

## 2. MODELOWANIE UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

### 2.1. POJĘCIA PODSTAWOWE

W modelowaniu układów wyróżnia się dwa rodzaje wielkości tzn. parametry i zmienne.

Parametrami są wielkości traktowane zwykle w przybliżeniu jako stałe, które charakteryzują pewne własności układu. Przykładami parametrów są masy i sztywności elementów występujących w modelu fizycznym układu mechanicznego oraz współczynniki równania różniczkowego opisującego ruch takiego układu.

Wielkości fizyczne, których przebiegi w funkcji czasu charakteryzują zachowanie się układu nazywa się zmiennymi lub sygnałami. Wielkości oddziałujące na układ  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  ...  $u_m(t)$ , których przebiegi są generowane na zewnątrz tego układu (przez jego otoczenie) nazywane są zmiennymi (sygnałami) wejściowymi lub wymuszeniami. Wyróżnia się wśród nich sygnały sterujące (sterowania) o przebiegach zmienianych w sposób celowy oraz sygnały zakłócające (zakłócenia) podlegające zmianom przypadkowym.

Wielkości oddziałujące na inne układy  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  ...  $y_p(t)$  (lub na otoczenie układu), za pośrednictwem których przekazywane są informacje o zachowaniu się rozważanego układu nazywane są zmiennymi (sygnałami) wyjściowymi lub odpowiedziami układu.

Ważnym pojęciem, często abstrakcyjnym, jest stan układu (procesu). Jest to najmniejszy liczebnie zbiór wielkości  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  ...  $x_n(t)$  określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań na układ.

Znajomość stanu układu w chwili początkowej  $t_0$  oraz wymuszeń w przedziale  $[t_0, t_1]$  wystarcza do określenia przebiegów odpowiedzi oraz stanu układu w przedziale  $[t_0, t_1]$ .

Wielkości  $x_1, x_2 \dots x_n$  tworzące stan układu nazywane są zmiennymi (współrzednymi stanu)<sup>1)</sup>.

Wszystkie wymienione wyżej zmienne przedstawia się zwykle w postaci wektorów, tzn.:

wektora wymuszeń

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}; \text{ określonego w m-wymiarowej przestrzeni wymuszeń } U;$$

wektora odpowiedzi

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}; \text{ określonego w p-wymiarowej przestrzeni odpowiedzi } Y;$$

oraz wektora stanu

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \text{ określonego w n-wymiarowej przestrzeni stanu } X.$$

Przestrzenie  $U$ ,  $Y$  i  $X$  są zbiorami wszystkich możliwych wymuszeń  $\underline{u}$ , odpowiedzi  $\underline{y}$  oraz stanów układu  $\underline{x}$ . Zbiór wartości czasu, dla których wektory  $\underline{u}$ ,  $\underline{y}$  i  $\underline{x}$  są określone jest przestrzenią czasu  $T$ .

Jeżeli przestrzeń czasu jest ciągłą, to proces nazywa się procesem ciągłym w czasie. Jeżeli natomiast wymuszenie  $\underline{u}$ , stan  $\underline{x}$  oraz odpowiedź  $\underline{y}$  są określone tylko dla dyskretnych wartości czasu, to proces nosi nazwę dyskretnego w czasie lub impulsowego.

Cyfrowym nazywa się proces (układ), w którym zarówno przestrzeń czasu jak i przestrzeń wymuszeń, stanów i odpowiedzi są dyskretne.

Układ, w którym nie można określić ani jednej zmiennej stanu jest nazywany układem statycznym. Przykładem takiego układu

<sup>1)</sup> Układ, w którym można określić co najmniej jedną zmienną stanu nazywa się układem dynamicznym.

z zakresu mechaniki jest przekładnia zębata lub dźwigniowa o pomijalnej bezwładności, a z zakresu elektrotechniki sieć elementów rezystancyjnych. Układy statyczne nazywane są też bezinercyjnymi, ponieważ ich odpowiedzi na wymuszenia są natychmiastowe. Model matematyczny układów statycznych stanowią funkcje opisujące zależności między zmiennymi wejściowymi a wyjściowymi w każdej chwili czasu.

