

11. ZARYS TEORII STEROWANIA OPTYMALNEGO

11.1. UWAGI WSTĘPNE

Obecnie coraz częściej wymaga się, żeby dany proces sterowany przebiegał optymalnie, to znaczy *najlepiej* ze wszystkich możliwych realizacji. Na ogół nie wystarcza, że nastawy regulatorów w układach regulacji zapewniają odpowiedni zapas stabilności, a przebieg procesu jest zadowalający.

Dzięki zastosowaniu maszyn cyfrowych w układach sterujących, jest możliwa realizacja złożonych algorytmów sterowania, optymalnych dla danego procesu. Sformułowanie - *najlepsze sterowanie* ma różne znaczenie w zależności od rodzaju procesu. Dla przykładu, najlepszym sterowaniem samolotu po określonej trasie może być sterowanie zapewniające minimalne zużycie paliwa. W przypadku samolotu przechwytyjącego, *optymalne sterowanie* pozwala osiągnąć określoną wysokość i prędkość lotu w możliwie najkrótszym czasie. Robot przemysłowy zgrzewający karoserię samochodu, jest *sterowany optymalnie*, gdy ruch elektrody odbywa się z najmniejszym błędem położenia i prędkości. Bardzo częstym przykładem *optymalnego sterowania* jest taka jego realizacja, która zapewnia minimalny koszt procesu technologicznego.

Każde zagadnienie sterowania optymalnego wymaga matematycznego sformułowania wskaźnika jakości procesu, który ma być optymalny. Optymalizacja w układach rzeczywistych zawsze przebiega przy ograniczeniach (więzach) nałożonych na zmienne procesu, które nie mogą przyjmować dowolnych wartości.

W dalszym ciągu tego rozdziału jest mowa o optymalnym sterowaniu w układach opisanych różniczkowymi równaniami stanu

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\varphi}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \quad (11.1)$$

lub w postaci różnicowej

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\varphi}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)), \quad (11.2)$$

gdzie: \underline{x} jest wektorem stanu, \underline{u} - wektorem sterowań, t oznacza czas ciągły, a k - czas dyskretny.

Wskaźnik jakości sterowania można przedstawić w postaci ogólnej jako funkcjonal:

$$I = G(\underline{x}, \underline{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F(\underline{x}, \underline{u}, t) dt. \quad (11.3)$$

Dla opisu dyskretnego funkcjonal ten przyjmie postać

$$I = G[\underline{x}(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} F[\underline{x}(n), \underline{u}(n)], \quad (11.4)$$

F i G są rzeczywistymi, skalarnymi funkcjami, t_0 oznacza czas początkowy a t_f (lub N dla układów dyskretnych), czas końcowy.

Wskaźnik jakości (11.3) nie jest oczywiście jedyną formą oceny procesu sterowanego, ale postać ta jest wygodna do formalizacji matematycznej zadań optymalizacyjnych i pozwala na wyrażenie różnych praktycznych ocen procesów. Minimalizacja (11.3) nazywana jest zagadnieniem Bolzy.

Wprowadzając różne postaci funkcji G i F , można otrzymać z ogólnego wyrażenia (11.3) zadanie szczególne. Przyjmując $G=0$, $F=1$, otrzymuje się

$$I = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0. \quad (11.5)$$

W tym przypadku wskaźnik I jest czasem trwania procesu od chwili t_0 i minimalizacja (11.5) prowadzi do zagadnienia minimalno-czasowego, jednego z częściej spotykanych zadań w praktyce.

Dla $G=0$, $F=\underline{u}^T \underline{u}$ (\underline{u}^T - transpozycja wektora kolumnowego \underline{u}) funkcjonal (11.3) ma postać

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \underline{u}^T \underline{u} dt. \quad (11.6)$$

W niektórych przypadkach funkcjonal ten może określać energię potrzebną do sterowania procesem.

Podstawiając $F=0$, $G=[\underline{x}(t_f)-\underline{x}_d]^T [\underline{x}(t_f)-\underline{x}_d]$ do (11.3), otrzymuje się wskaźnik jakości, wyrażający odchylenie wektora stanu w chwili końcowej $\underline{x}(t_f)$ od stanu zadanego \underline{x}_d . Jeżeli natomiast $G=0$, $F=[\underline{x}(t)-\underline{x}_z(t)]^T [\underline{x}(t)-\underline{x}_z(t)]$, to funkcjonal I wyraża odchy-

lenie trajektorii $\underline{x}(t)$ od trajektorii zadanej $\underline{x}_z(t)$ w przestrzeni stanu.

