

4. OPIS MATEMATYCZNY PODSTAWOWYCH ELEMENTÓW LINIOWYCH

4.1. PODSTAWOWE ELEMENTY LINIOWE

4.1.1. Uwagi ogólne

Układ dynamiczny daje się zwykle podzielić na elementy, z których każdy można rozpatrywać niezależnie od pozostałych. Takie postępowanie znacznie ułatwia analizę i syntezę złożonych układów. Wygodnie jest przy tym stosować zasadę przyjętą w automatyce, która polega na podziale układu liniowego na takie elementy, z których każdy może być rozpatrywany jako pewna kombinacja tzw. elementów podstawowych.

Wyróżnia się sześć grup elementów podstawowych: bezinercyjne (proporcjonalne), inercyjne, oscylacyjne, całkujące, różniczkujące i opóźniające. O przynależności elementu do jednej z tych grup decydują jego własności dynamiczne. Własności te można ocenić poprzez znajomość równania różniczkowego opisującego zjawiska fizyczne lub na podstawie wyznaczonych doświadczalnie odpowiedzi na wymuszenia standardowe, lub też charakterystyk częstotliwościowych.

Najwygodniejszy opis własności dynamicznych elementów liniowych stanowią transmitancja operatorowa i transmitancja widmowa.

Przy omawianiu poszczególnych elementów podstawowych będzie się wykorzystywać wszystkie wymienione wyżej sposoby określania własności dynamicznych.

4.1.2. Element bezinercyjny (proporcjonany)

Element proporcjonalny jest idealnym wzmacniaczem, w którym zależność między sygnałem wyjściowym y i wejściowym u wyraża się wzorem

$$y = ku, \quad (4.1)$$

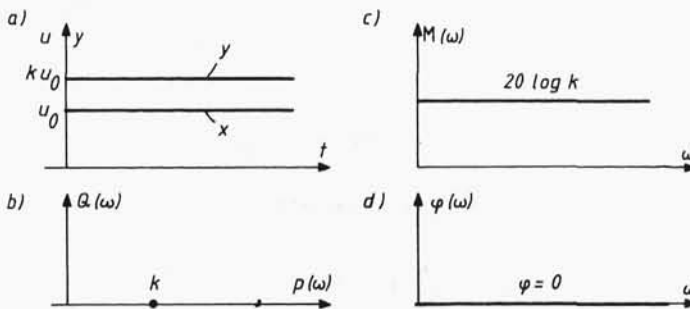
a transmitancja operatorowa i transmitancja widmowa mają taką samą postać

$$\begin{aligned} G(s) &= k, \\ G(j\omega) &= k, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie: k - współczynnik wzmocnienia statycznego.

Transmitancja widmowa zawiera tylko część rzeczywistą $P(\omega)=k$, a część urojona $Q(\omega)$ równa się zero.

Na rys.4.1 przedstawiono wykresy następujących charakterystyk elementu proporcjonalnego: skokowej (rys.4.1a), amplitudowo-fazowej (rys.4.1b), amplitudowej (rys.4.1c) i fazowej (rys.4.1d). Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest ograniczona do jednego punktu leżącego na osi liczb rzeczywistych. Charakterystyka amplitudowa ma wartość stałą $M(\omega)=20 \log k$, a fazowa równa jest zero.



Rys.4.1. Wykresy charakterystyk elementu proporcjonalnego: a) skokowej, b) amplitudowo-fazowej, c) amplitudowej, d) fazowej

Przykład 4.1

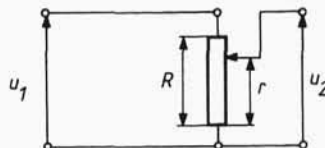
Na rys.4.2 pokazany jest dzielnik napięcia. Wielkością wejściową jest tutaj napięcie $U_1=u$, a wyjściową napięcie $U_2=y$.

