

10. UKŁADY NIELINIOWE AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

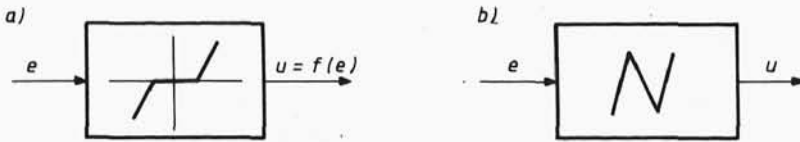
10.1. UWAGI WSTĘPNE

Omówione dotychczas układy były liniowe albo dawały się sprowadzić do liniowych na drodze linearyzacji (por. p.2.5). W wielu praktycznych przypadkach wyniki analizy teoretycznej takich zlinearyzowanych układów pokrywają się z wynikami doświadczalnymi. Są jednak przypadki, że wyniki teoretyczne uzyskane dla układów zlinearyzowanych różnią się znacznie od wyników doświadczalnych. Obserwuje się to powszechnie w układach automatycznej regulacji, gdy co najmniej jeden element układu ma silnie nieliniową charakterystykę statyczną.

Ograniczenia czasowe programu przedmiotu DAU pozwoliły na zamieszczenie w tym rozdziale tylko elementarnych wiadomości z zakresu teorii układów nieliniowych. Mają one głównie charakter wskazówek praktycznych, z pominięciem dowodów użytych twierdzeń i dotyczą głównie układów nieliniowych, w których bezwładność elementów nieliniowych jest pomijalnie mała, w porównaniu z bezwładnością części liniowej. Czytelnik zainteresowany pogłębieniem wiadomości z zakresu układów nieliniowych może skorzystać ze źródeł: [1,2,4,5,7]. Przypomina się jednocześnie, że ogólne metody badania stabilności układów nieliniowych przedstawiono już w rozdziale 6.

10.2. PODSTAWOWE NIELINIOWOŚCI

Zakłada się symboliczny opis elementów nieliniowych w postaci schematu blokowego, pokazanego na rys.10.1. Sygnałem wejściowym jest tu uchyb $e(t)$; sygnałem wyjściowym zależność $u=f(e)$, uzyskana na podstawie charakterystyki statycznej elementu. W dalszym ciągu tego rozdziału stosuje się opis w postaci podanej na rys.10.1a (z wrysowaną charakterystyką elementu) lub - uproszczony, wg rys.10.1b.



Rys.10.1. Oznaczenie elementów nieliniowych na schematach blokowych

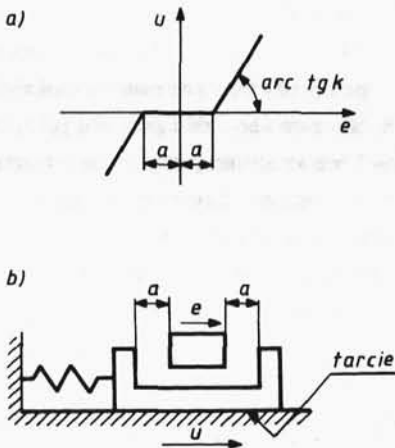
a) Nieczułość

Jeżeli zmiana sygnału e w pewnym przedziale $(-a, a)$ (pomiędzy tu czas, bo rozważania dotyczą wyłącznie charakterystyki statycznej) nie powoduje zmiany sygnału wyjściowego u , a dla $e > a$ lub $e < -a$ występuje liniowa zależność między tymi sygnałami, to nieliniowość tego rodzaju nazywana jest *nieczułością*. Analitycznie można ją opisać zależnościami

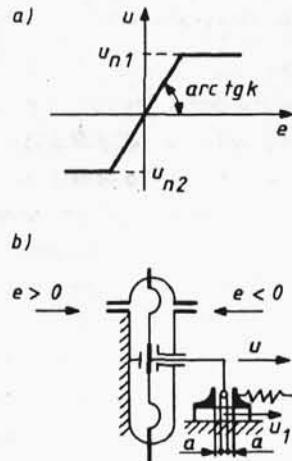
$$u = \begin{cases} 0 & \text{dla } |e| \leq a, \\ k_1(e-a) & \text{dla } e > a, \\ k_2(e+a) & \text{dla } e < -a, \end{cases} \quad (10.1)$$

gdzie: k_1 i k_2 są stałymi współczynnikami.

Charakterystykę statyczną elementu z nieczułością pokazano na rys.10.2a dla $k_1 = k_2 = k$. Kąt pochylenia charakterystyki jest równy $\arctg k$ ale tylko dla jednakowych podziałek osi e i u . Przykład techniczny nieczułości obrazuje rys.10.2b. Współczynnik k jest tu równy jedności i nie dotyczy sztywności zaznaczonej schematycznie sprężyny.