Zadanie optymalizacyjne, w którym wskaźnik jakości ma postać

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad (11.7)$$

($G=0$) nazywane jest zagadnieniem Lagrange'a, a przypadek ($F=0$)

$$I = G(\underline{x}, \underline{u}, t) \Big|_{t_0}^{t_f}, \quad (11.8)$$

prowadzi do zagadnienia Mayera.

Zadanie Lagrange'a można sprowadzić do postaci Mayera przez wprowadzenie nowej współrzędnej stanu. Zakładając, że \underline{x} jest wektorem n -wymiarowym, po podstawieniu

$$\dot{\underline{x}}_{n+1}(t) = F(\underline{x}, \underline{u}, t), \quad (11.9)$$

otrzymuje się

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\underline{x}}_{n+1}(t) dt = \underline{x}_{n+1}(t) \Big|_{t_0}^{t_f}, \quad (11.10)$$

a więc postać (11.8) wskaźnika jakości.

Zagadnienia optymalizacyjne z dziedziny sterowania można podzielić na dwie grupy. Pierwszą grupę stanowią zadania optymalizacji parametrycznej (nazywanej też optymalizacją liczbową), drugą grupę tworzą zadania optymalizacji funkcyjnej (dynamicznej). W zadaniu optymalizacji parametrycznej jest określona struktura układu sterowania i określony algorytm, według którego należy generować wektor sterowań. Zadanie polega na optymalnym doborze parametrów układu. Wynikiem optymalizacji są wartości liczbowe parametrów. W zadaniu optymalizacji funkcyjnej poszukiwane jest sterowanie jako przebieg wektora sterowania $\underline{u}(t)$ w funkcji czasu.

Dla ilustracji zadania optymalizacji parametrycznej niech posłuży przykład układu regulacji stałowartościowej, w postaci zamkniętej pętli: regulator- obiekt. Należy dobrać optymalną nastawę regulatora, minimalizującą wskaźnik jakości, który ocenia

przebieg zmiennej stanu i zmiennej sterującej po wyprowadzeniu układu ze stanu równowagi.

Układ regulacji jest pierwszego rzędu, opisany równaniem

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu. \quad (11.11)$$

W układzie tym zastosowano liniowy regulator proporcjonalny o wzmacnieniu k , działający w ten sposób, że $u = -kx$. Przy tym założeniu, równanie stanu sprowadza się do postaci

$$\frac{dx}{dt} = (a - kb)x.$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymano

$$x = x_0 \exp(a - kb)t. \quad (11.12)$$

Stabilność układu wymaga, żeby $a - kb < 0$. Zakłada się, że stan ustalony układu jest $x(t) = 0$ ale wskutek zakłócenia układ w chwili $t_0 = 0$ znalazł się w stanie $x(0) = x_0$. Niech wskaźnik jakości ma postać

$$I = \int_0^{\infty} (x^2 + cu^2) dt. \quad (11.13)$$

Żadając $I = \min$ wymaga się, żeby odchylenia x oraz u od wartości ustalonych (zerowych) w przedziale czasu $(0, \infty)$ były małe. Jako miarę przyjmuje się sumę kwadratów. Współczynnik c przedstawia koszt względny sterowania u względem zmiennej x_0 .

Podstawiając (11.12) do (11.13), otrzymuje się

$$I = \frac{x_0^2 (1 + ck^2)}{2(kb - a)}, \quad (11.14)$$

przy założeniu, że $a - kb < 0$.

Minimum (11.14) poszukuje się w zwykły sposób, z zależności $\frac{dI}{dk} = 0$, otrzymując optymalne wzmacnienie regulatora

$$k = \frac{a}{b} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2 c}} \right].$$

Z zależności $u = -kx$ otrzymano ostatecznie optymalny przebieg sterowania

$$u(t)_{\text{opt}} = -\frac{a}{b} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2 c}} \right] x_0 \exp \left[-a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2 c}} t \right]. \quad (11.15)$$

Podobny efekt jak w układzie zamkniętym z regulatorem P, można uzyskać sterując obiektem w układzie otwartym, po podaniu na jego wejście sygnału sterującego według wzoru (11.15). Należy tu oczywiście pamiętać, że otrzymane prawo sterowania minimalizuje wskaźnik (11.13) przy przyjętym ograniczeniu

$$u(t) = -kx(t). \quad (11.16)$$

W tym miejscu nasuwa się oczywiste pytanie, czy odrzucenie tego ograniczenia nie będzie prowadziło do otrzymania mniejszej niż uzyskana wartości wskaźnika (11.13). Uzyskanie odpowiedzi na to pytanie wymaga znalezienia optimum (11.14) w szerszej klasie funkcji $u(t)$.

