

$$y(t) = \frac{1}{2} A (t_2 - t_1) \delta(t - t_0). \quad (2.13)$$

Dla uzyskania opisu ścisłego wygodnie jest rozłożyć impuls trójkątny na funkcje składowe pokazane na rys.2.6b. Można łatwo zauważyć, że suma funkcji  $y_1(t) + y_2(t)$  daje przebieg pokazany na tym rysunku linią przerywaną, a rozważany impuls wyraża się wzorem

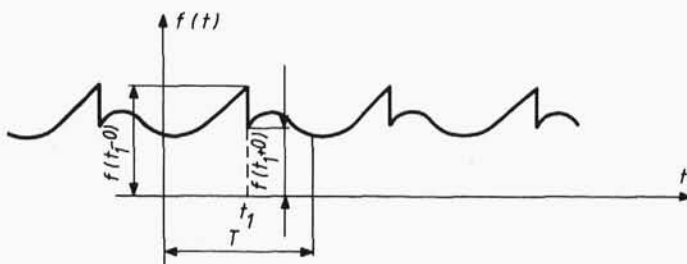
$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \\ &\Rightarrow \frac{A}{t_2 - t_1} [(t - t_1)1(t - t_1) - (t - t_2)1(t - t_2)] - A1(t - t_2) = \\ &= \frac{A}{t_2 - t_1} (t - t_1) [1(t - t_1) - 1(t - t_2)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Końcowa postać (2.14) jest iloczynem funkcji liniowej opisującej narastanie impulsu przez tzw. funkcję bramki (podaną w nawiasie kwadratowym), która jest często stosowana do opisu impulsów prostokątnych.

### 2.2.2. Widmo sygnału

Oprócz opisu w dziedzinie czasu rozpowszechniony jest opis w dziedzinie częstotliwości, przy użyciu tzw. modeli widmowych, które wyznacza się na podstawie analizy częstotliwościowej Fouriera. Modele widmowe ułatwiają klasyfikację i analizę sygnałów a także ocenę dokładności modelowania, ponieważ porównywanie widm jest znacznie prostsze i bardziej miarodajne od porównywania przebiegów czasowych.

Każdą funkcję okresową  $f(t)$ , spełniającą warunki Dirichleta, można przedstawić w postaci szeregu Fouriera składającego się ze składowej stałej i składowych harmonicznych o pulsacjach (częstotliwościach kołowych)  $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1 \dots$ , gdzie  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  - pulsacja podstawowa,  $T$  - okres funkcji. Warunki Dirichleta oznaczają, że przedział o długości  $T$  może być podzielony na określoną liczbę podprzedziałów, w których funkcja  $f(t)$  jest monotoniczna, a w każdym punkcie nieciągłości istnieje granica lewostronna  $f(t_{-0})$  i prawostronna  $f(t_{+0})$  o skończonych wartościach. Przykład funkcji okresowej, spełniającej warunki Dirichleta, przedstawiono na rys.2.7. Suma szeregu Fouriera pokrywa



Rys.2.7. Przykład funkcji okresowej spełniającej warunki Dirichleta

się z wartościami funkcji  $f(t)$  we wszystkich punktach, w których jest ona ciągła, a w punktach nieciągłości daje wartość średnią granicy lewostronnej i prawostronnej

$$\frac{f(t_{-0}) + f(t_{+0})}{2}.$$

Każdy sygnał okresowy, dający się fizycznie zrealizować, spełnia warunki Dirichleta, może więc być przedstawiony w postaci szeregu Fouriera. Stanowi to podstawę analizy częstotliwościowej (widmowej) sygnałów okresowych.

Szereg Fouriera funkcji  $f(t)$  można przedstawić w każdej z trzech następujących, równoważnych sobie postaci:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)], \quad (2.15)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (2.16)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (2.17)$$

Miedzy współczynnikami szeregów wyrażonych wzorami (2.15) + (2.17) występują związki dla  $n \geq 1$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (2.18)$$

$$\varphi_n = -\arctg(b_n/a_n), \quad (2.19)$$

$$C_n = \frac{1}{2} c_n e^{j\varphi_n} = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad (2.20)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2} c_n e^{j\varphi_{-n}} = \frac{a_n + jb_n}{2}, \quad (2.21)$$

dla  $n=0$

$$A_0 = C_0 = \frac{1}{2} a_0. \quad (2.22)$$

Ze związków tych wynika, że każda postać szeregu Fouriera przedstawia nieskończoną sumę wyrazów, które można opisać wzorem

$$f_n(t) = A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad \text{dla } n \geq 1 \quad (2.23)$$

oraz składowej stałej  $a_0/2$ .