Rys.10.2. Nieczułość



Rys.10.3. Nasycenie

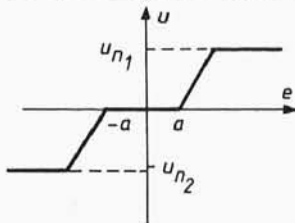
b) Nasylenie

Zjawisko *nasylenia* ma miejsce wtedy, gdy po przekroczeniu przez sygnał wejściowy pewnej wartości ustaje przyrost sygnału wyjściowego. Analityczny opis jest wtedy następujący:

$$u = \begin{cases} ke & \text{dla } u_{n1}/k \leq e \leq u_{n2}/k, \\ u_{n1} & \text{dla } e > u_{n1}/k, \\ u_{n2} & \text{dla } e < u_{n2}/k \end{cases} \quad (10.2)$$

Charakterystykę statyczną odpowiadającą takiemu opisowi przedstawiono na rys.10.3a. Przykład realizacji nieliniowego elementu z nasyceniem pokazano na rys.10.3b. Dotyczy on siłownika pneumatycznego, w którym e jest przyrostem ciśnienia ($e > 0$ oznacza przyrost ciśnienia po lewej stronie membrany, a $e < 0$ - przyrost po stronie prawej). Sygnał wyjściowy u jest tu przemieszczeniem elementu związanego z membraną (suwak o przemieszczeniu u_1 nie dotyczy tego przypadku).

c) Nieczułość wraz z nasyceniem

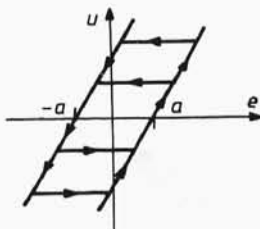


Rys.10.4. Nieczułość z nasyceniem

W tym przypadku charakterystyka statyczna jest taka jak na rys.10.4. Można ją opisać w podobny sposób jak to miało miejsce dla typu a) i b). Przykładem technicznym jest siłownik membranowy z rys.10.3b, przy czym sygnałem wyjściowym jest teraz u_1 .

d) Luz

Usunięcie sprężyny ustalającej położenie zerowe elementu napędzanego w elemencie nieliniowym z rys.10.2b powoduje powstanie nieliniowości o zupełnie innej charakterystyce statycznej od pokazanej na rys.10.2a. W tym przypadku przy zmianie kierunku ruchu członu napędzającego (e) człon napędzany (u) pozostanie w spoczynku do chwili przejścia przez człon napędzający drogi równej $2a$ (dotyczy to powolnego przemieszczania się obydwu członów).



Rys.10.5. Luz

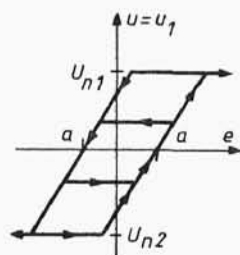
Charakterystykę statyczną członu nieliniowego z luzem pokazano na rys.10.5. Jeżeli zmiany e są okresowe w przedziale e_{max} oraz

$e_{\min} < -a$, to charakterystyka $u=f(e)$ tworzy kontur zamknięty. Kontur taki nazywany jest *pętlą histerezy*.

Nieliniowość typu luzu jest typowa dla mechanizmów i występuje we wszystkich rzeczywistych parach kinematycznych z zamknięciem kinematycznym.

e) Luz wraz z nasyceniem

Usunięcie sprężyny ustalającej położenie elementu napędzanego w przypadku członu z rys.10.3b przynosi podobne następstwa co usunięcie sprężyny w członie z rys.10.2b i powoduje zmianę charakterystyki statycznej członu. Zamiast charakterystyki z rys.10.4 otrzymuje się charakterystykę pokazaną na rys.10.6. Jest to typowa charakterystyka elementu nieliniowego, w którym występuje jednocześnie nieliniowość typu luzu i typu nasycenia.

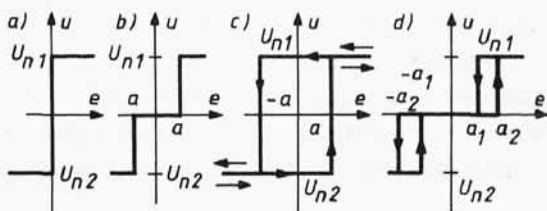


Rys.10.6. Luz z nasyceniem

f) Nieliniowości przekaźników

Przekaźnikami nazywa się elementy, w których sygnał wyjściowy u zmienia się skokowo, ze zmianą znaku dla pewnych wartości ciągłego sygnału wejściowego e . Najważniejsze typy charakterystyk statycznych zestawiono na rys.10.7.

Użyta tu nazwa "przekaźnik" nasuwa skojarzenie z układami elektrycznymi, gdzie charakterystyki takie mają przekaźniki, a ponadto elementy stykowe stosowane w regulacji dwupołożeniowej.



Rys.10.7. Przekaźniki

Nieliniowości tego typu występują jednakże i w innych, nieelektrycznych elementach. Można za ich pomocą opisać np. siły tarcia suchego (rys.10.7a), gdy zakłada się uproszczony model dynamiczny ze stałą wartością tych sił. Analityczny opis *przekaźnika dwupołożeniowego* z rys.10.7a jest następujący:

$$u = \begin{cases} u_{n1} & \text{dla } (e > 0) \vee [(e = 0) \wedge u(t - \Delta t) = u_{n1}] \\ u_{n2} & \text{dla } (e < 0) \vee [(e = 0) \wedge u(t - \Delta t) = u_{n2}] \end{cases} \quad (10.3)$$

We wstępie tym wprowadzono czas t' dla uniknięcia nieoznaczoności dla $e=0$. Sygnał $u(t-\Delta t)$ jest opóźniony względem $u(t)$ o dowolnie małą chwilę czasu Δt .

Charakterystyki, które cechują zamknięte kontury (pętle histerezy) są *niejednoznaczne*. Pozostałe są *jednoznaczne*. Elementy nieliniowe z pętlami histerezy cechuje właściwość, którą można nazwać *pamięcią*.