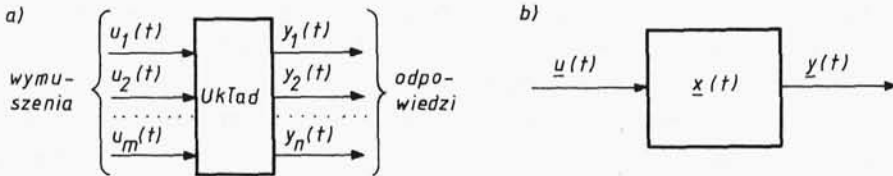
Układy dynamiczne, składające się z elementów o parametrach skupionych, są opisywane przez równania różniczkowe zwyczajne, w których zmienną niezależną jest czas. Liczba niezależnych warunków początkowych, niezbędnych do wyznaczenia jednoznacznego rozwiązania tych równań (rząd układu), jest równa liczbie zmiennych stanu. Przykładami układów o parametrach skupionych są układy mechaniczne, składające się z ciał sztywnych oraz nieważkich sprężyn i tłumików lub sieci elektryczne, składające się z wyodrębnionych elementów rezystancyjnych, pojemnościowych i indukcyjnościowych.

Modele fizyczne niektórych układów zawierają elementy o parametrach rozłożonych. Przykładem takiego elementu jest drgająca struna, w której nie można wyodrębnić sztywnych mas i nieważkich sprężyn. Procesy zachodzące w układach o parametrach rozłożonych są opisywane przez równania różniczkowe cząstkowe, w których jako zmienne niezależne obok czasu występują również współrzędne przestrzenne. Typowymi przykładami takich procesów są wielowymiarowe przepływy ciepła i gazów. Układ o parametrach rozłożonych (którego rząd jest równy nieskończoności) można w sposób przybliżony zastąpić układem o parametrach skupionych. Taką czynność nazywa się niekiedy dyskretyzacją, a otrzymany w ten sposób model - modelem dyskretnym. Do najbardziej rozpowszechnionych metod dyskretyzacji należy metoda różnic skończonych oraz metoda elementów skończonych. W niniejszym skrypcie rozpatrywane są wyłącznie modele o parametrach skupionych.

Wzajemne oddziaływania zachodzące między rozważanym układem a innymi układami wygodnie jest przedstawić za pomocą schematu blokowego, w którym układ jest reprezentowany przez prostokąt, a linie ze strzałkami obrazują przebiegi sygnałów. W schemacie blokowym przedstawionym na rys.2.1a układ jest traktowany jako "czarna skrzynka" przetwarzająca sygnały wejściowe na sygnały



wyjściowe (tzw. model wejście-wyjście). Na rys.2.1b przedstawiona jest inna postać schematu blokowego uwzględniająca zależności między wymuszeniami a stanem układu oraz odpowiedziami układu.