Funkcję  $f_n(t)$  nazywa się  $n$ -tą składową harmoniczną funkcji okresowej  $f(t)$ , przy czym  $n$  jest numerem kolejnej harmonicznej. Każdą składową określają trzy parametry:  $A_n$  - amplituda,  $\varphi_n$  - kąt fazowy,  $\omega_n = n\omega_1$  - częstotliwość kołowa czyli pulsacja. Składową stałą można traktować jako harmoniczną o zerowej częstotliwości.

Współczynniki  $C_n$ , występujące w wykładniczej postaci szeregu Fouriera (2.17), nazywają się amplitudami zespolonymi. Ze wzorów (2.18)+(2.22) wynika, że dla  $n \geq 1$

$$|C_n| = \frac{A_n}{2}; \quad \arg(C_n) = \varphi_n = -\arctg(b_n/a_n). \quad (2.24)$$

Składową harmoniczną o numerze  $n$  można więc wyrazić jako sumę wyrazów wykładniczego szeregu Fouriera (2.17) o amplitudach zespolonych  $C_n$  oraz  $C_{-n}$  określonych wzorami (2.20) i (2.21).

Amplitudy zespolone wszystkich składowych harmoniczných tworzą tzw. widmo częstotliwościowe sygnału okresowego opisanego funkcją  $f(t)$ . Najczęściej spotykany sposób graficznego przedstawiania widma polega na sporządzeniu dwóch wykresów: widma amplitudowego i widma fazowego. Na osi odciętych odkłada się dyskretne wartości pulsacji  $\omega_n = n\omega_1$  lub częstotliwości  $f_n = nf_1$ , a na osi rzędnych wartości amplitud  $A_n = 2|C_n|$  (dla  $n \geq 1$ ) dla widma amplitudowego i fazy  $\varphi_n = \arg C_n$  dla widma fazowego. Często zamiast wykresów  $A_n(\omega)$  i  $\varphi_n(\omega)$  podaje się wykresy  $|C_n|$  i  $\arg C_n$  w funkcji częstotliwości w przedziale  $-\infty < \omega < \infty$ .

W przypadku kiedy amplitudy zespolone  $C_n$  są liczbami rzeczywistymi lub urojonymi wystarczy podać jeden wykres  $C_n(\omega)$ .

Widma sygnałów okresowych mają postać prążków przyporządkowanych kolejnym wartościom  $n\omega_1$  i dlatego są nazywane widmami prążkowymi. Wyznacza się je na podstawie wzorów całkowych określających wartości współczynników trygonometrycznego szeregu Fouriera

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \quad (2.25)$$

(dla  $n=0$  otrzymuje się  $a_0$ , którego wartość jest dwa razy większa od składowej stałej),

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (2.26)$$

albo ze wzoru

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (2.27)$$

określającego wartości amplitud zespolonych.

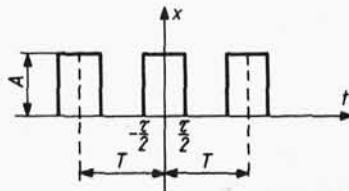
Ze wzorów (2.25) i (2.26) wynika, że szereg Fouriera funkcji parzystej  $f(t)=f(-t)$  zawiera tylko składową stałą  $a_0/2$  i kosinusoidy, a w przypadku funkcji nieparzystej  $f(t)=-f(-t)$  w szeregu Fouriera występują tylko sinusoidy. Przykłady często spotykanych sygnałów okresowych oraz ich rozwinięcia w szereg Fouriera podano w tabelicy 2.1.

#### Przykład 2.2

Należy przeprowadzić analizę harmoniczną sygnału mającego postać impulsów prostokątnych o czasie trwania  $\tau$  i okresie  $T$  (rys.2.8).