Charakterystykę przekaźnika dwupołożeniowego z histerezą (rys.10.7c), z uwzględnieniem tej pamięci można opisać następująco

$$u(t) = u_n \operatorname{sign}[e + a \operatorname{sign} u(t-\Delta t)], \quad (10.4)$$

gdzie $u_{n1}=u_{n2}=u_n$; $2a$ - szerokość pętli histerezy; Δt - dowolnie mała chwila czasu.

$$\text{Funkcja } \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases} \quad (10.5)$$

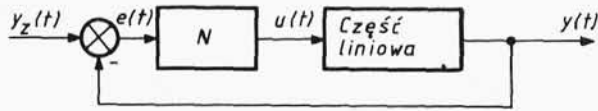
W podobny sposób można opisać *niejednoznaczny przekaźnik trójpoleżeniowy* z rys.10.7d oraz *nieczułość typu luz* z rys.10.5 i 10.6.

Po przyjęciu w (10.4) małej wartości a (np. 10^{-3}) uzyskuje się dobre przybliżenie opisu przekaźnika dwupołożeniowego bez histerezy. Opis taki jest wygodniejszy do celów symulacji komputerowej niż opis zależnością (10.3).

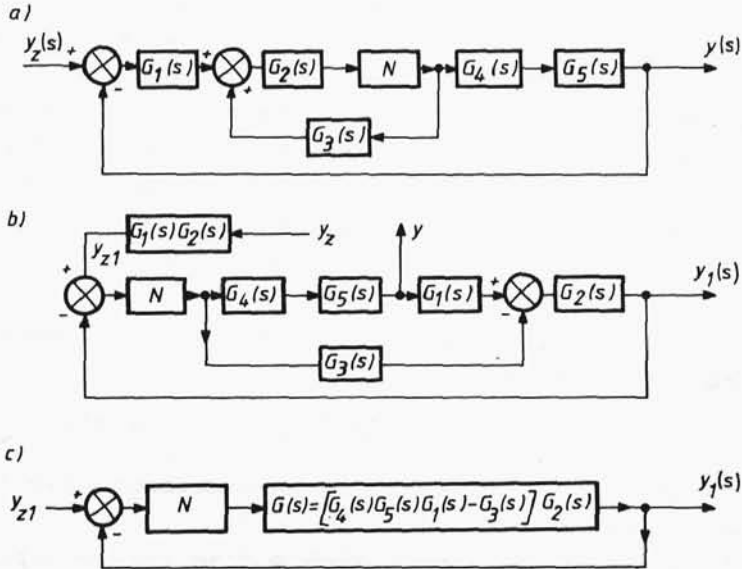
Wszystkie omówione dotychczas elementy nieliniowe mogą być łączone szeregowo lub równolegle. Zespół takich elementów zastępuje się wówczas jednym elementem zastępczym o charakterystyce statycznej, którą łatwo wyznacza się w sposób opisany np. w [1].

10.3. PRZEKSZTAŁCANIE SCHEMATÓW BLOKOWYCH UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Większość metod analizy układów nieliniowych wymaga przekształcenia schematu blokowego układu do postaci pokazanej na rys.10.8. W tym celu przekształca się odpowiednio wstępny schemat blokowy opracowany na podstawie przebiegu sygnałów w modelu fizycznym układu rzeczywistego.



Rys.10.8. Zastępczy schemat blokowy układu nieliniowego



Rys.10.9. Przykład przekształcenia schematu blokowego

Sposób postępowania pokazany będzie na przykładzie schematu blokowego przedstawionego na rys.10.9a. W układzie tym występuje 5 członów liniowych, o znanych transmitancjach operatorowych $G_1(s)+G_5(s)$ i jeden człon nieliniowy oznaczony N . Sygnałem wejściowym jest y_z , wyjściowym - y .

Pierwszy etap upraszczania schematu polega na otwarciu układu przed członem nieliniowym N i takim przesunięciu węzłów sumujących i zaczepowych, ażeby możliwe było doprowadzenie do węzła sumacyjnego na wejściu N odpowiedniego sygnału y_{z1} , który zsumowany z sygnałem doprowadzonym gałęzią sprzężenia zwrotnego zapewniłby w układzie zastępczym taki sam przepływ sygnałów jak w układzie pierwotnym.

Uproszczony w ten sposób schemat pokazano na rys.10.9b. Łatwo tu sprawdzić, że przepływ sygnałów od wejścia y_z do wyjścia y układu uproszczonego jest taki sam jak w układzie pierwotnym. Na schemacie tym wystąpił zastępczy sygnał wejściowy

$y_{z1}(t)$ określony związkiem: $L[y_{z1}(t)] = Y_z(s)G_1(s)G_2(s)$. Sygnał $y_{z1}(t)$ po przejściu przez dwa człony liniowe zmienia swój charakter i $y_{z1}(t)$ różni się od $y_z(t)$ ale związek między nimi jest jednoznaczny i znając $y_z(t)$ można łatwo określić $y_{z1}(t)$. Dlatego w następnym etapie upraszczania schematu przyjmuje się $y_{z1}(t)$ za sygnał wejściowy układu uproszczonego.

Na schemacie rys.10.9b występuje nadal sygnał wyjściowy y schematu wstępnego. Dla uzyskania dalszego uproszczenia schematu wygodniej jest jednak przyjąć za sygnał wyjściowy y_1 , czyli sygnał na wyjściu z członu o transmitancji $G_2(s)$. (Jeżeli celem analizy upraszczanego układu będzie w przyszłości badanie jego stabilności to na podstawie przebiegów czasowych $y_1(t)$ będzie można ocenić stabilność układu. Dodatkowe badanie przebiegów $y(t)$ jest zwykle zbędne).