Na podstawie prawa Ohma otrzymuje się związek

$$i = \frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{r},$$

skąd

$$U_2 = \frac{U_1 r}{R}.$$



(4.3) Rys.4.2. Dzielnik napięcia

Po transformacji Laplace'a obu stron równania (4.3) przy zerowych warunkach początkowych, otrzymuje się wyrażenie

$$U_2(s) = \frac{r}{R} U_1(s),$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{r}{R} = k.$$

4.1.3. Element inercyjny pierwszego rzędu

Równanie różniczkowe określające własności tego elementu sprowadza się zwykle do postaci znormalizowanej

$$T\dot{y} + y = ku, \quad (4.4)$$

gdzie: k - współczynnik wzmocnienia statycznego, T - stała czasowa, która ma zawsze wymiar czasu.

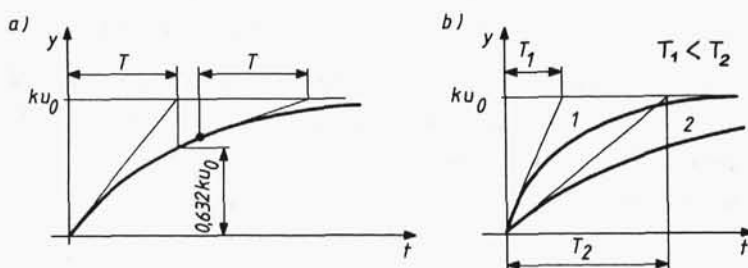
Dokonując transformacji Laplace'a obu stron równania (4.4) przy zerowych warunkach początkowych otrzymuje się wzór na transmitancję operatorową w postaci

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts+1}, \quad (4.5)$$

a odpowiedź na wymuszenie skokowe $u(t)=u_0 1(t)$ - ze związku

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{u_0}{s} \frac{k}{Ts+1} \right] = ku_0 \left(1 - e^{-t/T} \right). \quad (4.6)$$

Przebieg charakterystyki skokowej elementu inercyjnego przedstawiono na rys.4.3.



Rys.4.3. Charakterystyka skokowa elementu inercyjnego: a) sposoby wyznaczania stałej czasowej T , b) wpływ stałych czasowych T_1 i T_2 na przebieg charakterystyki

Mając taki przebieg uzyskany doświadczalnie, można łatwo wyznaczyć współczynnik wzmocnienia statycznego k oraz stałą czasową T . Aby otrzymać wartość k wystarczy porównać ustaloną wartość odpowiedzi skokowej $y_{\infty} = ku_0$ z wartością wymuszenia u_0 . Natomiast stałą czasową T można wyznaczyć dwoma sposobami pokazanymi na rys.4.3a.

1. Podstyczna każdej stycznej do $y(t)$ wyznaczona na asymptocie ku_0 jest równa stałej czasowej T . Można to wykazać w następujący sposób

$$\text{podstyczna} = \frac{ku_0 - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{ku_0 - ku_0(1 - e^{-t/T})}{ku_0 \frac{1}{T} e^{-t/T}} = T.$$

2. Od wartości funkcji $y(t)=0$ do $y(t)=0,632ku_0$ upływa czas równy stałej czasowej T . Można tego dowieść podstawiając czas $t=T$ do równania (4.6).

Na rys.4.3b pokazano wpływ różnych stałych czasowych T_1 i T_2 na przebieg charakterystyki skokowej.

Transmitancja widmowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu ma postać

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = k \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2}, \quad (4.7)$$

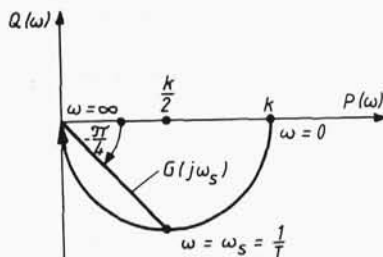
$$P(\omega) = \frac{k}{1 + (\omega T)^2}, \quad (4.8)$$

$$Q(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + (\omega T)^2}. \quad (4.9)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest półokręgiem o średnicy równej współczynnikowi proporcjonalności k , leżącym w czwartej ćwiartce. Charakterystykę tę pokazano na rys.4.4.

