

5. OPIS UKŁADÓW DYNAMICZNYCH W PRZESTRZENI STANU

5.1. ZMIENNE STANU. RÓWNANIE STANU

Pojęcia stanu układu oraz zmiennych stanu zostały omówione w rozdz.2. Opis układu przy użyciu tych pojęć można przedstawić w postaci równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t), \quad (5.1)$$

gdzie: f - funkcja wektorowa, \underline{x} - wektor zmiennych stanu (stan),
 \underline{u} - wektor zmiennych sterujących (sterowań), t - czas.

Układy, w których parametry nie zależą od czasu są nazywane stacjonarnymi i w ich opisie czas nie występuje w sposób jawny

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}).$$

Równanie (5.1) wraz z warunkami początkowymi $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ całkowicie wystarcza do określenia przebiegów $\underline{x}(t)$ przy znanym sterowaniu $\underline{u}(t)$, zatem jest wystarczającym opisem własności dynamicznych układu.

Opis danego układu za pomocą równania stanu (5.1) jest niejednoznaczny w tym sensie, że można zamiast wektora \underline{x} przyjąć inny stan \underline{v} , otrzymując inną postać równania stanu, na przykład

$$\dot{\underline{v}} = \varphi(\underline{v}, \underline{u}, t),$$

które w równie pełny sposób opisuje ten sam układ. Mówiąc krótko - ten sam obiekt można opisywać poprawnie w różnych układach współrzędnych. Dla przykładu, jeżeli ruch punktu materialnego po linii prostej jest opisany przez współrzędne stanu: x_1 - prędkość punktu, x_2 - położenie punktu wzdłuż prostej, to $v_1 = ax_1 + x_2$, $v_2 = x_2$ są również współrzędnymi stanu. (Współczynnik a jest potrzebny do sprowadzenia miana ax_1 do miana x_2).

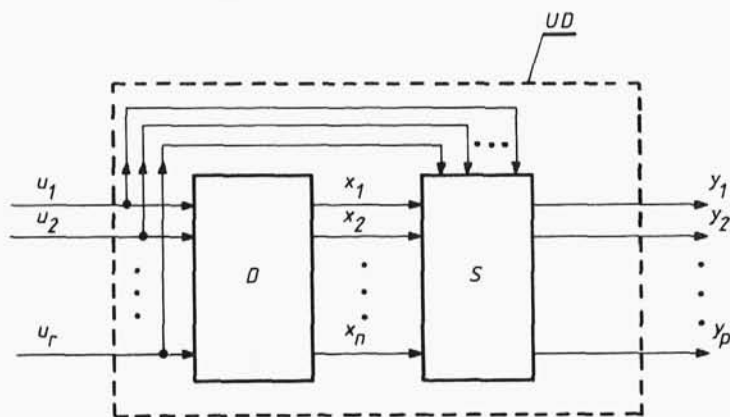
W opisywanym za pomocą (5.1) układzie, sygnały wyjściowe y mogą być różne od zmiennych stanu \underline{x} , dlatego opis układu uzupełnia się równaniem algebraicznym o postaci

$$y = g(\underline{x}, \underline{u}, t). \quad (5.2)$$

Równanie to nie opisuje własności dynamicznych układu, określa jedynie zależność sygnałów przyjętych jako wyjściowe od stanu \underline{x} i wejścia \underline{u} .

Niejednoznaczność opisu układu we współrzędnych stanu jest zaletą tej metody, pozwala bowiem na dobór współrzędnych w modelu matematycznym odpowiadających wybranym sygnałom w układzie rzeczywistym, bądź współrzędnych, które ułatwiają analizę modelu matematycznego.

Układ dynamiczny (UD) opisany za pomocą pary równań (5.1) i (5.2) można przedstawić w postaci schematu blokowego (rys.5.1), na którym UD został podzielony na część dynamiczną (D) i statyczną (S). Dla bloku (D) sygnałami wejściowymi są $[u_1, u_2, \dots, u_m]^T = \underline{u}$, a sygnałami wyjściowymi $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T = \underline{x}$. Sygnałami wejściowymi dla (S) są \underline{x} i \underline{u} , a wyjściowymi $[y_1, y_2, \dots, y_p]^T = \underline{y}$, będące równocześnie sygnałami wyjściowymi całego układu (UD). Zmienne stanu \underline{x} dla układu w postaci takiej jak na rys.5.1 nazywa się zmiennymi wewnętrznymi układu.

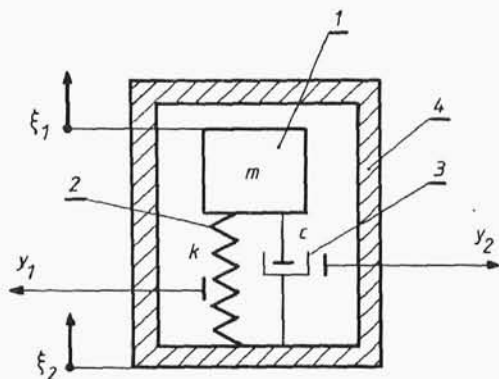


Rys.5.1. Schemat blokowy układu dynamicznego

Przedstawiona wyżej koncepcja opisu zostanie zilustrowana opisem układu mechanicznego.

Przykład 5.1

Na rys.5.2 przedstawiono model przyrządu pomiarowego składającego się z masy (1), liniowej sprężyny (2) o sztywności k i tłumika wiskotycznego (3) o współczynniku tłumienia c . Położenie masy (1) względem nieruchomego układu odniesienia jest



Rys. 5.2. Przyrząd pomiarowy (do przykładu 5.1)

określone współrzędną ξ_1 , a położenie korpusu (4) względem tego układu określa współrzędną ξ_2 . Z układu wyprowadzone są dwa sygnały: y_1 - z czujnika rezystancyjnego umieszczonego na sprężynie i y_2 - z czujnika mierzącego prędkość masy (1) względem podstawy (4). Czujniki są tak skonstruowane, że sygnały wyjściowe są odpowiednio równe

$$\begin{aligned} y_1 &= K_1 (\xi_1 - \xi_2), \\ y_2 &= K_2 (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2), \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdzie K_1 i K_2 są stałymi współczynnikami.

Należy przedstawić opis układu za pomocą współrzędnych stanu, przyjmując kolejno jako sygnał wejściowy przyspieszenie, prędkość i przemieszczenie podstawy (4).

Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\xi}_1 + c(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) + k(\xi_1 - \xi_2) = 0. \quad (5.4)$$

Po odjęciu stronami $m\ddot{\xi}_2$ otrzymuje się

$$m(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) + c(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) + k(\xi_1 - \xi_2) = -m\ddot{\xi}_2. \quad (5.5)$$

Zakładając, że przedstawiony na rysunku obiekt jest przyrządem do pomiaru przyspieszeń, jako sygnał wejściowy u można przyjąć przyspieszenie $-\ddot{\xi}_2$. Otrzymuje się wtedy równanie

$$(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) + \frac{c}{m}(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) + \frac{k}{m}(\xi_1 - \xi_2) = u. \quad (5.6)$$

Po przyjęciu współrzędnych stanu

$$x_1 = \xi_1 - \xi_2; \quad x_2 = \dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2, \quad (5.7)$$

równania stanu układu dają się zapisać w postaci układu równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + u, \end{aligned} \quad (5.8)$$

natomiast równania wyjścia - w postaci

$$\begin{aligned}y_1 &= K_1 x_1, \\ y_2 &= K_2 x_2.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Współrzędne x_1, x_2 (5.7) zostały przyjęte arbitralnie. W niniejszym przykładzie można przyjąć inne współrzędne stanu, bo z formalnego punktu widzenia, każdy układ współrzędnych stanu, który sprowadzi równanie (5.4) do postaci (5.1) jest poprawny, o ile rząd układu w obydwu przypadkach będzie taki sam - w przykładzie tym rząd $n=2$. Modelując układ, należy jednak przyjmować układ współrzędnych sprowadzający równania stanu do postaci wygodnej do dalszego wykorzystania.