Przedstawiając teraz część liniową układu w postaci jednego członu o transmitancji

$$G(s) = [G_4(s)G_5(s)G_1(s) - G_3(s)]G_2(s),$$

otrzymuje się ostateczną wersję uproszczonego schematu, pokazaną na rys.10.9c.

Na omawianych tu schematach podaje się przebiegi czasowe sygnałów, ponieważ wygodniej jest operować zmiennymi będącymi funkcjami czasu. Jednocześnie utrzymuje się dla wygody opisy członów liniowych przy użyciu ich transmitancji operatorowych.

10.4. ANALIZA UKŁADÓW NIELINIOWYCH METODĄ PRZESTRZENI FAZOWEJ

Układy jednowymiarowe liniowe lub nieliniowe opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi dowolnie wysokiego rzędu n można zastąpić n równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu (równaniami stanu). Poszczególne zmienne stanu tworzące wektor $\underline{x}(t)$ są tu coraz wyższymi pochodnymi czasowymi pewnej zmiennej podstawowej lub kombinacji liniowej tej zmiennej i sygnału sterującego (wymuszenia) $u(t)$. Przebieg trajektorii $\underline{x}(t)$ ¹⁾ w przestrzeni stanu (nazywają ją również *przestrzenią fazową*) dla dowolnego, skończonego sterowania i dowolnych warunków początko-

¹⁾ Nazywany również *portretem fazowym*.

wych $\underline{x}(0)$ może dostarczyć informacji o takich właściwościach analizowanego układu, jak np. stabilność. Dla $n=2$ (lub 3) przestrzeń fazowa jest dwuwymiarowa (trójwymiarowa) i wykorzystanie współczesnych metod grafiki komputerowej pozwala na ocenę jakościową takiej trajektorii, a tym samym właściwości badanego układu. Dla $n>3$ występują komplikacje wynikające z trudności odwzorowania graficznego badanych trajektorii w przestrzeni fazowej. Występują również trudności związane z komplikacją metody analizy. Jest to przyczyną tego, że metody analizy układów dynamicznych przy użyciu przestrzeni fazowej ograniczono do tychczas do przypadku $n=2$ (przestrzeń fazowa redukuje się wtedy do płaszczyzny fazowej), ponieważ interpretacja wyników uzyskanych w dowolny sposób na płaszczyźnie była uproszczona. Obecnie można te metody rozszerzyć również na przypadki $n=3$ ale dla ułatwienia zrozumienia metody będzie nadal mowa tylko o układach, dla których $n=2$. Rozpatrywane więc będą układy, o właściwościach których będzie można wnioskować na podstawie przebiegu (trajektorii) na płaszczyźnie fazowej pochodnej czasowej dowolnej wielkości, np. $\dot{x}(t)$ w funkcji tej wielkości $x(t)$.

Sposób postępowania będzie wyjaśniony na dość prostym przykładzie, który można rozwiązać analitycznie. Bardziej skomplikowane przypadki mogą wymagać rozwiązania numerycznego i posłużenia się komputerem.

Przykład 10.1

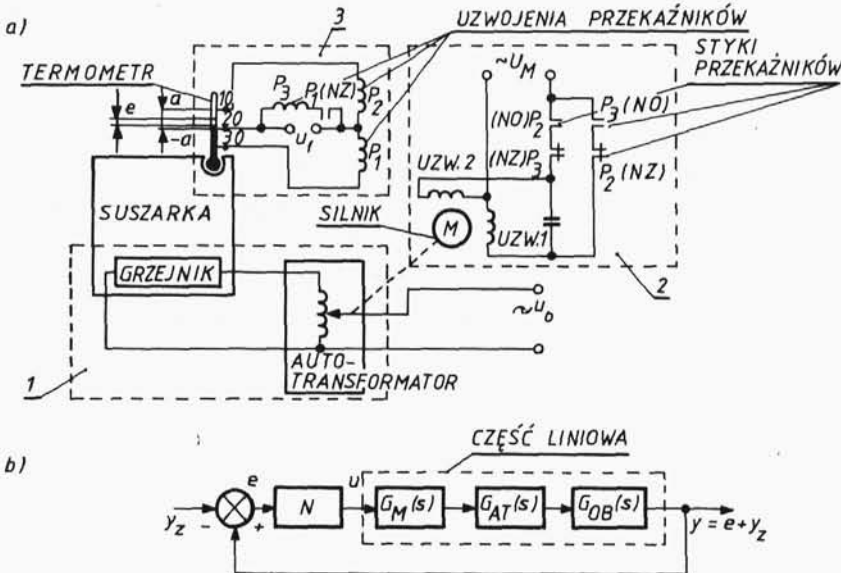
Rozpatruje się nieliniowy układ automatycznej regulacji pieca hartowniczego lub suszarki. Schemat aparaturowy układu pokazano na rys.10.10a. Dla łatwiejszego zrozumienia zasady działania układu wydzielono tam 3 obwody elektryczne, spełniające różne zadania. Obwód 1 to obwód zasilania grzejnika. Ilość dostarczonej energii regulowana jest tu za pomocą autotransformatora, którego napięcie zasilania wynosi u_0 . Gdy regulator jest wyłączony, to temperaturę w suszarce można ustawiać ręcznie, przestawiając suwak autotransformatora.

