

Pierwiastkami tego równania są: $z_1=0,3-j$; $z_2=0,3+j$; $z_3=0,5$; $z_4=0,4$. Moduły dwóch pierwszych pierwiastków $|z_1|=|z_2|=\sqrt{1,09}=1,044$ są większe od jedności - układ jest niestabilny.

Przykład 8.14

Zbadać stabilność, w przypadku gdy transmitancja impulsowa ma postać

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 2}{z^4 - 1,5z^3 + 1,64z^2 - 0,93z + 0,18}.$$

W tym przypadku pierwiastkami równania charakterystycznego są: $z_1=0,3-0,9j$; $z_2=0,3+0,9j$; $z_3=0,5$; $z_4=0,4$. Moduły wszystkich pierwiastków są mniejsze od jedności - układ jest stabilny, chociaż moduły dwóch pierwszych pierwiastków $|z_1|=|z_2|=\sqrt{0,9}\approx 0,95$ wskazują na to, że leżą one blisko brzegu obszaru stabilności.

8.11. REGULACJA IMPULSOWA

Przykład 8.15

W układzie regulacji nadążnej, którego schemat blokowy pokazano na rys.8.10 zastosowano jedną z możliwych wersji dyskretnego regulatora PID rzeczywistego o transmitancji impulsowej

$$G_r(z) = k + k \frac{T}{T_i} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{k}{\alpha} \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}\beta^*}. \quad (8.71)$$

Model matematyczny tego regulatora utworzono przez zsumowanie (równoległe połączenie) zamieszczonych w tablicy 8.2 modeli członów dyskretnych proporcjonalnego, całkującego i rzeczywistego różniczkującego. Można łatwo wykazać, że charakterystyka skokowa tego regulatora jest podobna do charakterystyki regulatora idealnego, pokazanej na rys.8.11. Regulator współpracuje z obiektem o transmitancji

$$G_o(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}. \quad (8.72)$$

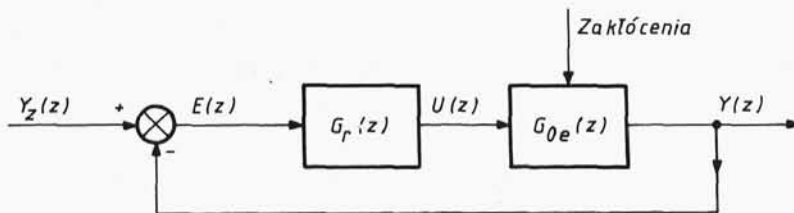
Pomiędzy regulatorem i obiektem jest umieszczony szeregowo ekstrapolator zerowego rzędu o transmitancji (8.39).

Dane są: okres impulsowania $T=0,2$ s; stałe czasowe obiektu $T_1=1$ s, $T_2=1,4$ s; nastawy regulatora $k=44,33$; $k \frac{T}{T_1}=23,43$; $\frac{k}{T_1}=81,24$; $\beta^*=-0,75$. Wyznaczyć przebieg odpowiedzi układu na wymuszenie $y_z(t)=1(t)$ przy zerowych warunkach początkowych.

Schemat blokowy układu, pokazany na rys.8.10, można przekształcić na schemat obliczeniowy pokazany na rys.8.15. Dla wygody obliczeń szeregowo połączenie ekstrapolatora i obiektu zastąpiono tu jednym członem o zastępczej transmitancji impulsowej $G_{0e}(z)$. Zaletą tego schematu jest, iż zawiera tylko transformaty i transmitancje impulsowe. Dzięki temu do jego przekształcenia (zwinięcia) można zastosować zwykłe zasady algebry schematów blokowych, takie jak dla układów ciągłych.

Po podstawieniu danych liczbowych do wzoru (8.71) i dokonaniu prostych lecz dość żmudnych przekształceń i obliczeń otrzymuje się

$$G_r(z) = \frac{149z^2 - 156z + 48}{z^2 - 0,25z - 0,75} \quad (8.73)$$



Rys.8.15. Blokowy schemat obliczeniowy układu regulacji dyskretniej: $Y_z(z)$ - transformata wartości zadanej, $E(z)$ - transformata uchybu, $U(z)$ - transformata sygnału sterującego, $Y(z)$ - transformata wartości regulowanej, $G_r(z)$ - transmitancja regulatora, $G_{0e}(z)$ - transmitancja obiektu z ekstrapolatorem zerowego rzędu na wejściu