Pozostając tylko przy koniecznym ze względów technicznych ograniczeniu co do ekstremalnych wartości sterowań dla r -wymiarowego wektora \underline{u}

$$a_i \leq u_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

przechodzi się do drugiej grupy zadań optymalizacyjnych, w której nie są poszukiwane optymalne wartości parametrów układu, ale poszukiwany jest optymalny przebieg $u(t)$. Zadanie tego typu rozwiązuje się wykorzystując zasadę maksimum Pontriagina lub metodę programowania dynamicznego Bellmana.

11.2. ZASADA MAKSIMUM

Z zasady Pontriagina korzysta się przy rozwiązywaniu następującego zadania:

Układ jest opisany za pomocą równań stanu

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t). \quad (11.17)$$

Na sterowania nałożone są warunki

$$a_i \leq u_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (11.18)$$

Należy wyznaczyć przebieg $\underline{u}(t)$ ekstremalizujący funkcjonal

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\underline{x}, \underline{u}, t) dt. \quad (11.19)$$

Wprowadzając nową zmienną x_{n+1} , spełniającą zależności:

$$x_{n+1}(t_0) = 0$$

oraz

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(x, u, t),$$

otrzymuje się

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t F(x, u, t) dt.$$

Zadanie sprowadza się do *ekstremalizacji* nowej współrzędnej x_{n+1} w chwili końcowej t_f . Zadanie to jest szczególnym przypadkiem *ekstremalizacji* funkcji skalarnej

$$P = \sum_{i=1}^m c_i x_i(t_f), \quad (11.20)$$

nazywanej *funkcją Pontriagina*. Można przypuszczać, że istnieje inna funkcja P , której *ekstremalizacja* jest, po pierwsze, równoważna *ekstremalizacji* funkcji P (to znaczy obydwie osiągają ekstremum dla tych samych sterowań), a po drugie, poszukiwanie optimum jest łatwiejsze. Intuicyjnie można przewidzieć, że funkcją taką może być funkcja zależna od energii układu.

Podobna sytuacja występuje w mechanice klasycznej, gdzie energię układu wyraża się za pomocą *funkcji Hamiltona*, przedstawionej za pomocą współrzędnych układu i pędów uogólnionych. Określając *hamiltonian* H jako iloczyn skalarny wektora p oraz wektora prędkości $\dot{x} = [f_1(x, u, t) \ f_2(x, u, t) \ \dots \ f_m(x, u, t)]^T$

$$H(x, p, u, t) = (p, \dot{x}) = \sum_{i=1}^m p_i f_i, \quad (11.21)$$

można wyrazić zasadę maksimum Pontriagina następująco:

Jeżeli dla sterowania $u(t)$ funkcja Pontriagina osiąga minimum (maksimum) to dla tego sterowania funkcja Hamiltona osiąga maksimum (minimum) w przedziale czasu $t \in \langle t_0, t_f \rangle$. Osiągnięcie maksimum (minimum) funkcji H jest warunkiem koniecznym wystąpienia minimum (maksimum) funkcji P . Dla układów liniowych warunek ten jest dostateczny.

Zasada powyższa jest nazywana czasem *zasadą minimum*.

Wektor współrzędnych p występujący w (11.21) jest określany jako rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\dot{p}_j &= - \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \\ \dot{x}_j &= f_j(x, u, t), \\ j &= 1, 2, \dots, m,\end{aligned}\tag{11.22}$$

gdzie przyjmuje się

$$p_j(t_r) = -c_j,$$

a c_j są współczynnikami występującymi we wzorze (11.20).

Różniczkując hamiltonian względem p_j oraz x_j , sprowadza się układ równań (11.22) do postaci kanonicznej Hamiltona

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial x_j},\tag{11.23}$$

który należy rozwiązać przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned}x_j(t_0) &= x_{j0}, \\ p_j(t_0) &= -c_j, \\ j &= 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{11.24}$$

Przykład 11.1

Zastosowanie zasady maksimum można pokazać na przykładzie układu liniowego analizowanego już we wstępie 11.1. Układ jest opisany równaniem (11.11), a kryterium jakości jest w postaci (11.13).