Zadaniem obwodu 2 jest mechanizacja czynności przestawiania suwaka autotransformatora. Jeżeli przy odłączonym obwodzie 3 zewrze się rozwarne styki P_3 , to prąd od źródła zasilania o napięciu U_N popłynie przez uzwojenia (uzw. 1 i uzw. 2) silnika i uruchomi go w kierunku, który powoduje przestawienie suwaka

autotransformatora zwiększające ilość energii dostarczanej do grzejnika. Jeżeli natomiast w tych samych warunkach zewrze się zamiast P_3 rozwarne styki P_2 to silnik zostanie uruchomiony w kierunku przeciwnym, powodującym zmniejszenie ilości energii dostarczanej do grzejnika. (W pierwszym przypadku kondensator rozruchowy był dołączony do wejścia uzw. 2, a w drugim - do wejścia uzw. 1).

Zadaniem obwodu 3 jest automatyzacja czynności włączania i wyłączania silnika. Znajduje się tam regulator z elementem nieliniowym o jednoznacznej charakterystyce przekaźnika trójpołożeniowego (por. rys.10.7b). Sygnałem wejściowym tego regulatora jest uchyb temperatury wewnątrz szafy $e = y_z - y$, sygnałem wyjściowym - napięcie $\pm U_M$ zasilające silnik.

Regulator wyposażony jest w trzy rzeczywiste przekaźniki elektryczne P_1 , P_2 i P_3 (symbolami tymi oznaczono na schemacie zarówno uzwojenia przekaźników, jak również ich styki). Należy tu wyjaśnić, że każdy przekaźnik ma po 2 pary styków. Gdy napięcie zasilające uzwojenie przekaźnika jest odłączone, to zwarta jest jedna para styków, a rozwarła druga (często oznaczają je dla odróżnienia NO i NZ, co jest skrótem normalnie otwarty i normalnie zamknięty). Po włączeniu napięcia zasilania



Rys.10.10. Schemat aparaturowy i blokowy układu nieliniowego

role tych par się zmieniają. W położeniu układu pokazanym na rys.10.10a uzwojenia przekładników P_2 i P_3 są odłączone od źródła zasilania u_1 , a przyłączone jest tylko uzwojenie przekładnika P_1 . W tym położeniu normalnie zamknięte (NZ) styki przekładnika P_1 są rozwarne (drugiej pary styków, czyli NO tego przekładnika nie wykorzystano w tym układzie); jest to położenie stałej równowagi układu, w którym silnik jest wyłączony.

Jeżeli temperatura obiektu będzie mniejsza od zadanej, a uchyb e mniejszy od $-a$, to styki 20-30 termometru rtęciowego zostaną rozwarne. Spowoduje to wyłączenie przekładnika P_1 , zwarcie jego styków P_1 (NZ) i przyłączenie do źródła zasilania przekładnika P_3 . Włączenie tego przekładnika powoduje powiększenie ilości dostarczonej energii do suszarki. Dla $e > a$ zostają zwarte styki 10-20, włączony przekładnik P_2 , zwarte jego styki (NO) P_2 i uruchomiony silnik w kierunku przeciwnym do poprzedniego. Gdy w wyniku takiego postępowania temperatura obiektu spadnie tak, że $a > e > -a$ to styki 20-20 znowu się rozewrą, przekładnik P_2 zostanie wyłączony, a silnik zatrzyma się. Przy dal- szym spadku temperatury, dla $e \leq -a$ rozwierają się styki 20-30, włącza przekładnik P_3 i zostaje uruchomiony silnik w kierunku zwiększenia ilości energii dostarczanej do obiektu. Takie okre- sowe włączanie i wyłączanie silnika połączone z jego nawrotami trwa do chwili uzyskania zgodności między ilością dostarczanej energii, a zadaną w granicach strefy nieczułości $-a < e < a$ tempe- raturą obiektu. Wtedy wystąpi stan ustalony układu.

Na rys.10.10b przedstawiony jest schemat blokowy omawianego układu. W części liniowej występują następujące elementy: sil- nik elektryczny o transmitancji $G_M(s) = k_1/s$; autotransformator $G_{AT}(s) = k_2$ oraz obiekt, czyli suszarka o transmitancji $G_{OB}(s) = k_3/(Ts+1)$.

Transmitacja tej części ma postać

$$G(s) = \frac{k}{(Ts+1)s} = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (10.6)$$

gdzie: $k = k_1 k_2 k_3$ - współczynnik wzmocnienia części liniowej, T - stała czasowa obiektu.

Przyjmując umownie, że na wejście części liniowej (silnik ele- ktryczny) podawane jest napięcie $u = U_M$ dla $e \leq -a$, a napięcie $u = -U_M$ dla $e > a$, ponadto że dla $-a < e < a$ napięcie zasilania jest

odłączone, można dla tych trzech przedziałów zmienności e napisać następujące zależności

$$\begin{aligned} T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} &= kU_M \quad \text{dla} \quad e \leq -a, \\ T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} &= 0 \quad \text{dla} \quad -a < e < a, \\ T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} &= -kU_M \quad \text{dla} \quad e \geq a. \end{aligned} \quad (10.7)$$