Kontynuując przykład z rys.5.2, zakłada się, że tym razem urządzenie ma służyć do pomiaru prędkości $\dot{\xi}_2$, zatem należałoby przyjąć sygnał wejściowy $u=\dot{\xi}_2$. Równanie ruchu masy (1) można więc zapisać

$$m\ddot{\xi}_1 + c\dot{\xi}_1 + k(\xi_1 - \xi_2) = cu.\tag{5.10}$$

Łatwo można sprawdzić, że współrzędne (5.7) nie prowadzą do równań stanu w postaci (5.1), należy więc przyjąć inne, na przykład

$$x_1 = \xi_1 - \xi_2; \quad x_2 = \dot{\xi}_1.\tag{5.11}$$

Otrzymuje się wtedy równania stanu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{c}{m}u.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Pierwsze równanie wyjścia ma postać

$$y_1 = K_1 x_1,\tag{5.13}$$

natomiast równanie $y_2 = K_2(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2)$ we współrzędnych (5.11) można zapisać w postaci

$$y_2 = K_2 x_2 - K_2 u.\tag{5.14}$$

W trzeciej wersji przykładu zakłada się, że omawiany obiekt jest urządzeniem służącym do pomiaru przemieszczeń ξ_2 . Jest to więc przyrząd sejsmiczny. Podstawiając do równania ruchu (5.4) $u=\xi_2$, otrzymuje się

$$m\ddot{\xi}_1 + c\dot{\xi}_1 + k\xi_1 = c\dot{u} + ku \quad (5.15)$$

i po podstawieniach (na przykład)

$$x_1 = m\dot{\xi}_1 - cu; \quad x_2 = m\xi_1, \quad (5.16)$$

otrzymuje się równania stanu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \left(k - \frac{c^2}{m}\right)u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + cu \end{aligned} \quad (5.17)$$

oraz równanie wyjścia

$$y_1 = K_1 \left(\frac{x_2}{m} - u \right). \quad (5.18)$$

Przyjmując współrzędne (5.16), nie można wyrazić wyjścia y_2 jako

$$y_2 = g(x_1, x_2, u). \quad (5.19)$$

Można więc zrezygnować z opisu (5.19) zmiennej wyjściowej y_2 . Opis ten nie jest potrzebny do pomiaru przemieszczeń ξ_2 podstawy przyrządu sejsmicznego. Zarejestrowany przebieg zmiennej y_1 (5.18) wystarcza do określenia przebiegu $u = \xi_2$ po scałkowaniu równań stanu (5.17). Równanie wyjścia zgodne z (5.2) można uzyskać przyjmując inne współrzędne, które można łatwo odgadnąć różniczkując równanie (5.15). Oczywiście wtedy pojawi się problem z wyrażeniem zmiennej y_1 .

Po zrózniczkowaniu (5.15) otrzymuje się

$$m\ddot{\xi}_1^{(3)} + c\ddot{\xi}_1 + k\dot{\xi}_1 = c\ddot{u} + k\dot{u}.$$

Po podstawieniu $\xi_3 = \dot{\xi}_1$, $u_1 = \dot{u}$, równanie przyjmuje postać identyczną z (5.15), a więc pozostając przy współrzędnych (5.16) otrzymuje się

$$x_1 = m\ddot{\xi}_1 - c\ddot{u}; \quad x_2 = m\dot{\xi}_1.$$

Czytelnikowi zaleca się przerobienie tego przykładu przy zastosowaniu innych zmiennych stanu.

Omówiony wyżej przykład był prostą ilustracją pewnych zagadnień, jakie napotyka się przy modelowaniu układów dynamicznych przy użyciu równań stanu. Do ważnych ogólnych wniosków można zaliczyć:

- Opis danego układu dynamicznego za pomocą współrzędnych stanu nie jest jednoznaczny, co oznacza, że ten sam układ można opisać za pomocą różnych równań stanu, w zależności od przyjętych współrzędnych.
- Nie każdy układ współrzędnych, mimo iż pozwala opisać stan układu (równania stanu są postaci $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t)$), jest przydatny do opisu założonych sygnałów wyjściowych. Najczęściej przyjmuje się zmienne, które łatwo można zmierzyć.

Dobór współrzędnych stanu mogą ułatwić trzy metody, które są ogólne dla niektórych typów obiektów dynamicznych.

Pierwsza metoda dotyczy układów, których opis podany jest w postaci liniowego skalarne równania różniczkowego n -tego rzędu, i w którym nie występują pochodne sygnału wejściowego u . Zapisując równanie w postaci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = bu,$$

po wprowadzeniu zmiennych

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)},$$

otrzymuje się

$$y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} \dot{y} + \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \frac{b}{a_n} u$$

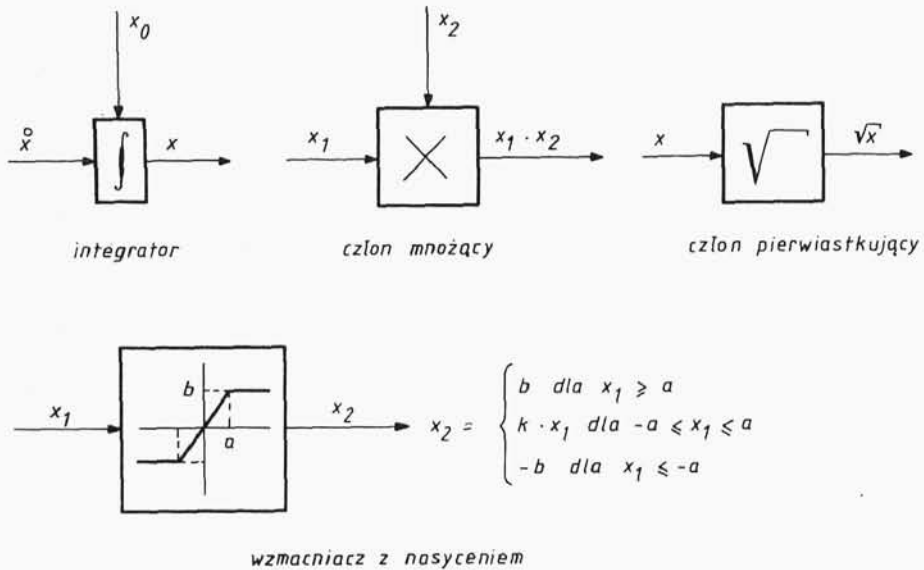
oraz układ równań stanu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 + \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{b}{a_n} u \end{aligned} \tag{5.20}$$

i równanie wyjścia $y = x_1$.

Współrzędne określone w ten sposób, że kolejna współrzędna jest równa pochodnej poprzedniej są nazywane współrzędnymi fazowymi.

W drugiej z metod wykorzystuje się tzw. schematy analogowe, które są szczególnym przypadkiem schematów blokowych omawianych wcześniej. Oprócz sumatorów (węzłów sumujących), węzłów zaczepowych, elementów bezinercyjnych (wzmacniaczy), schematy będą zawierały integratory (idealne człony całkujące) oznaczone jak na rys.5.3 oraz człony nieliniowe. Działanie członu nieliniowe-



Rys.5.3. Symbole elementów schematów analogowych

go opisuje się na bloku przedstawiającym człon przez podanie symbolu operacji wykonywanej przez człon nieliniowy lub rysunku przedstawiającego charakterystykę wejście/wyjście. Na rysunku podano przykłady członu mnożącego, pierwiastkującego oraz wzmacniacza z nasyceniem. Schematy typu analogowego są przydatne nie tylko przy wyprowadzaniu równań stanu, ale i przy modelowaniu komputerowym. Schematy budowane dla elektronicznych maszyn analogowych różnią się oznaczeniami bloków i ich działaniem, z uwagi na własności elektryczne wzmacniaczy stosowanych w tych maszynach.

Schemat analogowy rysuje się z wykorzystaniem równań węzłów sumujących, otrzymywanych z równań różniczkowych przedstawiających opis układu. Sygnały wyjściowe integratorów są przyjmowane jako współrzędne stanu. Sygnały na wejściach tych członów są pochodnymi zmiennych stanu.

Szczegóły metody zostaną przedstawione na przykładach.

