a jej

wartość wynika z zastosowań w poszczególnych dziedzinach techniki. Znajac  $\omega_g$  próbkuje się sygnał  $u(t)$  z częstotliwością, która zgodnie z twierdzeniem Kotelnikowa-Shannona winna być nie mniejsza od

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/\omega_g} = 2\omega_g.$$

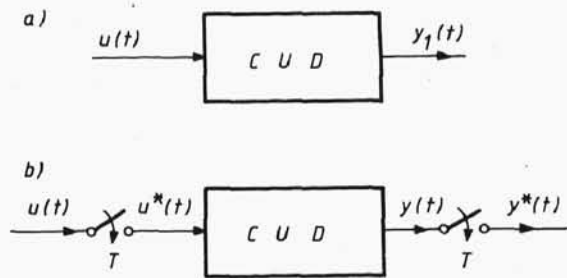
Wierne odtwarzanie sygnału z próbek nie jest technicznie realizowane. Przybliżone odtwarzanie sygnału wykonuje się za pomocą urządzeń zwanych ekstrapolatorami. Na rys.8.1c pokazano jeden z możliwych sposobów odtwarzania. Schodkowy sygnał analogowy  $u^*(t)$  jest przybliżeniem sygnału  $u(t)$ , a zasadę jego powstawania z ciągu próbek  $u^*(t)$  objaśnia rysunek.

### 8.3. OPIS CIĄGLYCH LINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH ZA POMOCĄ RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

Na rys.8.2a przedstawiono schemat ciągłego liniowego układu dynamicznego (CUD), którego model matematyczny ma postać

$$\sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^q b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}. \quad (8.1)$$

Fizyczna realizowalność układu opisanego liniowym równaniem różniczkowym (8.1) jest możliwa wtedy, gdy  $p \geq q$ . Równanie (8.1) nie nadaje się do modelowania układów dynamicznych zawierających chociażby jeden element cyfrowy, ponieważ w układzie takim występują sygnały nieciągłe.



Rys.8.2. Ciągły układ dynamiczny (CUD): a) model analogowy, b) model dyskretny

Model dyskretny ciągłego układu dynamicznego można utworzyć na podstawie schematu pokazanego na rys.8.2b. Zastosowano tu

synchronicznie działające przełączniki (impulsatory)<sup>1)</sup> o okresie impulsowania  $T$ . Przełącznik na wejściu ilustruje proces próbkowania sygnału. Przełącznik na wyjściu wytwarza sygnał  $y^*(t)$  (w rzeczywistości może nie występować). Model matematyczny układu ma postać związku między sygnałami dyskretnymi  $u^*(t)$  i  $y^*(t)$

$$\sum_{k=0}^p a_k \frac{\Delta^k y(n)}{T^k} = \sum_{i=0}^q b_i \frac{\Delta^i u(n)}{T^i}. \quad (8.2)$$

W równaniu różnicowym (8.2) czas występuje w postaci dyskretnych bezwymiarowych chwil  $n$ . W chwilach próbkowania obowiązuje zależność  $t=nT$ .

Z porównania (8.1) i (8.2) wynika, że:

- sygnałom ciągłym  $y_1(t)$  i  $u(t)$  odpowiadają sygnały dyskretnie  $y^*(t)$  i  $u^*(t)$ . Stosując bezwymiarowy czas zapisujemy je jako  $y(n)$  i  $u(n)$ ;
- różniczkom czasu  $dt^k$  i  $dt^i$  odpowiadają  $T^k$  i  $T^i$ ;
- różniczkom sygnałów  $d^k y_1(t)$  i  $d^i u(t)$  odpowiadają różnice skończone  $\Delta^k y(n)$  i  $\Delta^i u(n)$ .

Zazwyczaj po prawej stronie równania (8.2) występuje wymuszenie w postaci pewnej funkcji czasu bezwymiarowego  $\varphi(n)$ . Po rozpisaniu lewej strony równania (8.2) otrzymuje się:

$$\frac{a_p}{T^p} \Delta^p y(n) + \dots + \frac{a_k}{T^k} \Delta^k y(n) + \dots + \frac{a_2}{T^2} \Delta^2 y(n) + \frac{a_1}{T^1} \Delta^1 y(n) + a_0 \Delta^0 y(n) = \varphi(n). \quad (8.3)$$

Do obliczania różnic skończonych rzędu  $k$  stosuje się wzory<sup>2)</sup>

$$\Delta^k y(n) = \sum_{j=0}^k r_j y(n+j), \quad (8.4)$$

gdzie:

<sup>1)</sup> Stosuje się także nazwę "modulator impulsowy". Symbol graficzny przełącznika ma tu inne znaczenie niż na schematach elektrycznych.