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa ma następującą postać

$$M(\omega) = 20 \log \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} =$$

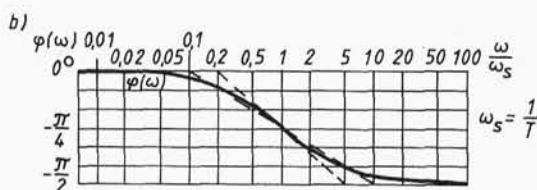
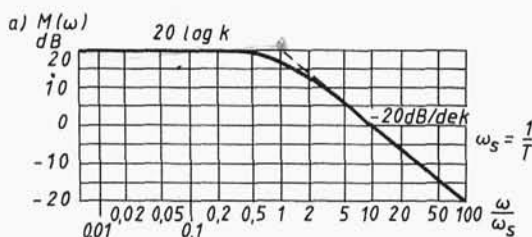


Rys.4.4. Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu inercyjnego pierwszego rzędu

$$= 20 \log \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = 20 \log k - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}.$$

W wielu przypadkach można korzystać z charakterystyki uproszczonej, zwanej asymptotyczną. Charakterystykę tę otrzymuje się metodą następujących uproszczeń

- dla $\omega < \frac{1}{T}$ $M(\omega) = 20 \log k$,
- dla $\omega > \frac{1}{T}$ $M(\omega) = 20 \log k - 20 \log(T\omega)$.



Rys.4.5. Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe elementu inercyjnego pierwszego rzędu: a) amplitudowa, b) fazowa

Rzeczywistą oraz asymptotyczną, logarytmiczną charakterystykę amplitudową przedstawiono na rys. 4.5a. Punkt załamania charakterystyki asymptotycznej przypada dla $\omega_s = \frac{1}{T}$, zwanej częstotliwością sprzęgającą lub częstotliwością załamania. Dla częstotliwości bliskich ω_s rzeczywista charakterystyka amplitudowa różni się od asymptotycznej nie więcej niż 3 dB.

Logarytmiczna charakterystyka fazowa opisana jest równaniem

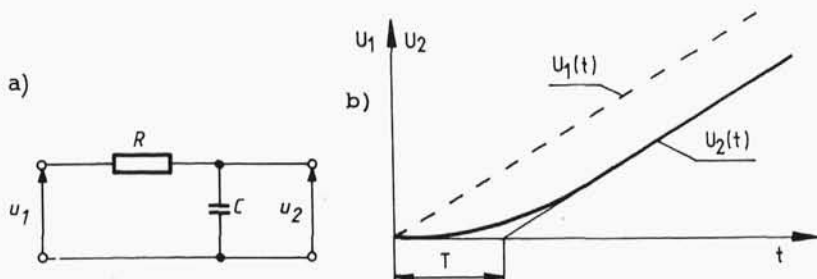
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg(-T\omega) = -\arctg(T\omega).$$

Na rys.4.5b pokazano wykres $\varphi(\omega)$. Narysowano też stosowane często trójdzinkowe aproksymacje tej krzywej.

Przykład 4.2

Na rys.4.6a przedstawiono schemat elektryczny czwórnika RC. Symbol R na schemacie oznacza rezystancję, a C pojemność. Wielkością wejściową jest napięcie U_1 , a wielkością wyjściową napięcie U_2 . Należy wyznaczyć:

- a) transmitancję operatorową,
- b) przebieg sygnału $U_2(t)$ wymuszony liniowo narastającym sygnałem wejściowym.



Rys.4.6. Czwórnik RC: a) schemat elektryczny, b) odpowiedź na wymuszenie liniowo narastające

Oznaczając przez U_R i U_C spadek napięcia na rezystorze i kondensatorze, można napisać równanie obwodu elektrycznego w postaci

$$U_1 = U_R + U_C = Ri + U_2,$$

gdzie: i - prąd płynący w obwodzie.

Jeżeli czwórnik nie jest obciążony od strony zacisków wyjściowych, to prąd i wyraża się wzorem

$$i = C \frac{dU_2}{dt}.$$

Z przedstawionych zależności wynika równanie

$$T \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1,$$

gdzie $T=RC$.