Postępując podobnie jak w przykładzie 8.9 otrzymano

$$G_{0e}(z) = z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G_0(s) \right] = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (8.74)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\beta_1 + \beta_2), & a_2 &= \beta_1 \beta_2, \\ b_0 &= \alpha_1 (1 - \beta_1) + \alpha_2 (1 - \beta_2), & b_1 &= \alpha_1 (1 - \beta_1) \beta_2 - \alpha_2 (1 - \beta_2) \beta_1, \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \quad \alpha_2 = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

$$\beta_1 = \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right), \quad \beta_2 = \exp\left(-\frac{T}{T_2}\right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymuje się

$$G_{0e}(z) = \frac{0,0132z + 0,011}{z^2 - 1,686z + 0,71}. \quad (8.75)$$

Zwijając schemat blokowy z rys.8.15 wyznaczono zastępczą transmitancję impulsową układu

$$G(z) = \frac{G_r(z) G_{0e}(z)}{1 + G_r(z) G_{0e}(z)} = \frac{Y(z)}{Z_z(z)}. \quad (8.76)$$

Podstawiając (8.73) i (8.75) do (8.76), wyznacza się ostatecznie

$$G(z) = \frac{1,937z^3 - 0,389z^2 - 1,092z + 0,528}{z^4}. \quad (8.77)$$

Obliczenia współczynników transmitancji (8.77) należy wykonywać z dużą dokładnością. W przypadku mniej dokładnych obliczeń w mianowniku ułamka (8.77) będą występowały pozostałe wyrazy wielomianu (z^3 , z^2 , z , wyraz wolny) pomnożone przez bardzo małe współczynniki.

Dzielnik licznik i mianownik (8.77) przez z^4 (najwyższa potęga mianownika - porównaj przykład 8.10) i odpowiednio przekształcając, otrzymuje się

$$Y(z) = Y_z(z) (1,937z^{-1} - 0,389z^{-2} - 1,092z^{-3} + 0,528z^{-4}).$$

Po dokonaniu transformacji odwrotnej obu stron tego równania otrzymuje się równanie różnicowe opisujące związek między sygnałami wyjściowym i wejściowym układu

$$y(n) = 1,937y_z(n-1) - 0,389y_z(n-2) +$$

$$- 1,092y_z(n-3) + 0,528y_z(n-4). \quad (8.78)$$

Zgodnie z treścią zadania podstawiono $y_z(n) = 1(n)$, wtedy

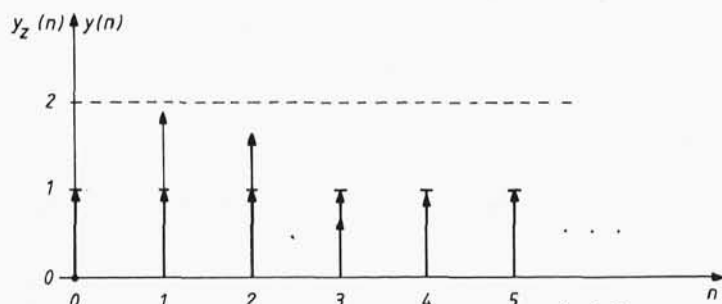
$$y(n) = 1,937 \cdot 1(n-1) - 0,389 \cdot 1(n-2) +$$

$$- 1,092 \cdot 1(n-3) + 0,528 \cdot 1(n-4). \quad (8.79)$$

Obliczenia do wykresu charakterystyki skokowej układu prowadzi się w tablicy 8.3. Charakterystykę skokową pokazano na rys.8.16.

Tablica 8.3

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$1(n)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y(n)$	0	0	0	0	0	1,937	1,548	0,456	0,986	...



Rys.8.16. Charakterystyka skokowa układu regulacji z przykładu 8.13: $y_z(n)$ - wymuszenie, impulsy zakończone kreskami, $y(n)$ - odpowiedź, impulsy zakończone strzałkami

8.12. DOBÓR NASTAW REGULATORÓW DYSKRETYCH

Dobór nastaw regulatora dyskretnego, istniejącego realnie (hardware) lub w postaci programu komputerowego (software)⁶⁾ przeprowadza się tak, aby uzyskać określone cechy procesu regulacji. Zazwyczaj wymaga się, aby dwa podstawowe wskaźniki jakości regulacji: przeregulowanie κ i czas regulacji t_r (patrz rozdział 7) osiągały określone wartości dla przebiegów przejściowych wywołanych skokowym wymuszeniem na wejściu regulatora lub obiektu.

