

## 6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

### 6.1. POJĘCIA I TWIERDZENIA PODSTAWOWE

Stabilność jest właściwością układu, zapewniająca jego powrót do stanu równowagi stałej po ustaniu działania zakłócenia, które wytrąciło układ z tego stanu. Układ liniowy uważa się za *stabilny*, jeżeli przy każdym skończonym zakłóceniu  $\underline{z}(t)$  lub wymuszeniu  $\underline{u}(t)$  i dowolnych warunkach początkowych, wektor stanu  $\underline{x}(t)$  i wektor wyjść  $\underline{y}(t)$  przyjmują skończone wartości dla dowolnej chwili  $t$ . Układy nieliniowe uważa się za stabilne, jeżeli spełniają pewne warunki, które wyjaśnione są w dalszej części tego rozdziału.

Ograniczając się chwilowo do układów autonomicznych (bez wymuszenia), rozpatruje się układ liniowy o równaniu stanu

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} \quad (6.1)$$

lub układ nieliniowy - o równaniu

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}), \quad (6.2)$$

gdzie:  $\underline{x}$  - n-wymiarowy wektor stanu;  $\underline{A}$  - macierz  $n \times n$ , o wyrazach niezależnych od czasu;  $\underline{f}(\underline{x})$  - n-wymiarowa wektorowa funkcja nieliniowa.

*Punkt równowagi* układu otrzymuje się po podstawieniu do (6.1) lub (6.2)  $\dot{\underline{x}}=0$ . Gdy  $\det \underline{A} \neq 0$  to (6.1) ma tylko jedno rozwiązanie:  $\underline{x}=0$ . Tym samym punkt równowagi układu liniowego jest tylko jeden i leży w początku układu współrzędnych. Układ nieliniowy może więc mieć więcej niż jeden punkt równowagi, bo każdy punkt  $\underline{x}=\underline{x}_r$ , który spełnia równanie  $\underline{f}(\underline{x}_r)=0$  jest punktem równowagi. Do dalszych rozważań zakłada się, że punkty równowagi układu nieliniowego sprowadza się do początku układu przez odpowiednią zamianę układu zmiennych stanu.

Przyjmuje się, że:

- rozpatrywany układ (liniowy lub nieliniowy) ma punkt równowagi w początku układu współrzędnych;

- w chwili  $t=0$  układ ten znajduje się w stanie początkowym  $\underline{x}_0 = \underline{x}(0) \neq 0$ .

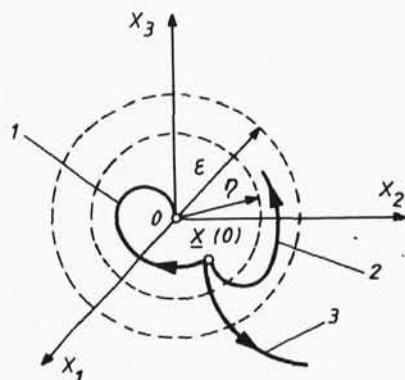
Punkt równowagi układu uznaje się za stabilny w sensie definicji Lapunowa, jeżeli dla każdej dodatniej liczby  $\epsilon$  można dobrać taką liczbę  $\eta$  (zależną na ogół od  $\epsilon$ ), że trajektoria wektora stanu rozpoczynająca się w punkcie  $\underline{x}_0$ , leżącym wewnątrz koła ( $n=2$ ) lub kuli ( $n=3$ ) o promieniu  $\eta$ , pozostanie wewnątrz koła (kuli) o promieniu  $\epsilon$  dla dowolnego  $t > 0$ . Jeżeli trajektoria wektora stanu nie mieści się wewnątrz koła (kuli), to układ jest niestabilny. Podobnie określa się stabilność punktu równowagi dla dowolnego  $n > 3$ . (Stosuje się wtedy tzw. normę euklidesową  $\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , która jest odpowiednikiem promienia kuli dla  $n=3$ ).

Punkt równowagi jest *stabilny asymptotycznie*, jeżeli jest stabilny w sensie Lapunowa oraz gdy  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = 0$ .

Na rys.6.1 przedstawiono obrazowo stabilność (niestabilność) układu w sensie Lapunowa: 1 - trajektoria układu stabilnego asymptotycznie; 2 - trajektoria układu stabilnego, ale nie asymptotycznie; 3 - trajektoria układu niestabilnego.

Układy nieliniowe są często stabilne tylko w pewnym ograniczonym otoczeniu punktu równowagi. Tym samym również  $\epsilon$  i  $\eta$  mają ograniczone wartości. Mówi się wtedy o *stabilności lokalnej* układu nieliniowego. Jeżeli  $\underline{x}(0)$  może być dowolnie duże, to układ jest *stabilny globalnie*.