Stąd transmitancja operatorowa czwórnika wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{Ts+1}.$$

Czwórnik RC jest więc elementem inercyjnym o współczynniku wzmocnienia statycznego $k=1$ i o stałej czasowej $T=RC$.

Odpowiedź czwórnika na sygnał liniowo narastający

$$U_1(t) = ct \cdot 1(t)$$

przedstawiony linią przerywaną na rys.4.6b opisuje zależność

$$U_2(t) = L^{-1} \left[\frac{c}{s^2} \frac{1}{Ts+1} \right] = ct - cT \left(1 - e^{-t/T} \right).$$

Przebieg $U_2(t)$ jest przedstawiony na rys.4.6b linią ciągłą, dąży on do asymptoty opisanej równaniem

$$U_{2a}(t) = c(t-T).$$

Oznacza to, że po zaniknięciu procesu przejściowego, sygnał wyjściowy jest opóźniony w stosunku do wymuszenia o stałą wartość równą T .

4.1.4. Element oscylacyjny

Równanie różniczkowe elementu oscylacyjnego ma postać

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = ku, \quad (4.10)$$

a transmitancja operatorowa wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}, \quad (4.11)$$

przy czym stałe czasowe T_1 i T_2 spełniają nierówność

$$T_1^2 < 4T_2^2. \quad (4.12)$$

Nierówność (4.12) jest warunkiem istnienia pierwiastków zespolonych równania charakterystycznego¹⁾

$$T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0. \quad (4.13)$$

Równanie (4.10) często występuje w innej postaci znanej z teorii drgań

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = k\omega_0^2 u, \quad (4.14)$$

gdzie: k - współczynnik wzmocnienia statycznego, ω_0 - częstotliwość drgań własnych nietłumionych, $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$, ξ - zredukowany współczynnik tłumienia, $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$.

Z równania (4.14) otrzymuje się transmitancję operatorową w postaci

¹⁾ W przypadku, kiedy nierówność (4.12) nie jest spełniona, ma się do czynienia z elementem inercyjnym drugiego rzędu. Wtedy pierwiastki równania (4.13) są rzeczywiste.

$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (4.15)$$

która ułatwia interpretację przebiegów przejściowych.

Odpowiedź na wymuszenie skokowe $u(t)=u_0 1(t)$ ma postać

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{u_0 k\omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \right].$$

W przypadku kiedy $\xi < 1$, co jest równoważne nierówności (4.12), tzn. kiedy pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone, odpowiedź skokowa wyraża się wzorem

$$y(t) = ku_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \psi) \right], \quad (4.16)$$

gdzie kąt ψ jest określony przez związki:

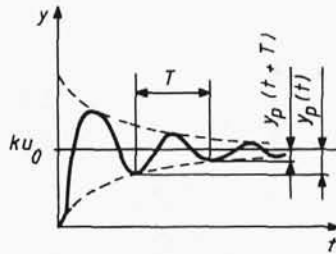
$$\sin(\psi) = \sqrt{1-\xi^2}; \quad \cos(\psi) = \xi.$$

Wykres $y(t)$ przedstawiono na rys.4.7. Okres oscylacji przebiegu wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}.$$

W przypadku ogólnym, kiedy $\xi=0$ (tzn. $T_1=0$), następują drgania nie-tłumione o częstotliwości ω_0 .

Na podstawie odpowiedzi na wymuszenie skokowe można wyznaczyć wartości parametrów elementu oscylacyjnego, a mianowicie k , ω_0 i ξ . Wartość wzmocnienia określa się porównując wartości sygnałów wyjściowego i wejściowego w stanie ustalonym $k=y_\infty/u_0$, a tłumienie z wyznaczonego doświadczalnie stosunku dwóch kolejnych amplitud oscylacji w procesie przejściowym (rys.4.7)



Rys.4.7. Odpowiedź elementu oscylacyjnego na wymuszenie skokowe

$$\frac{y_p(t)}{y_p(t+T)} = \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{e^{-\xi\omega_0 (t+T)}} = e^{\xi 2\pi / \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (4.18)$$

Oznaczając ten stosunek przez d otrzymuje się zależność

$$\ln d = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (4.19)$$

Wyrażenie (4.19) jest nazywane dekrementem logarytmicznym tłumienia.