Oznaczając

$$x_1 = x, \quad x_2 = \int_{t_0}^t (x_1^2 + cu^2) dt,$$

otrzymuje się układ równań

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bu, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + cu^2,\end{aligned}\tag{11.25}$$

a stąd funkcję Pontriagina

$$P = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Niech w związku z określonym na początku wskaźnikiem jakości I (11.13), $c_1=0$ oraz $c_2=1$. Hamiltonian ma więc postać

$$H = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1 (ax_1 + bu) + p_2 (x_1^2 + cu^2).$$

Warunek konieczny maksimum hamiltonianu jest w postaci

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_1 b + 2cp_2 u = 0;$$

otrzymuje się stąd optymalne sterowanie wyrażone we współrzędnych p_1 i p_2 :

$$u = -\frac{1}{2} \frac{p_1 b}{p_2 c}. \quad (11.26)$$

Z równań kanonicznych (11.23) otrzymano

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -ap_1 - 2p_2 x_1, \\ \dot{p}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pamiętając, że $p_1(t_f) = -c_1 = 0$; $p_2(t_f) = -c_2 = -1$, dochodzi się do układu równań

$$\dot{p}_1 = -ap_1 + 2x_1, \quad (11.27)$$

$$\dot{x}_1 = ax_1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{c} p_1,$$

który należy rozwiązać dla warunków brzegowych $x_1(t_0) = x_0$, $p_1(t_f) = 0$, otrzymując w końcu sterowanie optymalne

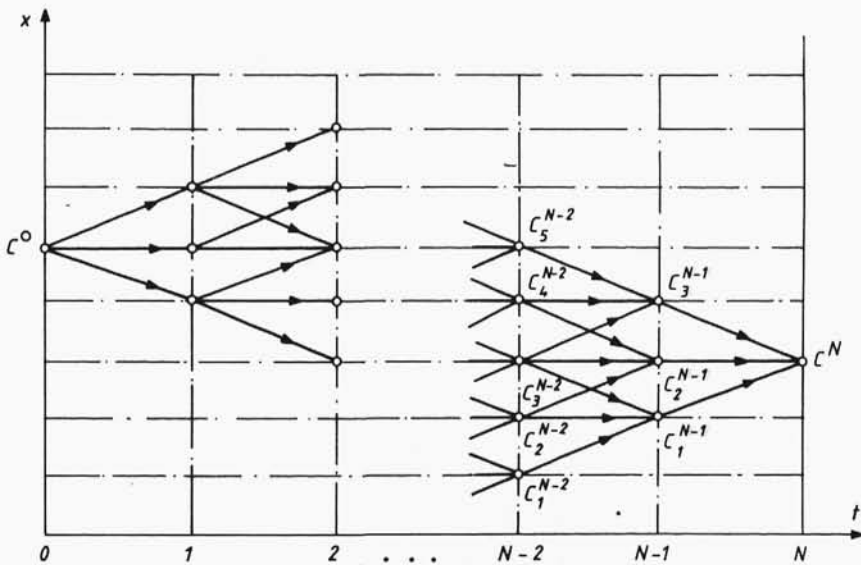
$$u(t)_{\text{opt}} = -\frac{a}{b} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2 c}} \right] x_0 \exp \left[-a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2 c}} t \right].$$

Wynik jest identyczny z (11.15). Okazuje się więc, że zastosowany w poprzednim przykładzie regulator proporcjonalny z odpowiednio dobranym wzmocnieniem jest rzeczywiście najlepszym rozwiązaniem technicznym układu regulacji opisanym obiektem przy kryterium jakości sterowania (11.13).

11.3. METODA PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Programowanie dynamiczne jest skutecznym narzędziem do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych, szczególnie za pomocą maszyn liczących. Istotę metody można najłatwiej wyjaśnić, obrazując proces sterowania jako dyskretny wieloetapowy proces decyzyjny, w którym na każdym etapie jest podejmowana optymalna decyzja, określająca sterowanie na aktualnym etapie.