Nastawy regulatorów dobiera się, zarówno w układach ciągłych jak i dyskretnych, przeważnie metodą prób i błędów, ponieważ rzeczywiste obiekty zazwyczaj odbiegają od stosowanych do ich opisów modeli matematycznych. Opracowano różne metody postępowania przy dobieraniu nastaw.

⁶⁾ hardware, software - (ang.) sprzęt, oprogramowanie

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych w regulacji ciągłej i dyskretniej jest reguła Zieglera-Nicholsa, za pomocą której osiąga się $\kappa=30+50\%$ i t_r zbliżone do minimum. Algorytm postępowania jest następujący:

1) Regulator w badanym dyskretnym układzie należy nastawić na działanie proporcjonalne P (wyłączyć działanie różnicujące i sumujące) i zwiększać stopniowo współczynnik wzmocnienia k_p aż do wartości granicznej k_{pg} , przy której wystąpią oscylacje niegasnące (granica stabilności).

2) Należy zmierzyć okres tych oscylacji T_g i zanotować k_{pg} .

3) Zależnie od typu regulatora przyjąć:

- dla regulatora typu P $k_p = 0,5 k_{pg}$;
- dla regulatora typu PI $k_p = 0,45 k_{pg} - 0,5 k_i$,

gdzie: $k_i = \frac{k_p T}{T_i} = 0,54 k_{pg} \frac{T}{T_g}$, T - okres impulsowania;

- dla regulatora PID $k_p = 0,6 k_{pg} - 0,6 k_i$,

gdzie: $k_i = \frac{k_p T}{T_i} = 1,2 k_{pg} \frac{T}{T_g}$, $k_d = \frac{k_p T_d}{T} = 0,075 k_{pg} \frac{T_g}{T}$,

T - okres impulsowania.

W regulacji ciągłej algorytm Zieglera-Nicholsa jest podobny, lecz zalecane wartości nastaw inne. Niekiedy żąda się aby tylko jeden ze wskaźników regulacji spełniał określone wymagania, np. aby czas regulacji t_r był minimalny.

Przykład 8.16

Na rys.8.10 pokazano schemat blokowy układu regulacji. Transmitancja regulatora i obiektu podane są odpowiednio wzorami (8.71) i (8.72). Należy znaleźć metodę wyznaczenia takich nastaw regulatora, których stosowanie zapewnia minimalny czas regulacji. Dla tego przypadku znaleźć tak zwane prawo sterowania, czyli związek między sygnałami wejściowym i wyjściowym regulatora.

W celu rozwiązania zadania wygodniej jest przedstawić transmitancje impulsowe członów układu w postaci ilorazu wielomianów zmiennej z . Po przekształceniu wzoru (8.71) otrzymuje się transmitancję regulatora

$$G_r(z) = \frac{h_0 z^2 + h_1 z + h_2}{(z-1)(z+f_1)} = \frac{H(z)}{F(z)}, \quad (8.80)$$

gdzie:

$$h_0 = k \left(1 + \frac{T}{T_1} + \frac{1}{\alpha} \right), \quad h_1 = -k \left(\beta^* + \frac{T}{T_1} \beta^* + \frac{2}{\alpha} \right), \quad h_2 = k \left(\beta^* + \frac{1}{\alpha} \right),$$

$$f_1 = -e^{-T/\alpha T_d} = -\beta^*.$$

Transmitancja impulsowa szeregowo połączonych ekstrapolatora i obiektu dana jest wzorem (8.74). Wymnażając licznik i mianownik przez z^2 , otrzymuje się

$$G_{0e}(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (8.81)$$

Współczynniki wielomianów $A(z)$ i $B(z)$ są oczywiście takie jak podane w przykładzie 8.15, wzór (8.75).