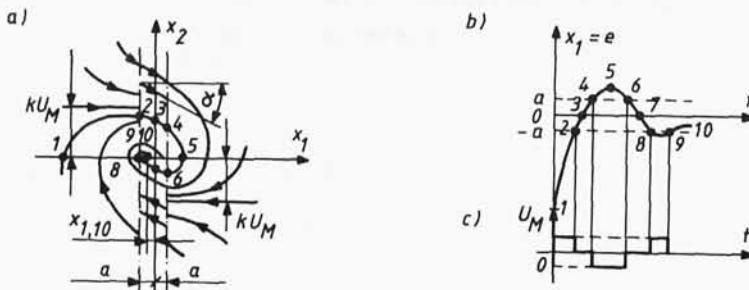
Wprowadzając zmienne stanu: $x_1 = e$ oraz $x_2 = \frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}(y - y_z)$, co dla $y_z = \text{const}$ daje $x_2 = \frac{dy}{dt}$ oraz $\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$, otrzymuje się dla $-a < e < a$ równanie

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0, \quad \text{czyli} \quad T \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_1}{dt} = 0.$$

Po przemnożeniu tego równania stronami przez dt i scałkowaniu znaleziono

$$x_2 = \frac{-x_1}{T} + C_1, \quad (10.8)$$

gdzie: C_1 jest dowolną stałą całkowania. Przyjmując różne wartości C_1 w przedziale $(-\infty, +\infty)$, otrzymuje się dla wycinka $-a < e < a$ płaszczyzny fazowej nieskończenie wiele prostych o kącie α pochylecia względem osi $e = x_1$ równym $\arctg\left(-\frac{1}{T}\right)$ jeżeli podziałki x_1 i x_2 są jednakowe. Pokazano je na rys.10.11a. Proste te przecinają oś x_2 w punktach 0, C_1 .



Rys.10.11. Układ z przekąźnikiem trójpołożeniowym

Dla $e \leq -a$ otrzymuje się z (10.7) równania różniczkowe

$$\begin{aligned} T \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= kU_H, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \end{aligned} \quad (10.9)$$

a po wyrugowaniu z tych równań czasu, równanie różniczkowe trajektorii fazowej dla $e \leq -a$

$$T \frac{dx_2}{dx_1} x_2 + x_2 = kU_H. \quad (10.10)$$

Rozdzielając zmienne, można to równanie przedstawić w postaci

$$dx_1 = - \frac{T x_2 dx_2}{x_2 - kU_H}.$$

Po scałkowaniu otrzymuje się

$$x_1 = -T [x_2 - kU_H + kU_H \ln |x_2 - kU_H|] + C_2. \quad (10.11)$$

Stałą całkowania C_2 znajduje się podstawiając do (10.11) warunki początkowe $x_1 = x_{1,0}$, $x_2 = x_{2,0}$. Równanie trajektorii fazowej jest ostatecznie następujące

$$x_1 = x_{1,0} + T \left(x_{2,0} - x_2 + kU_H \ln \left| \frac{x_{2,0} - kU_H}{x_2 - kU_H} \right| \right). \quad (10.12)$$

Po podstawieniu do tego równania wartości U_H oraz różnych par wartości początkowych $x_{1,0}$, $x_{2,0}$ otrzymuje się rodzinę trajektorii fazowych dla przedziału wartości regulowanej $x_1 = e \leq -a$. W podobny sposób otrzymuje się rodzinę trajektorii fazowych dla przedziału $e \geq a$, z równania (10.7) jeżeli podstawia się w nim $-U_H$. Przykłady takich trajektorii pokazano na rys.10.11a.

Charakter przebiegu procesu przejściowego na płaszczyźnie fazowej wygodnie jest prześledzić na konkretnym przykładzie. Zakłada się, że układ uruchomiono gdy w chwili $t=0$ temperatura ustalona obiektu wynosiła $y_{ob,0}$ ($e \leq -a$). W chwili tej włączył się regulator, w którym na drodze przestawiania zespołu styków 10-20 i 20-30 ustalono strefę nieczułości $2a$ i zadaną temperaturę y_z (rys.10.10a). Ponieważ w chwili $t=0$ temperatura obiektu była ustalona, to $dx_1/dt = x_{2,0} = 0$. Początek trajektorii zacznie

się więc w punkcie 1 wykresu o współrzędnych $(x_{1,0}, 0)$. Odpowiada mu niskie położenie słupka rtęci termometru, przy którym styki 10-20 i 20-30 są rozwarłe, a silnik przesuwając suwak autotransformatora w kierunku zwiększenia ilości dostarczonej energii. Temperatura obiektu wzrasta więc, zgodnie z odcinkiem krzywej 1-2. Punkt 2 odpowiada chwili zwarcia przez rtęć styków 20-30 i wyłączeniu silnika. Temperatura obiektu będzie jednak przez pewien czas nadal wzrastać, ponieważ ilość dostarczanej energii przekracza ilość potrzebną do utrzymania stanu ustalonego. W punkcie 3 temperatura obiektu osiąga wartość zadana $x_1=0$ i wzrasta nadal ponieważ $x_2>0$. Punkt 4 odpowiada chwili zwarcia styków 10-20 i uruchomieniu silnika w kierunku przeciwnym do poprzedniego. Powoduje to szybki spadek wartości x_2 , która w punkcie 5 zmienia znak, co przejawia się zmianą kierunku ruchu słupka rtęci na przeciwny (na dół).

W punkcie 6 styki 10-20 zostają rozwarłe i silnik zatrzymuje się. Temperatura obiektu spada, osiągając w punkcie 7 wartość zadana. W punkcie 8 następuje ponowne włączenie silnika, znowu w kierunku zwiększenia ilości energii dostarczanej do grzejnika.