Oznaczając przez $x(n)$ stan układu w n -tej chwili, można przedstawić zbiór stanów dopuszczalnych, możliwych do osiągnięcia przez układ w kolejnych chwilach dyskretnego czasu $n=0,1,\dots,N$, ($t_n=nT$), w postaci siatki w przestrzeni, w której jednym wymiarem jest czas, a pozostałymi są wymiary przestrzeni stanu. W przypadku układu pierwszego rzędu otrzymuje się obraz jak na rys.11.1, gdzie odcinki skierowane między węzłami siatki oznaczają przejście układu ze stanu $x(n)$ do $x(n+1)$, odpowiadające dopuszczalnym sterowaniom $u(n)$. Niech rysunek obrazuje zadanie dwugraniczne, to znaczy taki przebieg, w którym stany początkowy i końcowy są ustalone. Proces optymalizacyjny rozkłada się na etapy decyzyjne, w których sterowania optymalne są



Rys.11.1. Siatka dla układu pierwszego rzędu

poszukiwane wstecz, w czasie upływającym od końca do początku procesu, to znaczy w chwilach $N-1, N-2, \dots$. Jeżeli jest, jak w omawianym przykładzie, jeden stan końcowy $x(N)=c^N$, to w chwili $N-1$ układ musi się znajdować w jednym ze stanów $x(N-1)$ spełniających równanie

$$c^N = \varphi[x(N-1), u(N-1)].$$

W rozpatrywanym przykładzie są takie trzy stany $x(N-1)$: c_1^{N-1} , c_2^{N-1} , c_3^{N-1} . W pierwszym etapie optymalizacji, decyzja optymalna jest jedyna - doprowadzić układ do stanu c^N . Stąd koszt optymalny na pierwszym etapie jest

$$f_1(c_i^{N-1}) = h(c_i^{N-1}, c^N); \quad i=1,2,3.$$

W drugim etapie układ znajduje się w jednym ze stanów $x(N-2)$. Dla przykładu $x(N-2) \in \{c_1^{N-2}, c_2^{N-2}, \dots, c_s^{N-2}\}$. Stany $x(N-2)$ spełniają równanie

$$x(N-1) = \varphi[x(N-2), u(N-2)]$$

dla wszystkich sterowań dopuszczalnych na tym etapie. Można zauważyć, że siatka na rys.11.1 rozrasta się wzdłuż osi rzędnych. Na drugim etapie pojawia się zadanie wyboru decyzji optymalnej.

Koszt przejścia ze stanu $x(n)$ do stanu $x(n+1)$ oznacza się

$$h[x(n), x(n+1)]$$

lub jeżeli proces jest opisany równaniem różnicowym

$$x(n+1) = \varphi[x(n), u(n)].$$

Koszt ten można wyrazić w postaci funkcji

$$g[x(n), u(n)]. \quad (11.28)$$

Całkowity koszt przeprowadzenia układu ze stanu początkowego do końcowego wyraża się w postaci *addytywnej* jako *wskaźnik jakości procesu*

$$I_N = \sum_{k=0}^{N-1} g[x(n), u(n)].$$

Poszukuje się optymalnego ciągu sterowań $\{u\}=\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ takich, że

$$f_N(x, u) = \underset{\{u\}}{\text{opt}} (I_N), \quad (11.29)$$

gdzie opt oznacza *minimum* lub *maksimum*, w zależności od zadania.

Zadanie takie można rozwiązać po wyczerpaniu wszystkich możliwych ciągów sterowań i wybraniu ciągu najlepszego. Takie postępowanie, jak łatwo oszacować, jest nierealne nawet dla dużej i szybkiej maszyny cyfrowej, już przy niezbyt dużej liczbie węzłów siatki.

Koszt optymalny $f_2(c_j^{N-2})$ dla każdego przejścia ze stanu c_j^{N-2} do stanu c^N mnoże być wyznaczony z zależności

$$f_2(c_j^{N-2}) = \underset{\{j, i\}}{\text{opt}} [h(c_j^{N-2}, c_i^{N-1}) + h(c_i^{N-1}, c^N)]. \quad (11.30)$$

Optymalizację należy prowadzić dla par $\{j, i\}$, dla których sterowania są dopuszczalne. Zapis można teraz uprościć i napisać zależność (11.30) dla etapu o numerze n . Otrzymuje się wzór na koszt optymalny przejścia ze stanu $x(N-n)$ do stanu $x(N)$:

$$f_k[x(N-n)] = \underset{\{u(N-n)\}}{\text{opt}} \underset{\{u(N-n+1)\}}{\text{opt}} \dots \underset{\{u(N-1)\}}{\text{opt}} \left\{ g[x(N-n), u(N-n)] + \right. \\ \left. + g[x(N-n+1), u(N-n+1)] + \dots + g[x(N-1), u(N-1)] \right\}. \quad (11.31)$$

Wyznaczenie sterowań bezpośrednio z tej zależności polegałoby na sprawdzeniu wszystkich kombinacji możliwych sterowań, co jak już zaznaczono wcześniej jest na ogół nierealne. Można więc spróbować uproszczenia zadania wynikającego z zasady optymalności sformułowanej przez R. Bellmana w pierwszej wersji dla zagadnień transportowych i ekonomicznych:

Strategia optymalna ma tę własność, że jakiegokolwiek byłyby stan początkowy i decyzja początkowa, pozostałe decyzje muszą tworzyć strategię optymalną z punktu widzenia stanu wynikłego z pierwszej decyzji.