Transmitancje (8.80) i (8.81) pozwalają przekształcić rzeczywisty schemat blokowy układu regulacji pokazany na rys.8.10 na schemat obliczeniowy pokazany na rys.8.15. Stosując wzór (8.76) otrzymuje się zastępczą transmitancję impulsową układu

$$G(z) = \frac{B(z)H(z)}{A(z)F(z)+B(z)H(z)} = \frac{M(z)}{N(z)}. \quad (8.82)$$

Z postaci wielomianów zmiennej z występujących we wzorach (8.80) i (8.81) wynika, że wielomian charakterystyczny układu $N(z)$ jest rzędu czwartego względem zmiennej z i można go zapisać jako

$$N(z) = m_0 z^4 + m_1 z^3 + m_2 z^2 + m_3 z + m_4. \quad (8.83)$$

W rozważanym przypadku $m_0=1$, natomiast współczynniki m_1+m_4 można wyznaczyć z tożsamości

$$A(z)F(z) + B(z)H(z) = N(z). \quad (8.84)$$

W rozpatrywanym przypadku poszukuje się takich wartości współczynników m_1+m_4 , które zapewniają minimalny czas regulacji, czyli minimalny czas trwania procesów przejściowych w układzie. Z postaci wzoru (8.65) wynika, że taki stan uzyskuje się wtedy, gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $N(z)=0$ są równe zero. Z tego wynikają następujące warunki dla układu minimalno-czasowego

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0. \quad (8.85)$$

Z tożsamości (8.84) można wyprowadzić układ równań w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 & 0 \\ (a_1-1) & b_1 & b_0 & 0 \\ (a_2-a_1) & 0 & b_1 & b_0 \\ -a_2 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1-(a_1-1) \\ m_2-(a_2-a_1) \\ m_3+a_2 \\ m_4 \end{bmatrix}. \quad (8.86)$$

Uwzględniając (8.85) rozwiązuje się układ równań (8.86) względem niewiadomych f_1 , h_0 , h_1 i h_2 , które określają nastawy regulatora (wzór 8.80).

Poszukiwane prawo sterowania wyznacza się z transmitancji impulsowej regulatora

$$G_r(z) = \frac{U(z)}{E(z)}, \quad (8.87)$$

gdzie: $U(z)$ i $E(z)$ są transformatami sygnałów wyjściowego i wejściowego regulatora, tak jak pokazano to na rys.8.15. Kojarczając (8.80) i (8.87), otrzymuje się

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{h_0 z^2 + h_1 z + h_2}{z^2 + (f_1 - 1)z - f_1}. \quad (8.88)$$

W równaniu (8.88) dzieli się licznik i mianownik przez z^2 . Po wymnożeniu otrzymano

$$[1 + (f_1 - 1)z^{-1} - f_1 z^{-2}] U(z) = [h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}] E(z).$$

Po transformacji odwrotnej powyższego równania i uporządkowaniu otrzymuje się prawo sterowania regulatora w postaci następującego równania różnicowego

$$u(n) = h_0 e(n) + h_1 e(n-1) + h_2 e(n-2) + (1-f_1) u(n-1) + f_1 u(n-2). \quad (8.89)$$

Przykład 8.17

Znaleźć odpowiedź $u(n)$ na wymuszenie skokowe $e(n)=1(n)$ przy zerowych warunkach początkowych rzeczywistego regulatora PID z przykładu 8.16.

Z danych przykładu 8.15 można wyznaczyć współczynniki a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , które potrzebne są do rozwiązania układu równań (8.86). Po rozwiązaniu otrzymuje się współczynniki transmitancji regulatora (wzór 8.88): $h_0=149$, $h_1=-156$, $h_2=48$, $f_1=0,75$. Odpowiedź $u(n)$ wyznacza się metodą rekurencyjną. Wartości $u(n)$ dla kolejnych chwil podano w tablicy 8.4.

Tablica 8.4

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
e(n)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
u(n)	149	30,2	160,3	103,8	187,2	165,6	222,8	220,9	263,3	272,5

8.13. WIELOWYMIAROWE UKŁADY DYSKRETNE

8.13.1. Różnicowe równania stanu

W nowoczesnej teorii sterowania do opisu liniowych wielowymiarowych układów dynamicznych stosuje się metodę równań stanu i równań wyjść, które zgodnie z oznaczeniami podanymi w rozdziale 5 mają postać

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t), \quad (8.90)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t). \quad (8.91)$$

Jeżeli układ dynamiczny przedstawiony na rys.8.2b jest wielowymiarowy (sygnały wejściowe $\underline{u}(t)$, wyjściowe $\underline{y}(t)$ i nie zaznaczone na rysunku współrzędne stanu $\underline{x}(t)$ są wektorami), to do jego opisu można zastosować różnicowe równania stanu, pod warunkiem że wszystkie wejściowe i wyjściowe impulsatory pracują synchronicznie.