W punkcie 9 silnik zostaje wyłączony. Temperatura spada do chwili, gdy $x_2=0$ (punkt 10). Następuje wówczas zrównanie ilości energii doprowadzanej do obiektu i od niego odprowadzanej. Temperatura obiektu ustala się: $x_1=x_{1,10}$ a proces przyściowy ustaje. Uchyb statyczny $e_{st}=x_{1,10}$ jest tu różny od zera i może przybierać dowolną wartość z przedziału $(-a, a)$.

Dla uzyskania przebiegu czasowego uchybu $e=x_1(t)$ całkuje się pierwsze z równań (10.9), przyjmując warunki początkowe $t=0$, $x_2=x_{2,0}$

$$x_2 = x_{2,0} e^{-t/T} + kU_M(1 - e^{-t/T}). \quad (10.13)$$

Całkując następnie drugie z równań wzoru (10.9), znajduje się wyrażenie dla zmian uchybu $x_1=e$ w funkcji czasu

$$x_1 = \int x_2 dt + C_3 = -Tx_{2,0} e^{-t/T} + kU_M(t + Te^{-t/T}) + C_3, \quad (10.14)$$

gdzie C_3 - stała całkowania.

Z warunków początkowych $t=0$, $x_1=x_{1,0}$ oraz $x_2=x_{2,0}$ wynika, że $C_3=x_{1,0}+Tx_{2,0}-kU_M$. Podstawiając tę wartość do (10.14) otrzymuje się ostatecznie

$$x_1 = x_{1,0} + x_{2,0}T(1-e^{-t/T}) + kU_M[t-T(1-e^{-t/T})]. \quad (10.15)$$

Na rys.10.11b podano przebieg czasowy uchybu uzyskany po wykorzystaniu (10.15) i przyjęciu tych samych założeń, co w przypadku szczegółowo omówionego przykładu z rys.10.11a (punkty 1+10). Odpowiadający mu przebieg czasowy napięcia zasilającego silnik $U_M(t)$ ilustruje rys.10.11c.

Jeżeli w chwili początkowej zarówno $x_{1,0} \neq 0$, jak również $x_{2,0} \neq 0$, to punktem początkowym trajektorii jest punkt płaszczyzny fazowej o współrzędnych $(x_{1,0}, x_{2,0})$. W szczególnym przypadku: $x_{2,0}=kU_M$ traci sens wzór (10.12) i należy skorzystać ze wzoru (10.13). Po podstawieniu do (10.13) $x_{2,0}=kU_M$ otrzymuje się $x_2=kU_M=\text{const}$, a ze wzoru (10.15) $x_1=x_{1,0}+kU_M t$. Oznacza to, że trajektoria dla $x_1 \leq -a$ i $x_{2,0}=kU_M$ jest poziomą linią prostą, zbiegającą do strefy nieczułości.

Układ regulacji temperatury, opisany w przykładzie 10.1 ma już obecnie raczej znaczenie historyczne²⁾. Użyto go jedynie do zilustrowania rozpatrywanej tu metody. Posługując się nim dalej można przyjąć niezbyt praktyczne założenie, że jednoznaczny przekąźnik trójpołożeniowy został zastąpiony przekąźnikiem dwupołożeniowym z histerezą wg rys.10.7c. (Użycie takiego przekąźnika spowoduje przemienne ruchy silnika w obydwie strony bez możliwości zatrzymania silnika. Analiza układu z takim przekąźnikiem pozwoli jednakże na poczynienie pewnych, bardziej ogólnych spostrzeżeń). Do opisu matematycznego układu wystarczą obecnie tylko dwa równania wzoru (10.7) sprowadzone do postaci (10.9), po uzupełnieniu ich dodatkowym opisem

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kU_M \quad \text{dla} \quad (x_1 \leq -a) \vee [(-a < x_1 < a) \wedge (x_2 > 0)], \quad (10.16)$$

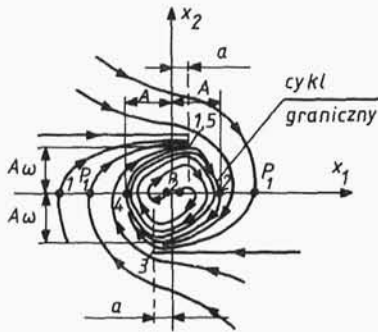
$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = -kU_M \quad \text{dla} \quad (x_1 \geq a) \vee [(-a < x_1 < a) \wedge (x_2 < 0)], \quad (10.17)$$

gdzie $2a$ jest teraz strefą nieczułości przekąźnika.

²⁾ Nie dotyczy to samych układów przekąźnikowych, które są nadal stosowane m.in. w układach regulacji współczesnych silników wysokoprężnych.

Rozwiązaniem (10.16) jest (10.15). Rozwiązanie (10.17) otrzymuje się z (10.15) po zmianie znaku U_M na ujemny.