Zasadę optymalności można też sformułować inaczej: Jeżeli trajektoria optymalna w przestrzeni stanu ma początek w punkcie x_a i przebiega do punktu x_c przez x_b , to jej odcinek z punktu x_b do x_c jest też optymalny.

Korzystając z zasady optymalności, można zapisać równanie (11.31) w postaci

$$f_n[x(N-n)] = \underset{\{u(N-n)\}}{\text{opt}} \left\{ g[x(N-n), u(N-n)] + f_{n-1}[x(N-n), u(N-n)] \right\}. \quad (11.32)$$

Koszt optymalny f_{n-1} występujący w równaniu (11.32) po prawej stronie zapisano jako funkcję dwóch argumentów $x(N-n)$, $u(N-n)$ zamiast $x(N-n+1)$, pamiętając, że wielkości te są związane równaniem stanu, a ponadto dlatego, że optimum jest poszukiwane na zbiorze sterowań $\{u(N-n)\}$.

Korzystając ze wzoru (11.32), w wyniku postępowania rekurencyjnego dla etapów $1, 2, \dots, N$, buduje się tablicę (rys.11.2) - np. w pamięci komputera, w której dla każdego etapu są przechowywane wartości kosztów optymalnych f_n i odpowiadające im sterowania $u(N-n)$. Obliczone w ostatnim etapie ($n=N$) sterowanie $u(0)$ ze wzoru

$$f_N[x(0)] = \underset{\{u(0)\}}{\text{opt}} \left\{ g[x(0), u(0)] + f_{N-1}[x(0), u(0)] \right\}$$

jest pierwszym sterowaniem optymalnego ciągu sterowań, który w końcu odtwarza się na podstawie tablicy.

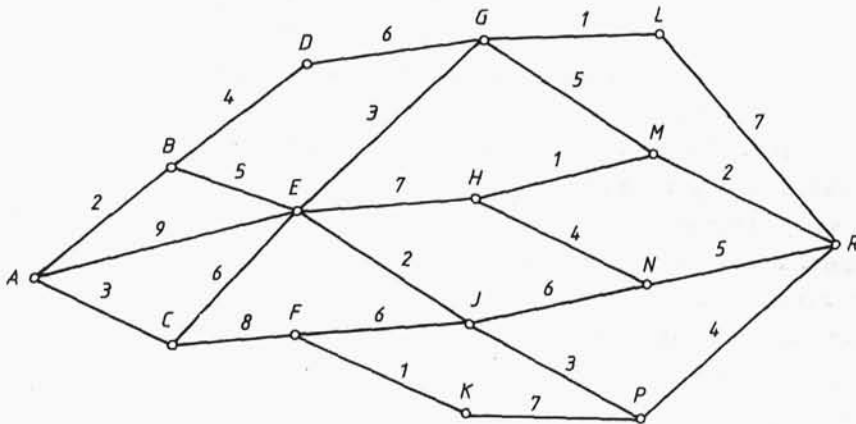
x	$f_1(x)$	$u(N-1)$	$f_2(x)$	$u(N-2)$	\dots	$f_{N-1}(x)$	$u(0)$
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
.							
.							
—	—	—	—	—	—	—	—

