

### 3. OPIS I ANALIZA UKŁADÓW LINIOWYCH ZA POMOCĄ TRANSMITANCJI OPERATOROWEJ I WIDMOWEJ

#### 3.1. PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A

Przekształcenie Laplace'a, które jest pewnym rozwinięciem przekształcenia Fouriera, pozwala na znaczne uproszczenie opisu układów liniowych o modelach typu wejście-wyście.

Jeżeli funkcja  $f(t)$  zmiennej rzeczywistej  $t$  spełnia następujące warunki:

- a)  $f(t)=0$  dla  $t<0$ ,
- b)  $f(t)$  oraz jej pochodna względem czasu mają wartości skończone w każdym skończonym przedziale dla  $t>0$ ,
- c) istnieje taka liczba rzeczywista  $c$ , dla której całka

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt \text{ istnieje i ma wartość skończoną,}$$

to funkcja  $e^{-ct}f(t)$  może być przedstawiona za pomocą podwójnej całki Fouriera, tzn.

$$e^{-ct}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \int_0^{+\infty} e^{-ct} f(t) e^{-j\omega t} dt d\omega. \quad (3.1)$$

Dolną granicę w całce wewnętrznej, opisującej przekształcenie Fouriera funkcji  $e^{-ct}f(t)$ <sup>1)</sup>, przyjęto równą zeru, ponieważ  $f(t)=0$  dla  $t<0$ .

Mnożąc obydwie strony równania (3.1) przez  $e^{ct}$  otrzymuje się

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(c+j\omega)t} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(c+j\omega)t} dt d\omega. \quad (3.2)$$

Wprowadza się teraz nową zmienną

$$s = c+j\omega \quad (3.3)$$

---

<sup>1)</sup> Zgodnie z wzorem (2.33).

i odpowiednio

$$ds = j d\omega. \quad (3.4)$$

Ponieważ  $\omega$  zmienia się od  $-\infty$  do  $+\infty$  przy ustalonej wartości  $c$ , więc  $s=c+j\omega$  zmienia się od  $c-j\infty$  do  $c+j\infty$ . Podstawienie wyrażeń (3.3) i (3.4) do wzoru (3.2) ze zmianą granic całkowania daje

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt ds. \quad (3.5)$$

Oznaczając

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (3.6)$$

otrzymuje się

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (3.7)$$

Związek (3.6) nosi nazwę prostego przekształcenia (całki) Laplace'a, a związek (3.7) odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Przekształcenia te zapisujemy zwykle w formie skróconej

$$\begin{aligned} F(s) &= L[f(t)], \\ f(t) &= L^{-1}[F(s)]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Funkcję  $f(t)$  nazywa się oryginałem a funkcję  $F(s)$  transformatą Laplace'a. Przekształcenie Laplace'a jest istotnym uogólnieniem przekształcenia Fouriera. O ile przekształcenie Fouriera można stosować tylko do funkcji bezwzględnie całkowalnych, to przekształcenie Laplace'a można stosować do wszelkich ograniczonych funkcji  $f(t)$ , które nie rosną szybciej niż funkcja wykładnicza  $e^{ct}$  przy dowolnie dużym  $c$ , a więc praktycznie do wszystkich funkcji opisujących sygnały rzeczywiste. Należy jednak podkreślić, że przekształcenie Laplace'a można stosować tylko do funkcji, które są tożsamościowo równe zeru dla  $t < 0$ . Na przykład, nie można go stosować do funkcji  $f_1(t) = at$ , ale można stosować do funkcji  $f_2(t) = at \cdot 1(t)$ . Nie ogranicza to jednak praktycznie zakresu zastosowań przekształcenia Laplace'a, ponieważ można założyć, że każdy sygnał rzeczywisty ma zawsze po-

czątek. Niżej, bez dowodu, podano kilka podstawowych własności przekształcenia Laplace'a.

1. Transformata kombinacji liniowej funkcji

$$L\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(s). \quad (3.9)$$

2. Transformata pochodnych funkcji

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0), \quad (3.10)$$

gdzie  $f(0)$  oznacza wartość prawostronnej granicy funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t=0$ .

Wzór ogólny ma postać

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (3.11)$$

Jeżeli w szczególnym przypadku warunki początkowe są zerowe, tzn.:  $f(0)=f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0)$ , to

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s), \quad (3.12)$$

a więc  $n$ -krotnemu różniczkowaniu odpowiada  $n$ -krotne pomnożenie transformaty przez  $s$ .