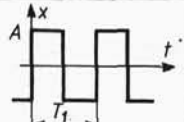
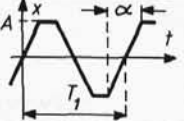
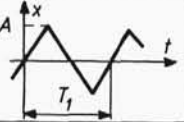
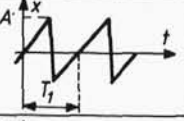
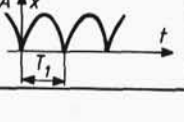
W tym przypadku wygodnie przyjąć granice całkowania równe  $-\tau/2$  i  $T-\tau/2$ . Korzystając ze wzoru (2.27) wyznacza się

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{T-\tau/2} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt =$$



Rys.2.8. Ciąg impulsów prostokątnych

Tablica 2.1

Lp.	Wykres	$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1} \left[ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \right]$
1		<p>Przebieg prostokątny</p> $x(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \sin(\omega_1 t) + \frac{\sin(3\omega_1 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_1 t)}{5} + \dots \right]$
2		<p>Przebieg trapezowy</p> $x(t) = \frac{4A}{\pi^2 \alpha} \left[ \sin(\pi \alpha) \sin(\omega_1 t) + \frac{\sin(3\pi \alpha) \sin(3\omega_1 t)}{9} + \dots \right]$
3		<p>Przebieg trójkątny</p> $x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left[ \sin(\omega_1 t) - \frac{\sin(3\omega_1 t)}{9} + \frac{\sin(5\omega_1 t)}{25} - \dots \right]$
4		<p>Przebieg piłokształtny</p> $x(t) = \frac{2A}{\pi} \left[ \sin(\omega_1 t) - \frac{\sin(2\omega_1 t)}{2} + \frac{\sin(3\omega_1 t)}{3} - \dots \right]$
5		<p>Przebieg sinusoidalny wyprostowany</p> $x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left[ \frac{\cos(2\omega_1 t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4\omega_1 t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega_1 t)}{5 \cdot 7} + \dots \right]$

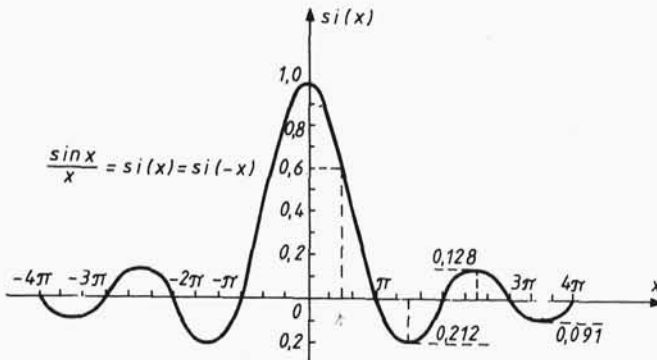
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} A e^{-jn\omega_1 t} dt = -\frac{A}{jn\omega_1 T} \left( e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} \right) = \\
 &= \frac{2A}{n\omega_1 T} \sin\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau A}{T} \frac{\sin\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_1 \frac{\tau}{2}}.
 \end{aligned}$$

W tym wzorze występuje funkcja o postaci  $\frac{\sin(x)}{x}$ . Nosi ona nazwę funkcji próbkowania i będzie oznaczana symbolem  $si(x)$ . Wykres funkcji

$$si(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (2.28)$$

jest przedstawiony na rys.2.9.

Korzystając z oznaczenia (2.28) można w tym przypadku wyrazić amplitudę zespoloną  $C_n$  wzorem



Rys.2.9. Przebieg funkcji  $si(x)$

$$C_n = A \frac{\tau}{T} si\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) = A \frac{\tau}{T} si\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) = C_0 si\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right), \quad (2.29)$$

a szereg wykładniczy - przedstawić w postaci

$$x(t) = A \frac{\tau}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} si\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) e^{jn\omega_1 t}. \quad (2.30)$$

Można tu skorzystać z zależności

$$a_n = C_n + C_{-n}; \quad b_n = j(C_{-n} - C_n),$$

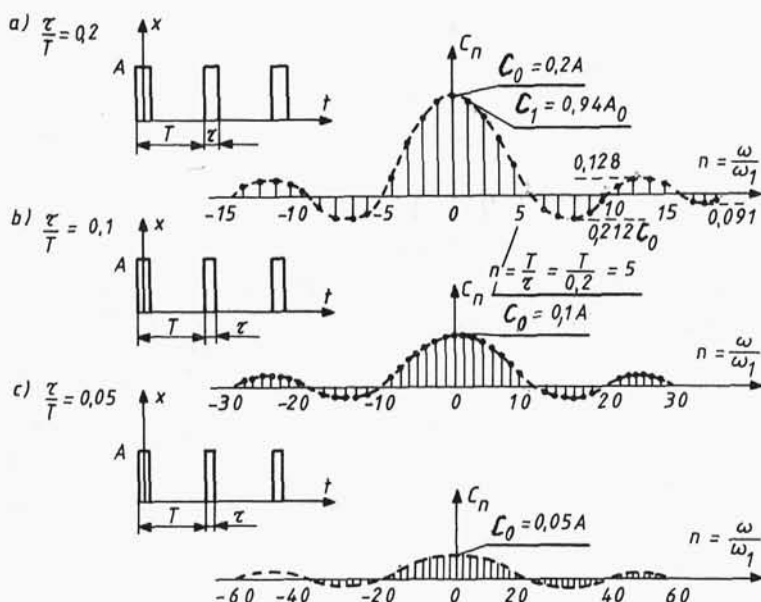
wynikających ze wzorów (2.20) i (2.21) i obliczyć współczynniki szeregu trygonometrycznego