Rys.11.2. Tablica wartości kosztów optymalnych

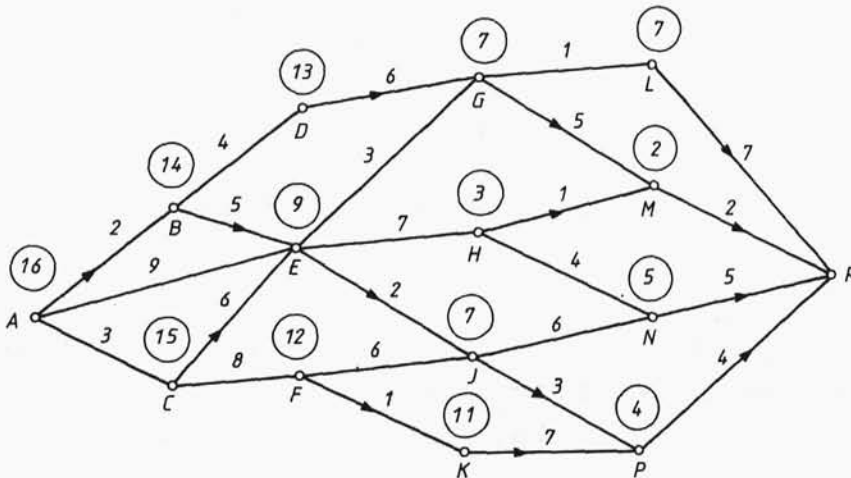
Dla lepszej ilustracji metody rozwiąże się teraz za jej pomocą zadanie transportowe, polegające na optymalnym przejściu z punktu A do R (rys.11.3). Koszt przejścia powinien być minimalny. Możliwe (dopuszczalne) trasy tworzą siatką łączącą punkty A, B, C, ..., R. Koszt przejścia między punktami jest wyrażony za pomocą liczby napisanej przy odcinku łączącym dwa punkty.

W pierwszym etapie oblicza się koszty przejścia z punktów L, M, N, P do R. Wartości tych kosztów wpisuje się w kółku w pobliżu odpowiednich punktów (rys.11.4). Są to liczby 7, 2, 5, 4. Pośługując się przyjętą wcześniej symboliką, można zapisać $f_1(L)=7$, $f_1(M)=2$, itd. W drugim etapie oblicza się $f_2(G)$, $f_2(H)$, $f_2(I)$ i $f_2(K)$ z równań, które na przykład dla punktu H ma postać

$$f_2(H) = \min [1 + f_1(M), 4 + f_1(N)].$$



Rys.11.3. Siatka do zadania transportowego



Rys.11.4. Rozwiązanie zadania transportowego

Wyniki zapisuje się podobnie jak w poprzednim etapie, zaznaczając optymalną trasę strzałką. Obliczenie kończy się w punkcie A, obliczając $f_g(A)=16$. Poszukiwaną trasę znaleziono poruszając się wzdłuż strzałek od punktu A i otrzymując ciąg punktów A, B, E, J, P, R. Jako produkt uboczny postępowania otrzymano minimalne koszty tras rozpoczynających się we wszystkich punktach. Zaleca się Czytelnikowi powtórzenie zadania, polegającego tym razem na znalezieniu trasy o największym koszcie.

Można teraz oszacować nakład obliczeń niezbędnych w postępowaniu wprost przy analizowaniu wszystkich możliwych trajektorii i porównać z nakładem obliczeń w metodzie programowania dynamicznego. Powtarzając przykład Bellmana z [1] przyjmuje się, że proces ma 20 etapów (21 dyskretnych chwil) i na każdym etapie sterowania może przyjmować 100 różnych wartości. Całkowita liczba możliwych strategii (trajektorii) jest $100^{20}=10^{40}$. Jeżeli na obliczenie wskaźnika jakości na jednej z trajektorii komputer potrzebuje niewiele, bo jedną mikrosekundę, to czas sprawdzenia wszystkich strategii będzie równy $3,17 \cdot 10^{27}$ lat! W metodzie programowania dynamicznego obliczenia według wzoru (11.32) będą prowadzone $20 \cdot 100$ razy i ich łączny czas będzie nieporównywalnie mniejszy od poprzedniego. Należy zaznaczyć, że wspomniane obliczenia są tylko fragmentem obliczeń przeprowadzanych przez maszynę.

Do wad przedstawionej metody programowania dynamicznego w wersji dyskretnej można zaliczyć konieczność przechowywania w pamięci maszyny tablic, które dla wielowymiarowych zadań wieloetapowych mogą przekraczać możliwości dużych maszyn liczących.

11.4. PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE - WERSJA CIĄGŁA

Zasada optymalności w zastosowaniu do procesu ciągłego prowadzi do równań różniczkowych, z których można wyznaczyć sterowania optymalne. Sposób postępowania można pokazać na przykładzie układu pierwszego rzędu, opisanego równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = \varphi(x, u), \quad (11.33)$$

z warunkiem początkowym $x(t_0)=x_0$.

Dla układu tego należy wyznaczyć optymalny sygnał sterujący $u(t)$, minimalizujący funkcjonal całkowity

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, u) dt.$$

O funkcji F zakłada się, że jest różniczkowalna względem swoich argumentów.