<sup>2)</sup> Wzory (8.4) i (8.5) służą do obliczania różnic skończonych progresywnych (do przodu). W niektórych zastosowaniach spotyka się również różnice skończone wsteczne lub centralne, obliczane z innych zależności.

$$r_j = (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad (8.5)$$

Korzystając z (8.4) i (8.5) równanie (8.3) można przekształcić do postaci

$$c_0 y(n+p) + c_1 y(n+p-1) + \dots + c_p y(n) = \varphi(n), \quad (8.6)$$

gdzie:  $c_0, c_1 \dots c_p$  - nowe stałe.

Aby rozwiązać równanie (8.6) należy znać warunki początkowe. Najwyższy rząd różnicy skończonej w równaniu różnicowym jest analogonem najwyższego rzędu pochodnej w równaniu różniczkowym. W tym przypadku wynosi on  $p$ , czyli warunków początkowych musi być  $p-1$ , a mianowicie muszą być znane wartości  $y(0), y(1) \dots y(p-1)$ .

### Przykład 8.1

CUD przedstawiony na rys.8.2b jest członem inercyjnym pierwszego rzędu. Gdyby sygnały wejściowy i wyjściowy były ciągle, to obowiązywałaby zależność

$$T_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = k u(t), \quad (8.7)$$

gdzie:  $T_1$  - stała czasowa członu,  $k$  - wzmocnienie.

Jednakże człon ten znalazł się w układzie dyskretnym. Dlatego zgodnie z podanymi wcześniej zasadami:

- sygnałowi  $y_1(t)$  odpowiada  $y(n)$ ,
- sygnałowi  $u(t)$  odpowiada  $u(n)$ ,
- różnicze sygnału  $dy_1(t)$  odpowiada różnica skończona rzędu pierwszego  $\Delta^1 y(n)$ ,
- różnicze czasu  $dt$  odpowiada okres próbkowania  $T$ .

Równanie opisujące związek między sygnałami dyskretnymi  $y^*(t)$  i  $u^*(t)$  ma więc postać równania różnicowego

$$\frac{T_1}{T} \Delta^1 y(n) + y(n) = k u(n). \quad (8.8)$$

Stosując wzory (8.4) i (8.5) oblicza się

$$\Delta^1 y(n) = \Delta y(n) = y(n+1) - y(n). \quad (8.9)$$

Podstawiając (8.9) do (8.8), otrzymano

$$\frac{T_1}{T} y(n+1) - \frac{T_1}{T} y(n) + y(n) = k u(n). \quad (8.10)$$

Oznacza się dla wygody  $\frac{T_1}{T} = a$ , a wtedy

$$a y(n+1) - (a-1) y(n) = k u(n). \quad (8.11)$$

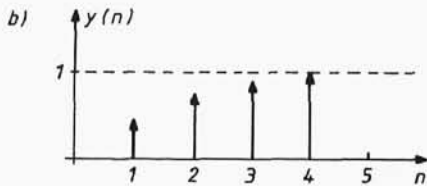
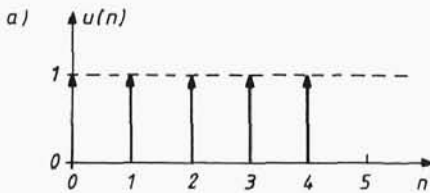
Równanie (8.11) można rozwiązać metodą rekurencyjną. Niech wymuszenie ma postać dyskretnego skoku jednostkowego  $u(n)=1(n)$  (rys.8.3a) oraz  $a=2$ ,  $k=1$ ,  $y(0)=0$ . Równanie (8.11) przekształca się do następującej postaci:

$$y(n+1) = \frac{a-1}{a} y(n) + \frac{k}{a} u(n). \quad (8.12)$$

Podstawiając w równaniu (8.12) kolejno  $n=1,2,3,\dots$  można łatwo wypełnić tablicę 8.1 i sporządzić rys.8.3b.