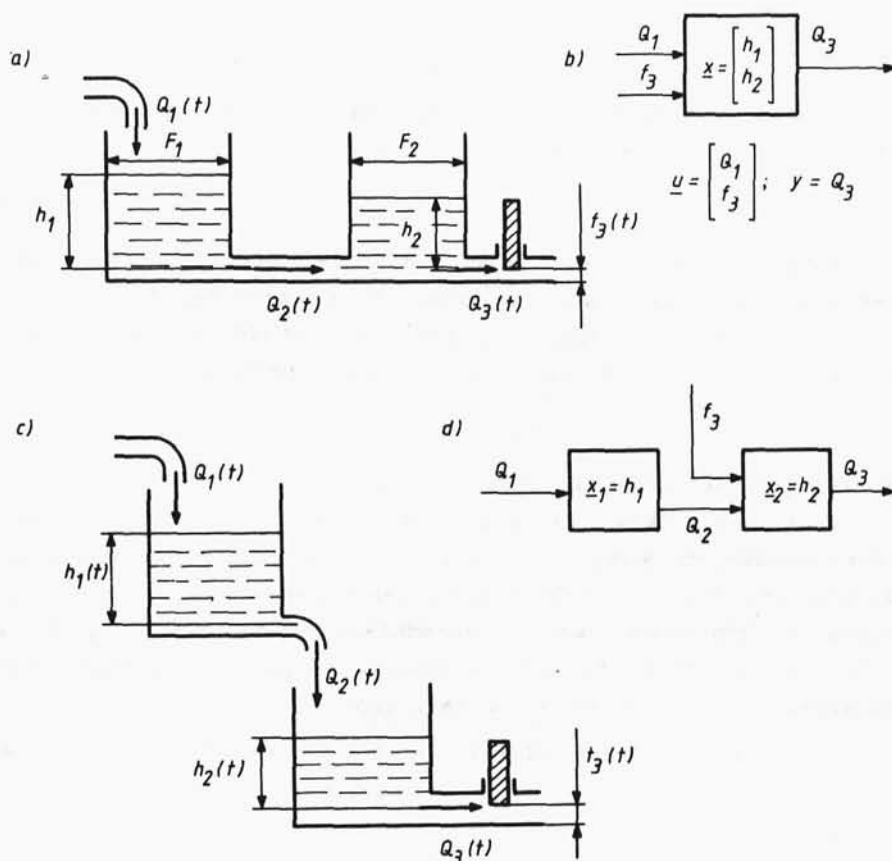


Rys.2.1. Schematy blokowe układów

Schematy blokowe są wykorzystywane często do opisu złożonych układów (ilustracja modeli fizycznych), ponieważ w sposób przejrzysty przedstawiają powiązania występujące między elementami lub podukładami. Na takich schematach prostokąty reprezentują te elementy układu, które można rozpatrywać niezależnie od pozostałych.

Na rys.2.2a przedstawiono model fizyczny układu hydraulicznego składającego się z dwóch połączonych zbiorników, a na rys.2.2b jego schemat blokowy. Zmiennymi wejściowymi tego układu są: natężenie  $Q_1(t)$  cieczy doprowadzonej do pierwszego zbiornika oraz pole  $f_3(t)$  przekroju zaworu umieszczonego na odpływie ze zbiornika drugiego. Zmienną wyjściową (działającą na dalsze fragmenty instalacji hydraulicznej) jest natężenie przepływu  $Q_3(t)$ . Natomiast za zmienne stanu przyjęto tu arbitralnie poziomy  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$  cieczy w obydwu zbiornikach. Za zmienne stanu można też przyjąć inne wielkości fizyczne, np. objętości  $V_1(t)$  i  $V_2(t)$  cieczy w zbiornikach albo  $V_1(t)$  i  $h_2(t)$  lub  $Q_2(t)$  i  $Q_3(t)$ , ponieważ ich wartości można w sposób jednoznaczny wyznaczyć znając wartości  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$ .

Na rys.2.2c przedstawiono model fizyczny nieco innego układu hydraulicznego, w którym strumień  $Q_2(t)$  cieczy przepływającej ze zbiornika pierwszego do drugiego zależy tylko od zmiennej  $h_1(t)$ . W tym przypadku obydwa zbiorniki mogą być analizowane niezależnie (dwa układy), co można zilustrować schematem blokowym pokazanym na rys.2.2d. Jeżeli za układ uzna się łącznie obydwa zbiorniki z rys.2.2c to jego schemat blokowy będzie miał ponownie postać przedstawioną na rys.2.2b.



Rys.2.2. Przykłady modeli fizycznych i schematów blokowych

## 2.2. OPIS MATEMATYCZNY SYGNAŁÓW

### 2.2.1. Przebieg sygnału

Przebieg sygnału w czasie można opisać w sposób analityczny, wykreślny lub tabelaryczny. Do opisu analitycznego oprócz funkcji elementarnych (potęgowych, wykładniczych, trygonometrycznych itp.) stosuje się często specjalne modele matematyczne sygnałów, do których zalicza się skok jednostkowy  $1(t)$  oraz impuls jednostkowy  $\delta(t)$ .