Oznaczając

$$f(x, t) = \min_u \int_t^{t_f} F(x, u) dt$$

rozkłada się proces optymalizacji w przedziale czasu $\langle t, t_f \rangle$ na dwa etapy, pisząc

$$f(x, t) = \min_u \left[\int_t^{t+\delta t} F(x, u) dt + \int_{t+\delta t}^{t_f} F(x, u) dt \right]. \quad (11.34)$$

Proces ten w przedziale czasu $\langle t+\delta t, t_f \rangle$ musi być optymalny zgodnie z zasadą optymalności, więc

$$f(x+\delta x, t+\delta t) = \min_u \left[\int_{t+\delta t}^{t_f} F(x, u) dt \right]. \quad (11.35)$$

Dla małego δt

$$\delta x \approx \dot{x} \delta t; \quad \int_t^{t+\delta t} F(x, u) dt \approx F(x, u) \delta t. \quad (11.36)$$

Korzystając z (11.35) i (11.36), można napisać (11.34) w postaci

$$f(x, t) = \min_u [F(x, u) \delta t + f(x + \dot{x} \delta t, t + \delta t)]. \quad (11.37)$$

Ograniczając się do liniowej części rozwinięcia Taylora funkcji $f(x + \dot{x} \delta t, t + \delta t)$, otrzymano

$$f(x, t) = \min_u [F(x, u) \delta t + f(x, t) + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} \delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t].$$

Korzystając z (11.33), po uporządkowaniu i podzieleniu stronami przez δt , uzyskuje się

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \min_u \left[F(x, u) + \varphi(x, u) \frac{\partial f}{\partial x} \right]. \quad (11.38)$$

Przy założeniu, że na u nie są nałożone ograniczenia, warunek konieczny minimum prawej strony (11.38) prowadzi do równania

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (11.39)$$

Z (11.38), dla optymalnego sterowania u , otrzymuje się również

$$F(x, u) + \varphi(x, u) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (11.40)$$

Rozwiązanie układu dwóch równań (11.39) i (11.40) względem $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial t}$ prowadzi do

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial u}{\partial \varphi / \partial u}, \quad (11.41)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - F(x, u) + \varphi(x, u) \frac{\partial F / \partial u}{\partial \varphi / \partial u}.$$

Prawe strony równań (11.41) oznacza się, odpowiednio, przez $Q(x, u)$ i $P(x, u)$. Różniczkując pierwsze równanie względem t oraz drugie względem x , otrzymano

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Przyrównując do siebie prawe strony (11.42), znaleziono ostatecznie różniczkowe równanie cząstkowe

$$\varphi(x, u) \frac{\partial P(x, u)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial Q(x, u)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Rozwiązując to równanie (najczęściej numerycznie), otrzymuje się optymalne sterowanie u .

Bibliografia

1. R. Bellman: Adaptacyjne procesy sterowania. PWN, Warszawa 1965.
2. Julius T. Tou: Modern control theory. McGraw-Hill Inc. 1965.
3. J. M. Douglas: Dynamika i sterowanie procesów, tom 2, WNT, Warszawa 1976.
4. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa 1980.

SKRYPTY WPW DLA KIERUNKU MECHANIKA

w przygotowaniu

CISZEWSKI A., RADOMSKI T., SZUMMER A. Materiałoznawstwo. Wyd. 5 popr., ark. aut. 21

CIEŚLICKI K., SYRZYCKI A. Zbiór zadań z podstaw elektrotechniki. Ark. aut. 4

BZOWSKI J. Zbiór zadań z termodynamiki statystycznej. Wyd. 3. Ark. aut. 6

GÓRNY A., SZWABIK B. Ciągniki. Wybrane zagadnienia z teorii ruchu i budowy. Wyd. 2 z erratą. Ark. aut. 9

JACKOWSKI K., JANKOWSKI Z., JĘDRAL W. Układy pompowe. Wyd. 2 z erratą. Ark. aut. 16

MOCZARSKI M. Technologia wytwarzania i napraw pojazdów szynowych. Ark. aut. 10

MILLER A., LEWANDOWSKI J. Praca turbin parowych w zmienionych warunkach. Ark. aut. 9

IGIELSKI J. Automaty użytkowe. Album. Wyd. 2 popr., ark. aut. 11

REŃSKI A. Budowa samochodów. Układy hamulcowe i kierownicze oraz zawieszenia. Ark. aut. 10