Tablica 8.1

n	0	1	2	3	4	...
y(n)	0,00000	0,50000	0,75000	0,87500	0,93750	...
y(n+1)	0,50000	0,75000	0,87500	0,93750	0,96875	...



Rys.8.3. Sygnały dyskretne (przykład 8.1): a) wymuszenie, b) odpowiedź

Metoda rekurencyjna jest przydatna przy komputerowym rozwiązywaniu równań różnicowych. W miarę wzrostu rzędu równania rośnie liczba wierszy tablicy, a także rośnie liczba obliczeń. Algorytm pozostaje jednak prosty i łatwy do zaprogramowania. Wadą tej metody jest brak rozwiązania w postaci analitycznej. Rozwiązanie takie można uzyskać stosując dyskretne przekształcenie Laplace'a (przekształcenie Z).

#### 8.4. PRZEKSZTAŁCENIE Z I JEGO WŁASNOŚCI

Model matematyczny ciągu  $u^*(t)$  próbek sygnału analogowego  $u(t)$  można przedstawić w postaci

$$u^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT) \delta(t-nT), \quad (8.13)$$

gdzie  $u(nT)$  jest ciągiem wartości próbek w chwilach impulsowania, a  $\delta(t-nT)$  jest ciągiem impulsów Diraca. Impulsy te<sup>3)</sup> zdefiniowane są następująco

$$\delta(t-nT) = \begin{cases} \infty & \text{dla } t=nT, \\ 0 & \text{dla } t \neq nT \end{cases} \quad (8.14)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) dt = 1, \quad \text{dla } n=0,1,2,3 \dots$$

Wzór (8.13) opisuje ciąg nieskończenie krótkotrwałych i nieskończenie wysokich impulsów Diraca o powierzchniach jednostkowych modulowanych przez chwilowe wartości próbkowanej funkcji ciągłej. Modeluje on rzeczywisty ciąg próbek, czyli impulsów o bardzo krótkich czasach trwania i o wysokościach równych chwilowym wartościom funkcji ciągłej. Poprawność tego typu modelowania wynika z tego, że dla rzeczywistych układów dynamicznych odpowiedzi na wymuszenie impulsem rzeczywistym i zmodulowanym impulsem Diraca (pole impulsu Diraca równe wysokości impulsu rzeczywistego) są z zadowalającą dokładnością takie same.

Wyrażenie (8.13) poddaje się przekształceniu Laplace'a, mimo iż nie jest to funkcja ciągła. Wtedy

$$U(s) = \int_0^{\infty} u^*(t) e^{-st} dt. \quad (8.15)$$

Podstawiając (8.13) do (8.15) otrzymuje się

$$U(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \delta(t-nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-snT}. \quad (8.16)$$

W powyższym sumowaniu wykorzystano fakt, że całka sumy jest równa sumie całek oraz własność wynikająca ze wzoru (8.14) - dla ustalonego  $n$  istnieje tylko  $n$ -ta próbka, której wartość pod znakiem całki jest traktowana jako stała. Oznaczając  $e^{sT}=z$  otrzymuje się wzór definicyjny dyskretnego przekształcenia Laplace'a zwanego przekształceniem Z

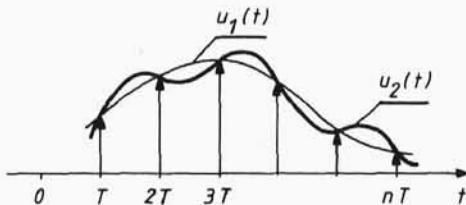
<sup>3)</sup> W przypadku stosowania czasu bezwymiarowego stosuje się zapis  $\delta(n)$ , gdzie  $\delta(n)=\delta(t-nT)$ .

$$Z[u^*(t)] = U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)z^{-n}. \quad (8.17)$$

Łatwo zauważyć, że

$$Z[u^*(t)] = Z[u(t)] = U(z), \quad (8.18)$$

ponieważ przekształcenie  $Z$  dotyczy wartości sygnału pobieranego w dyskretnych chwilach czasu. Z teorii przekształcenia Laplace'a wiadomo, że stosuje się je do funkcji ciągłych. We wzorze (8.15) naruszono tę zasadę i zastosowano przekształcenie Laplace'a do ciągu impulsów. Konsekwencją tego postępowania jest niejednoznaczność odwrotnego przekształcenia  $Z$  w odniesieniu do funkcji ciągłych, co pokazano na rys.8.4. Sygnałom  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  odpowiada ta sama transformata  $U(z)$ , bo  $u_1^*(t) = u_2^*(t)$



(próbki obu funkcji mają te same wartości). W zastosowaniach przekształcenia  $Z$  do badania układów technicznych nie powoduje to jednak kłopotów, bo rozpatrywane sygnały należą zazwyczaj do pewnej znanej klasy.