Skok jednostkowy jest to nieciągła funkcja jednej zmiennej (zwykle czasu) przyjmująca wartość 0 dla argumentu ujemnego i 1 dla dodatniego

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Na rys.2.3a przedstawiono przebieg skoku jednostkowego  $1(t)$  oraz funkcji skokowej opisanej wzorem

$$y(t) = b \cdot 1(t-t_1). \quad (2.2)$$

Funkcje skokowe są stosowane do opisu szybkozmiennych sygnałów występujących podczas procesów przejściowych. Poza tym wiele rzeczywistych sygnałów, których wartość jest równa zero dla  $t < t_0$  wygodnie jest opisywać za pomocą funkcji

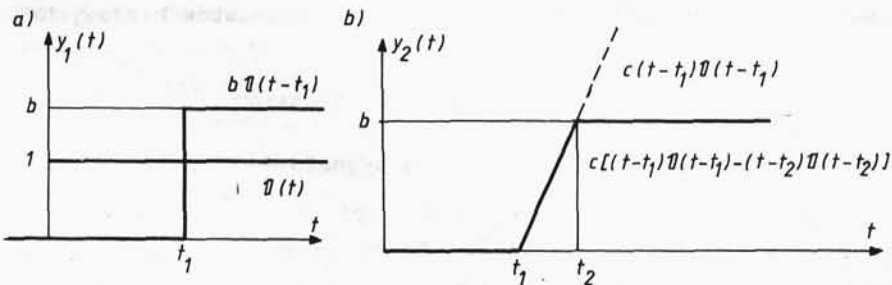
$$y_1(t) = 1(t-t_0) f(t), \quad (2.3)$$

gdzie  $f(t)$  jest dowolną funkcją czasu.

Skok jednostkowy ułatwia również opis sygnałów bardziej skomplikowanych opisywanych różnymi funkcjami w różnych przedziałach czasu. Na przykład przebieg sygnału narastającego liniowo w skończonym czasie, przedstawiony na rys.2.3b, można opisać przy użyciu funkcji skokowych za pomocą jednego wzoru obowiązującego w każdym przedziale czasu

$$y_2(t) = c[(t-t_1) \cdot 1(t-t_1) - (t-t_2) \cdot 1(t-t_2)], \quad (2.4)$$

gdzie  $c = \frac{b}{t_1 - t_2}$ .



Rys.2.3. Typowe modele sygnałów przejściowych: a) sygnały skokowe, b) sygnał rosnący liniowo w skończonym czasie

Impuls jednostkowy nie jest właściwie funkcją lecz dystrybucją, która jest uogólnieniem pojęcia funkcji. Dystrybucję określa się za pomocą ciągu funkcji aproksymujących, które mogą

mieć różny kształt. Na przykład skok jednostkowy, traktowany jako dystrybucja, może być aproksymowany przez funkcję

$$f_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{t}{\tau} \quad (2.5)$$

lub

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -\frac{\tau}{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} & \text{dla } |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ 1 & \text{dla } t > \frac{\tau}{2}, \end{cases} \quad (2.6)$$

przedstawione na rys.2.4a i b.

Na gruncie teorii dystrybucji skok jednostkowy jest definiowany jako granica ciągu funkcji aproksymujących

$$1(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(t). \quad (2.7)$$

Natomiast impuls jednostkowy, zwany też impulsem Diraca  $\delta(t)$ , jest dystrybucją definiowaną jako granica ciągu funkcji  $g(t)$ , które są pochodnymi względem czasu funkcji  $f(t)$  aproksymujących skok jednostkowy

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} g(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{dt} f(t). \quad (2.8)$$

Na rys.2.4c i d przedstawiono wykresy dwóch funkcji aproksymujących impuls jednostkowy