Przykład 5.2

Narysować schemat analogowy modelujący równanie różniczkowe i napisać równania stanu i wyjścia. Równanie różniczkowe jest dane w postaci

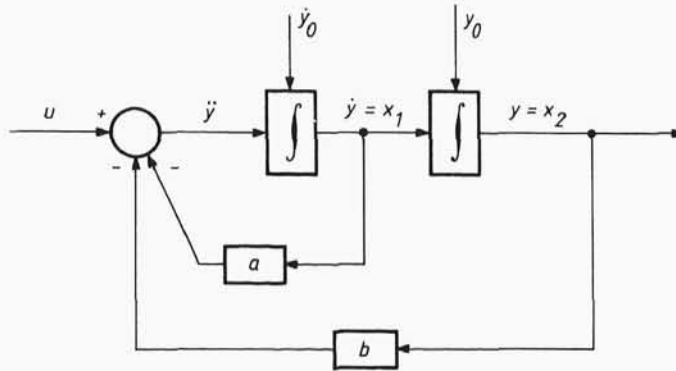
$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = u. \quad (5.21)$$

Zmienną wyjściową jest y .

Równanie węzła sumacyjnego otrzymuje się przegrupowując wyrazy w (5.21) tak, aby najwyższa pochodna sygnału y została po lewej stronie równania. Zasada ta jest ogólna w omawianej metodzie wyprowadzania równań stanu

$$\ddot{y} = -a\dot{y} - by + u. \quad (5.22)$$

Lewa strona (5.22) jest wyjściem z węzła, a prawa opisuje wejścia. Całkując kolejno \ddot{y} za pomocą integratorów, można otrzymać sygnały \dot{y} i y . Rysunek schematu analogowego rozpoczyna się od węzła sumującego. Schemat przedstawiono na rys.5.4.



Rys.5.4. Schemat analogowy równania (5.21)

Postępując zgodnie z podaną wcześniej wskazówką, przyjmuje się współrzędne stanu jako wyjścia integratorów $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = y$, otrzymując równania stanu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 - bx_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}$$

oraz równanie wyjścia $y = x_2$.

Liczba integratorów na schemacie odpowiada rzędowi wejściowego równania różniczkowego skalarnego i jest równa liczbie współrzędnych stanu.

Przykład 5.3

Układ o dwóch wejściach i dwóch wyjściach jest opisany układem równań drugiego rzędu

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + 5y_2 &= u_1 + 4u_2, \\ \ddot{y}_2 + 3\dot{y}_2 + 2y_2 &= u_1 + \dot{u}_2 + u_2.\end{aligned}\quad (5.23)$$

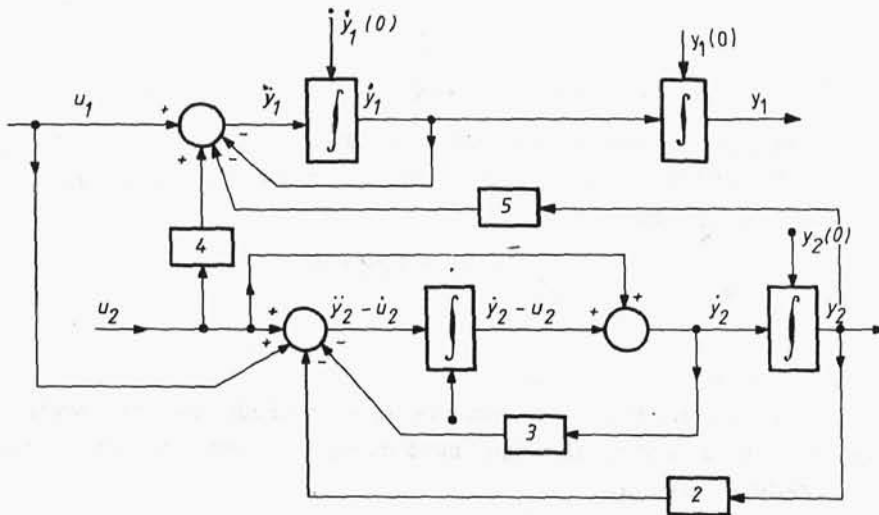
Przyjmując za zmienne wyjściowe y_1 i y_2 należy napisać równania stanu i wyjścia.

Grupując najwyższe pochodne wyjścia i wejścia, otrzymuje się równania dwóch węzłów sumujących

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -\dot{y}_1 - 5y_2 + u_1 + 4u_2, \\ \ddot{y}_2 - \dot{u}_2 &= -3\dot{y}_2 - 2y_2 + u_1 + u_2.\end{aligned}$$

Rozpoczynając od narysowania węzłów sumujących otrzymuje się schemat (rys.5.5) zawierający 4 integratory. Sygnały wyjściowe z integratorów są współzrędnymi stanu

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \dot{y}_2 - u_2, \\ x_3 &= y_2, \\ x_4 &= \dot{y}_1.\end{aligned}\quad (5.24)$$



Rys.5.5. Schemat analogowy układu równań (5.23)

Równaniami stanu w przyjętych współrzędnych są

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 - 2x_3 + u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 + u_2 \\ \dot{x}_4 &= -5x_3 - x_4 + u_1 + 4u_2.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Pierwsze i trzecie równania (5.24) są równaniami wyjść

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_3.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Druga współrzędna stanu jest różnicą pochodnej y_2 i sygnału wejściowego u_2 . W układzie dynamicznym opisanym równaniami (5.23) taki sygnał fizycznie może nie istnieć. Istnieje on w modelu analogowym, który nie jest schematem konstrukcyjnym obiektu lecz modeluje zależności opisane równaniami (5.23).

Układy równań (5.25) i (5.26) są liniowe i łatwo je można zapisać w postaci wektorowo-macierzowej

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u},$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x},$$

gdzie

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

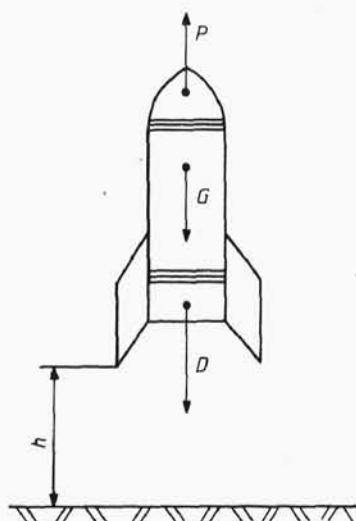
Omawiane dotychczas obiekty były liniowe. Metoda schematu analogowego jest wygodna też do opisu układów nieliniowych.

Przykład 5.4

Napisać równania stanu dla rakiety (rys.5.6) startującej pionowo z Ziemi. Narysować schemat analogowy. Ciąg P silnika jest proporcjonalny do masy gazów wylatujących z dyszy w jednostce czasu, zatem

$$P = k \frac{dm}{dt}.\tag{5.27}$$

Wartość ciągu jest sterowana przez zmianę $\frac{dm}{dt}$, można więc przyjąć, że \dot{m} jest sygnałem wejściowym. Opór powietrza D jest zna-



Rys.5.6. Układ sił działających na rakietę (do przykładu 5.4)

na, nieliniową funkcją prędkości v rakiety i wysokości h

$$D = f(v, h). \quad (5.28)$$

Siła ciężkości G zmienia się z wysokością według prawa przyciągania

$$G = \frac{m(t)\alpha^2 g_0}{(\alpha+h)^2}, \quad (5.29)$$

gdzie: $m(t)$ - masa rakiety (wartość chwilowa), g_0 - przyspieszenie ziemskie na wysokości $h=0$, α - współczynnik o wymiarze h .