Rys.8.4. Niejednoznaczność odwrotnej transformacji sygnałów z próbek

### 8.5. WYBRANE WŁASNOŚCI PRZEKSZTAŁCENIA $Z$

W analizie i syntezie układów dyskretnych wykorzystuje się często następujące własności przekształcenia  $Z$ :

#### 1. Liniowość

$$Z[au_1(t) + bu_2(t)] = aZ[u_1(t)] + bZ[u_2(t)]. \quad (8.19)$$

#### 2. Transformata sumy próbek

$$Z\left[\sum_{j=0}^n u(j)\right] = \frac{z}{z-1} U(z). \quad (8.20)$$

#### 3. Twierdzenie o przesunięciu w lewo o jeden okres próbkowania

$$Z[u(t+T)] = z[U(z) - u(0^+)]. \quad (8.21)$$

#### 4. Twierdzenie o przesunięciu w prawo

$$Z[u(t-nT) \cdot 1(t-nT)] = z^{-n}U(z). \quad (8.22)$$



5. Twierdzenie o wartości początkowej

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{n \rightarrow 0} u(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} U(z). \quad (8.23)$$

6. Twierdzenie o wartości końcowej (o ile istnieje)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)U(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} U(z) \right]. \quad (8.24)$$

7. Transformata różnicy skończonej rzędu k

$$Z[\Delta^k u(nT)] = (z-1)^k U(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} [(z-1)^{k-1-i} \Delta^i u(0)], \quad (8.25)$$

gdzie  $\Delta^i$  wyznacza się za pomocą wzorów (8.4) i (8.5).

Inne własności i transformaty przekształcenia Z sygnałów, rzadziej wykorzystywane, można znaleźć w razie potrzeby w podręcznikach.

**Przykład 8.2**

Znaleźć transformatę  $U(z)$  sygnału  $u(n)=a^n$ , gdzie:  $n \geq 0$  - bezwymiarowe chwile czasu,  $a \geq 0$  - stała.

Ze wzoru (8.17) wynika

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}. \quad (8.26)$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie (8.26) jest sumą wyrazów nieskończonego szeregu geometrycznego o ilorazie  $q = \frac{a}{z}$ . Korzystając ze znanego powszechnie wzoru na sumę wyrazów tego szeregu otrzymuje się

$$U(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}.$$

Dla  $a=1$  otrzymuje się

$$u(n) = 1^n(n) = 1(n), \quad (8.27)$$

oraz

$$Z[1(n)] = \frac{z}{z-1}. \quad (8.28)$$

Wzór (8.28) przedstawia transformatę Z dyskretnego skoku jednostkowego  $1(n)$ .

**Przykład 8.3**

Znaleźć transformatę  $Y(z)$  sygnału  $y(n)$ , gdzie  $y(n)$  jest rozwiązaniem równania różnicowego (8.11) dla wymuszenia  $u(n)=1(n)$ .

Korzystając z własności (8.19) i (8.21) dokonuje się obustronnej transformacji z równania (8.11)

$$a \cdot z [Y(z) - y(0)] - (a-1) Y(z) = k \frac{z}{z-1}.$$

Z powyższego równania otrzymano

$$Y(z) = \frac{k \frac{z}{z-1} + a z y(0)}{a z - a + 1}.$$

Pamiętając z treści przykładu 8.1, że  $y(0)=0$ , otrzymuje się

$$Y(z) = \frac{k z}{a (z-1) \left( z - \frac{a-1}{a} \right)}. \quad (8.29)$$

Transformata powyższa jest w postaci uwidaczniającej jej bieguny (miejsca zerowe mianownika). Ułatwia to znalezienie oryginału  $y^*(t)$  lub  $y(n)$ .