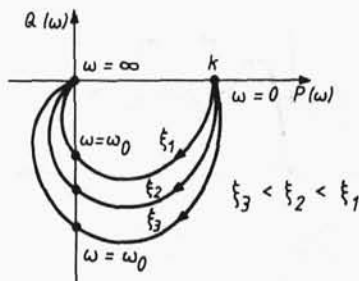
Transmitancja widmowa elementu oscylacyjnego ma postać

$$G(j\omega) = \frac{k\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_0(j\omega) + \omega_0^2} = \frac{k\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega}. \quad (4.20)$$

Część rzeczywista i część urojona wyrażają się wzorami

$$P(\omega) = \frac{k\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2},$$

$$Q(\omega) = - \frac{2\xi\omega_0^3\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}.$$



Rys.4.8. Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu oscylacyjnego

Wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej $G(j\omega)$ przedstawiono na rys. 4.8. Wykres ten rozpoczyna się zawsze w punkcie $(k, j0)$, ponieważ $P(0)=k$, $Q(0)=0$, a kończy w punkcie $(0, j0)$, ponieważ $P(\infty)=0$, $Q(\infty)=0$. Kształt krzywej zależy od zredukowanego współczynnika tłumienia ξ .

Moduł i argument transmitancji widmowej wyrażają się wzorami

$$A(\omega) = \frac{k\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2]^{1/2}} = \frac{k}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}^{1/2}. \quad (4.21)$$

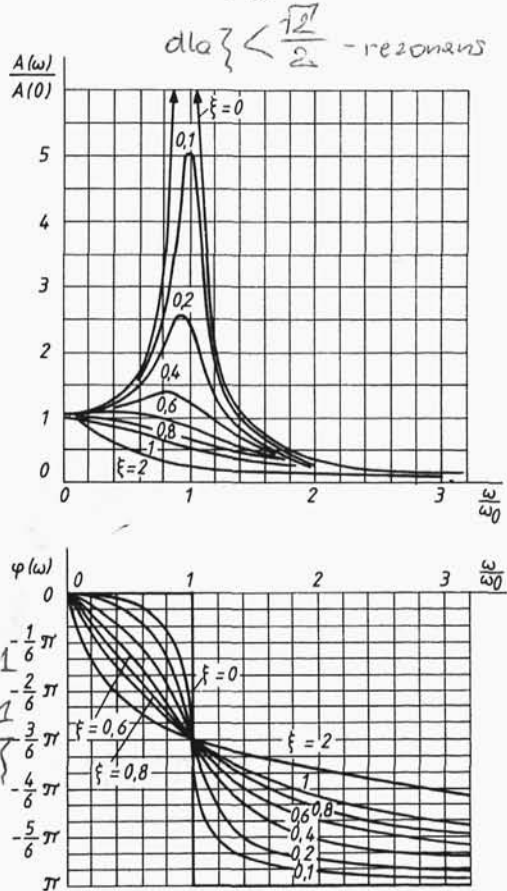
$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (4.22)$$

Charakterystyki częstotliwościowe elementu oscylacyjnego są zwykle podawane w postaci znormalizowanej, przedstawionej na rys.4.9. Na osi odciętych odkładany jest stosunek ω/ω_0 a na osi rzędnych $A(\omega)/A(0)$ (charakterystyka amplitudowa) i $\varphi(\omega)$ (charakterystyka fazowa) przy różnych wartościach tłumienia ξ . Dla $\xi < \sqrt{2}/2$ charakterystyka amplitudowa osiąga maksimum zwane szczytem rezonansowym o wartości

$$\frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \text{dla } \xi \ll 1, \quad \frac{A(\omega_r)}{A(0)} \approx \frac{1}{2\xi}$$