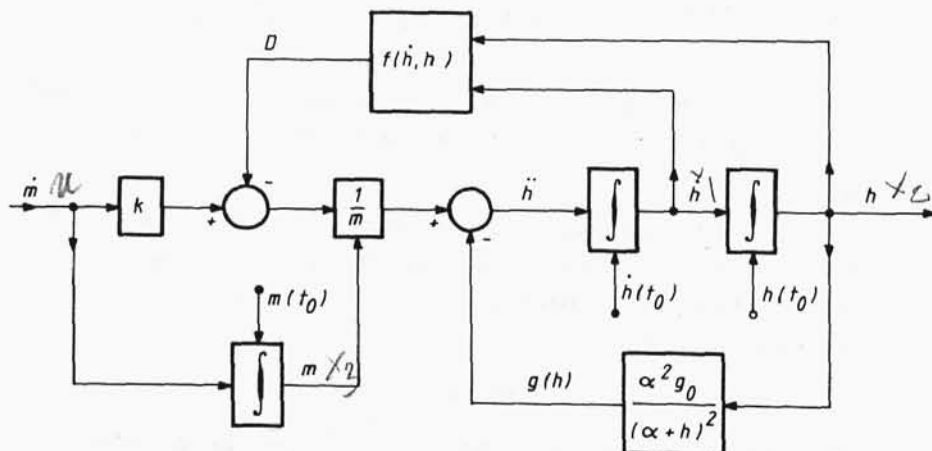
Równanie ruchu można napisać, korzystając z drugiego prawa ruchu Newtona

$$m(t) \frac{d^2 h}{dt^2} = P - G - D.$$

Podstawiając (5.28) i (5.29) do tego równania, otrzymuje się po podzieleniu przez $m(t)$ równanie węzła sumacyjnego

$$\ddot{h} = k \frac{\dot{m}}{m} - \frac{\alpha^2 g_0}{(\alpha+h)^2} - \frac{f(\dot{h}, h)}{m}. \quad (5.30)$$

Wykorzystując to równanie, narysowano schemat analogowy (rys. 5.7).



Rys.5.7. Schemat analogowy do przykładu 5.4

Oznaczając: $\dot{m}=u$, $\dot{h}=x_1$, $h=x_2$, $m=x_3$, otrzymuje się nieliniowe równania stanu

$$\dot{x}_1 = \frac{ku - f(x_1, x_2)}{x_3} - g(x_2),$$

$$\dot{x}_2 = x_1,$$

$$\dot{x}_3 = u$$

i równanie wyjścia

$$y = x_2.$$

Trzecia metoda otrzymywania równań stanu dotyczy układów liniowych, których opis jest dany w postaci transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_r s^r + b_{r-1} s^{(r-1)} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_0}. \quad (5.31)$$

Po podzieleniu licznika i mianownika prawej strony (5.31) przez $s^n a_n$ otrzymuje się

$$Y(s) = \frac{\frac{b_r}{a_n} s^{(r-n)} + \dots + \frac{b_1}{a_n} s^{(1-n)} + \frac{b_0}{a_n} s^{(-n)}}{1 + \dots + \frac{a_1}{a_n} s^{(1-n)} + \frac{a_0}{a_n} s^{(-n)}} U(s). \quad (5.32)$$

Dla układów rzeczywistych $r-n < 0$.

Wprowadzając zmienną $E(s)$, spełniającą zależność

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + \dots + \frac{a_1}{a_n} s^{(1-n)} + \frac{a_0}{a_n} s^{(-n)}}, \quad (5.33)$$

można zapisać równanie (5.32) jako

$$Y(s) = \left(\frac{b_r}{a_n} s^{(r-n)} + \frac{b_{r-1}}{a_n} s^{(r-n-1)} + \dots + \frac{b_0}{a_n} s^{(-n)} \right) E(s). \quad (5.34)$$

Pamiętając o tym, że przemnożenie sygnału przez s^{-k} ($k > 0$) w zapisie operatorowym oznacza w dziedzinie czasu k -krotne całkowanie tego sygnału, można postać (5.34) wykorzystać jako wskazówkę do budowy schematu analogowego:

"Sygnał wyjściowy $y(t)$ jest ważoną sumą sygnałów otrzymanych przez $[(n-r) \dots n]$ -krotne całkowanie sygnału $e(t)$ na integratorach".

Podobną interpretację zapisu operatorowego można uzyskać, traktując (5.33) jako równanie operatorowe węzła sumacyjnego

$$E(s) = U(s) + \dots - \frac{a_1}{a_n} s^{(1-n)} E(s) - \frac{a_0}{a_n} s^{-n} E(s). \quad (5.35)$$

W równaniu (5.35) na przykład składnik $\frac{a_0}{a_n} s^{-n} E(s)$ należy rozumieć, w konwencji schematu analogowego, jako sygnał $e(t)$, scałkowany n -krotnie i następnie wzmocniony a_0/a_n razy. Po narysowaniu schematu analogowego według (5.34) i (5.35) za współrzędne stanu przyjmowane są wyjścia integratorów.

Wygodną do analizy postać równań stanu otrzymuje się dla układów, których mianownik transmitancji (5.31) ma pojedyncze miejsca zerowe.

Oznaczając pierwiastki równania

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_0 = 0, \quad (5.36)$$

przez $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, można transmitancję $G(s)$ (5.31) rozłożyć na ułamki proste, otrzymując

$$G(s) = d_0 + \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s-\lambda_n},$$

gdzie:

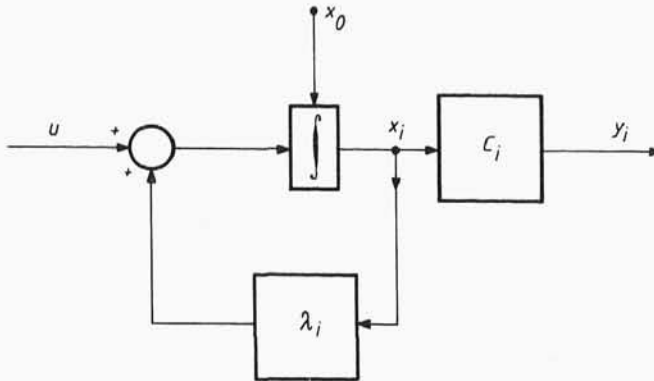
$$d_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s); \quad c_i = (s-\lambda_i) G(s) \Big|_{s=\lambda_i}.$$

Sygnał wyjściowy $Y(s)$ jest więc sumą

$$Y(s) = d_0 U(s) + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-\lambda_i} U(s). \quad (5.37)$$

Analogiem równania $Y(s)_i = \frac{c_i}{s-\lambda_i} U(s)$ jest układ pokazany na rys.

5.8. Korzystając zatem z równania (5.37), łatwo można zbudować schemat analogowy całego układu. Proponuje się Czytelnikowi samodzielne zbudowanie schematu przez rozłożenie (5.31) na ułamki proste w przypadku gdy równanie (5.36) ma wielokrotne pierwiastki.



Rys.5.8. Schemat analogowy składnika sumy ze wzoru (5.37)

Przykład 5.5

Układ jest opisany równaniem różniczkowym

$$y^{(3)} - 2\ddot{y} - 5\dot{y} + 6 = 3\ddot{u} + \dot{u} + 2u.$$

Narysować schemat blokowy i napisać równania stanu.

Transmitancja układu jest równa

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s^2 + s + 2}{s^3 - 2s^2 - 5s + 6} = \frac{3s^{-1} + s^{-2} + 2s^{-3}}{1 - 2s^{-1} - 5s^{-2} + 6s^{-3}},$$

$$Y(s) = (3s^{-1} + s^{-2} + 2s^{-3})E(s),$$

gdzie:

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 - 2s^{-1} - 5s^{-2} + 6s^{-3}}.$$

Operatorowe równanie węzła sumującego na schemacie analogowym można napisać w postaci

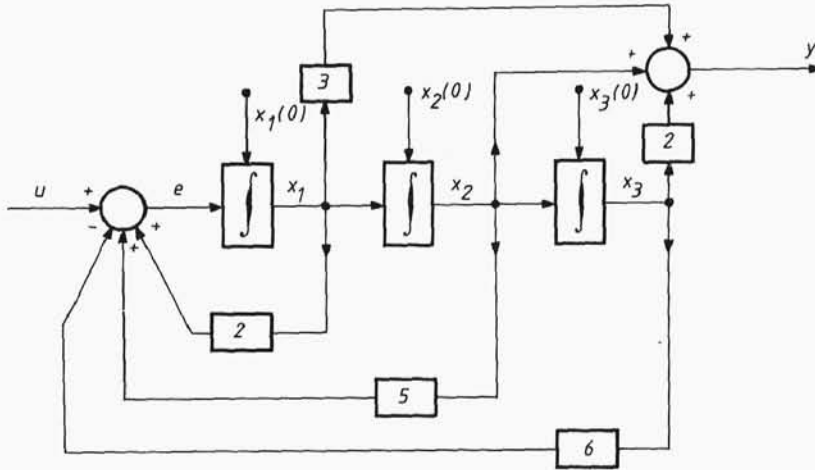
$$E(s) = U(s) + 2s^{-1}E(s) + 5s^{-2}E(s) - 6s^{-3}E(s).$$

Schemat analogowy przedstawiono na rys.5.9. Równania stanu napisane z wykorzystaniem tego schematu mają postać

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + u,$$

$$\dot{x}_2 = x_1,$$

$$\dot{x}_3 = x_2,$$



Rys.5.9. Schemat analogowy do przykładu 5.5
a równanie wyjścia

$$y = 3x_1 + x_2 + 2x_3.$$

Inne współrzędne stanu można otrzymać, rozkładając transmitancję układu na ułamki proste. Pierwiastki równania charakterystycznego są równe: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=1$. Korzystając ze wzoru (5.37), otrzymuje się: $d_0=0$, $c_1=3,2$, $c_2=-0,8$, $c_3=-1$.

$$Y(s) = \frac{3,2}{s-3} U(s) - \frac{0,8}{s+2} U(s) - \frac{1}{s-1} U(s).$$

Schemat analogowy pokazano na rys.5.10.