Stosując podane w punkcie 8.3 zasady przekształcania równań różniczkowych na różnicowe otrzymuje się

$$\frac{\Delta^1 \underline{x}(n)}{T} = \underline{A}\underline{x}(n) + \underline{B}\underline{u}(n), \quad (8.92)$$

$$\underline{y}(n) = \underline{C}\underline{x}(n) + \underline{D}\underline{u}(n), \quad (8.93)$$

gdzie T - okres impulsowania.

Podstawiając $\Delta^1 \underline{x} = \underline{x}(n+1) - \underline{x}(n)$ przekształcono (8.92) do postaci

$$\underline{x}(n+1) - \underline{x}(n) = T\underline{A}\underline{x}(n) + T\underline{B}\underline{u}(n). \quad (8.94)$$

Przenosząc w powyższym równaniu $\underline{x}(n)$ na prawą stronę i oznaczając $\Phi = \underline{I} + T\underline{A}$ oraz $T\underline{B} = \underline{A}$ otrzymano wektorowo-macierzowe różnicowe równanie stanu

$$\underline{x}(n+1) = \Phi \underline{x}(n) + \underline{A} \underline{u}(n). \quad (8.95)$$

Para równań stanu (8.95) i wyjść (8.91) jest modelem matematycznym wielowymiarowego układu dyskretnego.

8.13.2. Macierz transmitancji impulsowych

W przypadku gdy wielowymiarowy układ dyskretny jest liniowy i stacjonarny, to jego opis można przekształcić do postaci macierzy transmitancji impulsowych. W tym celu dokonuje się obustronnej transformacji Z, przy zerowych warunkach początkowych, kolejno równań (8.95) i (8.93). Transformaty poszczególnych składników tych równań są następujące:

$$Z[\underline{x}(n+1)] = z\underline{X}(z),$$

$$Z[\Phi \underline{x}(n) + \Delta \underline{u}(n)] = \Phi \underline{X}(z) + \Delta \underline{U}(z),$$

$$Z[\underline{y}(n)] = \underline{Y}(z),$$

$$Z[C \underline{x}(n) + D \underline{u}(n)] = C \underline{X}(z) + D \underline{U}(z).$$

Po uwzględnieniu tych transformat otrzymuje się układ równań algebraicznych

$$z\underline{X}(z) = \Phi \underline{X}(z) + \Delta \underline{U}(z), \quad (8.96)$$

$$\underline{Y}(z) = C \underline{X}(z) + D \underline{U}(z). \quad (8.97)$$

Równanie (8.96) rozwiązuje się względem $\underline{X}(z)$ przekształcając kolejno

$$[zI - \Phi] \underline{X}(z) = \Delta \underline{U}(z),$$

$$\underline{X}(z) = [zI - \Phi]^{-1} \Delta \underline{U}(z). \quad (8.98)$$

W powyższym równaniu $[zI - \Phi]^{-1}$ jest macierzą przejścia układu dyskretnego. Po podstawieniu (8.98) do (8.97) otrzymano

$$\underline{Y}(z) = \left\{ C[zI - \Phi]^{-1} \Delta + D \right\} \underline{U}(z). \quad (8.99)$$

Z równania (8.99) wynika, że

$$\mathbb{G}(z) = C[zI - \Phi]^{-1} \Delta + D. \quad (8.100)$$

Macierz transmitancji impulsowych (8.100) po wymnożeniu i uporządkowaniu można doprowadzić do postaci

$$\mathbb{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z), & G_{12}(z), & \dots & G_{1l}(z) \\ G_{21}(z), & G_{22}(z), & \dots & G_{2l}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(z), & G_{m2}(z), & \dots & G_{ml}(z) \end{bmatrix}. \quad (8.101)$$

W macierzy (8.101) liczba kolumn jest równa liczbie wejść układu, a liczba wierszy - liczbie wyjść. Podobnie jak dla układu ciągłego, opis wielowymiarowego układu dyskretnego za pomocą modelu matematycznego wejściowo-wyjściowego o postaci (8.101) jest niepełny, bo pomija informację o stanie układu. Ponadto, przejście od równań stanu (8.95) i wyjść (8.91) do macierzy transmitancji (8.101) jest jednoznaczne, a przejście odwrotne niejednoznaczne.