3. Transformata całki

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}, \quad (3.13)$$

Stosując  $n$ -krotne działanie wyrażone wzorem (3.13), otrzymuje się:

$$L\left[\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n \text{ razy}} f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s^n}. \quad (3.14)$$

4. Transformata funkcji okresowej

Jeżeli dana jest funkcja okresowa  $f(t)=f(t+kT)$ , gdzie  $T$   
 $k=1,2,3,\dots$  oraz  $F_T(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$  jest transformata funkcji

$f(t)$  za jeden okres, to

$$L[f(t)] = \frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}. \quad (3.15)$$

5. Twierdzenie o podobieństwie

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (3.16)$$

gdzie  $a>0$  jest liczbą rzeczywistą.

6. Twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym

$$L[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s), \quad (3.17)$$

gdzie  $\tau \geq 0$  jest liczbą rzeczywistą.

Uwaga: Jeżeli  $f(t)=1(t)\varphi(t)$ , gdzie  $\varphi(t)$  jest funkcją określoną w przedziale  $-\infty < t < \infty$ , to  $f(t-\tau)=1(t-\tau)\varphi(t-\tau)$ .

7. Twierdzenie o przesunięciu zespolonym

$$L[e^{-\lambda t} f(t)] = F(s+\lambda), \quad (3.18)$$

gdzie  $\lambda$  jest liczbą zespoloną.

8. Twierdzenie o wartości końcowej

Jeżeli istnieje granica  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , to jej wartość można określić z zależności

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (3.19)$$

9. Twierdzenie o wartości początkowej

Jeżeli istnieje granica  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ , to

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (3.20)$$

. W tablicy 3.1 zestawiono najczęściej spotykane funkcje  $f(t)$  i odpowiadające im transformaty Laplace'a oraz tzw. transformaty Z, które będą wykorzystywane w rozdziale 8.

Rozwiązanie równania różniczkowego (2.41), będącego modelem typu wejście-wyjście, za pomocą przekształcenia Laplace'a składa się z następujących etapów:

- dokonanie prostego przekształcenia Laplace'a obydwu stron równania z uwzględnieniem warunków początkowych,
- wyznaczenie transformaty  $Y(s)$ ,
- wyznaczenie oryginału  $y(t)=L^{-1}[Y(s)]$ .

Tablica 3.1

Transformaty Laplace'a i transformaty Z niektórych funkcji

Funkcja $f(t)$	Transformata Laplace'a $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	Transformata Z $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$	Uwagi
$\delta(t)$	1	1	$\delta(t)$ - impuls jednostkowy Diraca
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$1(t)$ - skok jednostkowy
$1(t-kT)$	$\frac{e^{-skT}}{s}$	$\frac{z^{-k+1}}{z-1}$	T - okres próbkowania k - liczba naturalna w przekształ. Z; w przekształ. Laplace'a l. rzeczyw.
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	
$e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$	$\alpha$ - stała
$(1-e^{-\alpha t}) \cdot 1(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$\frac{z(1-e^{-\alpha T})}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$	
$\sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2-2z \cos(\omega T)+1}$	$\omega$ - stała dodatnia
$\cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-z \cos(\omega T)}{z^2-2z \cos(\omega T)+1}$	
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) 1(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-\alpha T} \sin(\omega T)}{z^2-2ze^{-\alpha T} \cos(\omega T)+e^{-2\alpha T}}$	
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) 1(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-\alpha T} \cos(\omega T)}{z^2-2ze^{-\alpha T} \cos(\omega T)+e^{-2\alpha T}}$	

Ze wzorów (3.10)+(3.12) wynika, że po dokonaniu transformacji Laplace'a równania różniczkowe zostają zastąpione równaniami algebraicznymi, co ułatwia wyznaczenie  $Y(s)$ , a następnie  $y(t)$ .

W praktyce zarówno transformowanie funkcji  $f(t)$ , jak również znajdowanie oryginałów wymaga jedynie znajomości podstawowych twierdzeń (3.9)+(3.20) i operowania tablicą 3.1. Jedyną trudność stanowić może doprowadzenie złożonych funkcji  $F(s)$  do postaci sumy prostszych składników, mających swoje odpowiedniki w tablicy transformat. Funkcję  $F(s)$  rozkłada się wówczas na ułamki proste. Wykorzystując twierdzenie o wartości końcowej (3.19) i o wartości początkowej (3.20) oraz znając  $F(s)$ , można określić niektóre własności oryginału  $f(t)$  bez dokonywania transformacji odwrotnej. Zakres stosowalności tych twierdzeń jest jednak ograniczony do przypadków, kiedy istnieją granice  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  i  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ .

### Przykład 3.1

Rozwiązać równanie różniczkowe  $\ddot{y}+16y=0$  przy warunkach początkowych:  $y(0)=2$ ,  $\dot{y}(0)=1$ .

Dokonując transformacji Laplace'a obu stron równania otrzymuje się

$$s^2 Y(s) - 2s - 1 + 16Y(s) = 0,$$

stąd

$$Y(s) = \frac{1+2s}{s^2+16}.$$

Należy teraz tak przekształcić wyrażenie po prawej stronie, aby otrzymać wyrazy znajdujące się w tablicach transformat.

$$Y(s) = \frac{1}{4} \frac{4}{s^2+16} + 2 \frac{s}{s^2+16} = \frac{1}{4} \frac{4}{s^2+4^2} + 2 \frac{s}{s^2+4^2}.$$

Korzystając z tablicy 3.1, znaleziono ostatecznie

$$y(t) = \frac{1}{4} \sin(4t) + 2\cos(4t).$$

### 3.2. TRANSMITANCJA OPERATOROWA I WYZNACZANIE ODPOWIEDZI NA TYPOWE WYMUSZENIA

Transmitancją (przepustowością) operatorową  $G(s)$  elementu lub układu liniowego nazywa się iloraz transformaty sygnału wyjściowego  $Y(s)$  przez transformatę sygnału wejściowego  $U(s)$  przy zerowych warunkach początkowych.

Dokonując transformacji Laplace'a równania (2.41) przy zerowych warunkach początkowych otrzymuje się

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) = U(s)(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0),$$

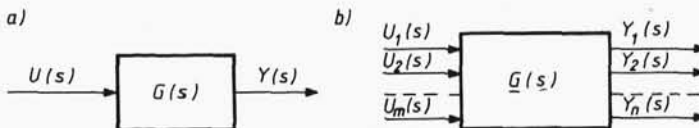
skąd

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{M(s)}{N(s)}. \quad (3.21)$$

Ze wzoru (3.21) wynika, że transmitancja operatorowa jest funkcją wymierną zmiennej  $s$ , tj. ilorazem dwóch wielomianów  $M(s)$  i  $N(s)$ . Należy dodać, że stopień wielomianu  $M(s)$  znajdującego się w liczniku transmitancji operatorowej, opisującej realny (fizycznie realizowany) układ, nie może być wyższy niż stopień wielomianu  $N(s)$  w mianowniku, tzn.  $m \leq n$ .

Równanie  $N(s)=0$  jest równaniem charakterystycznym równania różniczkowego (2.41). Pierwiastki równania charakterystycznego są nazywane biegunami transmitancji operatorowej. Natomiast pierwiastki równania  $M(s)=0$  są nazywane zerami transmitancji operatorowej.

Ponieważ transmitancja opisuje własności dynamiczne elementu, przyjęto wpisywać ją wewnątrz prostokątów przedstawiających poszczególne elementy na schematach blokowych (rys.3.1a)<sup>2)</sup>.



Rys.3.1. Oznaczanie transmitancji na schematach blokowych

<sup>2)</sup> Linie ze strzałkami są wtedy zwykle oznaczane symbolami transformat odpowiednich sygnałów.

W przypadku układu o wielu wejściach i wyjściach (rys.3.1b) jego własności określa macierz transmitancji. Macierz transmitancji  $\underline{G}(s)$  elementu o  $m$  wejściach i  $n$  wyjściach ma postać

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Element  $G_{ik}$  macierzy  $\underline{G}(s)$  jest stosunkiem transformaty  $i$ -tego sygnału wyjściowego do transformaty  $k$ -tego sygnału wejściowego, przy założeniu, że pozostałe sygnały wejściowe są równe zeru i że warunki początkowe są zerowe, tzn.

$$G_{ik} = \frac{Y_i(s)}{U_k(s)}, \quad \text{dla } i=1,2,\dots,n; \quad k=1,2,\dots,m. \quad (3.23)$$