Równania są tu rozprężone względem zmiennych stanu:

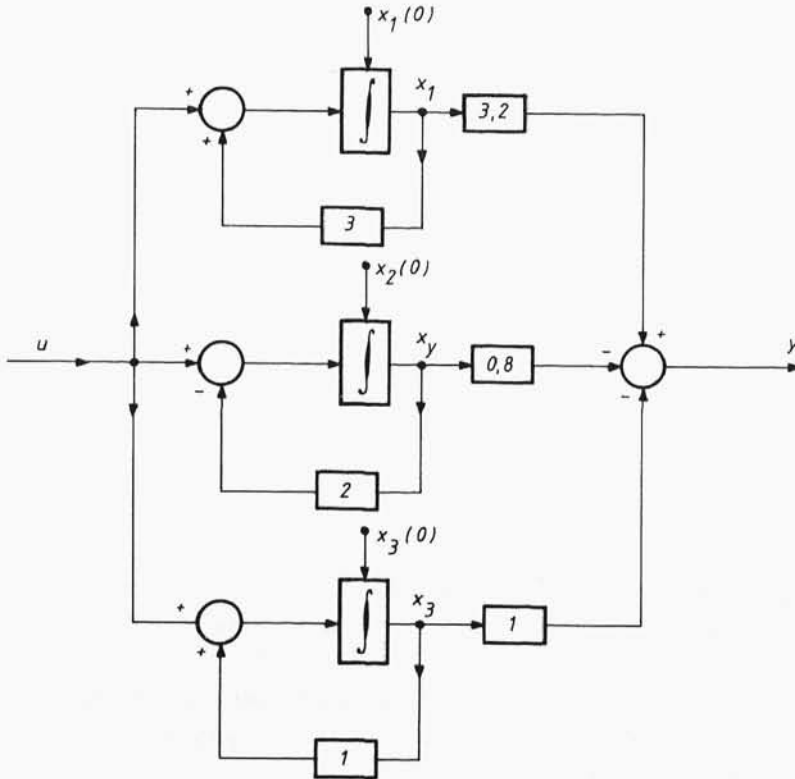
$$\dot{x}_1 = 3x_1 + u,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u,$$

$$\dot{x}_3 = x_3 + u.$$

Sygnał wyjściowy można obliczyć z równania $y = 3,2x_1 - 0,8x_2 - x_3$.

Na rysunkach 5.9 i 5.10 łatwo zauważyć, że badany układ przy zerowym wymuszeniu będzie się wzbudzał wskutek istnienia dodatnich sprzężeń zwrotnych. Wynika to z dodatnich pierwiastków równania charakterystycznego.



Rys.5.10. Drugi wariant schematu analogowego do przykładu 5.5

Liniowy układ równań stanu i wyjść można zapisać w postaci wektorowo-macierzowej

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{B}(t)\underline{u}, \\ \underline{y} &= \underline{C}(t)\underline{x} + \underline{D}(t)\underline{u}.\end{aligned}\tag{5.38}$$

Dla układów niestacjonarnych elementy macierzy \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} i \underline{D} mogą być funkcjami czasu, co symbolicznie zaznaczono w zapisie (5.38). Dla układów stacjonarnych, elementy tych macierzy są liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli \underline{P} oznacza macierz nieosobliwą, której rząd jest równy rzędowi macierzy \underline{A} , to można dobrać taki wektor \underline{v} , że

$$\underline{x} = \underline{P}\underline{v}.\tag{5.39}$$

Przyjmując, że pierwotnie układ stacjonarny był opisany równaniami

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}, \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u},\end{aligned}\tag{5.40}$$

po podstawieniu (5.39) do (5.40), otrzymuje się opis w nowych współrzędnych stanu \underline{v}

$$\begin{aligned}\dot{\underline{Pv}} &= \underline{APv} + \underline{Bu}, \\ \underline{y} &= \underline{CPv} + \underline{Du}.\end{aligned}\tag{5.41}$$

Mnożąc lewostronnie pierwsze równanie (5.41) przez macierz odwróconą \underline{P}^{-1} , można otrzymać równanie stanu

$$\dot{\underline{v}} = \underline{P}^{-1}\underline{APv} + \underline{P}^{-1}\underline{Bu},\tag{5.42}$$

a po oznaczeniu $\underline{A} = \underline{P}^{-1}\underline{AP}$, ostatecznie

$$\dot{\underline{v}} = \underline{Av} + \underline{P}^{-1}\underline{Bu}.\tag{5.43}$$

Jeżeli macierz \underline{A} jest diagonalna, to równanie (5.43) można przedstawić w postaci układu równań rozprzężonych względem zmiennych stanu $[v_1, v_2, \dots, v_n]^T = \underline{v}$. Każde z tych równań można dalej analizować niezależnie od pozostałych. Zapis w postaci rozprzężonej ułatwia sterowanie układem dynamicznym, w którym \underline{u} jest wektorem sterowań.

W przypadku, gdy macierz \underline{A} ma pojedyncze wartości własne, można zawsze dobrać macierz \underline{P} w ten sposób, żeby \underline{A} była macierzą diagonalną. Dla wielokrotnych wartości własnych \underline{A} można \underline{A} sprowadzić do postaci kanonicznej Jordana. Analiza układów opisanych we współrzędnych, dla których \underline{A} jest macierzą Jordana¹⁾ jest łatwiejsza, podobnie jak dla macierzy diagonalnej, od analizy układów opisanych równaniami (5.40).

W dalszym ciągu zostanie opisana metoda diagonalizacji macierzy.

Z równania (5.43) otrzymuje się

$$\underline{AP} = \underline{PA}.\tag{5.44}$$

Zakładając, że macierz \underline{A} jest diagonalna

¹⁾ Macierz diagonalna jest szczególnym przypadkiem macierzy Jordana

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

można (5.44) przekształcić do postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

z której, po oznaczeniu i -tej kolumny macierzy P

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$$

dla różnych λ_i wynika układ równań

$$Ap_i = \lambda_i p_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.45)$$

lub przedstawiony w postaci jednorodnej

$$[\lambda_i I - A] p_i = 0. \quad (5.46)$$

Wektory p_i mogą być niezerowe jeśli $\det[\lambda_i I - A] = 0$ czyli, jeżeli λ_i są wartościami własnymi macierzy A .

Wektory p_i , zgodnie z teorią równań liniowych, można wyznaczyć, przyjmując je jako niezerowe kolumny macierzy dołączonej

$$\text{Adj}[\lambda I - A] \Big|_{\lambda=\lambda_i} = [C_{k,i}]^T,$$

gdzie: $C_{k,i}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu macierzy $[\lambda I - A]_{\lambda=\lambda_i}$ w k -tym wierszu i i -tej kolumnie.

Wektory p_i są wektorami własnymi macierzy A . Również \underline{m}_i taki, że $\underline{m}_i = \alpha p_i$ jest wektorem własnym A dla dowolnych liczb rzeczywistych α . Macierze M , których kolumny są wektorami własnymi macierzy A : $M = [\underline{m}_1 | \underline{m}_2 | \dots | \underline{m}_n]$ nazywa się macierzami modalnymi. Oczywiście macierz P diagonalizująca A jest też modalna.