$$a_n = 2C_n = 2A \frac{\tau}{T} si\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right), \quad b_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Przedstawienie ciągu impulsów prostokątnych za pomocą szeregu trygonometrycznego ma postać

$$x(t) = A \frac{\tau}{T} \left[ 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} si\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) \cos(n\omega_1 t) \right]. \quad (2.31)$$

Na rys.2.10 a, b i c przedstawiono wykresy amplitud zespolonych  $C_n$ , które w tym przypadku są liczbami rzeczywistymi, w funkcji  $n=\omega/\omega_1$  dla różnych wartości stosunku  $\tau/T$ . Linie kreskowane na tych rysunkach przedstawiają obwiednie widm prążkowych. Składowe harmoniczne odpowiadające takiej liczbie  $n$ , dla której  $si\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)=0$ , mają amplitudę równą zero. Pierwsza z zanikających harmonicznych ma rząd  $n=T/\tau$ , następna  $2T/\tau$  itd. Po pierwszym



Rys.2.10. Widmo ciągu impulsów prostokątnych dla różnych wartości stosunku  $\tau/T$

przejściu przez zero amplituda odpowiedzi osiąga ujemną wartość równą  $0,212C_0$ . Natomiast aż do  $n=6T/\tau$  maksymalne wartości  $C_n$  nie zmniejszają się poniżej  $0,05C_0$ , a do  $n=3T/\tau$  nie zmniejszają się poniżej  $0,1C_0$ . Porównując widma odpowiadające różnym wartościom  $\tau/T$  można łatwo zauważyć, że zmniejszenie szerokości impulsów  $\tau$  przy stałym okresie  $T$  powoduje zmniejszenie wysokości prążków i rozszerzenie pasma częstotliwości.

### Przykład 2.3

Należy wyznaczyć i naszkicować sumę kilku pierwszych harmonicznych sygnału okresowego mającego postać ciągu impulsów rozważanych w przykładzie 2.2 o wartości stosunku  $\tau/T=0,5$ .

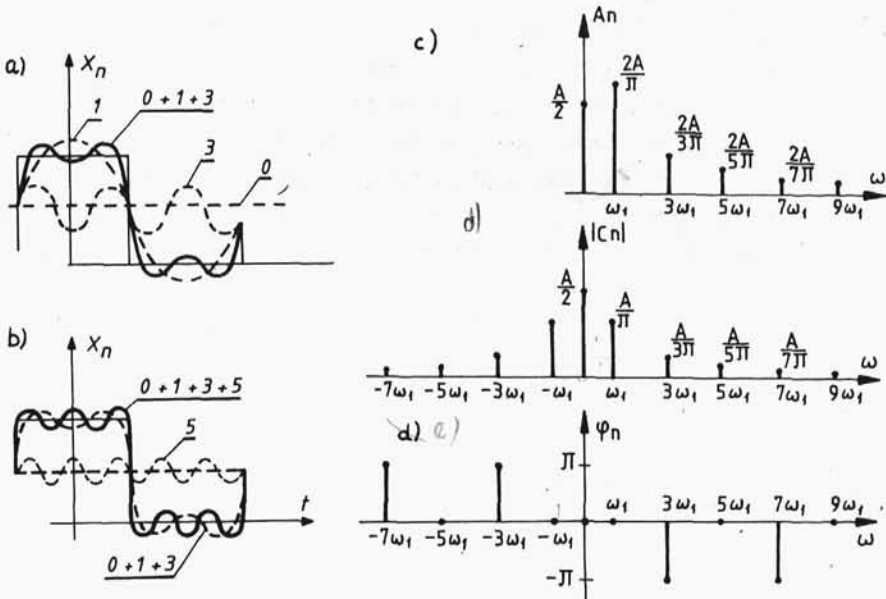
W tym przypadku wygodnie jest przedstawić szereg Fouriera w postaci trygonometrycznej (2.31), z której po przekształceniach otrzymuje się wzór

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 0,5A \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos(n\omega_1 t) \right] = \\
 &= 0,5A \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \left( \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) \dots \right) \right].
 \end{aligned}$$

We wzorze tym występują tylko składowe kosinusoidalne o nieparzystych numerach, a kąty fazowe kolejnych występujących harmonicznych przyjmują na zmianę wartości 0 i  $-\pi$  (wynika to ze zmiany znaku).