Elementami macierzy $G(z)$ są transmitancje impulsowe

$$G_{kl}(z) = \frac{Y_k(z)}{U_l(z)}, \quad (8.102)$$

wiążące sygnały k -tego wyjścia i i -tego wejścia. Ponieważ każde wyjście zależy od każdego wejścia, to

$$Y_k(z) = G_{k1}(z) U_1(z) + G_{k2}(z) U_2(z) + \dots + G_{kl}(z) U_l(z). \quad (8.103)$$

Przykład 8.18

Znaleźć macierz transmitancji impulsowych $G(z)$ układu o jednym wejściu $u(n)$ i dwóch wyjściach $y_1(n)$ i $y_2(n)$ opisanego układem różnicowych równań stanu i wyjść o postaci

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(n).$$

Znaleźć także odpowiedzi układu na wymuszenie $u(n)=1(n)$.

Metoda rozwiązywania tego zadania jest następująca:

Dla powyższego układu znajduje się:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając powyższe do (8.100) i stosując zasady rachunku macierzowego po licznych przekształceniach⁷⁾ otrzymano

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{z+\frac{1}{2}}{z(z+1)} \\ \frac{z+1}{z(z+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) \\ G_{12}(z) \end{bmatrix}.$$

Wiadomo, że $U(z) = Z[1(n)] = \frac{z}{z-1}$. Stąd

$$Y_1(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{(z+1)(z-1)} = \frac{\frac{1}{4}}{z+1} + \frac{\frac{3}{4}}{z-1},$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{z-1}.$$

W celu znalezienia oryginałów powyższych transformat uwzględnia się następujące zależności

$$\frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$$

oraz

$$\frac{1}{z+1} = \frac{\frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-n}.$$

Na tej podstawie otrzymano

$$\begin{aligned} Y_1(n) &= Z^{-1} \left[\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-n} + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \right] = \\ &= 0 \delta(0) + 1 \delta(1) + \frac{1}{2} \delta(2) + 1 \delta(3) + \frac{1}{2} \delta(4) + \dots \\ Y_2(n) &= Z^{-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \right] = 0 \delta(0) + 1 \delta(1) + 1 \delta(2) + 1 \delta(3) + \dots \end{aligned}$$

⁷⁾ Nawet dla macierzy o małych wymiarach - w tym przypadku 2x2 - przekształcenia te są żmudne. Zaleca się stosowanie programów komputerowych do przekształceń symbolicznych.

Bibliografia

1. Amborski K., Marusak A.: Ćwiczenia z automatyki, cz.III - układy impulsowe i optymalne. WPW, Warszawa 1977.
2. Białas S., Olajossy A.: Różnicowe metody rozwiązywania równań różniczkowych. Wydawnictwo AGH Kraków, skrypt uczelniany 1088, Kraków 1987.
3. Bieliczyński B., Koziński W.: Wprowadzenie do regulacji cyfrowej. WPW, Warszawa 1983.
4. Dorf R.C.: Modern control systems. Addison-Wesley Publ. Co., World Student Series, 1980.
5. Фрейдзон И.Р., Филиппов Л.Г., Фрейдзон Р.И.: Микропроцессорные системы управления техническими средствами судов. Судостроение, Ленинград 1985.
6. Hagel R., Zakrzewski J.: Miernictwo dynamiczne. WNT, Warszawa 1984.
7. Kitowski Z.: Automatyka, cz.2, układy nieliniowe, optymalne, adaptacyjne i impulsowe. Skrypt Akademii Marynarki Wojennej, Gdynia 1989.
8. Mazurek J., Vogt H., Żydanowicz W.: Podstawy automatyki. WPW, Warszawa 1979.
9. Owens D.H.: Multivariable and optimal systems. Academic Press, London 1981.
10. Raven F.H.: Automatic control engineering. McGraw-Hill International Book Company, International Student Edition, 1983.
11. Rumak T.: Równania różnicowe. Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Rzeszowie, Rzeszów 1972.
12. Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: Sterowanie i systemy dynamiczne. WNT, Warszawa 1976.
13. Voronov A.A.: Basic principles of automatic control theory - special linear and nonlinear systems. Mir Publishers, Moscow 1985.
14. Wojnar A.: Teoria sygnałów. WNT, Warszawa 1988.
15. Wojtkiewicz A.: Elementy syntezy filtrów cyfrowych. WNT, Warszawa 1984.