Przykład 5.6

Układ jest opisany równaniami stanu

$$\dot{x}_1 = x_2 + 2u,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 3u,$$

$$\dot{x}_3 = 5x_1 - x_3$$

oraz równaniami wyjścia

$$y_1 = 2x_2 + u,$$

$$y_2 = x_1 + x_2 + x_3.$$

Sprawdzić, czy można przyjąć współrzędne, w których równania stanu będą rozprzężone. Wyznaczyć te współrzędne i przedstawić w nich opis układu.

Przedstawiając opis w postaci (5.40), otrzymuje się macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne otrzymuje się z równości $\det[\lambda I - A] = 0$ skąd

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 \\ -5 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+1) - 2(\lambda+1) = 0.$$

Pierwiastkami równania są wartości własne macierzy A : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, z czego wynika, że można wyznaczyć macierz diagonalizującą P .

Macierz transponowana dopełnień algebraicznych

$$c_{11} = (\lambda+1)^2, \quad c_{12} = 2(\lambda+1), \quad c_{13} = 5(\lambda+1)$$

$$c_{21} = \lambda+1, \quad c_{22} = \lambda(\lambda+1), \quad c_{23} = 5,$$

$$c_{31} = 0, \quad c_{32} = 0, \quad c_{33} = \lambda(\lambda+1)+2,$$

jest równa

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \text{Adj}[\lambda \mathbb{I} - A].$$

Kolejno dla wartości $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \text{Adj}[\lambda_1 \mathbb{I} - A] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \\ \text{Adj}[\lambda_2 \mathbb{I} - A] &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 10 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \\ \text{Adj}[\lambda_3 \mathbb{I} - A] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Kolumny macierzy diagonalizującej M tworzy się, wybierając je spośród kolumn macierzy (5.47), ewentualnie mnożąc przez współczynniki liczbowe. Może to być na przykład macierz modalna

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwróconą M^{-1} oblicza się ze wzoru

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj } M}{\det M},$$

otrzymując

$$M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & -15 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

a następnie z (5.42) oblicza się

$$\Lambda = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jak widać na przekątnej Λ są pierwiastki równania charakterystycznego, więc otrzymano równość $P=M$.

Po obliczeniu

$$P^{-1}B = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & -15 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,75 \\ 1,17 \\ -0,33 \end{bmatrix},$$

$$CP = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 2 & 9 & -6 \end{bmatrix},$$

z równań (5.41) otrzymuje się ostatecznie równania stanu i wyjścia w nowych współrzędnych

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -v_1 - 3,75u, \\ \dot{v}_2 &= v_2 + 1,17u, \\ \dot{v}_3 &= -2v_3 - 0,33u, \\ y_1 &= 4v_2 - 4v_3 + u, \\ y_2 &= 2v_1 + 9v_2 - 6v_3. \end{aligned}$$

Przedstawiona w przykładzie metoda macierzowa jest wygodna do obliczeń komputerowych dla dużych układów współrzędnych.

Rozdział poświęcony metodom doboru współrzędnych i układaniu równań stanu zostanie zakończony przykładem technicznym, w którym dobór współrzędnych stanu jest podyktowany względami praktycznymi.

Przykład 5.7

Ruch samolotu w płaszczyźnie pionowej, przy założeniu niewielkich zmian kątów pochylenia θ i wysokości h , dla ustalonej prędkości lotu v , można opisać w przybliżeniu układem równań liniowych

$$\begin{aligned} \frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 2\xi\omega_0 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{d\theta(t)}{dt} &= KT_0\omega_0^2 \frac{d\delta(t)}{dt} + K\omega_0^2\delta(t), \\ T_0 \frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} &= v\theta(t). \end{aligned} \quad (5.48)$$

W równaniach tych oznaczono:

$\delta(t)$ - kąt wychylenia steru wysokości,

ω_0 - częstotliwość nietłumionych zmian prędkości katowej samolotu w płaszczyźnie pionowej,

ξ - bezwymiarowy współczynnik tłumienia,

T_0 - stała czasowa,

K - współczynnik wzmocnienia,

przez zmienne $h(t)$ i $\theta(t)$ oznaczono odchylenie wysokości lotu i kąta pochylenia od wartości ustalonych.

Należy napisać równania stanu i wyjścia oraz narysować schemat analogowy równań (5.48), przyjmując za zmienną sterującą wychylenie steru $\delta(t)$. Zmiennymi wyjściowymi są kąt pochylenia $\theta(t)$ i wysokość $h(t)$.

Z pierwszego równania (5.48), po przekształceniu Laplace'a, otrzymuje się

$$\theta(s) = \frac{K\omega_0^2(T_0s + 1)}{s(s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2)} \delta(s). \quad (5.49)$$

Oznaczając

$$E_1(s) = \frac{\delta(s)}{1 + 2\xi\omega_0s^{-1} + \omega_0^2s^{-2}}, \quad (5.50)$$

można transformatę kąta pochylenia przedstawić w postaci sumy

$$\theta(s) = K\omega_0^2[s^{-2}T_0E_1(s) + s^{-3}E_1(s)], \quad (5.51)$$

która w symbolice schematu analogowego oznacza odpowiednio ważoną sumę dwu- i trzykrotnie scałkowanego sygnału $E_1(t)$. Sygnał $E_1(t)$ jest wyjściem z węzła sumującego, którego równanie w dziedzinie zmiennej s otrzymuje się z (5.50)

$$E_1(s) = \delta(s) - 2\xi\omega_0s^{-1}E_1(s) - \omega_0^2s^{-2}E_1(s). \quad (5.52)$$

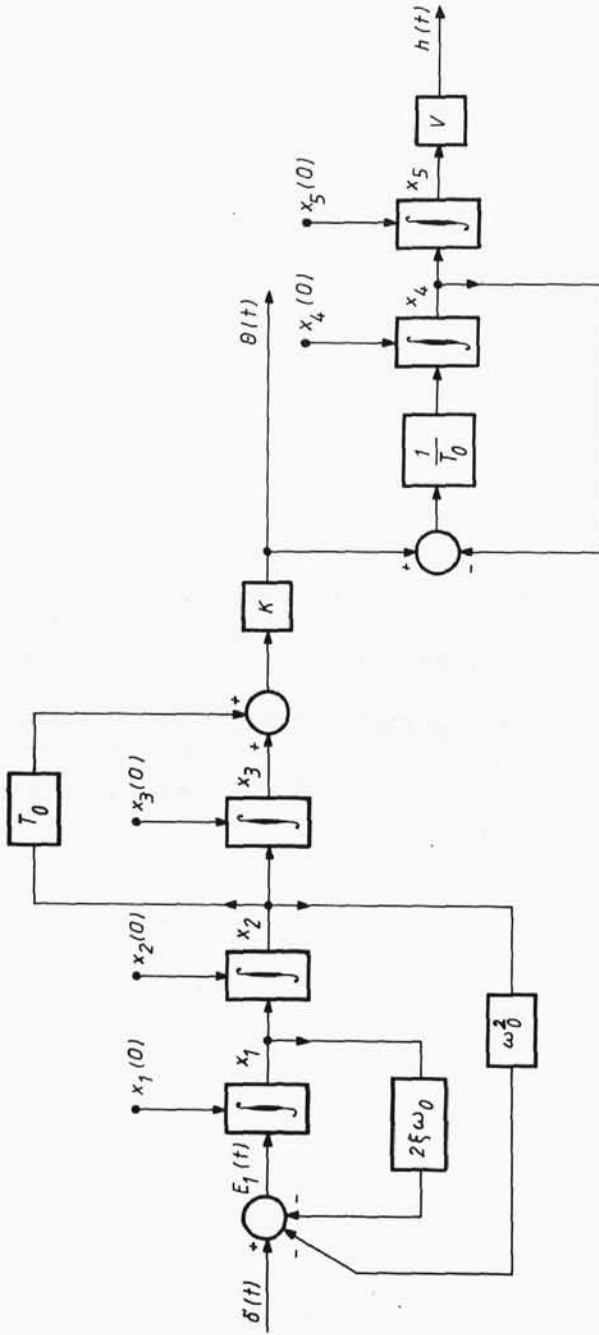
Równania sumatorów (5.51) i (5.52) pozwalają narysować schemat analogowy układu, którego wejściem jest $\delta(t)$ a wyjściem $\theta(t)$ (rys.5.11).