Na rys.2.11a pokazano aproksymację rozpatrywanego sygnału za pomocą zerowej, pierwszej i trzeciej harmonicznej, a na rys.2.11b lepsze przybliżenie uwzględniające jeszcze piątą harmoniczną. Na rys.2.11c przedstawiono widmo amplitudowe sygnału, tzn. wykres amplitud  $A_n(\omega)$ . Na rys.2.11d przedstawiono inną postać widma amplitudowego, tzn. wykres  $|C_n|$  w funkcji pulsacji  $\omega$ , a na rys.2.11e widmo fazowe rozpatrywanego sygnału. Wykresy te stanowią ilustrację różnych form graficznego przedstawiania widma sygnału. Ponieważ w rozważanym przypadku amplitudy zespolone  $C_n$  są liczbami rzeczywistymi, najlepszą formą prezentacji widma jest wykres  $C_n(\omega)$ , jak na rys.2.10.

O ile sygnał okresowy można przedstawić w postaci dyskretnego szeregu funkcji sinusoidalnych, o tyle sygnał nieokresowy przedstawia się w postaci tzw. przekształcenia całkowego lub



Rys.2.11. Analiza harmoniczna ciągu impulsów prostokątnych o stosunku  $\tau/T=0,5$ : a) i b) aproksymacja sygnału za pomocą kolejnych składowych harmonicznych, c i d) widmo amplitudowe, e) widmo fazowe



całki Fouriera wyrażającej sumowanie sygnałów harmonicznym nieskończonego ciągłego widma częstotliwości.

Jeżeli funkcja  $f(t)$  określona na całej osi liczb rzeczywistych jest odcinkami gładka<sup>2)</sup> w każdym skończonym przedziale  $(-T/2, T/2)$  i bezwzględnie całkowalna na całej osi, co oznacza, że istnieje i ma wartość skończoną o postaci  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ , to dla wszystkich wartości  $t$  funkcja  $f(t)$  może być przedstawiona za pomocą całki Fouriera

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.32)$$

gdzie

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.33)$$

Symbolicznie wzór (2.33) zapisuje się w postaci

$$F(j\omega) = F[f(t)].$$

Związek (2.33) jest nazywany prostym przekształceniem (transformacją) Fouriera, a związek (2.32) odwrotnym przekształceniem (transformacją) Fouriera.

Funkcja  $F(j\omega)$  nosi nazwę widma częstotliwości funkcji  $f(t)$  lub transformaty Fouriera. Do graficznego przedstawienia funkcji  $F(j\omega)$  potrzebne są w ogólnym przypadku dwa wykresy: widmo amplitudowe  $|F(j\omega)|$  i widmo fazowe  $\varphi(\omega) = \arg F(j\omega)$ . Widmo amplitudowe  $|F(j\omega)|$  jest funkcją parzystą, a widmo fazowe funkcją nieparzystą pulsacji  $\omega$ . Jeżeli  $f(t)$  jest funkcją parzystą, to  $\varphi(\omega) = 0$ .

#### Przykład 2.4

Wyznaczyć widmo częstotliwości impulsu prostokątnego  $x(t)$  przedstawionego na rys.2.12a, przy czym

<sup>2)</sup> Funkcję nazywa się odcinkami gładką w zadanym przedziale, jeżeli przedział ten może być rozbity na skończoną liczbę podprzedziałów, w każdym z których funkcja jest ciągła i ma ciągłą pochodną, a na końcach podprzedziałów zarówno funkcja jak i jej pochodne mają granice lewo- i prawostronne o skończonych wartościach.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{dla } t > \tau. \end{cases}$$

Korzystając z zależności (2.33) otrzymuje się

$$F(j\omega) = \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\tau} - 1) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}.$$

Granice całkowania przyjęto równe 0 i  $\tau$ , ponieważ  $x(t)=0$  dla  $t < 0$  i  $t > \tau$ . Widmo amplitudowe określa wzór

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| = \left| \tau \operatorname{si}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|.$$