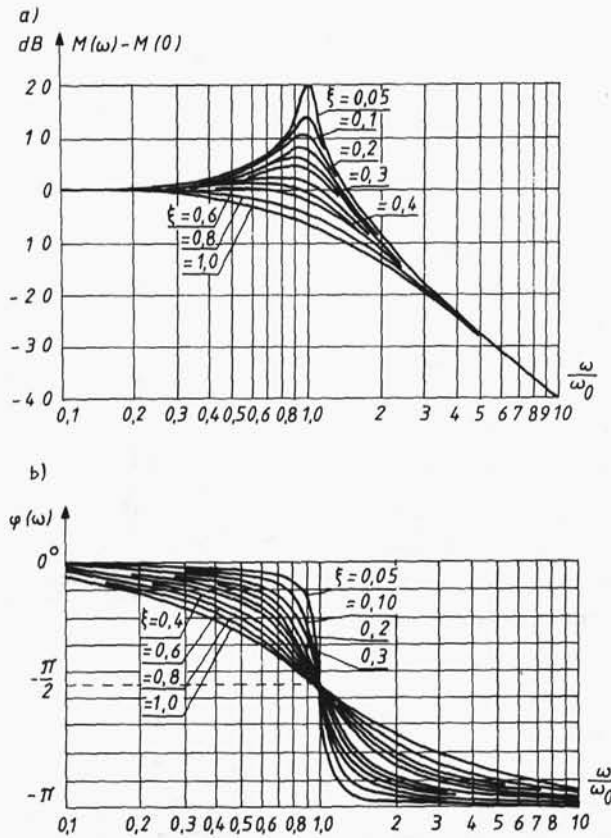
przy częstotliwości rezonansowej określonej przez związek

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1-2\xi^2}.$$

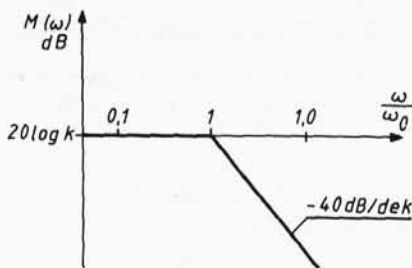


Rys.4.9. Znormalizowana postać charakterystyk częstotliwościowych elementu oscylacyjnego

Dla $\xi \approx \sqrt{2}/2$ rezonans nie występuje i wartość $A(\omega)$ maleje monotonicznie ze wzrostem częstotliwości. W zakresie częstotliwości dużo mniejszych od częstotliwości rezonansowej element oscylacyjny ma własności zbliżone do elementu bezinercyjnego, tzn. jego charakterystyka amplitudowa jest płaska, a charakterystyka fazowa zbliżona do liniowej.



Rys.4.10. Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe elementu oscylacyjnego: a) amplitudowa, b) fazowa



Rys.4.11. Amplitudowa charakterystyka asymptotyczna elementu oscylacyjnego

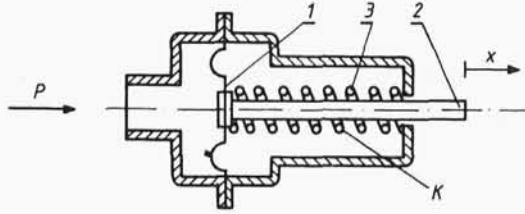
Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe przedstawiono na rys.4.10. Charakterystykę amplitudową $M(\omega)$ można aproksymować linią łamaną (rys.4.11) z punktem załamania przy $\omega = \omega_0$, o równaniu

$$M(\omega) = \begin{cases} 20 \log k & \text{dla } \omega \ll \omega_0, \\ 20 \log k - 40 \log \frac{\omega}{\omega_0} & \text{dla } \omega \gg \omega_0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Aproksymacja ta jest stosowana zwykle w obliczeniach wstępnych dla $0,3 < \xi < 1$. Błąd amplitudowy $\Delta M(\omega)$ jest wtedy mniejszy od 6 dB.

Przykład 4.3

Na rys.4.12 pokazano fragment konstrukcji zaworu membranowego. Sygnałem wejściowym jest zmiana różnicy ciśnień p działających na membranę 1 o powierzchni A ; sygnałem wyjściowym - przemieszczenie x (od położenia równowagi statycznej) pręta 2. Sprężyna 3 ma sztywność K . Opory ruchu modeluje się siłą proporcjonalną do prędkości pręta ze współczynnikiem proporcjonalności równym c . Masa elementów ruchomych jest m .