Postępując podobnie względem drugiego równania (5.48) otrzymuje się

$$h(s) = \frac{v}{s(T_0s+1)} \theta(s), \quad (5.53)$$

a następnie wyznacza się równania sumatorów:

$$h(s) = vs^{-2}E_2(s) \quad \text{oraz} \quad E_2(s) = \frac{1}{T_0} [\theta(s) - s^{-1}E_2(s)].$$



Rys.5.11. Pierwszy wariant schematu analogowego (do przykładu 5.7)

Ostatnie dwa równania wystarczają do narysowania drugiej części schematu analogowego, w której sygnałem wejściowym jest $\theta(t)$ a wyjściowym $h(t)$.

Otrzymany schemat jest dość wiernym analogiem samolotu, na którym wyraźnie potwierdza się związek przyczyna-skutek w sterowaniu wysokością samolotu przy ustalonej prędkości. Skutkiem wychylenia steru δ jest pochylenie samolotu θ powodujące zmianę kąta natarcia, a w następstwie - zmianę wysokości lotu. Schemat w istocie przedstawia dwa niezależne układy dynamiczne, połączone ze sobą szeregowo.

Bardziej uważna analiza przykładu wykazuje, że można obniżyć rząd układu, czyli zmniejszyć liczbę integratorów na schemacie analogowym. Zabieg taki byłby korzystny, o ile nie zniekształciłby modelu. W omawianym przykładzie model ma za zadanie przedstawiać zależności między wychyleniem steru δ , kątem pochylenia θ i wysokością h oraz ich pierwszymi pochodnymi (prędkościami). Można wykazać, że opisane dalej zmniejszenie rzędu układu nie ma wpływu na te przebiegi. Proponuje się Czytelnikowi powrót do poruszonych tu kwestii po przeczytaniu rozdziałów 5.2 i 5.3.

Kontynuując omawiany przykład, można kąt pochylenia samolotu (w dziedzinie zmiennej s), wyznaczony z (5.53) zapisać w postaci równości

$$\theta(s) = \frac{1}{v} s(T_0 s + 1) h(s). \quad (5.54)$$

Przyrównując (5.54) do (5.51), otrzymuje się

$$\frac{1}{v} s(T_0 s + 1) h(s) = \frac{K\omega_0^2 (T_0 s + 1)}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \delta(s). \quad (5.55)$$

Równość (5.55) można skrócić, dzieląc przez $\frac{s}{v}(T_0 s + 1)$, skąd

$$h(s) = \frac{vK\omega_0^2}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \delta(s). \quad (5.56)$$

Po dokonaniu transformacji odwrotnej równania (5.56), otrzymuje się równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$\frac{d^4 h(t)}{dt^4} = -2\xi\omega_0 \frac{d^3 h(t)}{dt^3} - \omega_0^2 \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + vK\omega_0^2 \delta(t).$$

Wprowadzając zmienne (inne niż na rys.5.11): $x_1=h(t)$, $x_2=\frac{dh(t)}{dt}$,
 $x_3=\frac{d^2h(t)}{dt^2}$, $x_4=\frac{d^3h(t)}{dt^3}$ otrzymuje się równania stanu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\omega_0^2 x_3 - 2\xi\omega_0 x_4 + vK\omega_0^2 \delta(t)\end{aligned}\quad (5.57)$$

oraz równania wyjścia

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \frac{1}{v} x_2 + \frac{T_0}{v} x_3,\end{aligned}\quad (5.58)$$

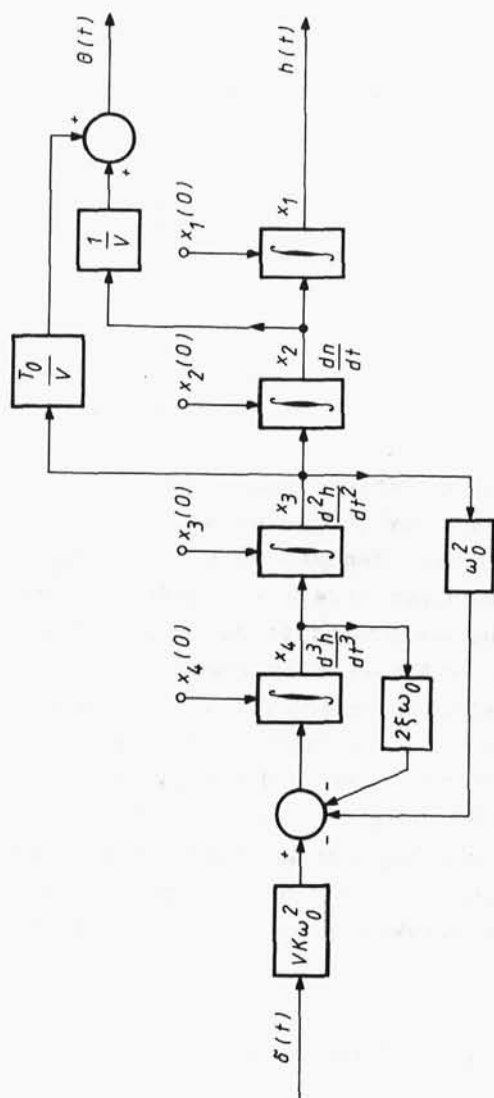
gdzie zmiennymi wyjściowymi są $y_1=h(t)$, $y_2=\theta(t)$. Drugie równanie wyjścia uzyskano z drugiego równania (5.48).

Z równań stanu wynika, że układ jest czwartego rzędu. W schemacie analogowym potrzebne są zatem cztery integratory (rys.5.12).

Model dynamiczny samolotu przedstawiony w postaci równań stanu (5.57) ma praktyczną niedogodność. Współrzednymi stanu są drugie i trzecie pochodne wysokości h . Wielkości tych nie mierzy się podczas lotu, a więc weryfikacja doświadczalna modelu byłaby trudna. Ponadto ze schematu na rys.5.12 nie wynika, który sygnał jest prędkością kątową $\dot{\theta}(t)$ pochylenia. Wielkość ta jest ważna i zwykle mierzona w samolocie przez układ giroskopowy.

Ze względów technicznych należy zatem przyjąć współrzedne stanu: $q_1=h(t)$, $q_2=\frac{dh(t)}{dt}$, $q_3=\theta(t)$, $q_4=\frac{d\theta(t)}{dt}$. Równania stanu w tych współrzednych można napisać korzystając z układu równań

$$\begin{aligned}q_1 &= x_1, \\ q_2 &= x_2, \\ q_3 &= \frac{1}{v} x_2 + \frac{T_0}{v} x_3 \quad (\text{z drugiego równania (5.48)}) \\ q_4 &= \frac{1}{v} x_3 + \frac{T_0}{v} x_4 \quad (\text{ze zrózniczkowanego drugiego równania (5.48)}),\end{aligned}$$



Rys.5.12. Drugi wariant schematu analogowego (do przykładu 5.7)

który po zróżniczkowaniu i podstawieniach z układu (5.57) prowadzi do równań stanu we współrzędnych q

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= a_{22}q_2 + a_{23}q_3, \\ \dot{q}_3 &= q_4, \\ \dot{q}_4 &= a_{42}q_2 + a_{43}q_3 + a_{44}q_4 + K_0\delta(t).\end{aligned}\tag{5.59}$$

W układzie równań (5.59) oznaczono:

$$\begin{aligned}a_{22} &= -\frac{1}{T_0}, & a_{23} &= \frac{v}{T_0}, & a_{42} &= \frac{1}{vT_0^2} + \frac{\omega_0^2}{v}, \\ a_{43} &= \frac{1}{T_0^2} + \frac{2\xi\omega_0}{T_0} - \omega_0^2, & a_{44} &= \frac{1}{T_0} - 2\xi\omega_0, & K_0 &= K\omega_0^2T_0.\end{aligned}$$

Na rys.5.13 pokazano schemat układu odpowiadający równaniom (5.59).