Znając transmitancję operatorową można łatwo wyznaczyć odpowiedź elementu na dowolne wymuszenie  $u(t)$ , tzn. określić przebieg sygnału wyjściowego  $y(t)$  następujący po wprowadzeniu na wejście sygnału  $u(t)$ , przy zerowych warunkach początkowych. Z definicji transmitancji wynika  $Y(s)=U(s)G(s)$ , stąd

$$y(t) = L^{-1}[U(s)G(s)]. \quad (3.24)$$

Interesujące jest porównanie odpowiedzi na następujące sygnały standardowe:

- a) impuls jednostkowy  $u_a(t)=\delta(t)$ ,
- b) skok jednostkowy  $u_b(t)=1(t)$ ,
- c) skok prędkości jednostkowy  $u_c(t)=t \cdot 1(t)$ .

Uwzględniając, że

$$U_a(s) = 1, \quad U_b(s) = \frac{1}{s}, \quad U_c(s) = \frac{1}{s^2},$$

otrzymuje się:

- odpowiedź na impuls jednostkowy

$$y_a(t) = L^{-1}[G(s)], \quad (3.25)$$

- odpowiedź na skok jednostkowy

$$y_b(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} G(s)\right], \quad (3.26)$$



- odpowiedź na jednostkowy skok prędkości

$$y_c(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} G(s) \right]. \quad (3.27)$$

Z porównania wzorów (3.25)+(3.27) wynika, że

$$y_a(t) = \frac{d}{dt} [y_b(t)] = \frac{d^2}{dt^2} [y_c(t)].$$

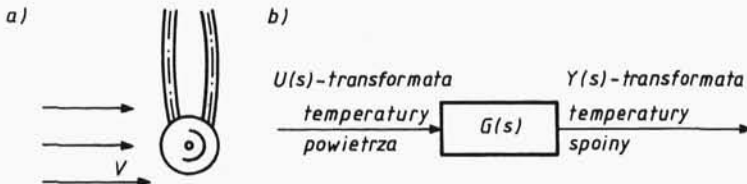
### Przykład 3.2

Temperatura przepływającego powietrza jest mierzona za pomocą termoelementu, którego spoina pomiarowa ma kształt kuli (rys.3.2). Temperatura spoiny w stanach nieustalonych różni się od temperatury powietrza z uwagi na bezwładność cieplną termoelementu.

1. Przyjmując za sygnał wyjściowy  $y$  zmianę temperatury spoiny, a za sygnał wejściowy  $u$  zmianę temperatury powietrza, wyznaczyć transmitancję operatorową spoiny termoelementu.
2. Wyznaczyć przebieg  $y(t)$  spowodowany impulsem prostokątnym  $u = u_0 [1(t) - 1(t-\tau)]$ ,
  - a) dla  $\tau=2$  s,
  - b) dla  $\tau=30$  s.
3. Wyznaczyć przebiegi  $y(t)$  spowodowane impulsem  $x_a = a\delta(t)$ 
  - a) dla  $a=2u_0$ ,
  - b) dla  $a=30u_0$ .

Dane:

$2r = 1,5 \cdot 10^{-3}$ m	- średnica spoiny,
$c = 448$ J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	- ciepło właściwe spoiny,
$\rho = 8,9 \cdot 10^3$ kg·m <sup>-3</sup>	- gęstość materiału spoiny,
$\alpha = 50$ W·m <sup>-2</sup> ·K <sup>-1</sup>	- współczynnik przejmowania ciepła między spoiną a powietrzem.



Rys.3.2. Model fizyczny (a) i schemat blokowy (b) układu rozważanego w przykładzie 3.2

Współczynnik przewodności cieplnej można przyjąć za nie- skończenie duży w porównaniu z  $\alpha$ . Zakłada się, że pojemność cieplna spoiny jest pomijalnie mała w porównaniu z pojemnością cieplną mierzonego ośrodka i w związku z tym nie ma oddziaływa- nia czujnika na badany ośrodek.

Równanie bilansu cieplnego ma postać:

$$dQ = \alpha A(u-y) dt = mc dy, \quad (3.28)$$

gdzie:  $A=4\pi r^2$  - powierzchnia przejmowania ciepła między powiet- rzem a spoiną;  $m=\rho \frac{4}{3}\pi r^3$  - masa spoiny.