Rys.4.12. Fragment zaworu membranowego

Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = pA. \quad (4.24)$$

Równanie to można doprowadzić do standardowej postaci opisującej własności elementu oscylacyjnego

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2 \frac{pA}{K},$$

o transmitancji operatorowej $G(s)=X(s)/P(s)$ wg zależności (4.15), jeżeli przyjmie się $k=A/K$. Częstotliwość nietłumionych drgań własnych $\omega_0=\sqrt{K/m}$. Zawór jest elementem oscylacyjnym, gdy bezwymiarowy współczynnik tłumienia $\xi=c/2\sqrt{Km}$ jest mniejszy od jedności.

4.1.5. Element różniczkujący

Równanie ogólne opisujące idealny element różniczkujący ma postać

$$y = k \frac{du}{dt}, \quad (4.25)$$

a transmitancja operatorowa wyraża się wzorem

$$G(s) = ks, \quad (4.26)$$

gdzie k jest współczynnikiem zdefiniowanym jako stosunek odpowiedzi do pochodnej wymuszenia po czasie.

Równanie charakterystyki statycznej ma postać $y=0$.

Odpowiedź na wymuszenie skokowe $u(t)=u_0 1(t)$ wyraża się wzorem

$$y(t) = L^{-1} \left[k s \frac{1}{s} u_0 \right] = k u_0 \delta(t). \quad (4.27)$$

Transmitancja widmowa ma postać

$$G(j\omega) = j\omega k, \quad P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = \omega k. \quad (4.28)$$

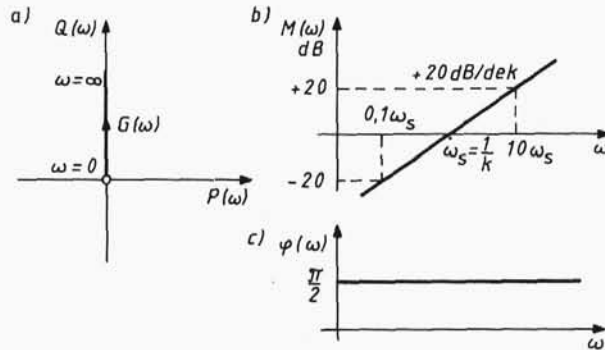
Charakterystyka amplitudowo-fazowa leży w dodatniej części osi wartości urojonych (rys.4.13a).

Logarytmiczne charakterystyki amplitudowa i fazowa opisane są równaniami

$$M(\omega) = 20 \log k\omega = 20 \log k + 20 \log \omega, \quad (4.29)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{\omega k}{0} \right) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Charakterystyki te przedstawiono na rys.4.13 b i c.



Rys.4.13. Charakterystyki elementu różniczkującego: a) amplitudowo-fazowa, b) amplitudowa, c) fazowa

Element różniczkujący z inercyjnością nazywany jest rzeczywistym elementem różniczkującym. Równanie ogólne takiego elementu ma postać

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{du}{dt} \quad (4.30)$$

i stąd transmitancja operatorowa

$$G(s) = \frac{ks}{Ts+1}. \quad (4.31)$$

Charakterystyki statyczne idealnego i rzeczywistego elementu różniczkującego są identyczne.

Wyznaczając charakterystykę skokową rzeczywistego elementu różniczkującego otrzymuje się

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{ks}{Ts+1} \frac{1}{s} u_0 \right] = L^{-1} \left[\frac{ku_0}{Ts+1} \right] = \frac{ku_0}{T} e^{-t/T}. \quad (4.32)$$

Przebieg tej charakterystyki przedstawiono na rys.4.14.