Natomiast widmo fazowe jest określone przez związki

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega\tau}{2} \quad \text{dla} \quad 0 < \omega < \frac{2\pi}{\tau},$$

kiedy

$$\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right) = 1$$

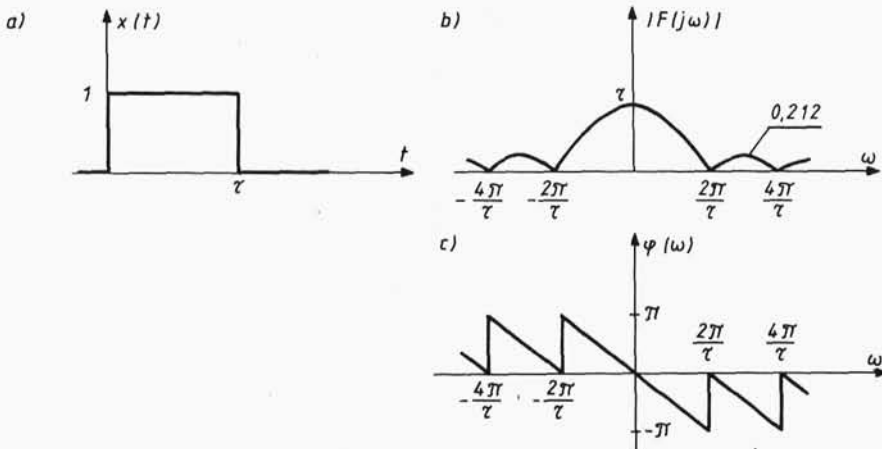
oraz

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega\tau}{2} + \pi \quad \text{dla} \quad \frac{2\pi}{\tau} < \omega < \frac{4\pi}{\tau},$$

kiedy


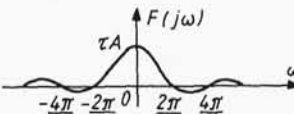
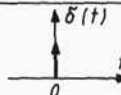
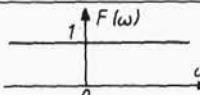
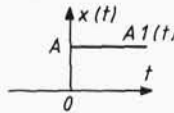
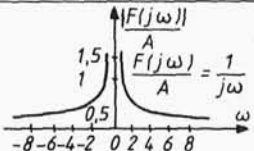
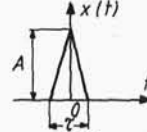
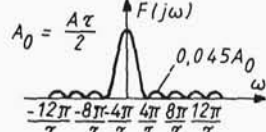
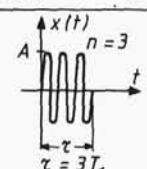
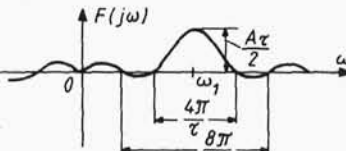
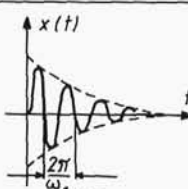
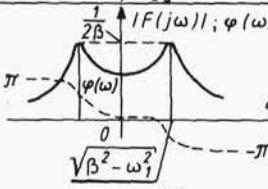
$$\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right) = -1, \quad \text{itd.}$$

Wykresy widma amplitudowego i fazowego przedstawiono na rys. 2.12 b i c.



Rys.2.12. Impuls prostokątny (a) oraz jego widmo amplitudowe (b) i fazowe (c)

Tablica 2.2

Lp.	Signal	Transformata Fouriera
1	 $x(t) = A \text{ dla } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$ $x(t) = 0 \text{ dla }  t  > \frac{\tau}{2}$	 $F(j\omega) = \tau A \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
2	 $x(t) = \delta(t)$	 $F(j\omega) = 1$
3	 $x(t) = A1(t)$	 $ F(j\omega)  = \frac{1}{\omega}$ $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$
4	 $x(t) = A\left[1 - \frac{2 t }{\tau}\right] \text{ dla }  t  < \frac{\tau}{2}$ $x(t) = 0 \text{ dla }  t  > \frac{\tau}{2}$	 $F(j\omega) = \frac{A\tau}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\right]^2$
5	 $x(t) = A \sin \omega_1 t \text{ dla } 0 \leq t \leq \tau$ $\tau = nT_1 = n \frac{2\pi}{\omega_1}$ $n - \text{liczba okresów}$	 $F(j\omega) = \frac{\omega_1 A}{\omega_1^2 - \omega^2} (1 - e^{-j\omega\tau})$ $ F(\omega)  = \frac{2\omega_1 A}{\omega_1^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega\tau}{2} = \frac{A\tau}{2} \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_1}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_1}{2}\right) \right]$
6	 $x(t) = e^{-\beta t} \sin \omega_1 t$	 $F(j\omega) = \frac{\omega_1}{(\beta + j\omega)^2 + \omega_1^2}$