#### 8.6. ODWROTNE PRZEKSZTAŁCENIE Z

Za pomocą przekształcenia odwrotnego

$$u^*(t) = Z^{-1}[U(z)], \quad (8.30)$$

można wyznaczyć ciąg impulsów  $u^*(t)$  (lub  $u(n)$  - gdy stosujemy bezwymiarowy zapis czasu) będący oryginałem transformaty  $U(z)$ . Stosuje się trzy metody wyznaczania oryginałów:

- metoda rozkładania na ułamki proste i korzystania z tablic transformat  $Z$ ;
- metoda rozwinięcia w szereg potęgowy;
- metoda residuów.

W praktyce inżynierskiej stosuje się najczęściej dwie pierwsze metody.

##### Przykład 8.4

Znaleźć oryginał transformaty (8.29).

Transformata ta ma postać ułamka prostego. W tablicach transformat (dostępnych w wielu podręcznikach) znajduje się

$$Z^{-1} \left[ \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)} \right] = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} 1(n). \quad (8.31)$$

W rozpatrywanym przypadku  $z_1=1$  i  $z_2 = \frac{a-1}{a}$ . Pamiętając, że  $a = \frac{T_1}{T}$  (patrz przykład 8.1) otrzymuje się

$$z^{-1}[Y(z)] = y(n) = k \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T_1}{T} \right)^n \right] 1(n). \quad (8.32)$$

Zależność (8.32) jest analityczną postacią rozwiązania równania różnicowego (8.11) dla  $u(n)=1(n)$ , a jej przebieg pokazano na rys.8.3.

#### Przykład 8.5

Stosując metodę rozwinięcia w szereg potęgowy znaleźć oryginał transformaty

$$U(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}. \quad (8.33)$$

W tym celu dzieli się licznik transformaty przez jej mianownik

$$\begin{aligned} z : (z^2 - 3z + 2) &= z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + 31z^{-5} + 63z^{-6} + \dots \\ \underline{-z + 3 - 2z^{-1}} & \\ &= 3 - 2z^{-1} \\ \underline{-3 + 9z^{-1} - 6z^{-2}} & \\ &= 7z^{-1} - 6z^{-2} \\ \underline{-7z^{-1} + 21z^{-2} - 14z^{-3}} & \\ &= 15z^{-2} - 14z^{-3} \\ \underline{-15z^{-2} + 45z^{-3} - 30z^{-4}} & \\ &= 31z^{-3} - 30z^{-4} \\ \underline{-31z^{-3} + 93z^{-4} - 62z^{-5}} & \\ &= 63z^{-4} - 62z^{-5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z powyższego wyniku, że transformata (8.33) może być zapisana w postaci

$$U(z) = 0z^0 + 1z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + 31z^{-5} + 63z^{-6} + \dots$$

Z (8.17) i (8.22) wynikają wartości ciągu impulsów  $u(n)$  będącego oryginałem transformaty (8.33) w kolejnych chwilach próbkowania określonych bezwymiarowym czasem  $n$ :  $u(0)=0$ ,  $u(1)=1$ ,  $u(2)=3$ ,  $u(3)=7$ ,  $u(4)=15$ ,  $u(5)=31$ ,  $u(6)=63$  itd., czyli

$$u(n) = 0 \delta(0) + 1 \delta(1) + 3 \delta(2) + 7 \delta(3) + 15 \delta(4) + 31 \delta(5) + 63 \delta(6) + \dots$$

lub stosując zapis ciągu próbek w funkcji czasu

$$u^*(t) = 0 \cdot \delta(t) + 1 \delta(t-T) + 3 \delta(t-2T) + 7 \delta(t-3T) + 15 \delta(t-4T) + 31 \delta(t-5T) + 63 \delta(t-6T) + \dots$$

### 8.7. TRANSMITANCJA IMPULSOWA

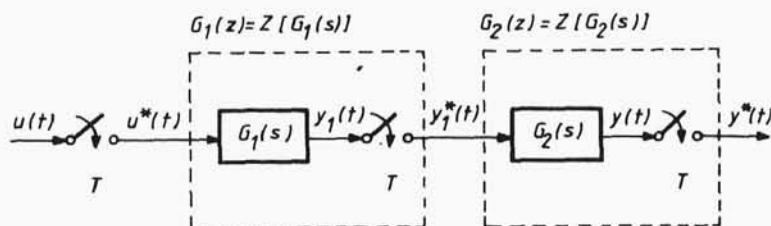
Transmitancję impulsową  $G(z)$  układu dyskretnego (rys.8.2b) definiuje się jako stosunek transformaty  $Z$  sygnału odpowiedzi do transformaty  $Z$  sygnału wymuszenia przy zerowych warunkach początkowych