W ostatnim przykładzie zmniejszono rząd układu, stosując formalny zabieg polegający na podzieleniu obu stron równania (5.55) przez wspólny czynnik. Ten sam efekt można uzyskać eliminując zmienną θ w równaniach (5.48) w dziedzinie czasu. Tego rodzaju operacja może jednak prowadzić do modelu matematycznego, nie odpowiadającego modelowi fizycznemu w tym sensie, że przebiegi niektórych wielkości fizycznych w rzeczywistym oryginale nie będą obserwowane na modelu. Konsekwencje opisanego uproszczenia mogą być istotne jeżeli, dla przykładu, nie zostaną na modelu zaobserwowane duże oscylacje wielkości fizycznej, które w urządzeniach technicznych mogą prowadzić do awarii.

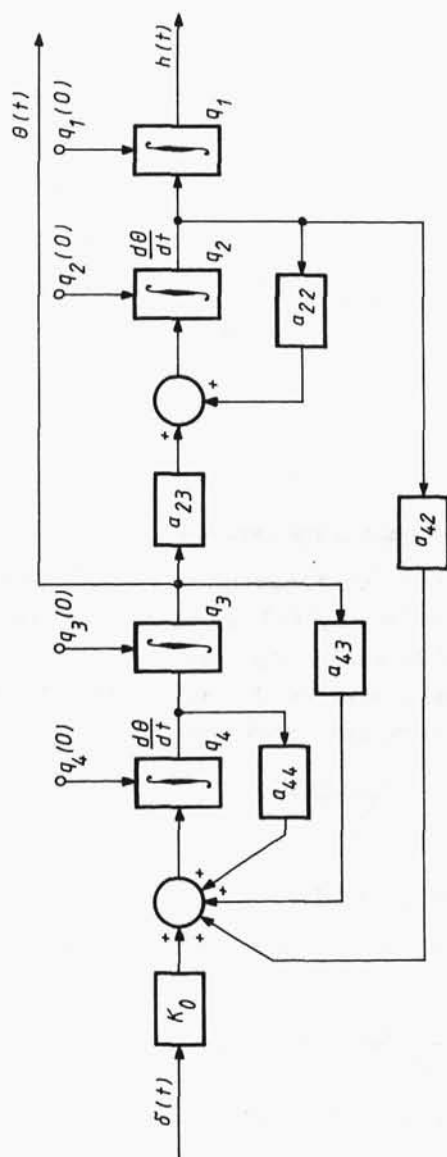
Kolejny prosty przykład ilustruje niedopuszczalne uproszczenie prowadzące do jakościowej różnicy między modelem fizycznym i matematycznym.

Przykład 5.8

Układ fizyczny opisany jest za pomocą układu równań

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + 6\dot{\alpha} + 8\alpha &= \dot{u} - u, \\ \dot{y} - y &= \alpha.\end{aligned}\tag{5.60}$$

Zbudować schemat analogowy i napisać równania stanu.



Rys.5.13. Trzeci wariant schematu analogowego (do przykładu 5.7)

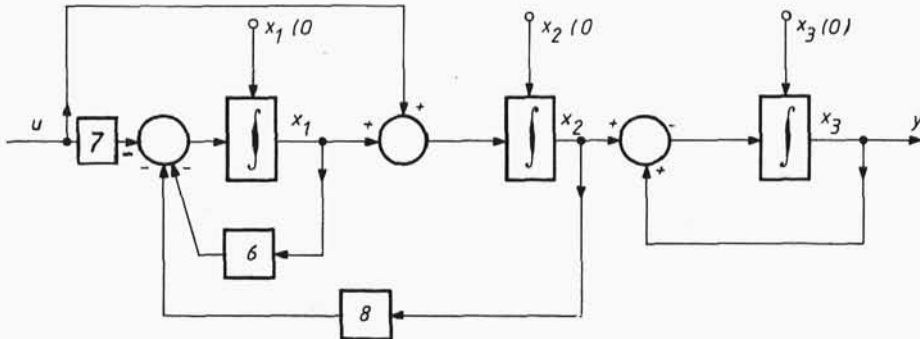
Podstawiając zmienne stanu: $x_1 = \dot{\alpha} - u$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = y$, otrzymuje się równania stanu

$$\dot{x}_1 = -6x_1 - 8x_2 - 7u,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u,$$

$$\dot{x}_3 = x_2 + x_3$$

oraz schemat analogowy pokazany na rys.5.14.



Rys.5.14. Pierwszy wariant schematu analogowego do przykładu 5.8

W końcowym fragmencie układu analogowego występuje dodatnie sprzężenie zwrotne, zatem dowolny sygnał x_2 spowoduje wzbudzenie się układu i nieograniczony wzrost sygnału x_3 .

Inny jakościowo wynik można uzyskać dokonując transformacji Laplace'a równań (5.60). Z pierwszego równania otrzymuje się

$$\alpha(s) = \frac{(s-1)u(s)}{s^2+6s+8}$$

oraz z drugiego

$$\alpha(s) = (s-1)y(s).$$

Po przyrównaniu dwóch wyrażeń na $\alpha(s)$ i podzieleniu równości przez $(s-1)s^2$ otrzymuje się

$$y(s) = \frac{s^{-2}}{1 + 6s^{-1} + 8s^{-2}} u(s).$$

Stąd równanie węzła sumacyjnego jest w postaci

$$E(s) = U(s) - 6s^{-1}E(s) - 8s^{-2}E(s)$$

oraz sygnał wyjściowy:

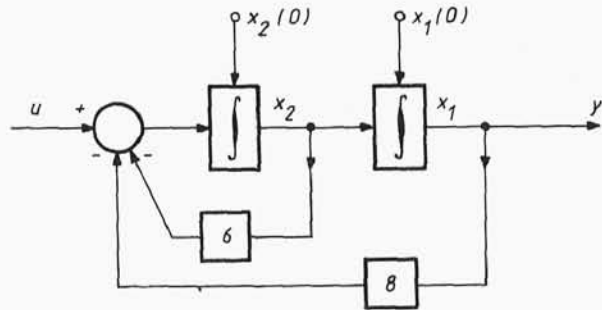
$$Y(s) = s^{-2}E(s).$$

Schemat układu pokazano na rys.5.15. Stan układu jest drugiego rzędu, a równaniami stanu są

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 8x_2 + u.$$

Ze schematu analogowego nie wynika niebezpieczeństwo nieograniczonego wzrostu sygnałów.



Rys.5.15. Drugi wariant schematu analogowego do przykładu 5.8

Po zastosowaniu uproszczenia zgubiono więc ważną informację o układzie fizycznym, a zatem drugie rozwiązanie zadania jest niepoprawne.

5.2. ROZWIĄZYWANIE LINIOWYCH RÓWNAŃ STANU

Czasowe przebiegi zmiennych stanu i wyjścia, przy znanym stanie początkowym $\underline{x}(t_0)$ w chwili t_0 i sterowaniu $u(t)$, można wyznaczyć drogą symulacji komputerowej lub przez rozwiązanie równań stanu. Ten drugi sposób jest zawsze możliwy dla układów liniowych. W związku z tym, że zapis macierzowy jest wygodny w zastosowaniu do układów wysokiego rzędu, rozwiązywanie równań stanu zostanie przedstawione za pomocą tego zapisu. Zapis taki pozwala ponadto na uniknięcie żmudnych obliczeń "ręcznych" po zastosowaniu maszyn cyfrowych i wykorzystaniu bibliotek rachunku macierzowego.

W pierwszej kolejności zostanie przedstawione rozwiązanie równań stanu przy zerowym wymuszeniu, czyli równania jednorodnego o postaci

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0. \quad (5.61)$$

Elementy macierzy \underline{A} są całkowalnymi funkcjami czasu a więc układ jest niestacjonarny. Jeżeli wektory $\underline{x}_1(t)$, $\underline{x}_2(t)$... $\underline{x}_n(t)$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (5.61), to macierz \underline{X} , której kolumny są wektorami \underline{x}_i jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\dot{\underline{X}} = \underline{A}(t)\underline{X}. \quad (5.62)$$