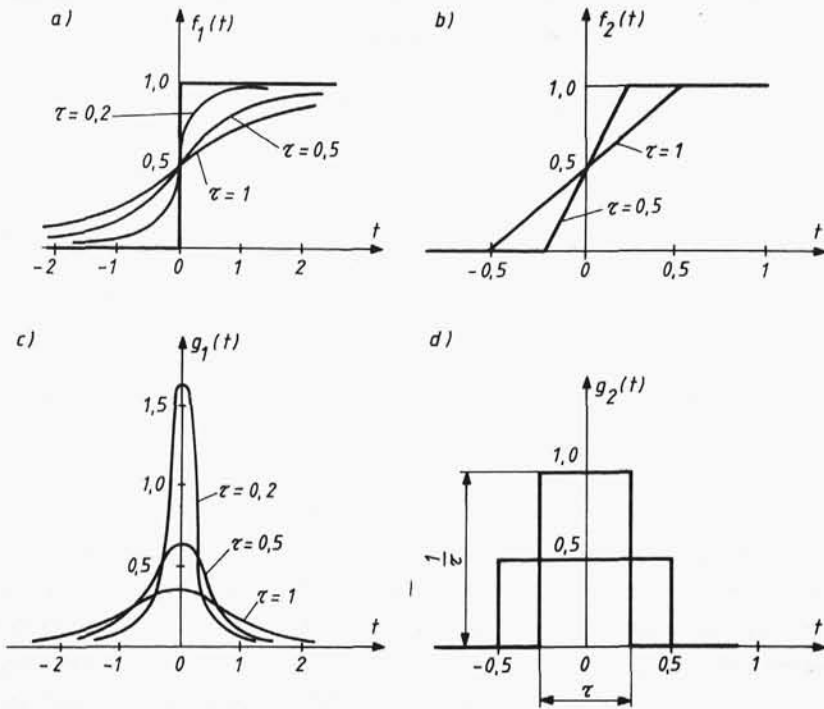
$$g_1(t) = \frac{d}{dt} f_1(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau}{\tau^2 + t^2} \quad (2.9)$$

oraz

$$g_2(t) = \frac{d}{dt} f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |t| > \frac{\tau}{2}, \\ \frac{1}{\tau} & \text{dla } |t| \leq \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

W miarę zmniejszania wartości parametru  $\tau$  funkcje aproksymujące impuls jednostkowy stają się coraz bardziej wysmukłe, osiągając w granicy postać nieskończenie wąskiego i nieskończenie wysokiego impulsu o powierzchni równej 1. Dlatego też impuls Diraca definiuje się niekiedy za pomocą związków

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0, \\ \infty & \text{dla } t = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$



Rys.2.4. Przykłady funkcji aproksymujących: a) i b) skok jednostkowy, c) i d) impuls jednostkowy

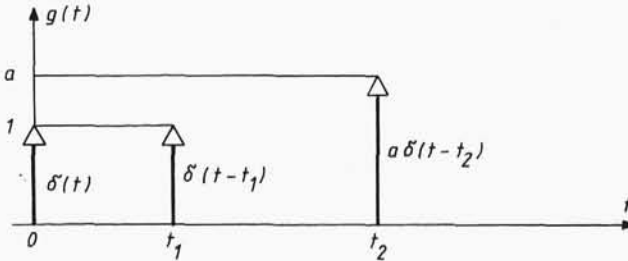
Teoria dystrybucji, która nie mieści się w ramach tego skryptu, pozwala wykonywać na dystrybucjach podobne operacje jak na zwykłych funkcjach, np. dodawanie, mnożenie przez liczbę rzeczywistą, różniczkowanie - z zachowaniem zapisu stosowanego dla zwykłych funkcji [3]. Operacje te, zwane dystrybucyjnymi, wykonuje się na ciągach funkcji reprezentujących dystrybucje. Można wykazać, że impuls jednostkowy jest pochodną dystrybucyjną skoku jednostkowego

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t). \quad (2.12)$$

Impuls jednostkowy jest stosowany do przybliżonego opisu sygnałów mających postać krótkotrwałych impulsów, których przykładem jest siła powstająca podczas zderzenia dwóch ciał sztywnych. Każdy taki krótkotrwały impuls o dowolnym przebiegu  $g(t)$ , którego powierzchnia, czyli wartość całki  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = a$  jest da-



na, może być traktowany w przybliżeniu jako  $a\delta(t)$ , czyli impuls nieskończenie wąski i nieskończenie wysoki o powierzchni równej  $a$ . Współczynnik  $a$ , przez który mnożony jest impuls jednostkowy nazywa się wagą impulsu. Na rys.2.5 przedstawiono symboliczny sposób oznaczania impulsów na wykresach czasowych.