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z[y^*(t)]}{Z[u^*(t)]}. \quad (8.34)$$

#### Przykład 8.6

Dla układu przedstawionego na rys.8.5 otrzymano

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y_1(z)}{U(z)} \frac{Y(z)}{Y_1(z)} = G_1(z) G_2(z) = \\ &= Z\{L^{-1}[G_1(s)]\} Z\{L^{-1}[G_2(s)]\}. \end{aligned} \quad (8.35)$$



Rys.8.5. Połączenie szeregowe dwóch członów ciągłych i trzech impulsatorów pracujących synchronicznie

Powyższe opiera się na dwóch spostrzeżeniach:

- Impulsatory pracują synchronicznie i dlatego w chwilach połączenia transmitancja zastępcza  $G(z)$  jest iloczynem transmitancji  $G_1(z)$  i  $G_2(z)$ , podobnie jak w układach ciągłych.
- Transformata  $Z\{L^{-1}[G(s)]\} = Z[g(t)]$ , gdzie  $g(t)$  jest charakterystyką impulsową członu ciągłego. Dla członu ciągłego z impulsatorami na wejściu i na wyjściu sygnałem wejściowym (za impulsatorem wejściowym) jest ciąg impulsów, a sygnałem wyjściowym (za członem ale przed impulsatorem wyjściowym) jest ciąg odpowiedzi na impulsy, czyli ciąg charakterystyk impulsowych.  $G(z)$  można więc znaleźć jako stosunek  $Z[g(t)]$  do  $Z[\delta(t)]$ , gdzie  $\delta(t)$  - impuls Diraca. Łatwo wykazać, że  $Z[\delta(t)] = 1$ .

Często spotykaną, aczkolwiek formalnie niepoprawną postacią zapisu jest

$$Z\{L^{-1}[G(s)]\} = Z[G(s)]. \quad (8.36)$$

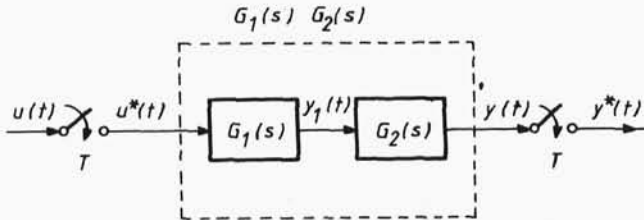
Nieformalność zapisu prawej strony równania (8.36) polega na tym, że transformacji Z można poddać funkcję czasu  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$  a nie transformatę Laplace'a  $G(s)$ . Stosując jednak tę skróconą formę wynik przykładu można zapisać jako

$$G(z) = Z[G_1(s)] Z[G_2(s)]. \quad (8.37)$$

#### Przykład 8.7

Dla układu przedstawionego na rys.8.6 otrzymano

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z[Y^*(t)]}{Z[U^*(t)]} = Z\left\{\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)G_2(s)]\right\} = Z[G_1(s)G_2(s)]. \quad (8.38)$$



Rys.8.6. Połączenie szeregowe dwóch członów ciągłych i dwóch impulsatorów

Z porównania przykładów 8.6 i 8.7 wynika, że dla różnych rozmieszczeń impulsatorów w układzie otrzymuje się różne impulsowe transmitancje zastępcze.

#### 8.8. MODELE MATEMATYCZNE DYSKRETYCH CZŁONÓW PODSTAWOWYCH

W układach dyskretnych istnieją odpowiedniki modeli członów podstawowych znanych z układów ciągłych. Opisuja one fragmenty układu, których fizyczne realizacje są następujące:

- człon realizowany jest "w maszynie cyfrowej" w postaci równania różnicowego zapisanego odpowiednim programem, lub
- człon ciągły jest włączony w układ dyskretny w sposób pokazany na rys.8.7.

Zazwyczaj rozważany człon poprzedzany jest dodatkowym członem zwanym ekstrapolatorem (członem podtrzymującym), którego zadaniem jest filtrowanie szumów wysokoczęstotliwościowych pojawiających się w układzie na skutek procesu impulsowania. Niefiltrowane szumy zakłócałyby proces sterowania lub regulacji. Najczęściej stosuje się ekstrapolatory zerowego rzędu, których transmitancja operatorowa ma postać

$$G_e(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}, \quad (8.39)$$