Układy liniowe jeżeli są stabilne, to są stabilne globalnie, a ponadto (stabilne asymptotycznie). Tym samym łatwiej jest badać ich stabilność niż układów nieliniowych. (Metody badania pewnej klasy układów nieliniowych opisano dodatkowo w rozdziale



0 - punkt równowagi

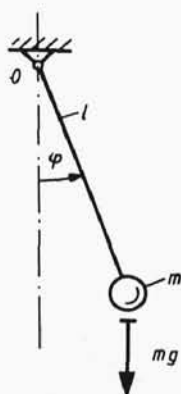
Rys.6.1. Stabilność w sensie Lapunowa

10). W dalszej części tego rozdziału podane są metody badania stabilności układów liniowych i układów zlinearyzowanych. Druga metoda Lapunowa<sup>1)</sup> jest wspólna dla układów nieliniowych i liniowych. Omówiona jest więc w pierwszej kolejności.

## 6.2. DRUGA METODA LAPUNOWA

Przed szczegółowym omówieniem drugiej metody Lapunowa wskazane jest wyjaśnienie niektórych właściwości energetycznych układów fizycznych. Ułatwi to Czytelnikowi zrozumienie sensu fizycznego pewnej funkcji  $V(\underline{x})$  wektora stanu  $\underline{x}$ , stosowanej w tej metodzie.

### Przykład 6.1



Rozpatruje się prosty układ fizyczny (wahadło matematyczne) o masie skupionej  $m$ , osadzonej na nieważkim, sztywnym pręcie o długości  $l$ . Pręt połączony jest obrotowo z podstawą w punkcie  $O$  (rys.6.2). Zakłada się początkowo, że łożyskowanie jest idealne, a wahadło porusza się w próżni. Oznacza to, że układ jest konserwatywny i nie występuje w nim rozpraszanie energii.

Różniczkowe równanie ruchu wahadła jest następujące:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin(\varphi) = 0, \quad (6.3)$$

Rys.6.2      gdzie:  $\varphi$  - kąt wychylenia wahadła;  $g$  - przyspieszenie ziemskie.

Równanie (6.3) jest nieliniowe. Dla małych wychyleń  $\varphi$  można je zlinearyzować, przyjmując  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . Wprowadzając współrzędne stanu:  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\varphi}$ , otrzymuje się z (6.3) równania stanu

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} x_1. \quad (6.4)$$

Po wyeliminowaniu z (6.4) czasu znaleziono

$$x_2 dx_2 = -\frac{g}{l} x_1 dx_1. \quad (6.5)$$

<sup>1)</sup> Pierwsza metoda Lapunowa, której tu nie będzie się omawiało, dotyczy tych układów, które mogą być zlinearyzowane wokół punktu równowagi. Bada się je następnie tak jak układy liniowe.

Rozwiązaniem (6.5) jest

$$x_2^2 + \frac{g}{l} x_1^2 = C. \quad (6.6)$$

Stałą całkowania  $C$  wyznacza się po podstawieniu do (6.6) warunków początkowych  $x_1(0)$  oraz  $x_2(0)$ . Zależność (6.6) opisuje trajektorię wektora stanu  $\underline{x}(t)$ . Jest nią elipsa o osiach, które można określić znając wartości  $g$ ,  $l$  oraz  $\underline{x}(0)$ . Punkt równowagi układu ( $\underline{x}=0$ ) - środek rodziny elips, jest więc stabilny w sensie definicji Lapunowa (ale nie asymptotycznie). Wynik ten pokrywa się z obserwacjami takiego wahadła, które po wytrąceniu z położenia równowagi i przy braku rozpraszania energii wykonuje oscylacje o stałej amplitudzie. Całkowitą energię  $E$  takiego wahadła określa wzór

$$E = \frac{1}{2} mglx_1^2 + \frac{1}{2} ml^2\dot{x}_2^2, \quad (6.7)$$

a pochodną  $E$  względem czasu - wzór

$$\frac{dE}{dt} = mglx_1\dot{x}_1 + ml^2x_2\dot{x}_2. \quad (6.8)$$

Po uwzględnieniu (6.4), otrzymuje się z (6.8)

$$\frac{dE}{dt} = mglx_1x_2 - mglx_1x_2 = 0. \quad (6.9)$$

Wynik (6.9) wskazuje na to, że całkowita energia układu  $E$  jest stała.

W podobny sposób rozpatruje się model fizyczny wahadła, w którym uwzględniono rozpraszanie energii w łożysku, przyjmując liniową zależność momentu tłumiącego oscylacje od prędkości kątowej  $\dot{\varphi}$ . Jego model matematyczny dla małego  $\varphi$  ma więc postać

$$ml^2\ddot{\varphi} + aml\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0, \quad (6.10)$$

gdzie  $a>0$  jest pewnym, stałym współczynnikiem o wymiarze  $m^2/\text{rd}\cdot\text{s}$ .