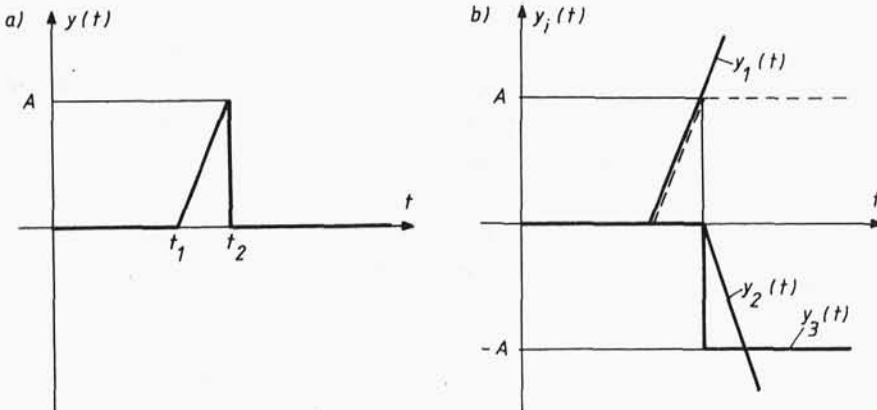


Rys.2.5. Symbole oznaczające impulsy na wykresach czasowych

### Przykład 2.1

Dla impulsu trójkątnego, którego przebieg jest przedstawiony na rys.2.6, należy podać opis analityczny:

- przybliżony przy użyciu impulsu Diraca,
- ściśły przy użyciu funkcji liniowych i skoku jednostkowego.



Rys.2.6. Impuls trójkątny: a) przebieg impulsu, b) funkcje składowe, których superpozycja jest impulsem trójkątnym

Uproszczony opis rozważanego impulsu otrzymuje się mnożąc jego powierzchnię przez impuls Diraca przesunięty do punktu  $t_0$  przyjętego dowolnie z przedziału  $t_1 \leq t_0 \leq t_2$

$$y(t) = \frac{1}{2} A (t_2 - t_1) \delta(t - t_0). \quad (2.13)$$

Dla uzyskania opisu ścisłego wygodnie jest rozłożyć impuls trójkątny na funkcje składowe pokazane na rys.2.6b. Można łatwo zauważyć, że suma funkcji  $y_1(t) + y_2(t)$  daje przebieg pokazany na tym rysunku linią przerywaną, a rozważany impuls wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \\ &\Rightarrow \frac{A}{t_2 - t_1} [(t - t_1)1(t - t_1) - (t - t_2)1(t - t_2)] - A1(t - t_2) = \\ &= \frac{A}{t_2 - t_1} (t - t_1) [1(t - t_1) - 1(t - t_2)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Końcowa postać (2.14) jest iloczynem funkcji liniowej opisującej narastanie impulsu przez tzw. funkcję bramki (podaną w nawiasie kwadratowym), która jest często stosowana do opisu impulsów prostokątnych.

### 2.2.2. Widmo sygnału

Oprócz opisu w dziedzinie czasu rozpowszechniony jest opis w dziedzinie częstotliwości, przy użyciu tzw. modeli widmowych, które wyznacza się na podstawie analizy częstotliwościowej Fouriera. Modele widmowe ułatwiają klasyfikację i analizę sygnałów a także ocenę dokładności modelowania, ponieważ porównywanie widm jest znacznie prostsze i bardziej miarodajne od porównywania przebiegów czasowych.

Każdą funkcję okresową  $f(t)$ , spełniającą warunki Dirichleta, można przedstawić w postaci szeregu Fouriera składającego się ze składowej stałej i składowych harmonicznych o pulsacjach (częstotliwościach kołowych)  $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1 \dots$ , gdzie  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  - pulsacja podstawowa,  $T$  - okres funkcji. Warunki Dirichleta oznaczają, że przedział o długości  $T$  może być podzielony na określoną liczbę podprzedziałów, w których funkcja  $f(t)$  jest monotoniczna, a w każdym punkcie nieciągłości istnieje granica lewostronna  $f(t_{-0})$  i prawostronna  $f(t_{+0})$  o skończonych wartościach. Przykład funkcji okresowej, spełniającej warunki Dirichleta, przedstawiono na rys.2.7. Suma szeregu Fouriera pokrywa