Po uporządkowaniu otrzymuje się

$$T\dot{y} + y = u, \quad (3.29)$$

gdzie:

$$T = \frac{mc}{\alpha A} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3 c}{\alpha 4\pi r^2} = \frac{\rho}{\alpha} \frac{rc}{3} = 20 \text{ s.}$$

Dokonując transformacji Laplace'a obu stron równania (3.29) przy zerowych warunkach początkowych znajduje się

$$Y(s)(Ts+1) = U(s), \quad \text{skąd} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts+1}.$$

Do wyznaczenia transformaty impulsu prostokątnego wygodnie jest skorzystać z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym

$$U(s) = u_0 \frac{1}{s}(1-e^{-\tau s}).$$

Stąd odpowiedź na impuls prostokątny wyraża się wzorem

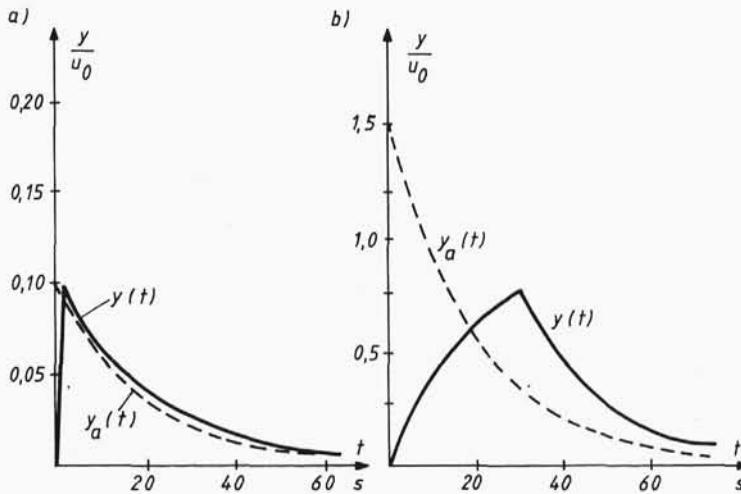
$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left[ \frac{u_0}{s}(1-e^{-\tau s}) \frac{1}{Ts+1} \right] = u_0 L^{-1} \left[ \frac{1}{s(Ts+1)} - \frac{e^{-\tau s}}{s(Ts+1)} \right] = \\ &= u_0 [(1-e^{-t/T})1(t) - (1-e^{-(t-\tau)/T})1(t-\tau)]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Przebieg  $y(t)$  można opisać przedziałami za pomocą wzorów

$$y(t) = u_0(1-e^{-t/T}) \quad \text{dla} \quad 0 < t < \tau,$$

$$y(t) = u_0(1-e^{-t/T}-1+e^{-(t-\tau)/T}) = u_0(1-e^{-\tau/T})e^{-(t-\tau)/T} \quad \text{dla} \quad t > \tau.$$

Wykres  $y(t)$  przedstawiono linią ciągłą na rys.3.3a dla  $\tau=2 \text{ s}$ , a na rys.3.3b dla  $\tau=30 \text{ s}$ .



Rys.3.3. Porównanie odpowiedzi układu na impuls Diraca (linia przerywana) z odpowiedzią na impuls prostokątny o tej samej powierzchni (linia ciągła) przy różnym czasie trwania impulsu

Transformata impulsu Diraca wyraża się wzorem

$$U_a(s) = aL[\delta(t)] = a.$$

Stąd odpowiedź na impuls Diraca

$$y_a(t) = L^{-1}\left[\frac{a}{Ts+1}\right] = \frac{a}{T} e^{-t/T}. \quad (3.31)$$

Na rys.3.3a przedstawiono linią przerywaną wykres  $y(t)$  dla  $a=2u_0$ , a na rys.3.3b ten sam wykres dla  $a=30u_0$ .

Z porównania wykresów przedstawionych na rys.3.3a i b wynika, że jeżeli czas trwania impulsu prostokątnego  $\tau$  jest dużo mniejszy od stałej  $T$ , to odpowiedź elementu na ten impuls można, z wystarczającą dla praktyki dokładnością, zastąpić odpowiedzią na impuls Diraca o tej samej wartości całki  $\int_{-\infty}^{\infty} u dt$ , która w rozważanym przypadku wynosi  $u_0 \tau$ .

Łatwo dowieść, że kształt impulsu nie ma istotnego wpływu na przebieg odpowiedzi, jeżeli jest spełniony warunek  $\tau \ll T$ .