Równania stanu mają teraz postać

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} x_1 - ax_2/l^2. \quad (6.11)$$

Po podstawieniu (6.11) do (6.8), otrzymano

$$\frac{dE}{dt} = mglx_1x_2 - mglx_1x_2 - aml^2x_2^2 = -amx_2^2. \quad (6.12)$$

Pochodna energii jest teraz ujemna, a układ jest stabilny asymptotycznie, bo trajektoria wektora stanu  $\underline{x}(t)$  rozpoczynająca się w dowolnym punkcie  $\underline{x}(0)$  osiąga punkt równowagi  $\underline{x}=0$ , po pewnym czasie  $t$  zależnym od  $a$  i od  $\underline{x}(0)$ . Odpowiada to krzywej 1 na rys.6.1.

Wyniki (6.9) i (6.12) wskazują na możliwość wykorzystania energii całkowitej układu -  $E(\underline{x})$  w badaniu jego stabilności. W wielu układach nieliniowych wyznaczenie  $E(\underline{x})$  jest utrudnione i do badania ich stabilności stosuje się zamiast  $E(\underline{x})$  pewną, arbitralnie dobraną funkcję  $V(\underline{x})$ . W rozpatrywanym tu przypadku może to być np.

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2. \quad (6.13)$$

Uważny Czytelnik stwierdzi po prawej stronie (6.13) niespełnienie podstawowego wymogu poprawności wszelkich związków fizycznych, czyli zgodności wymiarów. Praktyka badań stabilności wykazuje, że nie prowadzi to do błędnych wyników.

Funkcja (6.13) jest dodatnia dla dowolnych  $x_1$  i  $x_2$  i równa zero dla  $\underline{x}=0$ . Jej pochodna względem czasu ma postać

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2. \quad (6.14)$$

Gdy w układzie nie ma tłumienia, to po uwzględnieniu (6.4) znajduje się

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1x_2 - 2x_2 \frac{g}{l} x_1 = 2x_1x_2 \left(1 - \frac{g}{l}\right). \quad (6.15)$$

Jeżeli  $1 - \frac{g}{l} = b = 0$ , to  $\frac{dV}{dt} = 0$ , dla  $b > 0$   $\frac{dV}{dt} > 0$ , a dla  $b < 0$   $\frac{dV}{dt} < 0$ . (Wynik (6.9) uzyskano dla dowolnego  $b$ ).

Po uwzględnieniu tłumienia, podstawia się (6.11) do (6.13) i otrzymuje

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1x_2 \left(1 - \frac{g}{l}\right) - 2ax_2^2/l^2. \quad (6.16)$$

Wynik (6.12) był jednoznaczny. Postać (6.16) wskazuje natomiast na to, że przy definicji funkcji  $V(x_1, x_2)$  wg (6.13),  $\frac{dV}{dt} < 0$  uzyskuje się dla pewnego zestawu parametrów  $g$ ,  $l$  i  $a$ . Wynika stąd wniosek, że dobór funkcji  $V(x_1, x_2)$  nie może być przypadkowy. Badanie tej funkcji powinno dać jednoznaczne wyniki, np. takie jak (6.9) i (6.12), bez względu na wartości  $g$ ,  $l$  i  $a$ .

Po wyjaśnieniach przykładu 6.1 można przystąpić do przedstawienia drugiej metody Lapunowa. Metoda ta, zwana obecnie *metodą bezpośrednią*<sup>2)</sup>, powstała w ubiegłym stuleciu (rok 1892). Do dnia dzisiejszego nie opracowano metody bardziej ogólnej i od niej skuteczniejszej. Jako rezultat prac kontynuatorów wyniku Lapunowa powstały jedynie wskazówki dotyczące poprawnego doboru funkcji  $V(\underline{x})$  i to tylko dla pewnych, typowych układów dynamicznych. Funkcja  $V(\underline{x})$  gra podstawową rolę w badaniu głównie układów nieliniowych, których model matematyczny nie pozwala na wyznaczenie całkowitej energii  $E$  układu.

Formułowanie twierdzeń Lapunowa wymaga wprowadzenia pojęć: funkcja dodatnio, ujemnie, niedodatnio i nieujemnie określona.

Funkcję rzeczywistą  $V(\underline{x})$  wektora stanu  $\underline{x}$  nazywa się *dodatnio (ujemnie) określoną* w obszarze  $D$  zawierającym początek układu współrzędnych stanu, jeżeli funkcja ta dla każdego punktu tego obszaru poza początkiem układu współrzędnych ( $\underline{x}=0$ ) przyjmuje wartość dodatnią (ujemną), a wartość zerową tylko dla  $\underline{x}=0$ .

Taką samą funkcję nazywa się *niedodatnio (nieujemnie) określoną* lub *półokreśloną* w tym samym obszarze  $D$ , jeżeli funkcja ta w dowolnym punkcie obszaru  $D$  przyjmuje wartość niedodatnią (nieujemną), czyli np. zerową nie tylko w początku układu.

Przykładem funkcji dodatnio określonej była funkcja (6.13). Ta sama funkcja po zmianie znaku na ujemny staje się funkcją ujemnie określoną.