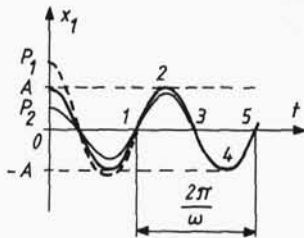
W rozpatrywanym tu przypadku przełączenia przekaźnika dla rosnącego x_2 występują w chwili gdy $x_1=a$, a dla malejącego x_2 - gdy $x_1=-a$. Trajektorie fazowe wykreślone na podstawie uzyskanych rozwiązań (10.16) i (10.17) pokazano na rys.10.12. Jeżeli



Rys.10.12. Układ z przełącznikiem niejednoznacznym dwupołożeniowym

dowolna bezwzględna wartość początkowa uchybu regulowanej temperatury $x_{1,0}$ jest większa od pewnej wartości A to trajektorie fazowe, podobnie jak na rys.10.11a dążą do środka układu współrzędnych. Nie osiągną go jednak, tylko od pewnego momentu zaczynają krążyć po orbicie nazywanej *cyklem granicznym*. Jeżeli $|x_{1,0}| < a$ to trajektorie początkowo oddalają się spiralnie od środka układu, a po asymptotycznym osiągnięciu brzegu orbity, również za-

czynają ją okrażać. Cykl graniczny, który tu występuje nazywany jest *stabilnym*. Odpowiada mu pewna, specyficzna dla układów nieliniowych, postać samowzbudnych drgań własnych ze stałą pulsacją ω i ze stałą amplitudą A . Obydwie te wielkości nie zależą od wymuszeń zewnętrznych, a wynikają wyłącznie z takich właściwości (parametrów) samego układu automatycznej regulacji, jak stała czasowa obiektu, strefa nieczułości lub pętla histerezy elementu nieliniowego, wartość całkowitego wzmocnienia układu itd.



Rys.10.13. Przebieg czasowy

Przebieg czasowy opisanego procesu przejściowego oraz ustalone drgania samowzbudne układu przedstawiono na rys.10.13.

Wyniki uzyskane przy omawianiu tego szczególnego przypadku można wykorzystać do ogólniejszych spostrzeżeń, dotyczących stabilności układów nieliniowych o znanym portrecie fazowym.

Jeżeli mianowicie wszystkie możliwe trajektorie fazowe zbiegają się w pobliżu początku układu współrzędnych, przebiegając wartość końcową $x_2=0$ oraz taką wartość x_1 , że $-\varepsilon < x_1 < \varepsilon$, gdzie ε jest dopuszczalną tolerancją uchybu statycznego, to układ automatycznej regulacji jest stabilny. Przykładem portretu fazowego takiego stabilnego układu jest rys.10.11a.

W przypadku, gdy dla dowolnych wartości początkowych wszystkie trajektorie fazowe dążą do cyklu granicznego, którego amplituda jest mniejsza od dopuszczalnej wartości uchybu statycznego, a częstotliwości drgań samowzbudnych układu nie przekracza wartości uznanych za dopuszczalne, to układ taki uważa się za *praktycznie stabilny*. Jeżeli natomiast, mimo istnienia cyklu granicznego, jego amplituda przekracza wartości dopuszczalne, względnie częstotliwość drgań samowzbudnych jest niedopuszczalna, bo powoduje w układzie niepożądane efekty akustyczne, drganiowe itp., to układ uważa się za *praktycznie niestabilny* (przykład portretu fazowego z cyklem granicznym pokazano na rys.10.12).

Jeżeli na płaszczyźnie fazowej trajektorie fazowe oddalają się od początku układu współrzędnych, to układ automatycznej regulacji jest *niestabilny*.

10.5. ANALIZA NIELINIOWYCH UKŁADÓW REGULACJI AUTOMATYCZNEJ PRZY UŻYCIU KOMPUTERA

Przedstawiona w poprzednim punkcie metoda przestrzeni fazowej jest metodą dokładną. Rozwiązania analityczne uzyskuje się jednak tylko w najprostszych przypadkach. Poza nią znane są również przybliżone metody analizy układów nieliniowych. Wśród nich - *metoda funkcji opisującej* (por. np.[3]). Dostarczają one tylko ograniczonych informacji o zachowaniu się badanego układu. Znacznie więcej informacji można uzyskać z symulacji komputerowej modelu matematycznego układu. Symulacje takie można zrealizować w technice analogowej lub w technice cyfrowej. Jeszcze do niedawna wiele takich symulacji realizowano przy użyciu maszyn analogowych. Obecnie przy rozpowszechnieniu mikrokomputerów i udoskonaleniu programów symulacyjnych stosuje się najczęściej technikę cyfrową.

W punkcie 2.4 omówiono program CSSP i podano przykłady zastosowań do symulacji układów dynamicznych (również nieliniowych). Program ten można zastosować skutecznie do symulacji prawie dowolnie skomplikowanych, nieliniowych układów regulacji automatycznej, których model matematyczny ma postać zwyczajnych równań różniczkowych pierwszego rzędu. Nieliniowości badanego układu mogą mieć dowolny charakter, bez ograniczeń, które wprowadzono na początku tego rozdziału. Wyniki symulacji uzyskuje się w postaci graficznej (wykresy czasowe, portrety fazowe) lub w postaci liczbowej. Podobną rolę do CSSP spełniają również liczne języki symulacyjne.

Bibliografia

1. Amborski K., Marusak A.: Teoria sterowania w ćwiczeniach. PWN, Warszawa 1978.
2. Gibson J.E.: Nieliniowe układy sterowania automatycznego. WNT, Warszawa 1968.
3. Kaczorek T.: Teoria układów regulacji automatycznej. Część II, Zeszyt 2. WPW, Warszawa 1974.
4. Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych. WNT, Warszawa 1970.
5. Mazurek J., Vogt H., Żydanowicz W.: Podstawy automatyki. WPW, Warszawa 1983.
6. Нелетин Р.А. (ред.): Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Изд. "Наука", Москва 1975.
7. Żelazny M.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1976.
8. Thaler G.J., Pastel M.O.: Nieliniowe układy automatycznego sterowania. WNT, Warszawa 1965.