W tablicy 2.2 zestawiono transformaty Fouriera typowych sygnałów nieokresowych. Niektóre z nich, m.in. sygnał skokowy, nie spełniają warunku bezwzględnej całkowalności. Mimo to ich transformaty istnieją w sensie dystrybucji i można je wyznaczyć jako granice transformat funkcji spełniających ten warunek. I tak na przykład sygnał skokowy może być traktowany jako granica impulsu prostokątnego z przykładu 2.4 przy  $\tau \rightarrow \infty$ . W związku z tym dla skoku jednostkowego

$$F[1(t)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = \frac{1}{j\omega}.$$

Natomiast transformatę funkcji Diraca  $F[\delta(t)]$  można wyznaczyć jako granicę, do której dąży transformata impulsu prostokątnego (przedstawionego w pierwszym wierszu tablicy 2.2) o czasie trwania  $\tau$  i wysokości  $A = \frac{1}{\tau}$  przy  $\tau \rightarrow 0$ . Tak więc dla funkcji Diraca

$$F[\delta(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \frac{1}{\tau} \text{si}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 1.$$

### Przykład 2.5

Mając daną transformatę Fouriera pojedynczego impulsu  $x_1 = f(t)$  wyznaczyć transformatę Fouriera sygnału  $x_2 = f(t) + f(t - t_0)$  zawierającego dwa takie impulsy przesunięte o czas  $t_0$ .

Z zależności (2.33) otrzymuje się

$$\begin{aligned} F(x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \\ &= F[f(t)] + e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega(t - t_0)} d(t - t_0) = \\ &= F[f(t)] \left(1 + e^{-j\omega t_0}\right). \end{aligned}$$

W podobny sposób można łatwo wykazać, że przy  $F(j\omega) = F[f(t)]$ ,  $F[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ . Oznacza to, że skrócenie czasu impulsu jest równoważne rozszerzeniu widma częstotliwościowego.

Tablica 2.3

Szereg Fouriera funkcji okresowej	Przekształcenie Fouriera funkcji nieokresowej
$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
$C_n =  C_n  e^{+j\varphi_n}$	$F(j\omega) =  F(j\omega)  e^{+j\varphi(\omega)}$

W tablicy 2.3 zestawiono wzory rozwinięcia w szereg Fouriera ze wzorami określającymi przekształcenie Fouriera. Z porównania wzorów wynika, że jeżeli znana jest transformata Fouriera  $F(j\omega)$  pojedynczego impulsu o przebiegu opisanym funkcją  $f(t)$ , przy czym  $f(t)=0$  dla  $t < T/2$  i  $t > T/2$ , to można wyznaczyć amplitudy zespolone szeregu Fouriera opisującego ciąg impulsów  $f(t)$  o okresie  $T$  korzystając z zależności

$$C_n = \frac{1}{T} [F(j\omega)]_{\omega=n\omega_1} = \frac{\omega_1}{2\pi} F(jn\omega_1) = \frac{1}{T} F\left(j \frac{n2\pi}{T}\right). \quad (2.34)$$

#### Przykład 2.6

Wyznaczyć widmo częstotliwości sygnału okresowego mającego postać ciągu impulsów trójkątnych (równoramiennych) o szerokości  $\tau$ , wysokości  $A$  i okresie  $T$ .

W tablicy 2.2 znajduje się wzór na transformatę Fouriera impulsu trójkątnego w postaci

$$F_1(j\omega) = \frac{A\tau}{2} \left| \text{si}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right|^2. \quad (2.35)$$

Zgodnie ze wzorem (2.34) amplituda zespolona  $n$ -tej harmonicznej takich impulsów o okresie  $T \geq \tau$  wyraża się zależnością

$$|C_n| = \frac{A\tau}{2T} \left[ \text{si}\left(\frac{n\omega_1\tau}{4}\right) \right]^2 = \frac{A\tau}{2T} \left[ \text{si}\left(\frac{n\pi\tau}{2T}\right) \right]^2, \quad (2.36)$$

a obwiednia widma amplitudowego ma kształt funkcji  $\frac{1}{T} F_1(j\omega)$ .





### Przykład 2.7

Dla układu przedstawionego na rys.2.2a należy wyprowadzić równania stanu i równania wyjścia.