#### Pierwsze twierdzenie Lapunowa (o stabilności)

Układ autonomiczny opisany równaniami stanu (6.1) lub (6.2) jest *stabilny asymptotycznie* w obszarze  $D$  zawierającym początek układu współrzędnych stanu, jeżeli można dobrać taką funkcję  $V(\underline{x})$  ciągłą wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi i dodatnio określoną w obszarze  $D$ , że jej pochodna względem czasu jest funkcją *ujemnie określoną* w tym obszarze.

Jeżeli pochodna  $\dot{V}(\underline{x})$  jest *ujemnie półokreślona* w obszarze  $D$  (czyli może w tym obszarze przyjmować np. wartości zerowe w punktach nie pokrywających się z początkiem układu) to układ jest *stabilny* ale *niekoniecznie asymptotycznie*.

---

<sup>2)</sup> Ta ostatnia nazwa pochodzi stąd, że ocenę stabilności układu przeprowadza się bez rozwiązywania równań.

## Drugie twierdzenie Lapunowa (o niestabilności)

Jeżeli dla układu opisanego w pierwszym twierdzeniu pochodna czasowa funkcji  $V(\underline{x})$  jest ujemnie określona w obszarze  $D$  ale sama funkcja  $V(\underline{x})$  jest dodatnio półokreślona w pewnym ograniczonym obszarze przestrzeni stanów, to układ jest niestabilny w tym obszarze.

Twierdzenia Lapunowa podają warunki dostateczne ale niekonieczne stabilności (niestabilności) układu.

Czasami łatwiej jest ustalić stabilność układu przy użyciu drugiego twierdzenia Lapunowa niż - pierwszego. Jeżeli bowiem dla ujemnie określonej funkcji  $\dot{V}(\underline{x})$  otrzyma się funkcję  $V(\underline{x})$  dodatnio określoną w obszarze  $D$ , a więc nie spełniającą warunku twierdzenia o niestabilności, to tym samym można wykazać, że badany układ jest stabilny.

Jedną z metod wyboru funkcji  $V(\underline{x})$  jest forma kwadratowa

$$V(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j = \underline{x}^T C \underline{x}, \quad (6.17)$$

gdzie:  $\underline{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  - wektor transponowany wektora stanu  $\underline{x}$ ,  
 $C$  - macierz kwadratowa  $n \times n$ , symetryczna ( $c_{ij} = c_{ji}$ ).

Dla  $n=2$  otrzymuje się np. z (6.17)

$$V(x_1, x_2) = c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2; \quad (c_{12} = c_{21}). \quad (6.18)$$

Forma kwadratowa (6.17) jest dodatnio określona wg Sylvestra, gdy wszystkie wyznaczniki utworzone z wyrazów macierzy  $C$  są dodatnie

$$|c_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (6.19)$$

Pochodną  $\dot{V}(\underline{x})$  określa wzór

$$\dot{V}(\underline{x}) = \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial x_n} \dot{x}_n. \quad (6.20)$$

Jeżeli badania układu z wykorzystaniem pierwszego twierdzenia Lapunowa nie dają jednoznacznych wyników, to można wykorzystać twierdzenie drugie, zakładając ujemnie określoną postać

funkcji  $\dot{V}(\underline{x})$ . Dla  $n=2$  może mieć ona postać

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\alpha x_1^2 - \beta x_2^2, \quad (6.21)$$

gdzie:  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi rzeczywistymi liczbami dodatnimi.

Po zróżniczkowaniu względem czasu (6.18) otrzymuje się (dla  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1$ )

$$\dot{V}(\underline{x}) = 2c_{11}x_1x_2 + 2c_{12}x_2^2 + 2c_{12}x_1\dot{x}_2 + 2c_{22}x_2\dot{x}_2. \quad (6.22)$$

Podstawienie do (6.22) równania stanu  $\dot{x}_2 = f(x_1, x_2)$  daje formę kwadratową, której współczynniki przy wyrazach  $x_1^2$ ,  $x_1x_2$  oraz  $x_2^2$  mają być takie same jak w (6.21). Warunek ten, dla założonej pary liczb  $\alpha$  i  $\beta$  pozwala wyznaczyć  $c_{11}$ ,  $c_{12} = c_{21}$  oraz  $c_{22}$ . Jeżeli znalezione w ten sposób wyrazy macierzy  $C$  spełniają warunek (6.19) to badany układ jest stabilny asymptotycznie.

#### Przykład 6.2

Należy zbadać stabilność układu pierwszego rzędu ( $n=1$ ) opisanego równaniem różniczkowym  $\dot{x} = (\beta - \alpha)x + \gamma x^3$ , gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  dowolne stałe,  $\alpha > \beta$ .

Jako funkcję Lapunowa przyjmuje się  $V(x) = \dot{x}^2 = [(\beta - \alpha)x + \gamma x^3]^2$ . Funkcja ta jest dodatnio określona dla dowolnej wartości  $x$ . Jej pochodną względem czasu jest

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} \dot{x} = 2(\beta - \alpha + 3\gamma x^2) [(\beta - \alpha)x + \gamma x^3]^2.$$

Funkcja  $\dot{V}(x)$  jest ujemnie określona dla  $(\beta - \alpha + 3\gamma x^2) < 0$ , czyli  $x < +\sqrt{(\alpha - \beta)/3\gamma}$  oraz  $x > -\sqrt{(\alpha - \beta)/3\gamma}$ . Jeżeli stan początkowy układu  $x(0)$  spełnia warunek:  $-\sqrt{(\alpha - \beta)/3\gamma} < x(0) < \sqrt{(\alpha - \beta)/3\gamma}$ , to układ jest stabilny asymptotycznie. Dla każdego  $x(0)$  poza tym przedziałem układ jest niestabilny. Dodatkowo można tu wyjaśnić, że podobny układ występuje w systemach sterowania (por. [2] str. 127).

#### Przykład 6.3.

Przykład ten dotyczy układu, dla którego funkcja  $V(\underline{x})$  może mieć postać

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (6.23)$$

Warto tu wyjaśnić, że próby znalezienia przez autora niniejszego tekstu praktycznego układu fizycznego, którego model



matematyczny można badać funkcją (6.23) nie dąży oczekiwanym wynikowi i z konieczności wybrany został model z pracy [3].

Badany układ opisany jest równaniem różniczkowym

$$\ddot{x} + x + a\dot{x} + x^2\dot{x} + b\dot{x}^3 = 0;$$

gdzie  $a$  i  $b$  - dowolne stałe. Oznaczając:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$ , otrzymuje się równania stanu  $\dot{x}_1 = x_2$  oraz  $\dot{x}_2 = -x_1 - ax_2 - x_1^2x_2 - bx_2^3$ . Uwzględniając (6.22) oraz (6.20), otrzymano:

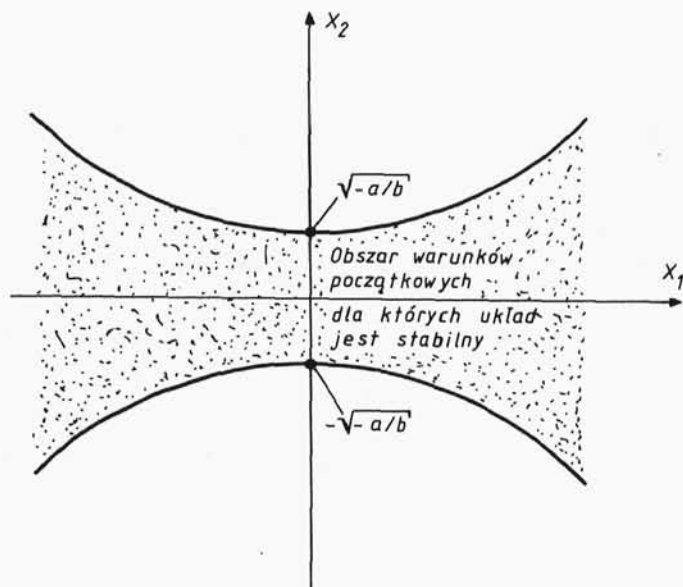
$$\dot{V}(\underline{x}) = x_1x_2 + x_2(-x_1 - ax_2 - x_1^2x_2 - bx_2^3) = -x_2^2(a + x_1^2 + bx_2^2).$$

Funkcja ta jest ujemnie określona, gdy  $a > 0$  oraz  $b > 0$ . Dla dodatnich wartości  $a$  i  $b$  układ jest więc stabilny asymptotycznie.

Na rys. 6.3 pokazano obszar dopuszczalnych warunków początkowych  $(x_1(0), x_2(0))$  dla  $a > 0$  i  $b < 0$ . Układ jest stabilny, gdy jego stan początkowy spełnia warunek

$$-\sqrt{-(a+x_1(0)^2)/b} < x_2(0) < \sqrt{-(a+x_1(0)^2)/b}.$$

Gdy warunek ten nie jest spełniony, to układ jest niestabilny. W podobny sposób można rozważyć przypadki:  $a < 0$ ,  $b > 0$  oraz  $a < 0$ ,  $b < 0$ .



Rys. 6.3. Ilustracja do przykładu 6.3

#### Przykład 6.4

W przykładzie 6.1 wykazano, że niewłaściwie dobrana funkcja  $V(\underline{x})$  utrudnia lub uniemożliwia określenie stabilności przy zastosowaniu pierwszego twierdzenia Lapunowa. W tym przykładzie wraca się do opisu (6.10) oraz (6.11) i podaje sposób rozwiązania zadania po zastosowaniu drugiego twierdzenia Lapunowa.

Po przyjęciu pochodnej  $V(\underline{x})$  w postaci (6.21), podstawia się (6.11) do (6.22), otrzymując po przekształceniach

$$\dot{V}(\underline{x}) = \left( 2c_{11} - 2c_{12}a - 2c_{22} \frac{g}{l} \right) x_1 x_2 - 2c_{12} \frac{g}{l} x_1^2 + (2c_{12} - 2ac_{22}) x_2^2. \quad (6.24)$$

Porównując prawe strony (6.21) i (6.24), znaleziono

$$\left( 2c_{11} - 2c_{12}a - 2c_{22} \frac{g}{l} \right) = 0; \quad - \left( 2c_{12} \frac{g}{l} \right) = -\alpha \quad \text{oraz} \quad (2c_{12} - 2ac_{22}) = -\beta.$$

Po rozwiązaniu względem  $c_{11}$ ,  $c_{12} = c_{21}$  oraz  $c_{22}$  otrzymano ostatecznie

$$c_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{a\alpha l}{g} + \frac{\alpha + \beta g/l}{a} \right); \quad c_{12} = \frac{\alpha l}{2g} \quad \text{oraz} \quad c_{22} = \frac{\alpha l/g + \beta}{2a}.$$

Należy teraz postawić warunek aby funkcja  $V(\underline{x})$  opisana wzorem (6.18) była dodatnio określona. Na podstawie (6.19) powinno być

$$c_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{a\alpha l}{g} + \frac{\alpha + \beta g/l}{a} \right) > 0;$$

warunek ten jest spełniony ponieważ wszystkie parametry są dodatnie. Ponadto powinno być

$$c_{11}c_{22} = \left( \frac{a\alpha l}{g} + \frac{\alpha + \beta g/l}{a} \right) \left( \frac{\alpha l/g + \beta}{2a} \right) > \left( \frac{\alpha l}{2g} \right)^2 = c_{12}^2. \quad (6.25)$$

Niech dane liczbowe badanego układu prowadzą do wartości  $\frac{g}{l}=10$  oraz  $a=0,1$ , a arbitralnie przyjęte wartości  $\alpha=\beta$  są równe 1. Po podstawieniu do (6.25) otrzymano  $c_{11}=55,5$ ;  $c_{22}=5,5$  oraz  $c_{12}=0,05$ . Łatwo sprawdzić, że  $c_{11}c_{22} > c_{12}^2$ . Tym samym otrzymana z (6.18) funkcja  $V(\underline{x})=55,5x_1^2+0,1x_1x_2+5,5x_2^2$  jest dodatnio określona, a jej pochodna  $\dot{V}(\underline{x})=-x_1^2-x_2^2$  jest ujemnie określona. Badany układ jest więc stabilny asymptotycznie<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Uwzględnienie pełnego opisu (6.3) daje dla  $\underline{x}=0$  dwa punkty równowagi układu:  $x_1=0$  i  $x_1=\pi$ . Zaleca się Czytelnikowi sprawdzenie, że drugi punkt jest niestabilny.

Przy wyborze funkcji  $V(\underline{x})$  ograniczano się dotychczas do formy kwadratowej (6.17). Jeżeli forma taka nie daje jednoznacznych wyników, to za funkcję  $V(\underline{x})$  można przyjąć sumę formy kwadratowej i całki charakterystyki części nieliniowej układu. Szczegóły postępowania można znaleźć w [2] i [6].

Na zakończenie tego punktu warto przytoczyć obserwacje autorów [6] poczynione ćwierć wieku temu. Porównując różne metody, podkreślają one zalety i ogólność twierdzeń Lapunowa, ponieważ są one tak samo słuszne dla prostych układów nieliniowych jak i dla układów nieliniowych wyższych rzędów, układów z wieloma nieliniowościami, układów dyskretnych itd.

Napisali jednakże: "Jeżeli uda się opracować praktyczne, inżynierskie metody konstruowania funkcji Lapunowa i dalszego jej wykorzystania, wówczas ma ona szansę stać się najlepszym narzędziem do analizy i syntezy układów nieliniowych". Z perspektywy lat można stwierdzić obecnie, że metodzie tej nadal brak takich praktycznych metod konstruowania funkcji Lapunowa i jej możliwości nadal nie są w pełni wykorzystane.

### 6.3. STABILNOŚĆ UKŁADÓW LINIOWYCH

#### 6.3.1. Wiadomości uzupełniające; warunki: konieczny i dostateczny stabilności układów liniowych

W punkcie 6.1 omówiono stabilność liniowego układu autonomicznego opisanego równaniem (6.1). Uzyskane wyniki dotyczyły zachowania się układów, które w chwili początkowej miały stan  $\underline{x}_0 \neq 0$  i nie były poddane wymuszeniu zewnętrznemu. Trajektorie  $\underline{x}(t)$  w przestrzeni stanu (układów stabilnych lub niestabilnych) były więc wynikiem działania tylko warunków początkowych. Należy teraz wyjaśnić, jak zachowują się układy, w których obok warunków początkowych występują również wymuszenia  $\underline{u}(t)$ . W tym celu rozpatruje się stacjonarny układ dynamiczny, który opisany jest równaniami stanu i wyjścia

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}, \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u},\end{aligned}\tag{6.26}$$

(gdzie:  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  i  $\underline{D}$  są macierzami o stałych wyrazach) lub w postaci operatorowej, przy użyciu macierzy transmitancji  $\underline{G}(s)$  -

model wejście-wyjście

$$\underline{Y}(s) = G(s)\underline{U}(s). \quad (6.27)$$

Zakłada się, że w rozpatrywanym przedziale czasu  $t$  wektor  $\underline{u}(t)$  ma znane skończone wartości, a w chwili  $t=0$   $\underline{x}(t)=\underline{x}_0$  oraz  $\underline{u}(t)=\underline{u}_0$ . Rozwiązaniem (6.26) i (6.27) jest

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{x}_p(t) + \underline{x}_u(t), \\ \underline{y}(t) &= \underline{y}_p(t) + \underline{y}_u(t). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Człony oznaczone indeksem  $p$  opisują tu proces przejściowy, a indeksem  $u$  - proces ustalony układu.

Układ uznaje się za stabilny, gdy dla dowolnej chwili czasu  $t$   $\underline{x}(t)$  oraz  $\underline{y}(t)$  mają skończone wartości.

Układy liniowe, jeżeli są stabilne, to są (stabilne asymptotycznie) globalnie. Oznacza to, że dla takich układów, w miarę upływu czasu,  $\underline{x}_p(t)$  oraz  $\underline{y}_p(t)$  dążą do zera, a skończonym wartościom  $\underline{u}(t)$  odpowiadają skończone wartości  $\underline{x}_u(t)$  oraz  $\underline{y}_u(t)$ . Ponieważ  $\underline{x}_p(t)$  i  $\underline{y}_p(t)$  zależą tylko od  $\underline{x}(0)$ , co wynika ze wzoru (5.75), to do badania przebiegów, które decydują o stabilności układów wystarcza model matematyczny układu bez wymuszenia ( $\underline{u}(t)=0$ ).

Przy braku wymuszenia (sterowania) równania (6.26) upraszczają się do

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x}, \\ \underline{y} &= C\underline{x}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dla pierwszego z tych równań przewiduje się rozwiązanie (5.75) w postaci

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{At}, \quad (6.30)$$

przy czym:  $\underline{x}(t)$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem stanu, a  $A$  - macierzą  $n \times n$  o stałych wyrazach.

W przypadku ogólnym macierz  $A(n \times n)$ , występująca w opisie (6.29) układu liniowego ma wartości własne  $s_i$  ( $i=1,2,\dots,r$ ) o krotności, odpowiednio,  $n_1, n_2, \dots, n_r$ ; przy czym  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ . Można je wyznaczyć m.in. z równania charakterystycznego, którego  $s_i$  są pierwiastkami

$$\varphi_1(s) = \det[sI - A] = (s-s_1)^{n_1} (s-s_2)^{n_2} \dots (s-s_r)^{n_r} = 0, \quad (6.31)$$

(gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową). W pracy [2] udowadnia się, że rozwiązanie (6.30) jest w najogólniejszym przypadku kombinacją wyrazów typu  $t^q e^{s_k t}$ , gdzie  $q=n_k-1$  jest liczbą naturalną.

Dowolną wartość własną  $s_k$  można przedstawić w najogólniejszej postaci

$$s_k = \operatorname{Re} s_k + j \operatorname{Im} s_k, \quad (6.32)$$

tym samym

$$e^{s_k t} = e^{\operatorname{Re} s_k t} e^{j \operatorname{Im} s_k t} = e^{\operatorname{Re} s_k t} \left[ \cos(\operatorname{Im} s_k t) + j \sin(\operatorname{Im} s_k t) \right]. \quad (6.33)$$

Łatwo wykazać, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t^q e^{s_k t}| = \begin{cases} 0 & \text{dla } \operatorname{Re} s_k < 0 \text{ i skończonego } q, \\ 1 & \text{dla } \operatorname{Re} s_k = 0 \text{ i } q=0 \\ \infty & \text{dla } \operatorname{Re} s_k \geq 0 \text{ i dowolnego } q, \end{cases}$$

a więc  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy  $A$  mają ujemne części rzeczywiste, a tym samym wszystkie znajdują się w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej  $s$ .

#### Twierdzenie o stabilności

Stacjonarny układ liniowy (6.29) jest asymptotycznie, globalnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne  $s_k$  macierzy  $A$  mają części rzeczywiste  $\operatorname{Re} s_k < 0$ , tj. znajdują się w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej  $s$ .

Badanie stabilności układu opisanego zależnością (6.27) przeprowadza się w podobny sposób. Wyrazy  $G_{ij}(s)$  macierzy  $G(s)$  mają najogólniej postać ilorazów wielomianów  $L_{ij}(s)$  i  $M_{ij}(s)$

$$G_{ij}(s) = \frac{L_{ij}(s)}{M_{ij}(s)}. \quad (6.34)$$

W pracy [2] udowadnia się, że najmniejszy wspólny mianownik  $M(s)$  wszystkich wyrazów (6.34) przyrównany do zera jest równaniem charakterystycznym  $\varphi_2(s)$  równania (6.27). Jest więc

$$\varphi_2(s) = M(s) = 0. \quad (6.35)$$

Warunkiem stabilności asymptotycznej układu, jak i w poprzednim przypadku, jest wystąpienie wszystkich pierwiastków  $s_k$  w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej  $s$ .

Równania (6.35) czy (6.31) mogą być wysokiego stopnia. Obecnie ich pierwiastki wyznacza się numerycznie, przy użyciu komputera (w przypadku układu (6.31) zwykle bezpośrednio z macierzy  $A$ ). Dawniej, przy braku tego narzędzia obliczeniowego, niezbędne były pewne metody uproszczone sprawdzania miejsca występowania pierwiastków na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ . Metody te nazywa się kryteriami stabilności. Spełniają one nadal ważną rolę, gdy zachodzi potrzeba szybkiego sprawdzenia stabilności analizowanego układu. Przed ich omówieniem warto jeszcze na chwilę wrócić do wzoru (6.33) i wyjaśnić wątpliwości, które zwykle towarzyszą interpretacji takich wyników. Proces przejściowy  $x_p(t)$  wg (6.28) dla rzeczywistego układu fizycznego ma zazwyczaj postać tłumionych drgań własnych, które są superpozycją drgań przebiegających z wszystkimi częstotliwościami drgań własnych układu. Częstotliwości te są częściami urojonymi  $\text{Im } s_k$  pierwiastków równania charakterystycznego. Ponieważ drgania o postaci zespolonej (6.33) nie występują w przyrodzie, warto na prostym przykładzie pokazać sposób przejścia od ogólnej formy zespolonej do formy rzeczywistej.

#### Przykład 6.5

Rozpatruje się drgania swobodne modelu fizycznego, który stanowi masa  $m$  zawieszona na nieważkiej sprężynie o sztywności  $k$ . W chwili  $t=0$  przemieszczenie masy  $x(0)=x_0$ , a jej prędkość  $\dot{x}(0)=0$ . Równanie różniczkowe ruchu masy ma postać

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{lub} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.36)$$

gdzie:  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  jest częstotliwością drgań własnych układu. Przewidując rozwiązanie

$$x = Ae^{st}, \quad \text{czyli} \quad \ddot{x} = As^2 e^{st} = s^2 x \quad (6.37)$$

i uwzględniając, że dla  $t=0$ ,  $x=x_0$ , a tym samym  $A=x_0$ , podstawia się (6.37) do (6.36) i otrzymuje równanie charakterystyczne  $\omega_0^2 + s^2 = 0$ . Ma ono dwa pierwiastki urojone

$$s = \pm j\omega_0. \quad (6.38)$$

Podstawiając (6.38) do (6.37), znaleziono

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 e^{j\omega_0 t} = x_0 \left( \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) \right), \\x_2 &= x_0 e^{-j\omega_0 t} = x_0 \left( \cos(\omega_0 t) - j\sin(\omega_0 t) \right).\end{aligned}\quad (6.39)$$

Obydwa rozwiązania (6.39) są zespolone. Jeżeli teraz przyjmiemy, że  $x = (x_1 + x_2)/2$ , to z (6.39) otrzyma się odpowiedź rzeczywistą (i zgodną z intuicją)

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t). \quad (6.40)$$

### 6.3.2. Kryterium Routha-Hurwitza

Równanie charakterystyczne układu liniowego (6.31) lub (6.35) można przedstawić w postaci<sup>4)</sup>

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (6.41)$$

Warunkiem koniecznym globalnej stabilności asymptotycznej układu o równaniu charakterystycznym (6.41) jest wymóg aby wszystkie współczynniki  $a_i$  równania (6.41) spełniały warunek

$$a_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Warunkiem dostatecznym - aby wszystkie podwyznaczniki  $\Delta_i$  ( $i=2, 3, \dots, n-1$ ) wyznacznika  $\Delta_n$  o budowie:

$$i=2: \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad i=3: \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \text{itd aż do } i=n-1 \quad (6.42)$$

były większe od zera.

Jeżeli jeden lub więcej niż jeden podwyznacznik (6.42) jest równy zeru, to układ jest stabilny globalnie ale nie asymptotycznie (w układzie występują niegasnące drgania o stałej amplitudzie).

<sup>4)</sup> Spotyka się również inną postać tego równania: współczynnik przy najwyższej potęgze  $s$ , a więc  $s^n$  jest  $a_n$ , a nie  $a_0$ . Czytelnik za chwilę sprawdzi, że postać (6.41) prowadzi do łatwiejszych do zapamiętania algorytmów badania stabilności.