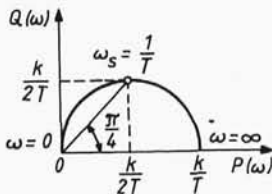
Transmitancja widmowa rzeczywistego elementu różniczkującego jest następująca

$$G(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega+1}, \quad (4.33)$$

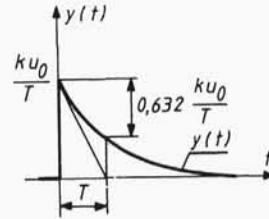
z czego wynikają część rzeczywista i urojona

$$P(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1+(\omega T)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{k\omega}{1+(\omega T)^2}. \quad (4.34)$$

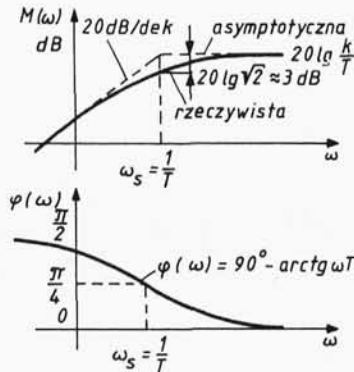
Charakterystyka amplitudowo-fazowa rzeczywistego elementu różniczkującego jest półokręgiem leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (rys.4.15).



Rys.4.15. Charakterystyka amplitudowo-fazowa rzeczywistego elementu różniczkującego



Rys.4.14. Charakterystyka skokowa rzeczywistego elementu różniczkującego



Rys.4.16. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa rzeczywistego elementu różniczkującego

Logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową opisują następujące równania

$$M(\omega) = 20 \log \frac{k\omega}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = 20 \log k\omega - 20 \log \sqrt{1+(\omega T)^2}, \quad (4.35)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{k\omega}{kT\omega^2} = \arctg \frac{1}{T\omega} = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T. \quad (4.36)$$

Logarytmiczną charakterystykę amplitudową i fazową przedstawiono na rys.4.16.

Przykład 4.4

Oznaczając przez Q ładunek zgromadzony na kondensatorze o pojemności C , można napisać następującą zależność

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dU} \frac{dU}{dt} = C \frac{dU}{dt},$$

skąd

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = ks,$$

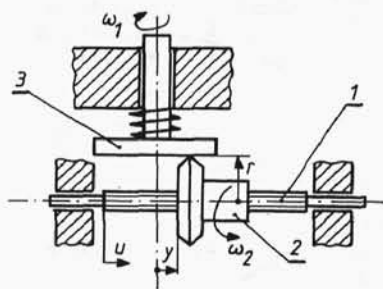
gdzie $k=C$.

Jest to postać transmitancji typowa dla idealnego elementu różniczkującego.

Przykład 4.5

Nagwintowany wałek (rys.4.17) może się tylko przesuwąć wzdłuż swej osi. Nakrętka 2 ma tak dobrany kierunek zwojów gwintu, aby obrót koła 3 powodował sprowadzenie nakrętki do osi obrotu tarczy 3. Zakłada się, że prędkość obrotowa $\omega_1 = \text{const.}$

Wielkością wyjściową jest przesunięcie nakrętki y ; wielkością wejściową - przesunięcie wałka nagwintowanego u .



Rys.4.17. Układ mechaniczny - rzeczywisty element różniczkujący

W stanach nieustalonych prędkość przesuwania się nakrętki wzdłuż wałka dy/dt jest różnicą prędkości wałka du/dt i prędkości przesuwania się nakrętki na wałku nh , gdzie n - prędkość obrotowa nakrętki (obr/s), h - skok gwintu, a zatem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} - nh, \quad n = \frac{\omega_2}{2\pi}.$$

Zakładając, że nakrętka toczy się po kole 3 bez poślizgu, otrzymuje się

$$\omega_1 y = \omega_2 r, \quad \omega_2 = \frac{\omega_1 y}{r} \quad \text{oraz} \quad n = \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{y}{r}.$$

Wstawiając te wyrażenia do równania prędkości otrzymano ostatecznie

$$T \frac{dy}{dt} + y = T \frac{du}{dt}, \quad \text{gdzie} \quad T = \frac{2\pi r}{\omega_1 h}, \quad \text{czyli} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ts}{Ts+1}.$$

Jest to więc element różniczkujący rzeczywisty.