Po przyjęciu oznaczeń:  $F_1$  i  $F_2$  - przekroje zbiorników,  $f_2$  - przekrój przewodu łączącego zbiorniki,  $g$  - przyspieszenie ziemskie,  $\xi_2$  i  $\xi_3$  - lokalne współczynniki strat ciśnienia w przewodach, otrzymuje się równania ciągłości dla zbiorników

$$Q_1 - Q_2 = F_1 \dot{h}_1, \quad (2.42)$$

$$Q_2 - Q_3 = F_2 \dot{h}_2 \quad (2.43)$$

oraz wzory opisujące natężenie przepływu w przewodach (przy założeniu tzw. przepływu burzliwego)

$$Q_2 = f_2 \sqrt{\frac{2g|h_1 - h_2|}{\xi_2}} \operatorname{sign}(h_1 - h_2), \quad (2.44)$$

$$Q_3 = f_3 \sqrt{\frac{2gh_2}{\xi_3}}. \quad (2.45)$$

Po wyeliminowaniu zmiennych  $Q_2$  i  $Q_3$  i uporządkowaniu otrzymuje się równania stanu w postaci

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{F_1} \left[ Q_1 - f_2 \sqrt{\frac{2g|h_1 - h_2|}{\xi_2}} \operatorname{sign}(h_1 - h_2) \right], \quad (2.46)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{F_2} \left[ f_2 \sqrt{\frac{2g|h_1 - h_2|}{\xi_2}} \operatorname{sign}(h_1 - h_2) - f_3 \sqrt{\frac{2gh_2}{\xi_3}} \right]. \quad (2.47)$$

Równania te łącznie z równaniem wyjścia wyrażonym przez wzór (2.45) stanowią model matematyczny układu w przestrzeni stanu, który obowiązuje przy następujących ograniczeniach:

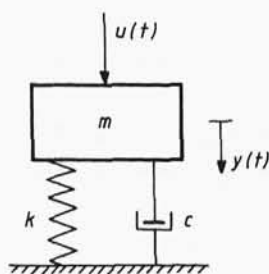
$$Q_1 \geq 0; \quad 0 \leq h_1 \leq h_{1,\max}; \quad 0 \leq h_2 \leq h_{2,\max}; \quad 0 \leq f_3 \leq f_{3,\max},$$

gdzie wartościom  $h_{1,\max}$  i  $h_{2,\max}$  odpowiada przelewanie zbiorników, a  $f_{3,\max}$  - pełne otwarcie zaworu.

### Przykład 2.8

Na rys.2.14 przedstawiono model fizyczny układu drgającego o jednym stopniu swobody. Na ciało o masie  $m$  działa wymuszenie





Rys.2.14. Układ drgający o jednym stopniu swobody

(siła)  $u(t)$ . Ciało osadzone jest na sprężynie liniowej o sztywności  $k$ . Rozpraszanie energii drgań modelowane jest siłą proporcjonalną do prędkości ciała, ze współczynnikiem proporcjonalności  $c$ . Wyjściem układu jest przemieszczenie ciała  $y(t)$ . Należy podać modele matematyczne układu: typu wejście-wyjście oraz w przestrzeni stanu.

Model typu wejście-wyjście stanowi równanie ruchu masy  $m$  mające postać

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = u. \quad (2.48)$$

Po przyjęciu za zmienne stanu położenia masy  $x_1 = y$  oraz jej prędkości  $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$  otrzymuje się dwa równania stanu o postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{aligned} \quad (2.49)$$

oraz jedno równanie wyjścia

$$y = x_1. \quad (2.50)$$

Dla określenia zakresu stosowalności modelu matematycznego potrzebna jest w tym przypadku bliższa znajomość rzeczywistego układu, któremu odpowiada przyjęty model fizyczny.

## 2.4. SYMULACJA KOMPUTEROWA

Jeżeli rozwiązanie analityczne równań stanowiących model matematyczny układu jest niemożliwe lub pracochłonne, to na podstawie modelu matematycznego opracowuje się odpowiedni model symulacyjny, który następnie wykorzystywany jest do studium dynamiki układu na drodze symulacji komputerowej. Symulacja komputerowa jest to rozwiązywanie, metodą całkowania numerycznego, równań stanu opisujących badany układ, dla różnych wymuszeń (sterowań) i różnych warunków początkowych, a także dla różnych wartości parametrów reprezentujących określone własności układu. Podczas tzw. badań symulacyjnych komputer może być również wykorzystywany do takich celów jak: