

POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI
TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

ISBN 83-902194-0-9

M E C H A N I K A
W
L O T N I C T W I E

"ML-VI" 1994

WARSZAWA 1995

Wydawnictwo zostało sfinansowane przez:

- Instytut Lotnictwa, Warszawa
- Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa
- Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej
- MP-PZL Aerospace Industries, spółka z o.o.
- Departament Rozwoju i Wdrożeń Ministerstwa Obrony Narodowej
- WSK PZL Mielec
- WSK PZL Rzeszów
- "PZL-HYDRAL" S.A., Wrocław
- Wydział Uzbrojenia i Lotnictwa Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa
- Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Mechaników Polskich
- Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

POLSKIE TOWARZYSTWO MECHANIKI
TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

M E C H A N I K A
W
L O T N I C T W I E

"ML-VI" 1994

pod redakcją Jerzego Maryniaka

WARSZAWA 1995

Organizatorzy Konferencji:

- Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej – Oddział Warszawski
- Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej
- Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa
- Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa
- Instytut Lotnictwa, Warszawa
- Sekcja Lotnicza Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Mechaników Polskich

Komitet Naukowy:

prof.dr hab.inż. STANISŁAW DUBIEL
prof.dr hab.inż. ZBIGNIEW DŻYGADŁO
dr hab.inż. ZDOBYSŁAW GORAJ
prof.dr hab.inż. JERZY MARYNIAK
dr hab.inż. MACIEJ MRÓZ
dr hab.inż. WIESŁAW SOBIERAJ

Redaktor Techniczny – Ewa Koisar

Druk – Drukarnia Nr 1, ul.Rakowiecka 37, Warszawa

Konferencje "MECHANIKA W LOTNICTWIE"

Ogólnopolskie konferencje "Mechanika w Lotnictwie" zostały zainicjowane w 1984 roku przez prof. dr hab. inż. Stanisława Dubiela i prof. dr hab. inż. Zbigniewa Dźygadłę z Wojskowej Akademii Technicznej oraz prof. dr hab. inż. Jerzego Maryniaka z ITLiMS Politechniki Warszawskiej, którzy stanowią niezmiennie Komitet Naukowy i Organizacyjny.

Zamiarem organizatorów było:

- stworzenie ogólnopolskiego forum stymulującego twórczo środowisko lotnicze różnych specjalizacji;
- ułatwienie i przyspieszenie przebiegu informacji o pracach naukowo-badawczych, konstrukcyjno-technologicznych i eksploatacji;
- integrowanie środowiska naukowo-technicznego różnych dyscyplin: lotnictwa, techniki raketowej i uzbrojenia;
- współpracę środowisk naukowych wyższych uczelni, instytutów naukowo-badawczych przemysłowych i wojskowych oraz przemysłu.

W sześciu kolejnych konferencjach wzięło udział 335 Autorów z różnych ośrodków, którzy wygłosili łącznie 304 referaty, co wyszczególniono w tablicach.

Tablica 1. Referaty

Tematyka	ML-I'84	ML-II'86	ML-III'88	ML-IV'90	ML-V'92	ML-VI'94	Suma
	19.I	27-28.I	18-19.IV	26-27.III	29-30.IV	16-17.V	
Modelowanie, identyfikacja	2	3	8	5	0	8	26
Dynamika lotu	4	8	3	5	5	7	32
Aerodynamika	0	0	7	0	6	9	22
Rakiety, pociski, bomby	3	7	10	3	6	11	40
Smigłowce	6	4	4	5	4	1	24
Symulatory lotu	2	3	3	5	0	6	19
Flatter i drgania	8	5	8	5	7	7	40
Konstrukcja, materiały	0	0	4	5	5	5	19
Manewr bojowy, naprowadzanie	1	1	6	4	5	6	23
Stateczność, sterowanie	4	11	3	6	7	12	43
Dynamika silników, śmigła	1	6	2	6	1	0	16
Suma referatów	31	48	58	49	46	72	304

Tablica 2. Autorzy

Institucja Autora	ML-I	ML-II	ML-III	ML-IV	ML-V	ML-VI	Suma
ILot.	6	11	4	7	9	11	48
ITLiMS PW	11	12	17	23	12	27	102
ITWL	4	7	6	3	3	2	25
IDS-PZL W-wa Okęcie	0	0	2	0	0	4	6
Pol. Rzeszowska	2	0	5	0	0	4	11
OBR-WSK PZL Mielec	1	2	0	0	0	2	5
SZD-PZL Bielsko-Biała	0	2	3	0	0	0	5
WAT	13	12	20	11	19	24	99
WSI Radom	2	1	3	1	0	1	8
WOSL Dęblin	0	0	0	2	0	0	2
WSK PZL Świdnik	0	0	1	0	1	0	2
IPPT PAN W-wa	0	5	0	0	1	0	6
CAGI i MGTU GA Moskwa	0	0	0	3	0	1	4
Inne	0	6	1	1	4	0	12
Suma	39	58	62	51	49	76	335

Wszystkie obrady na konferencjach miały charakter plenarny. Referaty były podzielone na sesje tematyczne co ułatwia prezentację i dyskusję. Obrady przebiegały w twórczej i żywej atmosferze nacechowanej życzliwością.

Prace przedstawione na konferencjach zostały opublikowane w wydawnictwach Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Zarówno dotychczasowe konferencje jak i publikowane prace zyskały wysoką ocenę uczestników.

Zgodnie z dwuletnim rytmem w maju 1966 roku odbędzie się VII Ogólnopolska Konferencja MECHANIKA W LOTNICTWIE "ML-VII'96", na którą serdecznie zapraszają organizatorzy.

Jerzy Maryniak

ZASTOSOWANIE PRAW STEROWANIA JAKO WIĘZÓW
NIEHOLONOMICZNYCH W DYNAMICE LOTU
SAMONAPROWADZAJĄCEJ SIĘ RAKIETY NA
SAMOŁOT-CEL

TARIQ AL AZAB

JERZY MARYNIAK

*Institut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska*

W pracy przedstawiono model matematyczny i symulację numeryczną dynamiki lotu samonaprowadzającej się rakiety na samolot-cel przy zastosowaniu praw sterowania jako więzów nieholonomicznych wykorzystując równania Boltzmanna-Hamela

1. Wstęp

Jak wiadomo równania Boltzmanna-Hamela są uogólnionymi równaniami Lagrange'a drugiego rodzaju. Zastosowano równania Boltzmanna-Hamela dla układów mechanicznych w postaci [2,5,6]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \gamma_{\mu\alpha}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^* \quad (1.1)$$

gdzie:

- $\alpha, \mu, r = 1, 2, \dots, k$, k – liczba stopni swobody,
- ω_μ – quasi-prędkości,
- T^* – energia kinetyczna w quasi-prędkościach,
- π_μ – quasi-współrzędne,
- Q_μ^* – siły uogólnione,
- $\gamma_{\alpha\mu}^r$ – trójwskaźnikowe mnożniki Boltzmanna określone następującą zależnością:

$$\gamma_{\alpha\mu}^r = \sum_{\delta=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \left(\frac{\partial a_{r\delta}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{r\lambda}}{\partial q_\delta} \right) b_{\delta\mu} b_{\lambda\alpha} \quad (1.2)$$

Związki między quasi-prędkościami i prędkościami uogólnionymi mają postać:

$$\omega_\delta = \sum_{\alpha=1}^k a_{\delta\alpha} \dot{q}_\alpha \quad \dot{q}_\delta = \sum_{\mu=1}^k b_{\delta\mu} \omega_\mu \quad (1.3)$$

gdzie:

- \dot{q}_δ – prędkości uogólnione,
- $a_{\delta\alpha}, b_{\delta\alpha}$ – współczynniki będące funkcjami współrzędnych uogólnionych, $a_{\delta\alpha} = a_{\delta\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_k)$, $b_{\delta\alpha} = b_{\delta\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_k)$
- q_k – współrzędne uogólnione

przy czym istnieje następująca zależność macierzowa:

$$[a_{\delta\mu}] = [b_{\delta\mu}]^{-1}$$

Jeżeli na układ nałożone są więzy kinematyczne niecałkowalne, to układ jest nieholonomiczny. Gdy te więzy mają postać:

$$\sum_{\lambda=1}^k a_{l+\beta} \dot{q}_\lambda = 0 \quad \beta = 1, 2, \dots, k-l \quad (1.4)$$

wtedy wygodnie jest tak wprowadzić quasi-prędkości, aby na mocy równań więzów (1.4) $k-l$ ostatnich quasi-prędkości było równych "zeru". Wystarczy założyć, że:

$$\omega_{l+\beta} = \sum_{\lambda=1}^k a_{l+\beta} \dot{q}_\lambda = 0 \quad \beta = 1, 2, \dots, k-l \quad (1.5)$$

a l pierwszych quasi-prędkości spełnia dowolny liniowy układ równań:

$$\omega_\mu = \sum_{\lambda=1}^k a_{\mu\lambda} \dot{q}_\lambda \quad \mu = 1, 2, \dots, l \quad (1.6)$$

Równania Boltzmann-Hamela dla układów mechanicznych o więzach nieholonomicznych w quasi-współrzędnych mają postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^k \sum_{\alpha=1}^l \gamma_{\mu\alpha}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \omega_\alpha = Q_\mu^* \quad (1.7)$$

Równania (1.7) w liczbie l wraz z $k-l$ równaniami więzów (1.4) i l równaniami związków kinematycznych (1.6) stanowią układ $k+l$ równań, z którego przy zadanych wartościach początkowych można wyznaczyć $k+l$ niezerowych funkcji czasu: prędkości $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ i współrzędnych q_1, q_2, \dots, q_k .

2. Model fizyczny rakiety i przyjęte układy odniesienia

Przyjęto model fizyczny następującej postaci:

- rakieta traktowana jest jako układ mechaniczny, sztywny, o sześciu stopniach swobody,
- nie występują żadne ruchy mas powietrza względem Ziemi,
- pominięto wpływ krzywizny Ziemi,
- rakieta jest traktowana jako obiekt sterowany, sterowanie odbywa się w trzech kanałach:
 - pochylania Θ – przez wychylenie steru wysokości δ_H
 - odchylania Ψ – przez wychylenie steru kierunku δ_V
 - przechylania Φ – przez wychylenie lotek δ_L

Ruch rakiety jest opisany za pomocą współrzędnych i czasu w przestrzeni zdarzeń, w której położenie rakiety jest jednoznacznie wyznaczone wyłącznie współrzędnymi kątowymi i liniowymi (jest to przestrzeń konfiguracji).

Do opisu dynamiki obiektu ruchomego, jakim jest rakieta, niezbędne są następujące układy odniesienia:

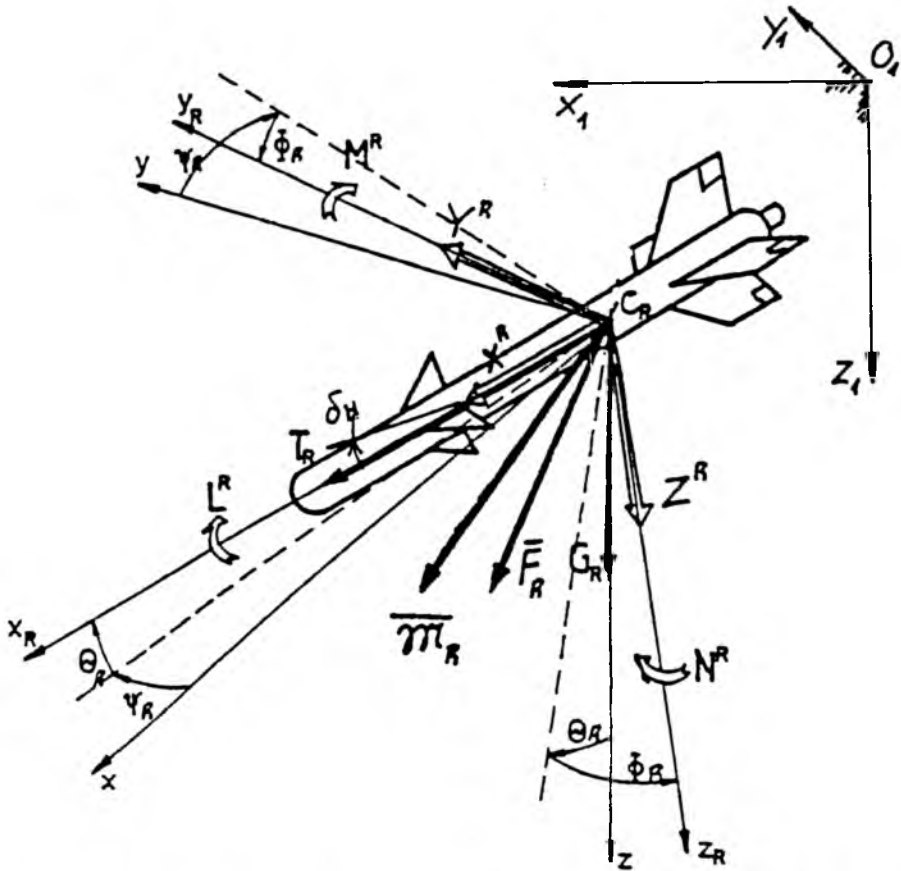
- nieruchomy układ grawitacyjny związany z Ziemią $0_1x_1y_1z_1$ (rys.1,3),
- układ grawitacyjny $0_gx_gy_gz_g$ związany z poruszającą się rakieta, zawsze równoległy do układu nieruchomego $0_1x_1y_1z_1$ (rys.1),
- układ $0xyz$ związany sztywno z poruszającą się rakieta, posiadający początek w punkcie 0 (rys.1), którego oś $0x$ jest równoległa do średniej cięciwy aerodynamicznej,
- układ prędkościowy $0x_a y_a z_a$ (rys.1) związany z kierunkiem przepływu ośrodka opływającego raketę, oś $0x_a$ posiada kierunek prędkości opływu a zawrot przeciwny.

Wszystkie podstawowe układy odniesienia stosowane przy opisie matematycznym są układami prawoskrętnymi.

Składowe wektorów chwilowej prędkości liniowej V_0 i kątowej Ω w układzie odniesienia $0xyz$ związanym z rakieta (rys.2,3) są następujące:

— wektor chwilowej prędkości liniowej V_0 :

$$V_0 = U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k} \quad (2.1)$$



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne oraz siły i momenty sił zewnętrznych działające na raketę w locie

gdzie:

U - prędkość podłużna,

V - prędkość boczna,

W - prędkość pionowa,

— wektor chwilowej prędkości kątowej:

$$\Omega = P i + Q j + R k \quad (2.2)$$

gdzie:

P - prędkość kątowa przechylania,

Q - prędkość kątowa pochylenia,

R - prędkość kątowa odchylenia.

Składowe chwilowej prędkości kątowej P, Q, R są liniowymi związkami prędkości uogólnionych $\dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}$ o współczynnikach zależnych od współrzędnych uogólnionych Φ, Θ, Ψ i wyrażają się następująco:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = A_{\Omega} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

gdzie macierz transformacji A_{Ω} ma postać:

$$A_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Quasi-prędkości liniowe związane są z prędkościami uogólnionymi następująco:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = A_{\nu} \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

gdzie macierz transformacji A_{ν} :

$$A_{\nu} = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & \sin \Psi \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \cos \Psi \sin \Theta - \sin \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Psi \sin \Theta + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \cos \Psi \sin \Theta + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Psi \sin \Theta - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

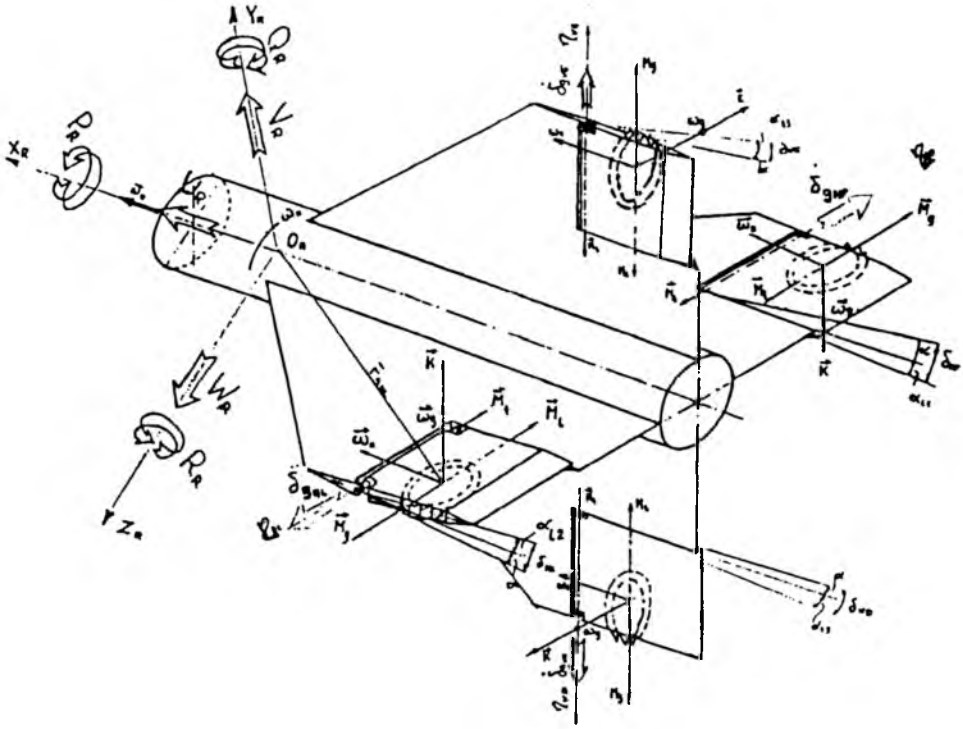
3. Prawa sterowania

Rakieta jest automatycznie sterowana przez autopilota zamontowanego w głowicy rakiety. Sterowanie automatyczne odbywa się w dwóch kanałach (rys.1,3):

- pochylenia Θ – przez wychylenie steru wysokości δ_H ,
- odchylenia Ψ – przez wychylenie steru kierunku δ_V .

W kanale przechylenia Φ stabilizacja zapewniona jest dzięki wychyleniu samoczynnym girolotek δ_L (rys.3).

Prawa sterowania w postaci ogólnej [1,2,3,5,6]:



Rys. 2. Układ wychylenia girolotek, poziomo i pionowo

— w kanale pochylania θ :

$$T_1 \dot{\delta}_H + T_H \delta_H = K_\theta^H (\theta - \theta_z) + K_q^H (Q - Q_z) + K_w^H (W - W_z) + \quad (3.1)$$

$$+ K_x^H (x_g - x_{gz}) + K_z^H (z_g - z_{gz}) + K_u^H (U - U_z) + \delta_{H0}$$

— w kanale odchylenia ψ :

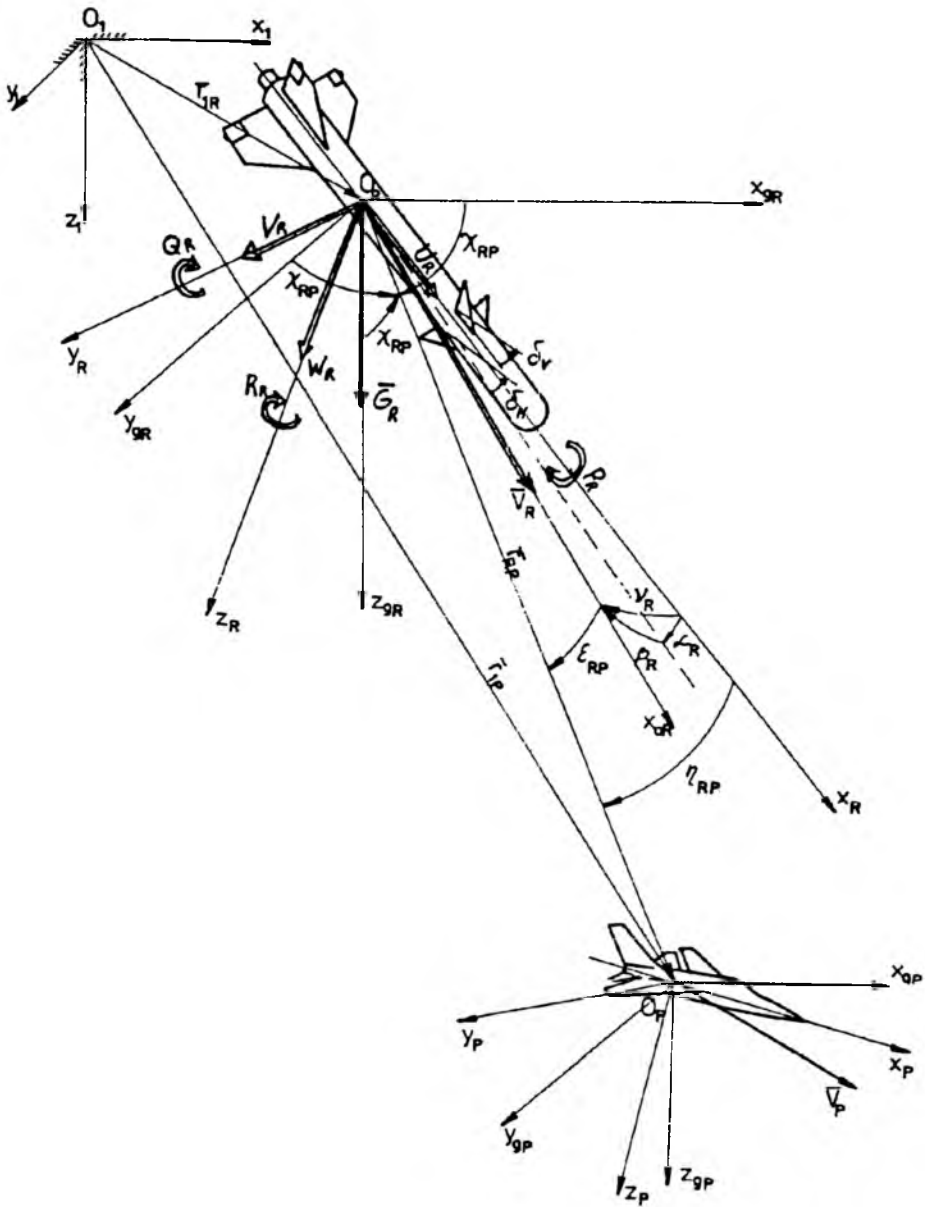
$$T_2 \dot{\delta}_V + T_V \delta_V = K_\psi^V (\psi - \psi_z) + K_r^V (R - R_z) + K_w^V (W - W_z) + \quad (3.2)$$

$$+ K_y^V (y_g - y_{gz}) + K_v^V (V - V_z) + \delta_{V0}$$

gdzie:

T_1, T_2, T_H, T_V — stałe czasowe,

$K_\theta^H, K_q^H, K_w^H, K_x^H, K_z^H, K_u^H, K_\psi^V, K_r^V, K_w^V, K_y^V, K_v^V$ — współczynniki wzmocnienia.



Rys. 3. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne i prędkości przy naprowadzaniu rakiety na cel w ruchu przestrzennym

4. Ogólne równania ruchu rakiety sterowanej wyprowadzone przy zastosowaniu równań Boltzmanna-Hamela dla układów mechanicznych o więzach nieholonomicznych

Do opisu ruchu przyjęto współrzędne uogólnione i quasi-prędkości. Są to:
— współrzędne środka masy rakiety w układzie $0_g x_g y_g z_g$:

$$q_1 = x_g \quad q_2 = y_g \quad q_3 = z_g$$

— kąty quasi-eulerowskie:

$$q_4 = \Phi \quad q_5 = \Theta \quad q_6 = \Psi$$

— kąty sterowania:

$$q_7 = \delta_H \quad q_8 = \delta_V$$

— rzuty wektora prędkości środka masy rakiety V_c w układzie $0xyz$:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

— rzuty wektora prędkości kątovej rakiety Ω w układzie $0xyz$:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ostatnie dwie quasi-prędkości tak wprowadzono, aby zgodnie z (1.5) na podstawie praw sterowania (3.1) i (3.2) traktowanych jako równania więzów, były równe zero:

$$\begin{aligned} \omega_7 &= K_\theta^H(\Theta - \Theta_z) + K_q^H(Q - Q_z) + K_w^H(W - W_z) + K_x^H(x_g - x_{gz}) + \\ &+ K_z^H(z_g - z_{gz}) + K_u^H(U - U_z) + \delta_{H0} - T_1 \dot{\delta}_H - T_H \delta_H \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_8 &= K_\psi^V(\Psi - \Psi_z) + K_r^V(R - R_z) + K_w^V(W - W_z) + K_y^V(y_g - y_{gz}) + \\ &+ K_v^V(V - V_z) + \delta_{V0} - T_2 \dot{\delta}_V - T_V \delta_V \end{aligned} \quad (4.4)$$

Trójwskaźnikowe mnożniki Boltzmanna $\gamma_{\mu\alpha}^r$ można obliczyć ze wzoru (1.2) lub wykorzystując następujące związki:

$$d\delta\pi_r - \delta d\pi_r = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \gamma_{\mu\lambda}^r d\pi_\mu \delta\pi_\lambda \quad r = 1, 2, \dots, k \quad (4.5)$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \gamma_{35}^1 &= \gamma_{62}^1 = \gamma_{16}^2 = \gamma_{43}^2 = \gamma_{24}^3 = \gamma_{52}^3 = \gamma_{65}^4 = \gamma_{46}^5 = \gamma_{54}^6 = 1 \\ \gamma_{26}^1 &= \gamma_{53}^1 = \gamma_{34}^2 = \gamma_{61}^2 = \gamma_{15}^3 = \gamma_{42}^3 = \gamma_{56}^4 = \gamma_{64}^5 = \gamma_{54}^6 = -1 \\ \gamma_{53}^7 &= -\gamma_{35}^7 = \gamma_{26}^7 = \gamma_{62}^7 = k_u^H & \gamma_{59}^7 &= -k_\theta^H \cos \Phi + \frac{k_q^H}{T_1} \\ \gamma_{15}^7 &= -\gamma_{51}^7 = \gamma_{42}^7 = -\gamma_{24}^7 = k_w^H & \gamma_{69}^7 &= k_\theta^H \sin \Phi \\ \gamma_{64}^7 &= -\gamma_{46}^7 = k_q^H & \gamma_{29}^7 &= -k_x^H a_{21} - k_z^H a_{23} \\ \gamma_{19}^7 &= -k_x^H a_{11} - k_z^H a_{13} + \frac{k_u^H}{T_1} & \gamma_{39}^7 &= -k_x^H a_{31} - k_z^H a_{33} + \frac{k_w^H}{T_1} \\ \gamma_{15}^8 &= -\gamma_{51}^8 = \gamma_{42}^8 = -\gamma_{24}^8 = k_v^V & \gamma_{19}^8 &= -k_y^V a_{12} \\ \gamma_{61}^8 &= -\gamma_{16}^8 = \gamma_{34}^8 = -\gamma_{43}^8 = k_v^V & \gamma_{29}^8 &= -k_y^V a_{22} + \frac{k_v^V}{T_2} \\ \gamma_{45}^8 &= -\gamma_{54}^8 = k_r^V & \gamma_{39}^8 &= -k_y^V a_{32} + \frac{k_w^V}{T_2} \\ \gamma_{59}^8 &= -k_\psi^V \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} & \gamma_{69}^8 &= -k_\psi^V \frac{\cos \Phi}{\sin \Theta} + \frac{k_v^V}{T_2} \end{aligned}$$

Pozostałe współczynniki $\gamma_{\mu\alpha}^r$ są równe zero.

Po podstawieniu do równania (1.7) związków (4.1) ÷ (4.4) i (4.6) oraz po obliczeniu energii kinetycznej i jej pochodnych otrzymamy następujący układ równań w postaci ogólnej:

— równanie ruchów podłużnych:

$$\begin{aligned} M_R(\dot{U} + QW - RV) - S_{xR}(Q^2 + R^2) + & \\ & (4.6) \\ + \delta_H \left[R^2(J_{xH} - J_{zH}) - P^2(J_{xH} - J_{zH}) \right] \left(2k_x^H a_{11} - 2\frac{k_u^H}{T_1} + 2k_z^H a_{13} - k_w^H \right) + & \\ + \delta_V \left[Q^2(J_{xV} - J_{yV}) - P^2(J_{xV} - J_{yV}) \right] \left(2k_y^V a_{12} - k_w^V Q - k_v^V R \right) = X & \end{aligned}$$

— równanie ruchów poprzecznych:

$$\begin{aligned}
 M_R(\dot{V} + RU - PW) + S_{xR}(\dot{R} + QP) + \\
 + \delta_H \left[R^2(J_{xH} - J_{zH}) - P^2(J_{xH} - J_{zH}) \right] \left(2k_x^H a_{21} - 2k_z^H a_{23} + Pk_w^H - Rk_u^H \right) + \\
 + \delta_V \left[Q^2(J_{xV} - J_{yV}) - P^2(J_{xV} - J_{yV}) \right] \left(2k_y^V a_{22} + k_w^V P - 2\frac{k_v^V}{T_2} \right) = Y
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

— równanie ruchów wznoszących:

$$\begin{aligned}
 M_R(\dot{W} + PV - QU) - S_{xR}(\dot{Q} - PR) + \\
 + \delta_H \left[R^2(J_{xH} - J_{zH}) - P^2(J_{xH} - J_{zH}) \right] \left(2k_x^H a_{31} - 2\frac{k_w^H V}{T_1} + 2k_z^H a_{33} - Qk_u^H \right) + \\
 + \delta_V \left[Q^2(J_{xV} - J_{yV}) - P^2(J_{xV} - J_{yV}) \right] \left(2k_y^V a_{32} + k_v^V P - \frac{k_w^V}{T_2} \right) = Z
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

— równanie ruchów przechyłających:

$$\begin{aligned}
 J_{xR}\dot{P} - (J_{yr} - J_{zr})QR + \\
 + \delta_H \left[R^2(J_{xH} - J_{zH}) - P^2(J_{xH} - J_{zH}) \right] \left(k_x^H R - k_w^H V \right) + \\
 + \delta_V \left[Q^2(J_{xV} - J_{yV}) - P^2(J_{xV} - J_{yV}) \right] \left(k_w^V V - k_r^V Q + k_v^V W \right) = L
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

— równanie ruchów pochyłających:

$$\begin{aligned}
 J_{yR}\dot{Q} - (J_{zr} - J_{xr})RP - S_{xR}(\dot{W} + PV + QU) + \\
 + \delta_H \left[R^2(J_{xH} - J_{zH}) - P^2(J_{xH} - J_{zH}) \right] \left(2k_\theta^H \cos \Phi - 2\frac{k_q^H}{T_1} + k_w^H U - k_u^H W \right) + \\
 + \delta_V \left[Q^2(J_{xV} - J_{yV}) - P^2(J_{xV} - J_{yV}) \right] \left(k_w^V U + k_r^V P + 2k_\psi^V \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} \right) = M
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

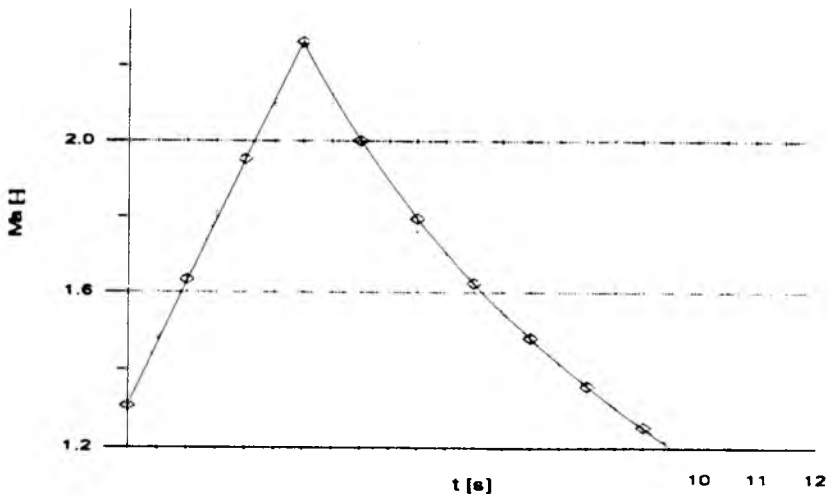
— równanie ruchów odchyłających:

$$\begin{aligned}
 J_{zR}\dot{R} - (J_{xr} - J_{yr})RQ + S_{xR}(\dot{V} - PW + RU) + \\
 + \delta_H \left[R^2(J_{xH} - J_{zH}) - P^2(J_{xH} - J_{zH}) \right] \left(-2k_\theta^H \sin \Phi + k_u^H V - k_q^H P \right) + \\
 + \delta_V \left[Q^2(J_{xV} - J_{yV}) - P^2(J_{xV} - J_{yV}) \right] \left(-k_v^V U - \frac{k_r^V}{T_2} + 2k_\psi^V \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} \right) = N
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

5. Symulacja numeryczna i wyniki

Program symulacji numerycznej ruchu rakiety napisano w języku Fortran dla rakiety klasy "Sidewinder". Po dobraniu współczynników wzmocnienia w prawach sterowania wykonano wiele obliczeń symulacyjnych przy różnych warunkach początkowych – start rakiety.

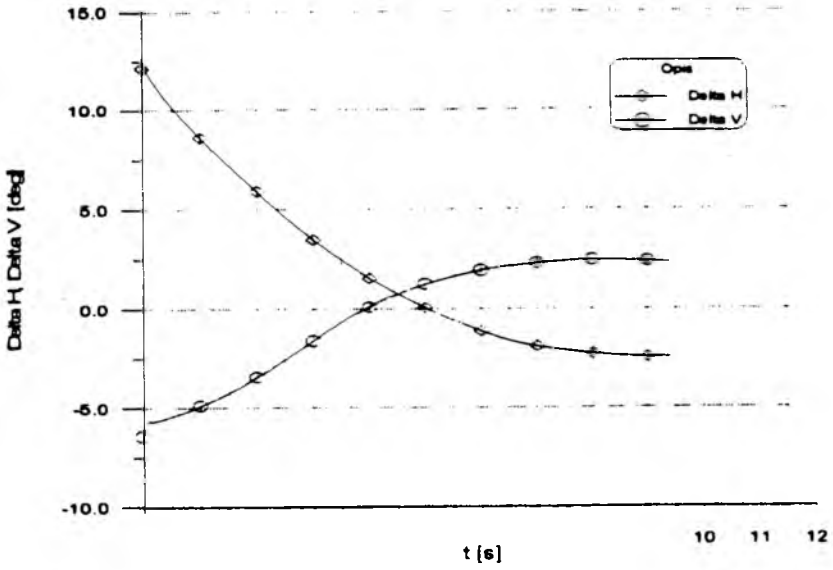
Wyniki symulacji numerycznej naprowadzania rakiety na cel (rys.3) przedstawiono na rys.4 ÷ rys.7. Na rys.4 pokazano liczbę Macha w funkcji czasu. Po 3s liczba Ma maleje, ponieważ rakieta klasy "Sidewinder" ma jeden silnik, którego praca trwa 3s. Na rys.5 pokazano wychylenia sterów wysokości δ_H i kierunku δ_V w funkcji czasu, a na rys.6 kąt pochylenia Θ i kąt odchylenia Ψ .



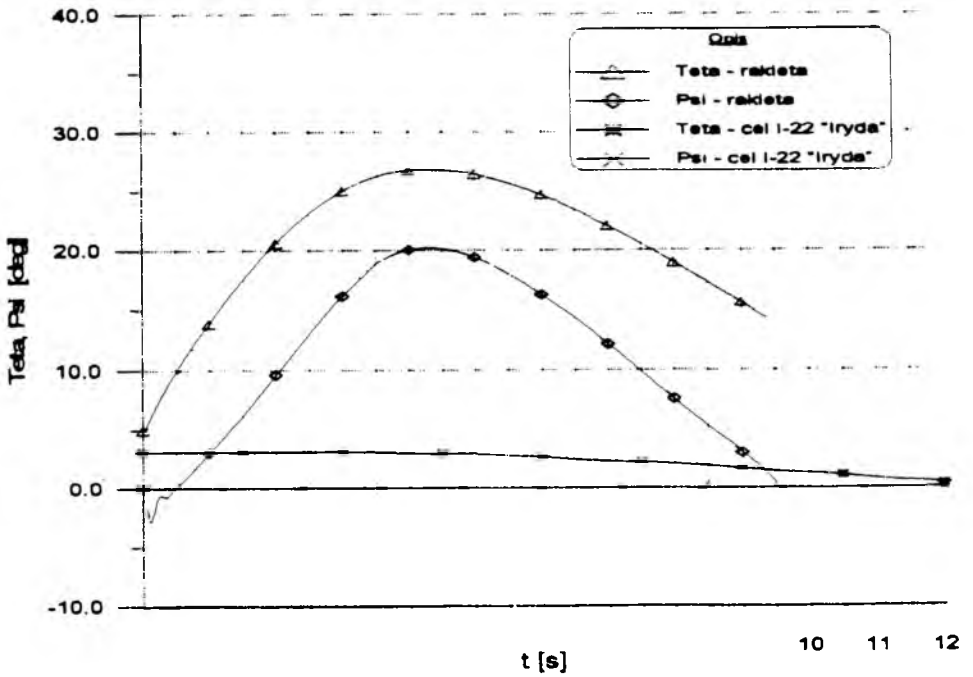
Rys. 4. Liczba Macha = $f(t)$

Rys.7 przedstawia przebiegi zmian w czasie: wysokości lotu rakiety i celu, odległości na osi X, Y, Z rakiety-cel, odległość zbliżania R_{rc} rakiety do celu i strefy rażenia.

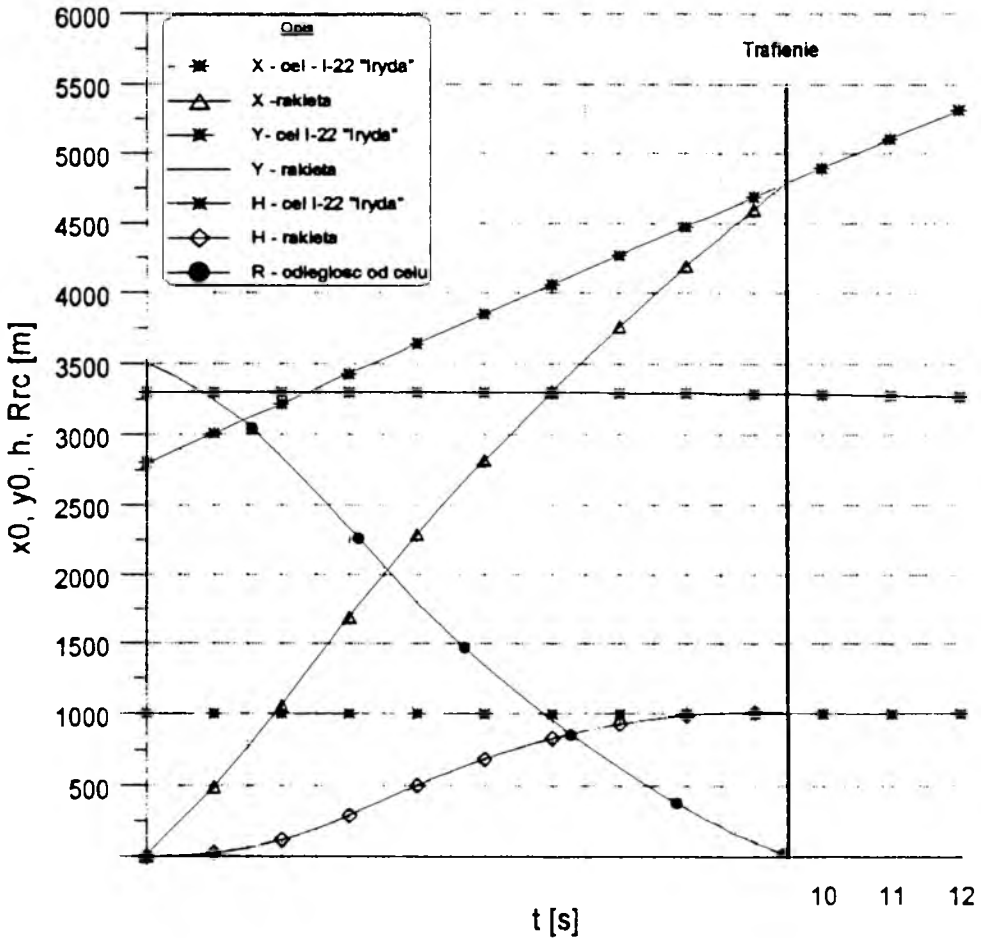
Rakieta osiąga strefę rażenia celu w czasie 9.5s. Takie wyniki symulacji oceniono bardzo wysoko.



Rys. 5. Kąty wychylenia sterów wysokości i kierunku $\delta_H, \delta_V = f(t)$



Rys. 6. Kąt pochylenia Θ i kąt odchylenia $\Psi = f(t)$



Rys. 7. Położenie w przestrzeni rakiety i celu $R_{rc}, X, Y, Z = f(t)$

6. Literatura

1. AL AZAB T., *Modelowanie i identyfikacja parametrów lotu samolotu pasażerskiego IL-62M z uwzględnieniem systemu automatycznego sterowania w kanale pochylenia*, Praca dyplomowa magisterska, ITLiMS PW, 1992 (nie publikowana)
2. AL AZAB T., *Dynamika rakiety samonaprowadzającej się na ruchomy cel z wykorzystaniem praw sterowania jako więzów nieholonomicznych*, Rozprawa doktorska, ITLiMS PW, 1994 (nie publikowana)
3. BLAKELOCK J.H., *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, New York 1991

4. GLAPSKI M., *Możliwości i ograniczenia proporcjonalnego samonaprowadzenia raket powietrze-powietrze*, WAT Warszawa 1985
5. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Warszawa 1975
6. MARYNIAK J., *Modelowanie odpalania i lotu rakiety klasy powietrze-powietrze*, V Ogólnopolska Konferencja "Mechanika w Lotnictwie", 1992, 560-613

Application of Control Laws in a Form of Nonholonomic Constraints to Flight Dynamics of a Self-Guided Air-to-Air Missile

Summary

The paper presents a mathematical model and numerical simulation of the flight dynamics of a self-guided air-to-air missile. The set of control laws has been presented in a form of nonholonomic constraints. Equations of motion have been derived by application of the Boltzmann-Hamel equations (Lagrangian equations in terms of quasi-coordinates).

UWAGI O REALIZACJI PROGRAMOWEGO RUCHU SAMOLOTU PO ZAŁOŻONEJ TRAJEKTORII

WOJCIECH BLAJER

Wyższa Szkoła Inżynierska, Radom

Program ruchu samolotu konstruuje się za pomocą żądanej trajektorii lotu (dwa warunki więzów programowych), warunku nakładanego na położenia kątowe płatowca względem tej trajektorii i ograniczenia na ruch wzdłuż trajektorii. Sterowanie samolotem realizowane jest za pomocą wychyleń powierzchni sterowych i zmian siły ciągu. Uwy-puklany jest szczególnie sposób realizacji więzów trajektorii lotu – za pomocą stycznych reakcji sterowania. Implikuje to dodatkowe ograniczenia nakładane na położenia kątowe płatowca (więzy toru lotu są "podwójne"). Weryfikowana jest tym samym klasyczna definicja programu niepełnego dla układu sterowanego. W pracy przytacza się równania dla symulacji ruchu programowego oraz zależności dla syntezy sterowania programowego. Omawia się aspekty efektywnego numerycznego badania tych zagadnień. Demonstruje się przykład numerycznej symulacji beczki sterowanej samolotu TS-11 "Iskra".

1. Wprowadzenie

Praca niniejsza stanowi komentarz do wcześniejszych opracowań autora (m.in. [1,4]) i wynikłej wokół nich dyskusji, dotyczących realizacji ruchu programowego samolotu. Zagadnienie omawiane jest w świetle nowych aspektów teoretycznych [2,3].

W najpełniejszym modelu [4], program ruchu konstruuje się za pomocą czterech ograniczeń: postulowanej przestrzennej trajektorii lotu (dwa warunki więzów programowych), żądanych zmian orientacji kątowej płatowca i żądanego ruchu wzdłuż trajektorii (zmian prędkości lotu). Samolot traktuje się jako sztywny, sterowany za pomocą wychyleń powierzchni sterowych (lotek oraz sterów wysokości i kierunku) i zmian siły ciągu. Generuje się równania pozwalające na symulację przebiegu ruchu programowego oraz zależności dla syntezy wymaganego sterowania samolotem. Zaproponowany

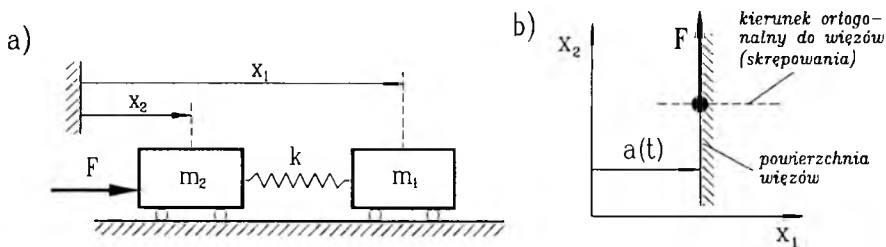
model umożliwia symulację szerokiej gamy manewrów przestrzennych samolotu [1].

Reakcjami sterowania są zmiany momentów aerodynamicznych działających na samolot w wyniku wychyleń sterów (parametrów sterowania) i zmiany siły ciągu, która jest jednocześnie parametrem sterowania. Pociąga to za sobą zróżnicowany sposób realizacji więzów programowych składających się na wspomniany wyżej program ruchu. Realizacja dwóch warunków, ograniczeń nakładanych na położenia kątowne płatowca i na ruch wzdłuż trajektorii jest "ortogonalna" [3,8]. Reakcje sterowania są jawnie reprezentowane na kierunkach skrepowania tych więzów i mogą bezpośrednio regulować warunki zerowania się przyspieszeń od sił czynnych i bezwładności na tych kierunkach, co warunkuje realizację więzów.

Realizacja więzów trajektorii lotu ma zgoła odmienny charakter. Ruch po trajektorii sterowany jest za pomocą skoordynowanych wychyleń sterów, a towarzyszące im reakcje sterowania (momenty aerodynamiczne) nie są jawnie reprezentowane na kierunkach skrepowania (ortogonalnych do toru). W sensie geometrycznym (w sześciowymiarowej przestrzeni konfiguracji samolotu) reakcje sterowania są styczne do więzów toru lotu [8]. Realizacja tych więzów wymagać więc będzie bilansowania się sił czynnych i bezwładności na tych kierunkach bez bezpośredniego udziału sił sterujących. Wymóg ten uznać można jako dodatkowe ograniczenia nakładane na konfigurację płatowca względem trajektorii lotu. Od konfiguracji tej zależą bowiem wartości i kierunki sił aerodynamicznych decydujące o bilansowaniu się sił na kierunkach skrepowania, a tym samym o realizacji więzów trajektorii lotu. Ponieważ zmiany położenia kątownych płatowca sterowane są za pomocą wychyleń sterów, w ten niebezpośredni sposób, "dopasowując" konfigurację samolotu do wspomnianych wymogów, ruch samolotu po trajektorii realizowany może być za pomocą "stycznych" reakcji sterowania [2÷4,8].

Formalnie, opisany ruch programowy powinien być sklasyfikowany jest jako "niezupelny" [6] – liczba więzów programowych (równa liczbie kanałów sterowania) jest mniejsza od liczby stopni swobody układu. Klasyfikacja ta jest w niniejszej pracy weryfikowana. Więzy trajektorii lotu uznać można bowiem za "podwójne", co jest konsekwencją niemożności ich ortogonalnej realizacji i dodatkowych warunków nakładanych na położenia kątowne samolotu. Tym samym, program ruchu składający się z opisanych wyżej czterech więzów programowych dla samolotu o sześciu stopniach swobody (sterowanego w klasyczny sposób) jest "programem zupełnym", w pełni determinującym przebieg ruchu samolotu. Jednoznaczne sterowanie ruchem o sześciu stopniach swobody możliwe jest też za pomocą tylko czterech kanałów sterowania.

Dla zilustrowania istoty "realizacji stycznej" więzów programowych i wy-



Rys. 1. Ilustracja realizacji stycznej więzów programowych

jaśnienia "podwójności" ograniczeń nakładanych przez więzy realizowane w ten sposób, prześledźmy następujący prosty przykład. Niech na ruch układu przedstawionego na rys.1a, opisanego równaniami:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 - d_0) \quad (1.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 - d_0) + F$$

nałożony będzie warunek więzów programowych:

$$x_1 - a(t) = 0 \quad (1.2)$$

gdzie $a(t)$ wyraża żądane zmiany położenia masy m_1 , natomiast d_0 jest długością nienapiętej sprężyny. Załóżmy, że warunek ten ma być realizowany za pomocą siły F przyłożonej do masy m_2 .

Na rys.1b zagadnienie realizacji więzów (1.2) zilustrowane jest w dwuwymiarowej przestrzeni konfiguracji układu, który reprezentowany jest w niej jako punkt. Siła F jest styczna do więzów (1.2) i nie może bezpośrednio regulować warunku nakładanego przez te więzy na przyspieszenia układu na kierunku skrepowania. Z uwzględnieniem dynamiki układu, warunek ten ma postać:

$$-\frac{k}{m_1}[a(t) - x_2 - d_0] - \ddot{a}(t) = 0 \quad (1.3)$$

Z powodu braku jawnej zależności warunku (1.3) od reakcji sterowania F , jedyną możliwością jego wypełnienia, a jednocześnie realizacji więzów (1.2), jest sterowanie wartością siły w sprężynie. Żądanie takie jest w swej istocie dodatkowym ograniczeniem nakładanym na przebieg $x_2(t)$:

$$x_2 - b(t) = 0 \quad (1.4)$$

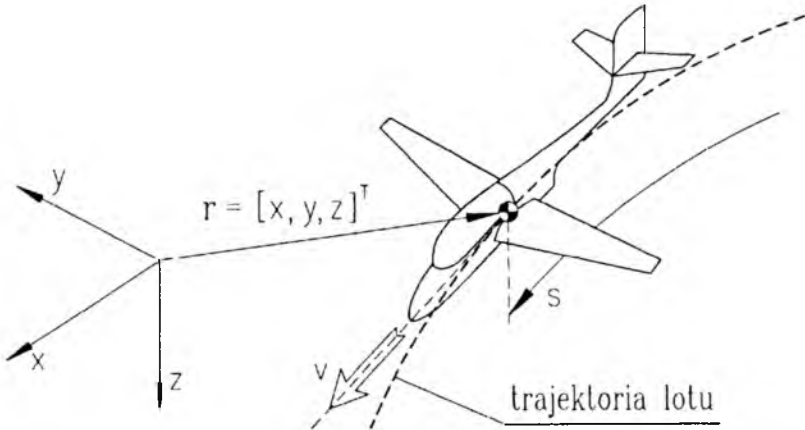
gdzie $b(t) = m_1 \ddot{a}(t)/k + a(t) - d_0$. Zmiany x_2 regulowane są natomiast przez F , której wymagany przebieg wyznaczyć można z warunku $\ddot{x}_2 - \ddot{b}(t) = 0$ jako:

$$F(t) = m_2 \ddot{b}(t) - k[a(t) - b(t) - d_0] = \frac{m_1 m_2}{k} a^{(4)}(t) + (m_1 + m_2) \ddot{a}(t) \quad (1.5)$$

W ten sposób więzy (1.2) realizowane mogą być za pomocą stycznej reakcji sterowania F . Ponieważ niemożność realizacji ortogonalnej tych więzów narzuca dodatkowe ograniczenia na położenia układu, uznać je można za "więzy podwójne" (przy założonym modelu sterowania). Program ruchu składający się formalnie z jednego warunku jest tym samym programem zupełnym dla układu o dwóch stopniach swobody, determinującym całkowicie jego ruch.

Powyższy przykład jest prostym analogiem zagadnienia sterowania robotami z uwzględnieniem odkształcalności w przegubach [7,9]. Zagadnienie sterowania ruchem programowym samolotu jest koncepcyjnie o tyle bardziej złożone, że mamy najczęściej do czynienia z realizacją mieszaną więzów programowych – część z nich realizowana jest za pomocą ortogonalnych, a część za pomocą stycznych reakcji sterowania. W ogólnym wypadku wymaga to zastosowania daleko bardziej złożonego aparatu analizy matematycznej [1÷4,8].

2. Modelowanie ruchu programowego



Rys. 2. Więzy trajektorii lotu

Jak wspomniano, w najpełniejszym modelu program ruchu stanowią:

• **Żądana trajektoria lotu.** Ze względów przytoczonych w pracy [4], równania toru lotu formułuje się w następującej formie parametrycznej:

$$\mathbf{r} - \widehat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{0}$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widehat{x}(s) \\ \widehat{y}(s) \\ \widehat{z}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

gdzie $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ jest wektorem wodzącym środka masy samolotu w układzie inercjalnym (rys.2), s jest parametrem naturalnym krzywej toru lotu, zmienne $(\widehat{\cdot})$ oznaczają wielkości programowe (żądane, zadane). W pracy [1] proponuje się efektywny sposób "szkicowania" trajektorii (2.1) za pomocą ciągu kolejnych punktów w przestrzeni, a następnie interpolowania/aproksymowania jej funkcjami sklejanymi (splajnami) o odpowiedniej gładkości.

Równanie (2.1) odpowiada dwu warunkom więzów programowych. Realizacja tych więzów jest styczna [2÷4,8], co prowadzi do dwu dodatkowych ograniczeń nakładanych na położenia kątowne płatowca [4] (więzy są "podwójne"). Sumaryczna ilość warunków nakładanych przez więzy (2.1) na uogólnione położenie samolotu wynosi więc cztery.

• **Warunek na orientację kątową płatowca.** Przy modelowaniu większości manewrów więzy te modelowane są jako [1]:

$$\beta - \widehat{\beta}(s) = 0 \quad \text{lub} \quad \psi_1 - \widehat{\psi}_1(s) = 0 \quad (2.2)$$

gdzie β jest kątem ślizgu, a ψ_1 kątem przechylenia układu aerodynamicznego względem układu grawitacyjnego [4]. Pierwszy rodzaj więzów (2.2) stosuje się przy modelowaniu zakrętów prawidłowych ($\beta = 0$) lub ślizgu bocznego, drugi rodzaj więzów (2.2) wykorzystywany jest na przykład dla modelowania beczki sterowanej lub pętli nożowej [1,4]. Niezależnie od rodzaju, realizacja więzów (2.2) jest ortogonalna (za pomocą momentów aerodynamicznych wywoływanych bezpośrednio wychyleniami sterów).

• **Więzy na ruch wzdłuż trajektorii.** Zakłada się je w postaci:

$$v - \widehat{v}(s) = 0 \quad \text{lub} \quad s - \widehat{s}(t) = 0 \quad (2.3)$$

gdzie v jest prędkością lotu. Drugą postać więzów (2.3) traktować można jako całkową formę postaci pierwszej. Realizacja więzów (2.3) jest ortogonalna (za pomocą siły ciągu).

Wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje programu ruchu: (I) – gdy stanowią go tylko trzy warunki programowe (2.1) i (2.2) oraz (II) – gdy na ruch samolotu nakładane są wszystkie cztery ograniczenia (2.1) ÷ (2.3). W rozumieniu tej pracy mamy wówczas do czynienia z programem ruchu odpowiednio "niezpełnym" (I) i "zpełnym" (II). W wypadku II, program ruchu i sposób jego realizacji determinują ściśle wymagane przebiegi stanu ruchu samolotu. W wypadku I, ruch wzdłuż trajektorii (prędkość lotu) nie jest "krępowany" więzami programowymi.

Samolot modelowany jest jako sztywny, sterowany za pomocą wychyleń lotek δ_L , sterów wysokości δ_H i kierunku δ_V oraz zmian siły ciągu T . Ten ostatni parametr sterowania "uruchamiany" jest tylko przy realizacji programu II, gdy realizowane są więzy (2.3). Przy realizacji programu I, T może być dowolną funkcją czasu i stanu ruchu samolotu.

3. Równania ruchu programowego

Równania ruchu programowego I są następujące (szczegółowe wyprowadzenie prezentowane jest w pracy [4]):

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho S v^2 c_x + T \cos \alpha \cos \beta - mg \sin \psi_2 \right) \quad (3.1)$$

$$\dot{s} = v \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \psi_2 \cos \psi_3 \\ \cos \psi_2 \sin \psi_3 \\ -\sin \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho S v^2 c_y + T \sin \beta - mg \sin \psi_1 \cos \psi_2 + \\ & + m v^2 \left[\hat{x}'' (\sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3 - \cos \psi_1 \sin \psi_3) + \right. \\ & \left. + \hat{y}'' (\sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 + \cos \psi_1 \cos \psi_3) + \hat{z}'' \sin \psi_1 \cos \psi_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho S v^2 c_z + T \sin \alpha \cos \beta - mg \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \\ & + m v^2 \left[\hat{x}'' (\cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3 - \sin \psi_1 \sin \psi_3) + \right. \\ & \left. + \hat{y}'' (\cos \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 + \sin \psi_1 \cos \psi_3) + \hat{z}'' \cos \psi_1 \cos \psi_2 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\beta - \widehat{\beta}(s) = 0 \quad \text{lub} \quad \phi - \widehat{\phi}(s) = 0 \quad (3.5)$$

gdzie:

- m – masa samolotu,
- ρ – gęstość powietrza,
- S – powierzchnia nośna płata,
- $c_x(\alpha, \beta), c_y(\alpha, \beta), c_z(\alpha, \beta)$ – współczynniki sił aerodynamicznych oporu, bocznej i nośnej,
- α – kąt natarcia,
- ψ_1, ψ_2, ψ_3 – kąty quasi-Eulerowskie (Bryanta) definiujące wzajemne położenie kątowe układów grawitacyjnego i aerodynamicznego [4],
- $(\cdot)'$ – różniczkowanie po s .

Inne oznaczenia wyjaśnione zostały wcześniej.

Równania (3.1) ÷ (3.5) stanowią układ siedmiu RRA (równań różniczkowo-algebraicznych) względem $v, s, \alpha, \beta, \psi_1, \psi_2$ i ψ_3 . Równania różniczkowe (3.1) i (3.2) opisują ruch samolotu wzdłuż trajektorii. Równania (3.3) wyrażają dwa warunki nakładane przez więzy toru lotu na uogólnione położenie płatowca, definiując skierowanie wektora prędkości liniowej samolotu w funkcji położenia na torze. Równania (3.4) są natomiast dodatkowymi ograniczeniami nakładanymi na konfigurację płatowca, wymuszonymi styczną realizacją więzów trajektorii lotu. Równania (3.5), w końcu, są równaniami więzów (2.2). Indeks powyższych RRA jest równy jeden [3], tzn. jednokrotne zróżniczkowanie po czasie równań algebraicznych (3.3) ÷ (3.5) przekształciłoby te RRA w odpowiedni układ RRZ (równań różniczkowych zwyczajnych).

Rozwiązywanie RRA (3.1) ÷ (3.5) polega na całkowaniu równań różniczkowych (3.1) i (3.2) przy jednoczesnym wyznaczaniu zmiennych algebraicznych $\alpha, \beta, \psi_1, \psi_2$ i ψ_3 w funkcji aktualnych wartości zmiennych różniczkowych v oraz s przy każdym szacowaniu prawych stron równań (3.1) i (3.2). Innymi słowy, dokonuje się analizy ruchu wzdłuż trajektorii (nie krępowanego programem ruchu I) oraz syntezy uogólnionego położenia samolotu w funkcji stanu ruchu wzdłuż toru lotu. Otrzymywane są przebiegi $v(t)$ i $s(t)$, a na tej podstawie z równań (3.3) ÷ (3.5) otrzymywane są programowe zmiany $\alpha(t), \beta(t), \psi_1(t), \psi_2(t)$ i $\psi_3(t)$. W pracy [4] przytacza się zależności dla jednoznacznego wyznaczania klasycznych kątów samolotowych ϕ, θ i ψ w funkcji $\alpha, \beta, \psi_1, \psi_2$ i ψ_3 .

Równania ruchu programowego II otrzymuje się zastępując równania (3.1) i (3.2) ograniczeniami (2.3) nakładanymi na ruch wzdłuż trajektorii. Otrzy-

muje się wówczas układ sześciu równań algebraicznych względem t , α , β , ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 . Rozwiązując te równania w funkcji czasu t , otrzymuje się charakterystyki ruchu programowego $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ i $\psi_3(t)$ – dokonywana jest synteza w pełni zdeterminowanego ruchu samolotu. Przebiegi $s(t)$ i $v(t)$ otrzymywane są bezpośrednio z warunków (2.3).

4. Synteza sterowania programowego

Zmiany wychyleń sterów $\delta = [\delta_L, \delta_H, \delta_V]$ wymagane dla realizacji zarówno programu ruchu I, jak i programu ruchu II wyznaczane są z równania:

$$\delta(t) = \mathbf{N}_1^{-1} (\mathbf{J}\dot{\Omega} + \tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega - \mathbf{N}_0) = \delta(v, \alpha, \beta, P, Q, R, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}) \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_1 = \frac{1}{2}\rho S v^2 \begin{bmatrix} bc_{l1} & 0 & bc_{l1}^w \\ 0 & c_a c_{m1} & 0 \\ bc_{n1}^w & 0 & bc_{n1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_0 = \frac{1}{2}\rho S v^2 \begin{bmatrix} bc_{l0} \\ c_a c_{m0} \\ bc_{n0} \end{bmatrix}$$

$\Omega = [P, Q, R]^T$ są składowymi prędkości kątovej samolotu w centralnym układzie własnym, \mathbf{J} jest macierzą momentów bezwładności w tym układzie, b jest rozpiętością płata, c_a oznacza średnią cięciwę aerodynamiczną, natomiast współczynniki momentów aerodynamicznych modeluje się jako:

$$\begin{aligned} c_l &= c_{l0}(\alpha, \beta, P, R) + c_{l1}(\alpha, \beta, P, R)\delta_L + c_{l1}^w(\alpha, \beta, P, R)\delta_V \\ c_m &= c_{m0}(\alpha, \beta, Q) + c_{m1}(\alpha, \beta, Q)\delta_H \\ c_n &= c_{n0}(\alpha, \beta, P, R) + c_{n1}^w(\alpha, \beta, P, R)\delta_L + c_{n1}(\alpha, \beta, P, R)\delta_V \end{aligned} \quad (4.2)$$

a $(\cdot)^w$ oznacza efekty wtórne wychyleń lotek i steru kierunku.

Jak demonstruje się w pracy [1], możliwe jest wyznaczenie $P(t)$, $Q(t)$ i $R(t)$ w zależności od $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ i $\psi_3(t)$ oraz $\dot{\alpha}(t)$, $\dot{\beta}(t)$, $\dot{\psi}_1(t)$, $\dot{\psi}_2(t)$ i $\dot{\psi}_3(t)$. Pierwszą grupę tych charakterystyk otrzymuje się jako rozwiązanie równań ruchu programowego, ich pochodne najwygodniej jest wyznaczać numerycznie. Podobnie, $\dot{P}(t)$, $\dot{Q}(t)$ i $\dot{R}(t)$ najprościej wyznaczyć numerycznie na podstawie wcześniej określonych przebiegów $P(t)$, $Q(t)$ i $R(t)$.

Dysponując tak określonymi charakterystykami ruchu programowego, przebieg sterowania programowego otrzymuje się z równania (4.1) jako $\delta(t)$.

Gdy realizowany jest program ruchu II (nakładane są więzy na ruch wzdłuż trajektorii), sterowanie programowe ciągiem silnika wyznaczane jest z równania (3.1), przekształconego do postaci:

$$\begin{aligned} T(t) &= \cos^{-1} \alpha \cos^{-1} \beta \left(m\dot{v} + \frac{1}{2} \rho S v^2 c_x + mg \sin \psi_2 \right) = \\ &= T(v, \dot{v}, \alpha, \beta, \psi_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

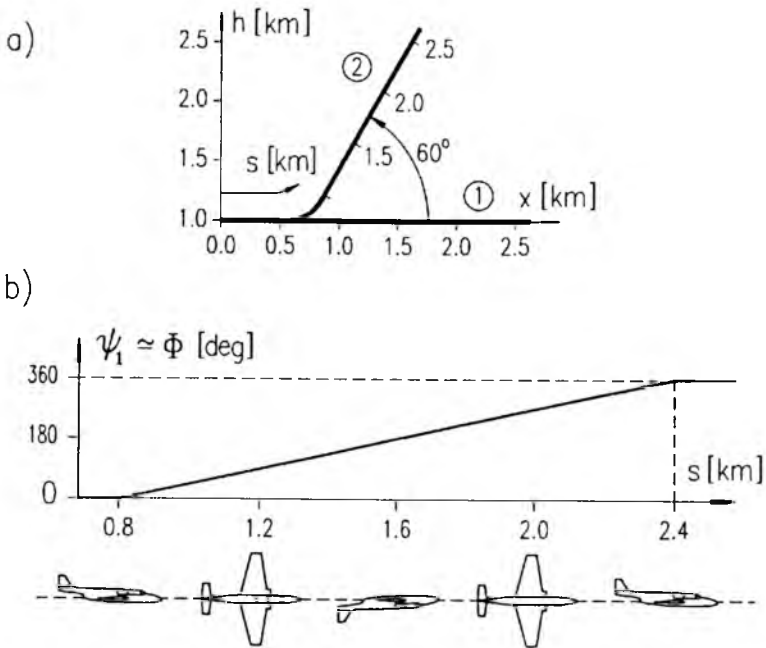
Wymagane w tej zależności charakterystyki programowe $v(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ i $\psi_2(t)$ otrzymywane są z rozwiązań równań ruchu programowego, natomiast $\dot{v}(t)$ najlepiej otrzymywać jest numerycznie na podstawie przebiegu $v(t)$.

5. Przykład: beczka sterowana

Do obliczeń wykorzystano dane samolotu TS-11 "Iskra" zebrane w pracy [5]. Dla uzależnienia współczynników momentów aerodynamicznych od możliwie dużych wartości P , Q i R zgodnie z równaniem (4.6) korzystano z "metody pasowej" liczenia sił aerodynamicznych. Ze względu na przybliżony charakter stosowanego modelu aerodynamicznego, prezentowane wyniki należy traktować jako jakościowe.

Rozważono dwa warianty manewru, o różnych kątach kątach pochylenia toru lotu: 0° (beczka pozioma) i 60° (beczka na wznoszeniu). Zakładane trajektorie przedstawione są na rys.3a. Na rys.3b pokazane są natomiast żądane zmiany kąta ψ_1 , który jest w przybliżeniu równy kątowi przechylenia samolotu ϕ . Manewry rozpoczynały się od poziomego lotu ustalonego z prędkościami odpowiednio 120 i 180 m/s. Ciąg silnika przyjmowano jako stały, równy wartości w locie początkowym (wynosił on odpowiednio 2300 i 4500 N). Nie nakładano tym samym ograniczeń (2.3) na ruch wzdłuż trajektorii – program ruchu był rodzaju I.

Przebiegi wybranych parametrów stanu symulowanego ruchu programowego oraz wymaganych wychyleń sterów ilustruje rys.4. Charakterystyczne jest wymuszenie lotu niesymetrycznego ($\beta \neq 0$). W położeniu nożowym, dla $\psi_1 \cong \phi$ bliskim 90° lub 270° , siłą równoważącą ciężar samolotu jest bowiem aerodynamiczna siła boczna, zależna głównie od kąta β . Sterowanie samolotem wymaga reagowania wszystkimi sterami. Wychylenia δ_L odpowiedzialne są za realizację żądanych zmian kąta ψ_1 , a skorelowane wychylenia δ_H i δ_V

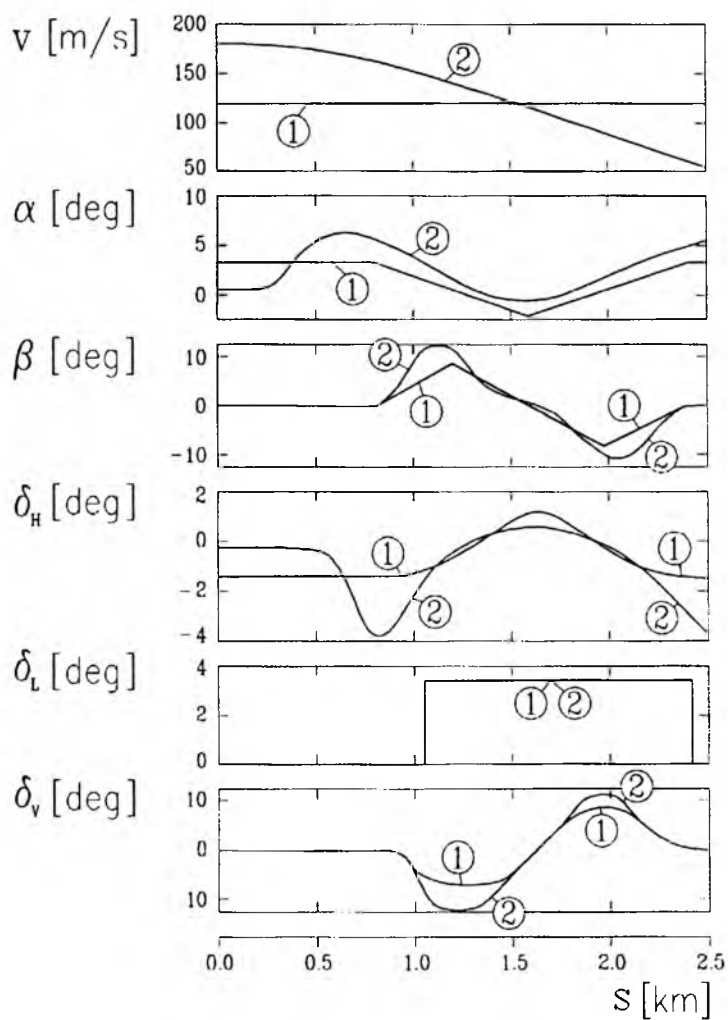


Rys. 3. Model symulowanej beczki sterowanej

dopasowują wymaganą konfigurację płatowca tak, by cały czas w locie z obrotem wokół osi podłużnej siły aerodynamiczne równoważyły ciężar samolotu.

6. Uwagi końcowe

Program ruchu samolotu budowany jest obligatoryjnie za pomocą więzów trajektorii lotu (2.1) i ograniczeń (2.2) na zmiany konfiguracji płatowca względem tej trajektorii. Dodatkowo nakładane mogą być warunki (2.3) na ruch wzdłuż trajektorii. Program taki, składający się z trzech (program I) lub czterech warunków (program II), odpowiada "celowi" sterowania przy wykonywaniu zamierzonych manewrów. Podkreślany jest szczególny charakter realizacji więzów trajektorii lotu – za pomocą stycznych reakcji sterowania, w porównaniu z ortogonalną realizacją więzów (2.2) i (2.3). Powoduje to, że na samolot nakładane są dodatkowe ograniczenia na jego położenia katowe – więzy toru lotu są "podwójne". Program ruchu II jest więc programem zupełnym pomimo, że liczba więzów programowych jest mniejsza od liczby



Rys. 4. Numeryczna symulacja beczki sterowanej

stopni swobody układu. Nie można więc dodać żadnych dodatkowych warunków w programie II, a jedynym warunkiem, który można dodać do programu I jest ograniczenie (2.3) na ruch wzdłuż trajektorii.

Wywód powyższy wyjaśnia obserwację że samolot, układ o sześciu stopniach swobody, może być jednoznacznie sterowany za pomocą tylko czterech kanałów sterowania. Jest to możliwe dzięki istnieniu sił aerodynamicznych. Siły te, zależne od konfiguracji płatowca względem toru lotu (wektora prędkości liniowej), pozwalają na zbilansowanie przyspieszeń na kierunkach prostopadłych do toru lotu bez bezpośredniego udziału sił sterujących. Sterowanie w ruchu po trajektorii ukierunkowane jest na odpowiednie dopasowywanie tej konfiguracji. Taki sposób sterowania nie jest możliwy w wypadku statków kosmicznych z oczywistego faktu braku atmosfery i oddziaływań aerodynamicznych. Sterowanie obiektem w przestrzeni kosmicznej odbywać musi się za pomocą sześciu kanałów sterowania, a program zupełny jego ruchu stanowić będzie sześć ograniczeń.

Uzyskiwane przebiegi zmiennych stanu ruchu samolotu w ruchu programowym i parametrów sterowania programowego mogą mieć duże znaczenie poznawcze przy studiowaniu charakterystyk i realizowalności poszczególnych manewrów. Mogą też stanowić wytyczne do budowy praw sterowania "do przodu" (w układzie otwartym) przy wykonywaniu tych manewrów. W locie rzeczywistym sterowanie takie powinno być uzupełnione o sterowanie w układzie zamkniętym (sprzężenie zwrotne) celem niwelowania odchodzenia od więzów.

7. Literatura

1. BLAJER W., *Numeryczna symulacja programowej realizacji figur akrobacji lotniczej*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, **29**, 1991, 413-426
2. BLAJER W., *On the Control Synthesis for Mechanical Systems in Specified Motion*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, **31**, 1993, 345-363
3. BLAJER W., *Structure of Differential-Algebraic Equations for Control Problems in Mechanics*, International Journal of Systems Science, **24**, 1993, 2367-2377
4. BLAJER W., PARCZEWSKI J., *Modelowanie matematyczne figur akrobacji lotniczej jako programowego lotu samolotu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, **29**, 1991, 427-442
5. GORAJ Z., *Obliczanie sterowności, równowagi i stateczności samolotu w zakresie poddźwiękowym*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1984
6. GUTOWSKI R., *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971

7. DE LUCA A., *Dynamic Control of Robots with Joint Elasticity*, Proc. of the 1988 IEEE Int. Conf. on Robots and Automation, Philadelphia, Pennsylvania, 1988, 152-158
8. PARCZEWSKI J., BLAJER W., *On Realization of Program Constraints: Part I – Theory*, ASME Journal of Applied Mechanics, **56**, 1989, 676-679
9. SPONG M.W., *Modelling of Elastic Joint Robots*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, **109**, 1987, 310-319

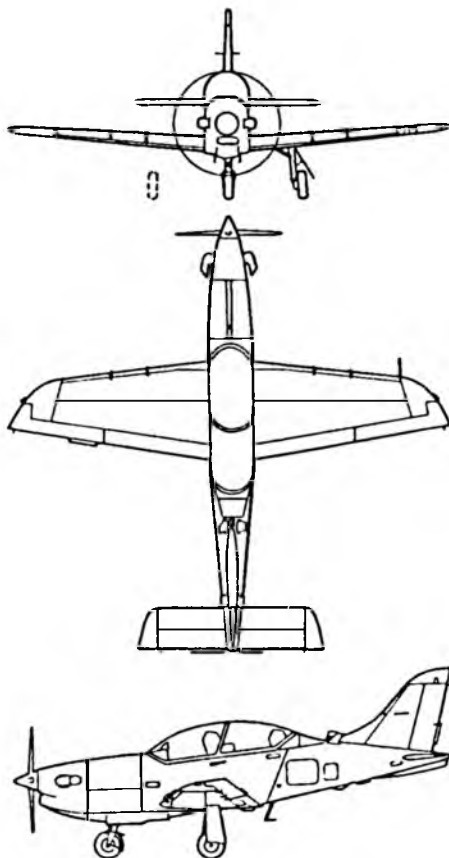
Remarks on Realization of Aircraft Program Motion along a Specified Trajectory

Summary

The program of aircraft motion is composed of a specified trajectory (two program constraints), of a requirement imposed on the airframe angular configuration with respect to the trajectory, and of a condition imposed on the aircraft motion along the trajectory. The aircraft is controlled by changes in the deflections of control surfaces and the thrust value. The attention is focused on a specific way of realization of the trajectory constraints – by means of tangent control reactions, which yields additional conditions imposed on the airframe angular orientation (the trajectory constraints are "doubled"), and verifies the classical definition of partly specified program of motion for a controlled system. The equations for the program motion simulation and the relations for the synthesis of program control are reported, and some aspects of effective numerical investigations of the problems are discussed. An example of numerical simulation of a slow roll of the aircraft TS-11 "Iskra" is included.

Prędkość maksymalna lotu poziomego
Prędkość maksymalna wznoszenia
Długość rozbiegu do startu
Zasięg
Pułap
Dopuszczalne współczynniki przeciążeń

$V = 480 \text{ km/h}$
 $w = 14 \text{ m/s}$
 $l = 345 \text{ m}$
 $L = 1050 \text{ km}$
 $h = 10\,000 \text{ m}$
 $+7, -3.5 \text{ g}$



PAŃSTWOWE ZAKŁADY LOTNICZE
"WARSZAWA-OKĘCIE" S.A.

ANALIZA NUMERYCZNA DRGAŃ WŁASNYCH WSPÓŁCZESNEGO SAMOLOTU NADDŹWIĘKOWEGO METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

JAN BŁASZCZYK

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Przedstawiono uogólniony belkowo-bryłowy model samolotu wyposażonego w zdwojone usterzenie pionowe. Rozpatrzono układ o niesymetrycznej budowie masowej i sztywnościowej. Podano równania ruchu odkształcalnych zespołów i sprzęgające je warunki dynamiczne, kinematyczne oraz brzegowe. Otrzymano globalny zestaw równań do badania podłużno-bocznych drgań własnych samolotu o przyjętym układzie aerodynamiczno-konstrukcyjnym. Analizie numerycznej poddano współczesny samolot naddźwiękowy. Wyznaczono dziesięć pierwszych częstości widma oraz poddano je identyfikacji.

1. Wykaz ważniejszych oznaczeń

I_{xp}, I_{yp}, I_{zp} – masowe momenty bezwładności przedniej sztywnej bryły kadłuba względem osi $0x, 0y$ i $0z$, [kgm^2];

I_{xt}, I_{yt}, I_{zt} – jak wyżej, lecz dla tylnej sztywnej bryły kadłuba, [kgm^2];

$I_{xyp}, I_{xzp}, I_{yzp}$ – masowe dewiacyjne momenty bezwładności przedniej bryły kadłuba, [kgm^2];

$I_{xyt}, I_{xzt}, I_{yzt}$ – jw., lecz dla tylnej bryły kadłuba, [kgm^2];

I_{zh}, I_{zs} – masowy moment bezwładności usterzenia wysokości oraz płata względem osi $0z$, [kgm^2];

l_{pi}, l_{ti} – odpowiednie odległości z indeksem i -tym dotyczące przedniej oraz tylnej sztywnej bryły kadłuba pokazane na rys. 2÷4, [m];

m_p, m_t – masa przedniej i tylnej sztywnej bryły kadłuba, [kg];

m_h, m_s, m_v – masa usterzenia poziomego, skrzydeł i pionowego usterzenia zdwojonego, [kg];

M_{kp0}, M_{kp1} i M_{kpb0}, M_{kpb1} – momenty zginające działające w skrajnych przekrojach nosowej części kadłuba w płaszczyźnie symetrii Oxz i płaszczyźnie bocznej Oxy (indeks 0 oznacza przekrój początkowy tj. przy sztywnej bryle kadłuba, indeks 1 – swobodny koniec tej części kadłuba), [Nm];

M_{ks0}, M_{ks1} i M_{ksb0}, M_{ksb1} – jw. lecz dotyczą środkowej odkształcalnej części kadłuba łączącej bryły sztywne samolotu, [Nm];

M_{sl0}, M_{sl1} i M_{sp0}, M_{sp1} – momenty zginające działające w skrajnych przekrojach lewego oraz prawego skrzydła (indeks 0 oznacza swobodny koniec skrzydła, 1 – przekrój mocowania do bryły kadłuba), [Nm];

M_{hl0}, M_{hl1} i M_{hp0}, M_{hp1} – jw. lecz dotyczy połówek usterzenia wysokości, [Nm];

M_{vl0}, M_{vl1} i M_{vp0}, M_{vp1} – jw. lecz dotyczy zdwojonego usterzenia pionowego: lewego (patrząc w kierunku lotu) i prawego, [Nm];

N_{kpb0}, N_{kpb1} i N_{ksb0}, N_{ksb1} – momenty skręcające działające w przekrojach skrajnych odkształcalnych zespołów kadłuba (cz. nosowej i środkowej), [Nm];

N_{sl0}, N_{sl1} i N_{sp0}, N_{sp1} – momenty skręcające w skrajnych przekrojach lewego i prawego skrzydła, [Nm];

N_{hl0}, N_{hl1} i N_{hp0}, N_{hp1} – jw. lecz dotyczy lewej i prawej części zdwojonego usterzenia pionowego, [Nm];

Q_{kp0}, Q_{kp1} i Q_{kpb0}, Q_{kpb1} – siły poprzeczne działające w skrajnych przekrojach nosowej części kadłuba odpowiednio w płaszczyźnie symetrii Oxz oraz w płaszczyźnie (bocznej) – indeks 0 dotyczy przekroju początkowego tj. przy sztywnej bryle kadłuba, 1 – przekroju końcowego, [N];

Q_{ks0}, Q_{ks1} i Q_{ksb0}, Q_{ksb1} – jw. lecz dotyczy środkowej odkształcalnej części kadłuba, [N];

Q_{sl0}, Q_{sl1} i Q_{sp0}, Q_{sp1} – siły poprzeczne działające w skrajnych przekrojach skrzydła lewego oraz prawego, [N];

Q_{hl0}, Q_{hl1} i Q_{hp0}, Q_{hp1} – jw. lecz dotyczy usterzenia wysokości, [N];

Q_{vl0}, Q_{vl1} i Q_{vp0}, Q_{vp1} – jw. lecz dotyczy lewego i prawego (patrząc w kierunku lotu) usterzenia pionowego, [N];

r_p, r_t – promienie równe połowie średnicy zastępczej przedniej oraz tylnej bryły kadłuba, [m];

w_s, w_k, w_h, w_v – przemieszczenie w odpowiednim przekroju skrzydła, kadłuba, usterzenia wysokości i kierunku, [m];

φ – kąt skręcenia w określonym przekroju odkształcalnego zespołu samolotu, [rad];

χ – kąt skosu osi sztywności skrzydła lub usterzenia w stopniach, [1°];

ψ – kąt ugięcia w określonym przekroju odkształcalnego zespołu samolotu, [rad];

Θ – kąt obrotu przedniej lub tylnej bryły kadłuba w płaszczyźnie Oxz (rys.2), [rad];

Φ – kąt skręcenia sztywnej bryły kadłuba w płaszczyźnie Oyz (rys.3a i 4a), [rad];

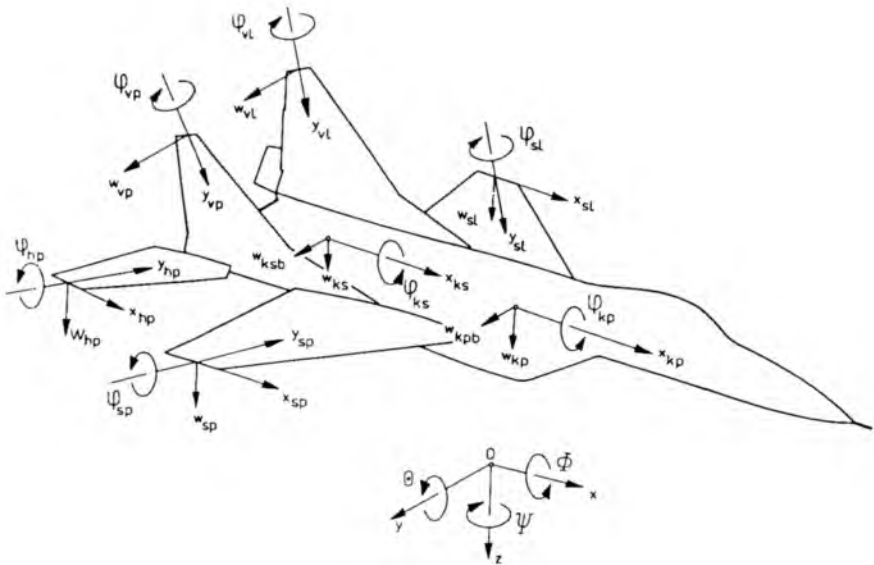
Ψ – kąt odchylenia sztywnej bryły kadłuba w płaszczyźnie Oxy (rys.3b i 4b), [rad];

2. Wstęp, sformułowanie problemu

W dotychczasowych pracach (np. [6,7,10] i in.) zaproponowano dyskretnie dynamiczne modele bądź rozpatrzono drgania własne samolotów stosując metodę rekurencyjnego składania równań elementów w układ globalny wykorzystując metodę elementów skończonych [4,11,14] i wielostopniową syntezę struktury [9]. Wpływ symetrycznej oraz niesymetrycznej zmiany geometrii skrzydeł na drgania własne samolotu analizowano w [13,15]. W pracach innych autorów, do analizy drgań samolotu proponowano metodę agregacji (np.

[12]), bądź aproksymowano rzeczywistą strukturę szeregiem mas skupionych połączonych nieważkimi więzami sprężystymi [5].

W cytowanych pracach rozpatrywano samoloty o symetrycznej budowie i z reguły w konwencjonalnych układach aerodynamiczno-konstrukcyjnych. Czyniono założenie, że wszystkie zespoły płatowca, tego samego przeznaczenia (skrzydła, połówki usterzeń) są identyczne co do geometrii oraz rozkładów masy i sztywności.



Rys. 1. Przyjęte układy współrzędnych samolotu

W niniejszej pracy proponuje się dyskretny dynamiczny model na bazie współczesnego samolotu myśliwskiego, o stałej geometrii płata, ze zdwojonym usterzeniem pionowym. Poczynione wcześniej uwagi, odnośnie aproksymacji układu sztywnymi i odkształcalnymi zespołami są aktualne i w tym modelu. Rozpatrzono samolot o niesymetrycznej budowie tj. przyjęto, że układ nie ma pionowej, podłużnej płaszczyzny symetrii Oxz (rys.1) zarówno masowej jak i sprężystej. Przyjmuje się, że odkształcalne zespoły mogą charakteryzować się rozkładami mas i sztywności znacznie różniącymi się (prawe i lewe skrzydło, prawa i lewa połówka usterzenia wysokości oraz obydwa usterzenia pionowe) między sobą. Niesymetria ta może wynikać z nieciągłości struktury (przestrzeliny, zniszczenie fragmentu konstrukcji płatowca itp.) bądź np. z niesymetrycznego zrzutu podwieszów zewnętrznych lub niewłaściwego "wypracowania" paliwa itp. W rozpatrywanym modelu przyjęto również możliwość

bocznego przemieszczenia się środka masy przedniej bryły kadłuba co w praktyce występuje dowolnie często.

W wyniku braku płaszczyzny symetrii, w rozpatrywanym modelu ma miejsce sprzęganie podłużnego i bocznego ruchu samolotu. Dla przyjętego samolotu o niesymetrycznej budowie założono, że: skrzydła, połówki usterzenia wysokości i obydwie części zdwojonego usterzenia kierunku wykonują drgania skrętne oraz giętne:

$$\begin{aligned} \varphi_{pi} &= \varphi_{pi}(y_{pi}, t) & w_{pi} &= w_{pi}(y_{pi}, t) \\ \varphi_{li} &= \varphi_{li}(y_{li}, t) & w_{li} &= w_{li}(y_{li}, t) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie p i l – odpowiednio prawa oraz lewa część (połówka) i -tego zespołu patrząc w kierunku lotu.

Odształcalne części kadłuba, środkowa i nosowa wykonują drgania skrętne oraz giętne w dwóch płaszczyznach $0xz$ i $0xy$ (rys.1):

$$\begin{aligned} \varphi_{ki} &= \varphi_{ki}(x_{ki}, t) & w_{ki} &= w_{ki}(x_{ki}, t) \\ w_{kbi} &= w_{kbi}(x_{ki}, t) & i &= 1, 2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Poczyniono również założenie, że takie zespoły jak skrzydła i usterzenia są idealnie sztywne w swoich płaszczyznach.

W dalszej części pracy podano równania odształcalnych zespołów, sprecyzowano dynamiczne i kinematyczne warunki sprzęgające te równania oraz wyznaczono warunki na swobodnych brzegach. W konsekwencji otrzymano globalny układ równań umożliwiający analizę problemu drgań własnych rozpatrywanego układu samolotu.

3. Równania odształcalnych zespołów

Równania dynamicznej równowagi odształcalnych zespołów samolotu wykonujących ruchy (2.1) i (2.2), zostały wyprowadzone w [6,9]. Dla skrzydeł i usterzeń wykonujących sprzężone drgania giętno-skrętne związki te można zapisać w macierzowej postaci:

$$g_{zij} = Y_{zij} g_{zi0} \quad \begin{cases} j = 1, 2, 3, \dots \\ i = 1, 2, \dots, 6 \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie \mathbf{g}_{zij} i \mathbf{g}_{zi0} są wektorami stanu w j -tym oraz początkowym przekroju i -tego zespołu. Macierz \mathbf{Y}_{zij} o wymiarze 6×6 wyznaczana jest z rekurencyjnej zależności [6].

Równania (3.1) są ogólnymi i dla zespołów wykonujących izolowane ruchy skrętne oraz giętne, tj. dla obydwu części kadłuba, przyjmują inną postać. Dla giętnych drgań kadłuba w płaszczyźnie Oxy (rys.1), równania (3.1) zapiszemy w formie:

$$\mathbf{g}_{kij} = \mathbf{X}_{kij} \mathbf{g}_{ki0} \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 1, 2, 3, \dots \\ i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

oraz drgań skrętnych:

$$\mathbf{q}_{kij} = \mathbf{Z}_{kij} \mathbf{q}_{ki0} \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 1, 2, 3, \dots \\ i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

gdzie wektory \mathbf{g}_k i \mathbf{q}_k mają składowe jak wektory \mathbf{g}_z określone wzorem (3.1), a macierze \mathbf{X}_{kij} i \mathbf{Z}_{kij} są odpowiednio wymiaru 4×4 i 2×2 . Należy pamiętać, że kadłub podlega drganiom giętnym również w płaszczyźnie bocznej, stąd w dalszych wywodach trzeba uwzględnić dodatkowo podobny układ równań do (3.2).

W dalszej części pracy podane zostaną w ostatecznej formie, dla skończonej liczby elementów $j = n_k$ równania dynamicznej równowagi skrzydeł: prawego (dla $k = 1$) i lewego ($k = 2$), połówek usterzenia wysokości: prawej ($k = 3$) i lewej ($k = 4$), usterzeń kierunku: prawego ($k = 5$) i lewego ($k = 6$) oraz odkształcalnych części kadłuba: środkowej ($k = 7$) i nosowej ($k = 8$).

Zgodnie z tym, wykorzystując związki (3.1), równania dynamicznej równowagi skrzydeł i usterzeń można zapisać w postaci:

$$\mathbf{g}_{zi1} = \mathbf{Y}_{zi1} \mathbf{g}_{zi0} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.4)$$

w których wektory \mathbf{g}_{zi1} i \mathbf{g}_{zi0} mają składowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{zi1} &= [\bar{w}_{zi1}, \psi_{zi1}, \varphi_{zi1}, \bar{Q}_{zi1}, \bar{M}_{zi1}, \bar{N}_{zi1}]^T \\ \mathbf{g}_{zi0} &= [\bar{w}_{zi0}, \psi_{zi0}, \varphi_{zi0}, \bar{Q}_{zi0}, \bar{M}_{zi0}, \bar{N}_{zi0}]^T \end{aligned} \quad (3.5)$$

będące uogólnionymi bezwymiarowymi przemieszczeniami i siłami prawego i lewego skrzydła, prawej i lewej połówki usterzenia wysokości oraz prawego i lewego usterzenia kierunku w przekrojach mocowania do sztywnych brył kadłuba (\mathbf{g}_{zi1}) oraz na swobodnych końcach (\mathbf{g}_{zi0}) tych zespołów. Bezwymiarowe przemieszczenia i siły zdefiniowano następująco:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{zi} &= \frac{w_{zi}}{l_{zi}} & \bar{Q}_{zi} &= \frac{Q_{zi} l_{zi}^2}{EJ_{od}} \\ \bar{M}_{zi} &= \frac{M_{zi} l_{zi}}{EJ_{od}} & \bar{N}_{zi} &= \frac{N_{zi} l_{zi}}{GJ_{0od}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie: l_{zi} – jest długością i -tego zespołu samolotu; EJ_{od} , GJ_{0od} – sztywność zginania i sztywność skręcania przyjęte jako wielkości odniesieniowe.

Równania dynamicznej równowagi środkowej i nosowej części kadłuba wykonujących ruchy (2.2), otrzymujemy w podobny sposób. Wykorzystując (3.2), oraz podział zespołów na skończoną liczbę elementów, otrzymujemy dla podłużnych drgań giętnych (płaszczyzna $0xz$):

$$\mathbf{g}_{ki1} = \mathbf{X}_{ki1} \mathbf{g}_{ki0} \quad i = 1, 2 \quad (3.7)$$

i giętnych drgań bocznych (płaszczyzna $0xy$):

$$\mathbf{g}_{kbi1} = \mathbf{X}_{kbi1} \mathbf{g}_{kbi0} \quad i = 1, 2 \quad (3.8)$$

oraz dla drgań skrętnych:

$$\mathbf{q}_{ki1} = \mathbf{Z}_{ki1} \mathbf{q}_{ki0} \quad i = 1, 2 \quad (3.9)$$

w których wektory \mathbf{g}_k i \mathbf{q}_k mają składowe:

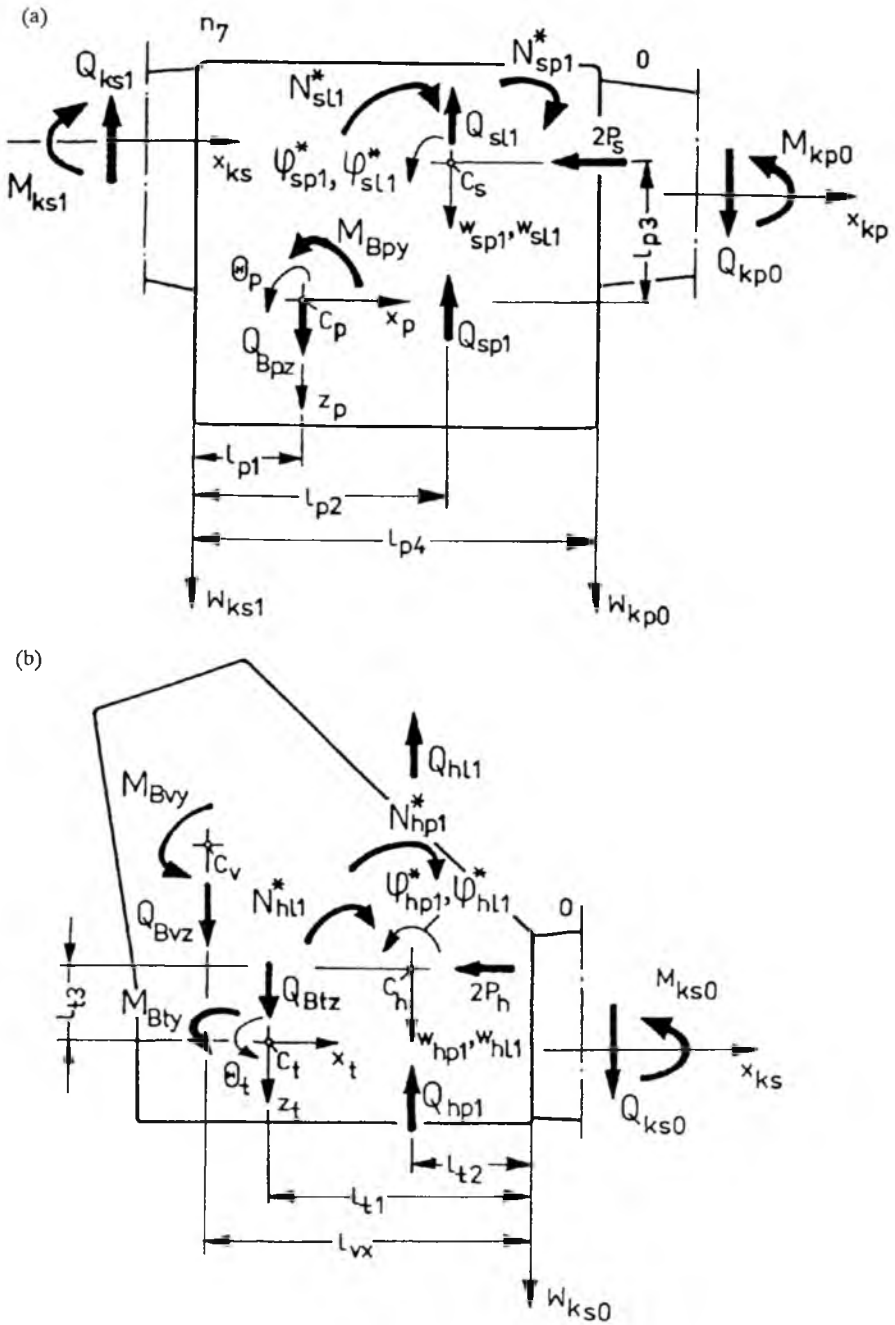
$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ki1} &= [\bar{w}_{ki1}, \psi_{ki1}, \bar{Q}_{ki1}, \bar{M}_{ki1}]^T & \mathbf{q}_{ki1} &= [\varphi_{ki1}, \bar{N}_{ki1}]^T \\ \mathbf{g}_{ki0} &= [\bar{w}_{ki0}, \psi_{ki0}, \bar{Q}_{ki0}, \bar{M}_{ki0}]^T & \mathbf{q}_{ki0} &= [\varphi_{ki0}, \bar{N}_{ki0}]^T \end{aligned} \quad (3.10)$$

Występujące we wzorach (3.10) parametry bezwymiarowe zostały zdefiniowane podobnie jak dla skrzydeł i usterzeń – wzorami (3.6).

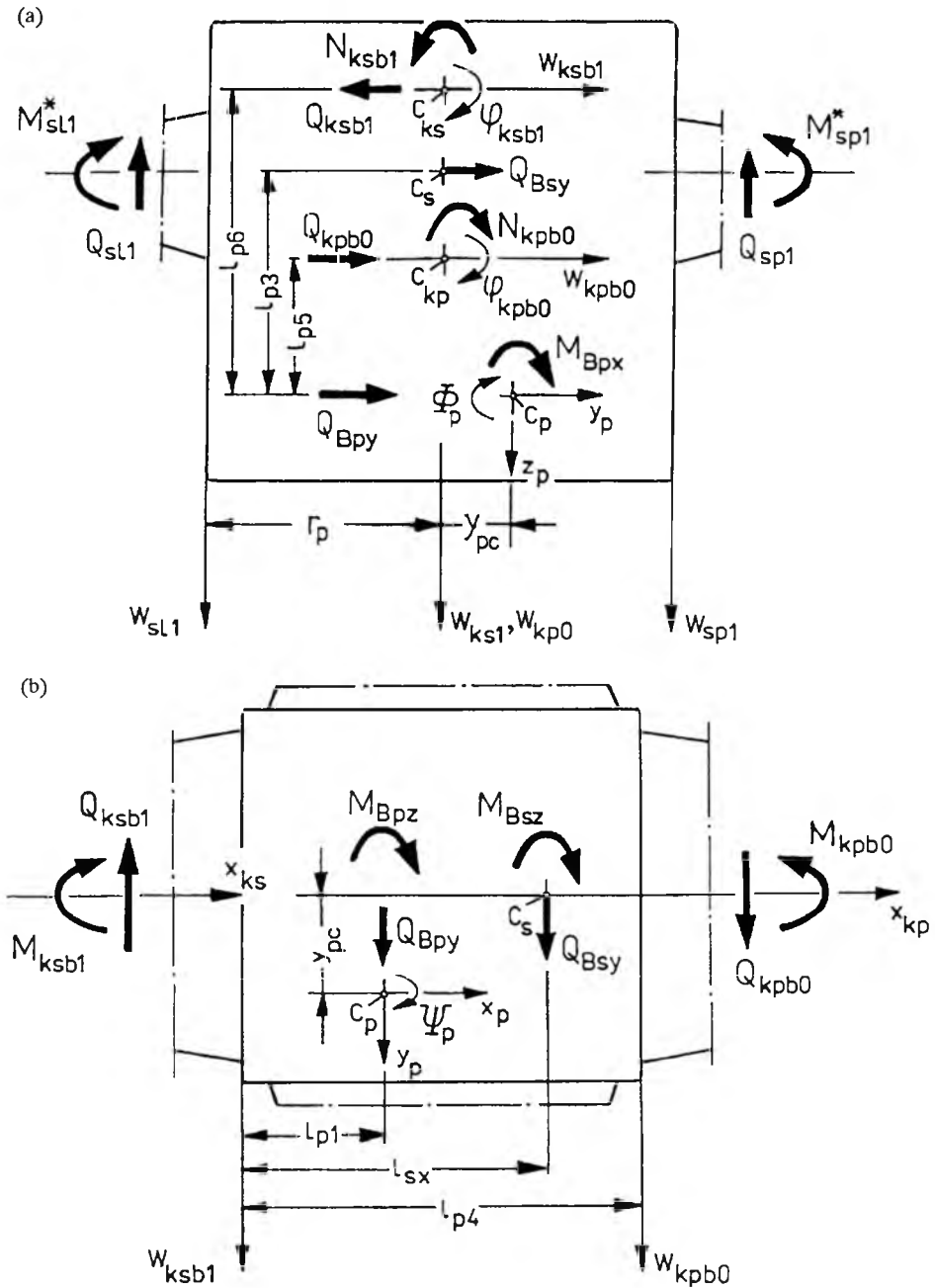
Zależności (3.4) dotyczące drgań skrzydeł i usterzeń, (3.7), (3.8) i (3.9) – giętnych i skrętnych drgań kadłuba, są równaniami dynamicznej równowagi tych zespołów i stanowią punkt wyjściowy do otrzymania globalnego układu równań obejmującego cały samolot.

4. Równania ruchu sztywnych brył kadłuba

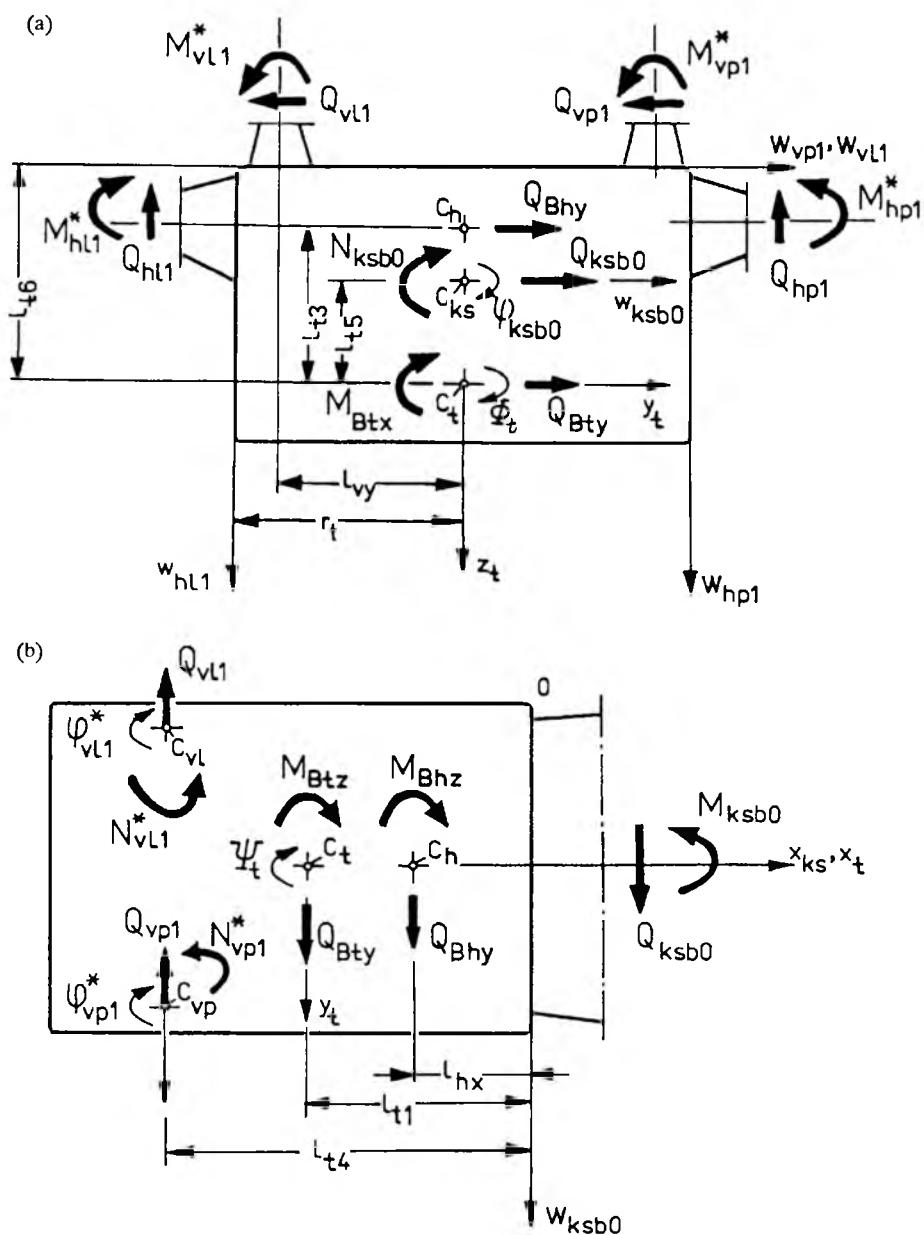
Jak wspomniano wcześniej człony kadłuba w obszarze mocowania skrzydeł oraz usterzeń traktuje się jako sztywne bryły. Rozpatrzono ich płaski ruch



Rys. 2. Siły i momenty działające na przednią (a) i tylną bryłę (b) samolotu w płaszczyźnie $0xz$



Rys. 3. Siły i momenty działające na przednią bryłę samolotu w płaszczyźnie $0yz$ (a) oraz w płaszczyźnie $0xy$ (b)



Rys. 4. Siły i momenty działające na tylną bryłę samolotu w płaszczyźnie Oyz (a) oraz w płaszczyźnie Oxy (b)

w płaszczyźnie symetrii Oxz i bocznej Oxy oraz obrotowy wokół osi Oz przechodzącej przez ich środki mas. Oddziaływanie odkształcalnych zespołów na te bryły przyjęto przez wprowadzenie odpowiednich sił i momentów. Na przednią bryłę kadłuba o masie m_p oddziałują skrzydła oraz nosowa i środkowa część kadłuba; odpowiednie siły pokazano na rys.2 (w płaszczyźnie Oxz) i rys.3 – w płaszczyznach Oxy i Oyz . Na tylną bryłę kadłuba o masie m_t działają siły od połówek usterzenia poziomego i usterzenia pionowego (rys.2b i 4).

Równania ruchu brył sztywnych kadłuba podano przy założeniu małych drgań oraz wykorzystaniu zasady pędu i krętu w układzie współrzędnych związanych z ciałem. Zatem dla przedniej bryły kadłuba otrzymujemy (por. rys.2a i 3):

$$\begin{aligned}
 m_p \ddot{z}_p(t) &= Q_{kp0}(t) - Q_{ks1}(t) - Q_{sl1}(t) - Q_{sp1}(t) \\
 (m_p + m_s) \ddot{y}_p(t) + m_s [(l_{sx} - l_{p1}) \ddot{\psi}_p(t) + l_{p3} \ddot{\phi}_p(t)] &= Q_{kpb0}(t) - Q_{ksb1}(t) \\
 I_{yp}^* \ddot{\theta}_p(t) - I_{xyp} \ddot{\phi}_p(t) - I_{yzp} \ddot{\psi}_p(t) &= -l_{p1} Q_{ks1}(t) - M_{ks1}(t) + \\
 + (l_{p2} - l_{p1}) [Q_{sp1}(t) + Q_{sl1}(t)] + (l_{p1} - l_{p4}) Q_{kp0}(t) + M_{kp0}(t) + \\
 - N_{sp1}(t) - N_{sl1}(t) & \quad (4.1) \\
 I_{zp}^* \ddot{\psi}_p(t) - I_{xzp} \ddot{\phi}_p(t) - I_{yzp} \ddot{\theta}_p(t) - m_s (l_{p1} - l_{sx}) \ddot{y}_p(t) &= \\
 = M_{ksb1}(t) + l_{p1} Q_{ksb1}(t) + M_{ksb1}(t) - M_{kpb0}(t) \\
 I_{xp}^* \ddot{\phi}_p(t) - I_{xzp} \ddot{\psi}_p(t) - I_{xyp} \ddot{\theta}_p(t) + m_s l_{p3} \ddot{y}_p(t) &= -M_{sp1}(t) + \\
 + M_{sl1}(t) + (r_p + y_{pc}) Q_{sl1}(t) - (r_p - y_{pc}) Q_{sp1}(t) + l_{p5} Q_{kpb0}(t) + \\
 + N_{kpb0}(t) - l_{p6} Q_{ksb1}(t) - N_{ksb1}(t)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 I_{xp}^* &= I_{xp} + m_s l_{p3}^2 & I_{zp}^* &= I_{zp} + I_{zs} + m_s (l_{p1} - l_{sx})^2 \\
 I_{yp}^* &= I_{yp} + m_s l_{p3}^2 & I_{xzp}^* &= I_{xzp} + m_s (l_{p1} - l_{sx}) l_{p3} \\
 m_s &= m_{s1} + m_{s2}
 \end{aligned}$$

w których m_{s1} i m_{s2} oznaczają masę prawego i lewego skrzydła. Występujące w równaniach (4.1) wielkości M^* i N^* są odpowiednio wypadkowymi momentami zginającymi i skręcającymi działającymi w płaszczyznach mocowania skrzydeł do bryły kadłuba, a określają je związki:

$$\begin{aligned}
 M_{sp1}^* &= M_{sp1} \cos \chi_s - N_{sp1} \sin \chi_s & M_{sl1}^* &= M_{sl1} \cos \chi_s - N_{sl1} \sin \chi_s \\
 N_{sp1}^* &= N_{sp1} \cos \chi_s + M_{sp1} \sin \chi_s & N_{sl1}^* &= N_{sl1} \cos \chi_s + M_{sl1} \sin \chi_s
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

w których χ_s jest kątem skosu osi sztywności skrzydła.

Podobnie zapiszemy równania dla tylnej bryły kadłuba (por. rys.2b i 4):

$$\begin{aligned}
 (m_t + m_v)\ddot{z}_t(t) + m_v(l_{t1} - l_{vx})\ddot{\Theta}_t(t) &= Q_{ks0}(t) - Q_{hp1}(t) - Q_{hl1}(t) \\
 (m_t + m_h)\ddot{y}_t(t) + m_h[(l_{t1} - l_{hx})\ddot{\Psi}_t(t) + l_{t3}\ddot{\Phi}_t(t)] &= \\
 = Q_{ksb0}(t) - Q_{vp1}(t) - Q_{vl1}(t) \\
 I_{yt}^*\ddot{\Theta}_t(t) + [(m_v\ddot{z}_t(t) + (m_{v1} - m_{v2})l_{vy}\ddot{\Phi}_t(t))(l_{vx} - l_{t1}) &= \\
 = (l_{t1} - l_{t2})[Q_{hp1}(t) + Q_{hl1}(t)] - l_{t1}Q_{ks0}(t) + M_{ks0}(t) + & \\
 - N_{hl1}^*(t) - N_{hp1}^*(t) & \\
 I_{zt}^*\ddot{\Psi}_t(t) - I_{xzt}^*\ddot{\Phi}_t(t) + m_h(l_{t1} - l_{hx})\ddot{y}_t(t) &= l_{t1}Q_{ksb0}(t) + \\
 - M_{ksb0}(t) + [Q_{vl1}(t) + Q_{vp1}(t)](l_{t4} - l_{t1}) - N_{vl1}^*(t) - N_{vp1}^*(t) & \\
 I_{xt}^*\ddot{\Phi}_t(t) - I_{xzt}^*\ddot{\Psi}_t(t) + m_h l_{t3}\ddot{y}_t(t) &= l_{t5}Q_{ksb0}(t) + \\
 + r_t[Q_{hl1}(t) - Q_{hp1}(t)] - l_{t6}[Q_{vl1}(t) + Q_{vp1}(t)] + M_{hl1}^*(t) + & \\
 - M_{hp1}^*(t) - M_{vl1}^*(t) - M_{vp1}^*(t) + N_{ksb0}(t) &
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 I_{xt}^* &= I_{xt} + m_h l_{t3}^2 + m_v l_{vy}^2 \\
 I_{yt}^* &= I_{yt} + I_{yv} + m_h l_{t3}^2 + m_v(l_{vx} - l_{t1})l_{vx} \\
 I_{zt}^* &= I_{zt} + I_{zh} + m_h(l_{hx} - l_{t1})^2 \\
 I_{xzt}^* &= I_{xzt} + m_h(l_{hx} - l_{t1})l_{t3} \\
 m_h &= m_{h1} + m_{h2} & m_v &= m_{v1} + m_{v2}
 \end{aligned}$$

w których m_{h1} i m_{h2} oraz m_{v1} i m_{v2} są masami połówek usterzenia wysokości oraz pojedynczych usterzeń pionowych.

Podobnie jak dla przedniej bryły kadłuba, symbole M^* i N^* określają związki pomiędzy momentami zginającymi i skręcającymi występującymi w płaszczyznach połączeń z bryłą kadłuba. Dla tylnej bryły kadłuba, do której

mocowane są połówki usterzenia poziomego i zdwojone usterzenie pionowe, związki te mają postać:

$$\begin{aligned}
 M_{hp1}^* &= M_{hp1} \cos \chi_h - N_{hl1} \sin \chi_h & M_{hl1}^* &= M_{hl1} \cos \chi_h - N_{hl1} \sin \chi_h \\
 M_{vp1}^* &= M_{vp1} \cos \chi_v + N_{vp1} \sin \chi_v & M_{vl1}^* &= M_{vl1} \cos \chi_v + N_{vl1} \sin \chi_v \\
 N_{hp1}^* &= N_{hp1} \cos \chi_h + M_{hp1} \sin \chi_h & N_{hl1}^* &= N_{hl1} \cos \chi_h + M_{hl1} \sin \chi_h \\
 N_{vp1}^* &= N_{vp1} \cos \chi_v - M_{vp1} \sin \chi_v & N_{vl1}^* &= N_{vl1} \cos \chi_v - M_{vl1} \sin \chi_v
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

gdzie χ_h i χ_v są kątami skosu osi sztywności usterzenia poziomego oraz pionowego.

5. Związki kinematyczne i warunki brzegowe

Do równań ruchu sztywnych brył (4.1), (4.3) należy jeszcze dodać związki występujące w przekrojach połączeń zespołów odkształcalnych i sztywnych. Są to warunki zgodności przemieszczeń przedniej bryły kadłuba. Związki te zapiszemy w postaci (por. rys.2a i rys.3):

$$\begin{aligned}
 z_{p0} &= w_{ks1} + l_{p1} \psi_{ks1} + y_{pc} \Phi_{p0} = w_{kp0} + (l_{p4} - l_{p1}) \Theta_{p0} + y_{pc} \Phi_{p0} = \\
 &= w_{sp1} + (l_{p2} - l_{p1}) \varphi_{sp1}^* + (r_p - y_{pc}) \psi_{sp1}^* = \\
 &= w_{sl1} + (l_{p2} - l_{p1}) \varphi_{sl1}^* + (r_p + y_{pc}) \psi_{sl1}^* \\
 y_{p0} &= w_{ksb1} + l_{p1} \Psi_{p0} - l_{p6} \Phi_{p0} = w_{kpb0} + (l_{p1} - l_{p4}) \Psi_{p0} - l_{p5} \Phi_{p0} \\
 \Theta_{p0} &= -\psi_{ks1} = -\psi_{kp0} = \varphi_{sp1}^* = \varphi_{sl1}^* \\
 \Phi_{p0} &= \varphi_{kpb0} = \varphi_{ksb1} = -\psi_{sp1}^* = \psi_{sl1}^* \\
 \Psi_{p0} &= \psi_{ksb1} = \psi_{kpb0}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

gdzie ψ^* i φ^* są kątami obrotu sztywnej bryły kadłuba. Wyrazić je można przez kąty ugięcia i skręcenia skrzydeł w ich końcowych przekrojach prostopadłych do osi sztywności tych zespołów.

Wielkości te można przedstawić w postaci związków:

$$\begin{aligned}
\psi_{sp1}^* &= \psi_{sp1} \cos \chi_s + \varphi_{sp1} \sin \chi_s & \psi_{sl1}^* &= \psi_{sl1} \cos \chi_s + \varphi_{sl1} \sin \chi_s \\
\varphi_{sp1}^* &= \varphi_{sp1} \cos \chi_s - \psi_{sp1} \sin \chi_s & \varphi_{sl1}^* &= \varphi_{sl1} \cos \chi_s - \psi_{sl1} \sin \chi_s
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Podobnie można przedstawić związki, łączące przemieszczenia i obroty, w przekrojach połączeń sztywnej części kadłuba z zespołem usterzeń. Mają one postać:

$$\begin{aligned}
z_{t0} &= w_{ks0} + l_{t1}\Theta_{t0} = w_{hp1} + (l_{t1} - l_{t2})\varphi_{hp1}^* - r_t\Phi_{t0} = \\
&= w_{hl1} + (l_{t1} - l_{t2})\varphi_{hl1}^* + r_t\Phi_{t0} \\
y_t &= w_{ksb0} - l_{t1}\psi_{ksb0} - l_{t5}\varphi_{ksb0} = w_{vl1} + (l_{t4} - l_{t1})\varphi_{vl1}^* + l_{t6}\psi_{vl1}^* = \\
&= w_{vp1} + (l_{t4} - l_{t1})\varphi_{vp1}^* + l_{t6}\psi_{vp1}^*
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\Theta_{t0} = \varphi_{hp1}^* = \varphi_{hl1}^* = -\psi_{ks0}$$

$$\Phi_{t0} = \varphi_{ksb0} = -\psi_{hp1}^* = \psi_{hl1}^* = -\psi_{vl1}^* = -\psi_{vp1}^*$$

$$\Psi_{t0} = \varphi_{vl1}^* = \varphi_{vp1}^* = \psi_{ksb0}$$

gdzie ψ^* i φ^* , podobnie jak dla przedniej bryły kadłuba, są kątami obrotu bryły tylnej. Dla połówek usterzenia wysokości można je przedstawić analogicznymi równaniami do (5.2), dotyczącymi prawego i lewego skrzydła. Dla obydwu części usterzenia pionowego kąty te można przedstawić w formie:

$$\psi_{vp1}^* = \psi_{vp1} \cos \chi_v - \varphi_{vp1} \sin \chi_v \quad \psi_{vl1}^* = \psi_{vl1} \cos \chi_v - \varphi_{vl1} \sin \chi_v \tag{5.4}$$

$$\varphi_{vp1}^* = \varphi_{vp1} \cos \chi_v + \psi_{vp1} \sin \chi_v \quad \varphi_{vl1}^* = \varphi_{vl1} \cos \chi_v + \psi_{vl1} \sin \chi_v$$

Do związków (5.2) i (5.4) będących kinematycznymi warunkami sprzęgającymi równania odkształcalnych zespołów (3.4), (3.7) ÷ (3.9) należy dodać jednorodne warunki na swobodnych końcach skrzydeł:

$$Q_{sp0} = M_{sp0} = N_{sp0} = 0 \quad Q_{sl0} = M_{sl0} = N_{sl0} = 0 \tag{5.5}$$

połówek usterzenia poziomego i zdwojonego usterzenia pionowego:

$$Q_{hp0} = M_{hp0} = N_{hp0} = 0 \quad Q_{hl0} = M_{hl0} = N_{hl0} = 0 \tag{5.6}$$

$$Q_{vp0} = M_{vp0} = N_{vp0} = 0 \quad Q_{vl0} = M_{vl0} = N_{vl0} = 0$$

oraz dla nosowej części kadłuba:

$$Q_{kp0} = M_{kp0} = Q_{kpb0} = M_{kpb0} = N_{kpb0} = 0 \tag{5.7}$$

6. Globalny układ równań; równanie częstości i postać drgań własnych

Dla otrzymania globalnego układu równań i zbudowania macierzy charakterystycznej badanego układu samolotu, należy związki (4.1) i (4.3) – będące dynamicznymi warunkami sprzęgającymi równania odkształcalnych zespołów – przedstawić w postaci bezwymiarowej. Podobnie należy uczynić ze związkami kinematycznymi (5.1) i (5.3) oraz warunkami na swobodnych końcach (5.5) ÷ (5.7).

Bezwymiarową postać tych związków otrzymuje się wprowadzając odpowiednie parametry odniesieniowe, podobnie jak to uczyniono z przemieszczeniami i siłami dla skrzydeł i usterzeń – wzory (3.6).

Otrzymane w bezwymiarowej postaci dynamiczne i kinematyczne warunki sprzęgające równania odkształcalnych zespołów (3.4) – dla skrzydeł i usterzeń, oraz (3.7) ÷ (3.9) – dla kadłuba, wraz z jednorodnymi na swobodnych końcach (5.5) ÷ (5.7), stanowią kompletny układ zależności do analizy drgań własnych samolotu.

W celu wyznaczenia równania częstości rozpatrywanego problemu przeprowadzono eliminację stopni swobody zespołów samolotu w odpowiednio dobrany sposób. Prządkując zależności (4.1), (4.3) zapisane w bezwymiarowej postaci, wprowadzono związki:

$$\mathbf{b}_p = [\bar{w}_{kp0}, \dots, \bar{M}_{kp0}, \bar{w}_{kpb0}, \dots, \bar{N}_{kpb0}, \bar{Q}_{sp1}, \dots, \bar{N}_{sp1}, \bar{Q}_{sl1}, \dots, \bar{N}_{sl1}]^T \quad (6.1)$$

$$\mathbf{b}_t = [\bar{w}_{ks0}, \dots, \bar{M}_{ks0}, \bar{w}_{ksb0}, \dots, \bar{N}_{ksb0}, \bar{Q}_{hl1}, \dots, \bar{N}_{hl1}, \bar{Q}_{vl1}, \dots, \bar{N}_{vl1}]^T$$

za pomocą których zdefiniowano wektory \mathbf{q}_p i \mathbf{q}_t uogólnionych bezwymiarowych sił w końcowym przekroju środkowej części kadłuba oraz w przekrojach mocowania prawej połówki usterzenia wysokości i prawej części usterzenia kierunku do tylnej bryły samolotu w postaci macierzowych zależności:

$$\mathbf{q}_p = [\bar{Q}_{ks1}, \bar{M}_{ks1}, \bar{Q}_{ksb1}, \bar{M}_{ksb1}, \bar{N}_{ksb1}]^T = \mathbf{A}\mathbf{b}_p \quad (6.2)$$

$$\mathbf{q}_t = [\bar{Q}_{hp1}, \bar{M}_{hp1}, \bar{N}_{hp1}, \bar{Q}_{vp1}, \bar{N}_{vp1}]^T = \mathbf{B}\mathbf{b}_t$$

Następnie w równaniach odkształcalnych zespołów uwzględniono warunki kinematyczne (5.1) i (5.3) oraz jednorodne na swobodnych końcach skrzydeł i usterzeń (5.5) ÷ (5.7). Dalej wykorzystano zależności (6.2) i wykonano szereg prostych przekształceń. W konsekwencji otrzymano końcowy układ równań algebraicznych w macierzowej postaci:

$$\mathbf{C}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

gdzie składowymi wektora \mathbf{p} są uogólnione przemieszczenia swobodnych końców zespołów odkształcalnych, przemieszczeń i sił działających w skrajnych przekrojach środkowej części kadłuba w dwu płaszczyznach, przemieszczeń i sił w początkowym przekroju nosowej części kadłuba (w dwu płaszczyznach) oraz sił w przekrojach mocowania skrzydeł, prawych części usterzeń poziomego i pionowego do sztywnych brył kadłuba.

Macierz $\mathbf{C}_{53 \times 53}$ zawiera elementy których wyrazami są składowe macierzy skrzydeł i usterzeń \mathbf{Y}_{ki1} ($i = 1, 2, \dots, 6$), środkowej i nosowej części kadłuba dla drgań skrętnych \mathbf{Z}_{ki1} ($i = 1, 2$) oraz giętnych w płaszczyznach prostopadłych \mathbf{X}_{ki1} i \mathbf{X}_{kbi1} ($i = 1, 2$).

Poszukiwane równanie częstości drgań otrzymuje się z warunku znikania wyznacznika charakterystycznego układu (6.3):

$$\Delta = \det \mathbf{C} = 0 \quad (6.4)$$

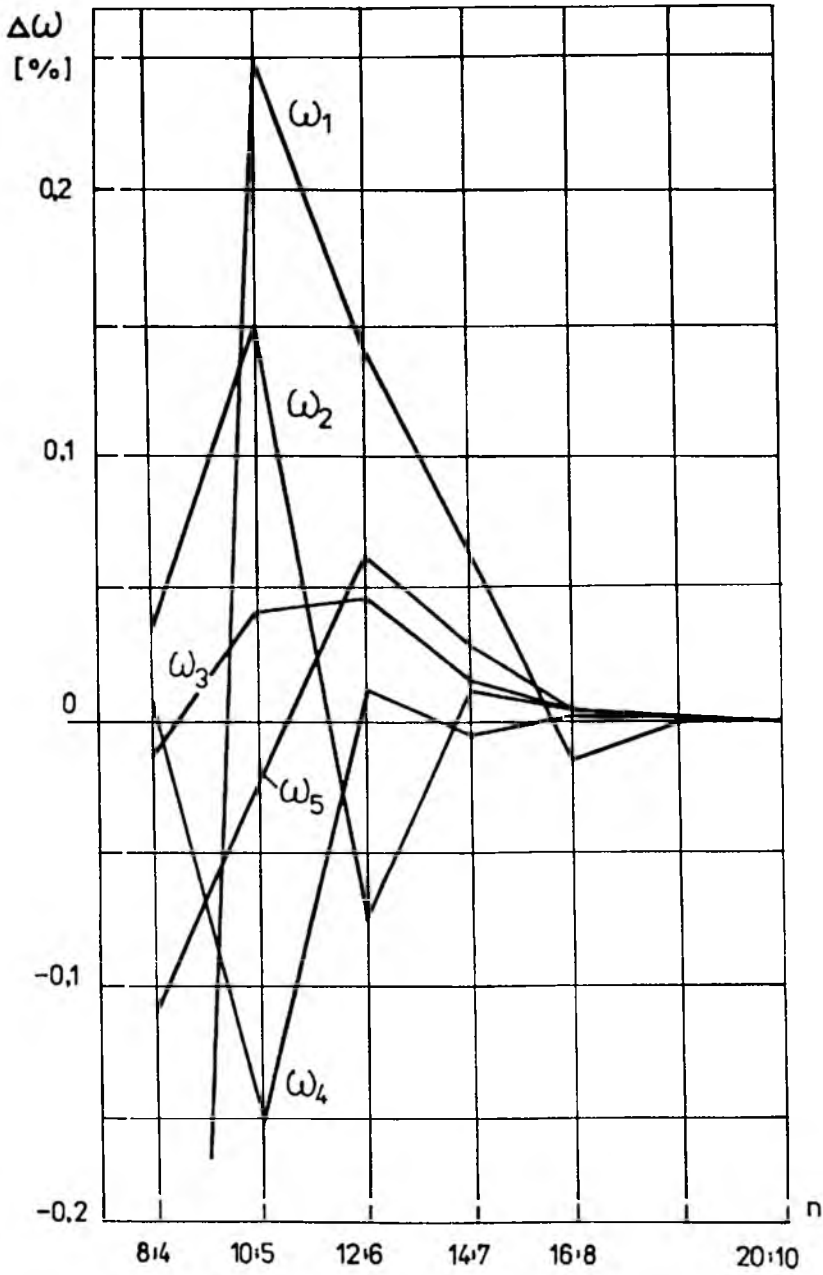
Po wyznaczeniu częstości drgań z formuły (6.4), postaci drgań samolotu określa się z układu (6.3). Może być tu zastosowana metodyka wykorzystywana w poprzednich pracach (np. [7]), bądź przedstawiona w innych pracach (np. [8,16,17]).

7. Analiza numeryczna

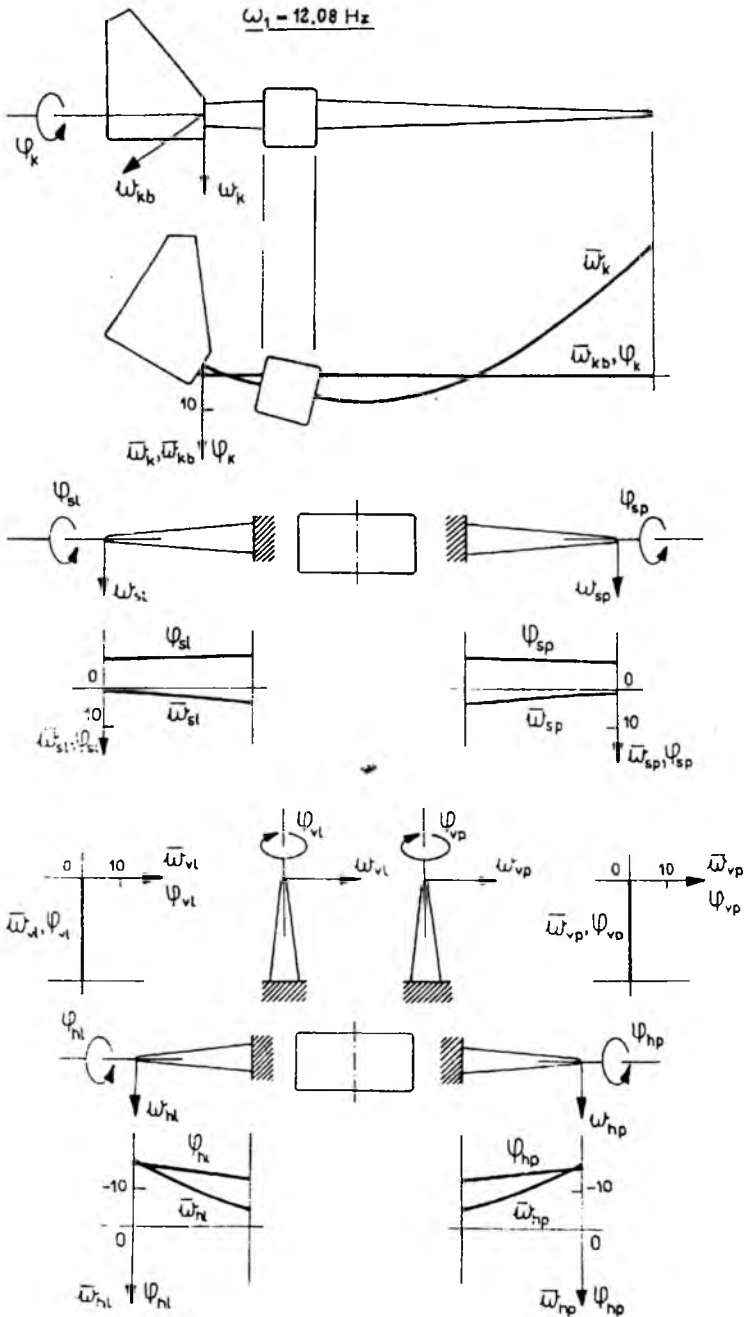
Wykorzystując wyprowadzone wcześniej zależności matematyczne, opracowano algorytm obliczeń i zredagowano w języku FORTRAN program numeryczny na mikrokomputer klasy IBM PC. Program ten umożliwia obliczanie częstości i postaci drgań własnych samolotu w dowolnej jego konfiguracji masowej i sztywnościowej, włącznie z niesymetrią układu wynikającą z awaryjnych przypadków lotu. Program testowano na przykładach hipotetycznych konstrukcji z pracy [7], charakteryzujących się stałymi rozkładami parametrów masowych i sztywnościowych zespołów samolotu.

Do obliczeń, skrzydła i nosową część kadłuba dzielono na n_1 elementów a połówkę usterzenia wysokości, obydwie usterzenia kierunku i środkową część kadłuba na n_2 elementów. Przy czym zachodziła relacja $n_1 = 2n_2$. Wszystkie części płatowca w obszarze każdego z zespołów, dzielono na elementy o różnej długości w zależności od ich rozkładów masy i sztywności.

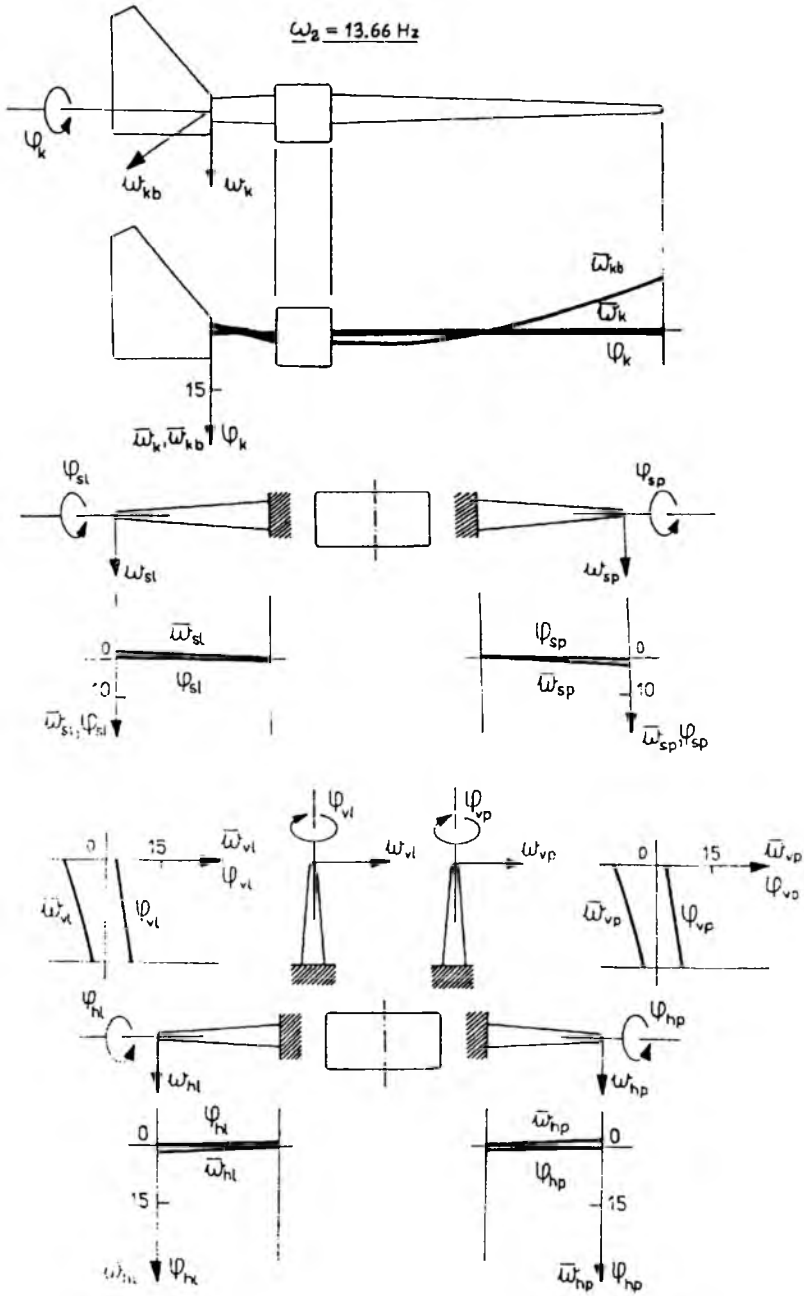
Obliczenia wykonano dla samolotu myśliwskiego konstrukcji Mikojana o masie startowej 16500 kg tj. dla konfiguracji masowej do akcji myśliwskiej z pełnymi integralnymi skrzydłowymi zbiornikami paliwa. Niezbędne masowe



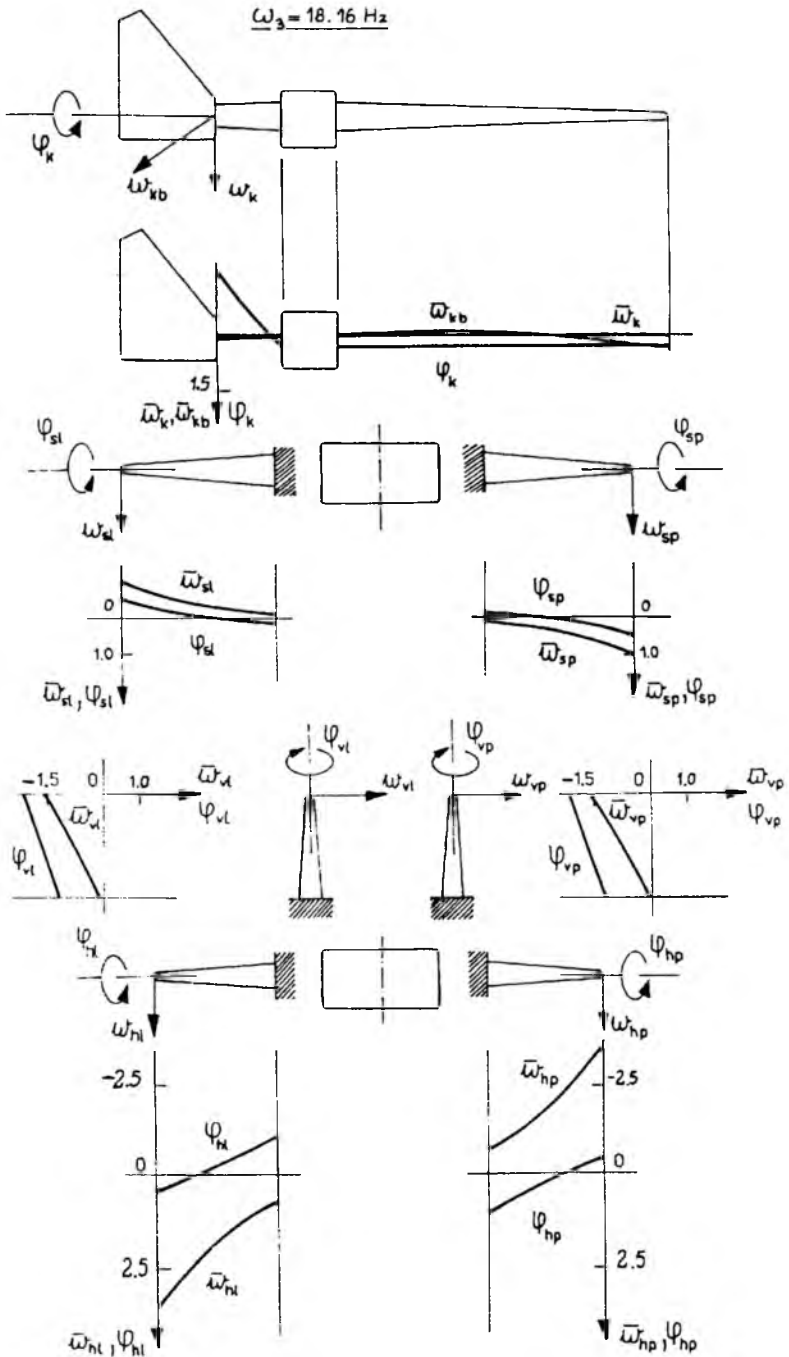
Rys. 5. Badanie zbieżności obliczeń



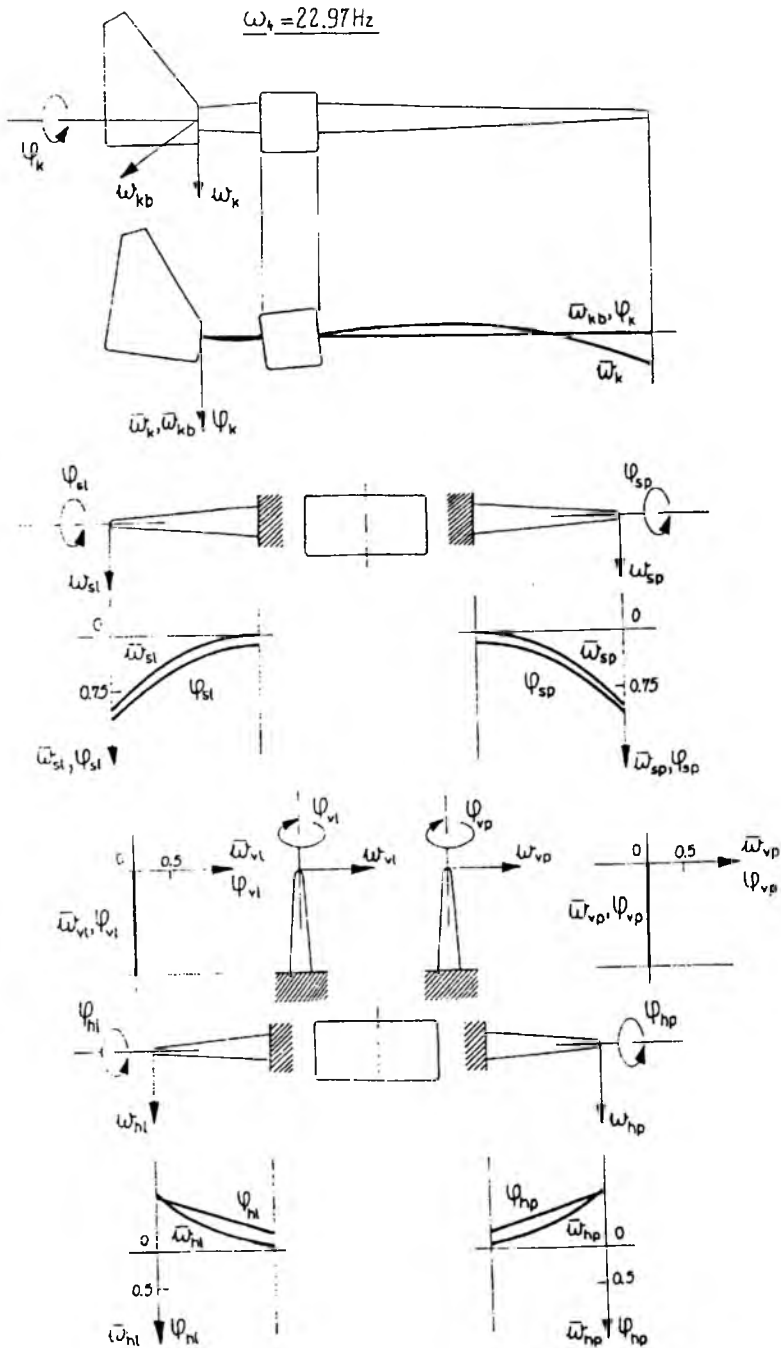
Rys. 6. Pierwsza postać widma drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstotliwości symetrycznego zginania kadłuba $\omega_1 = 12,08 \text{ Hz}$



Rys. 7. Druga postać widma drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstoci niesymetrycznego zginania kadłuba $\omega_2 = 13.66 \text{ Hz}$



Rys. 8. Trzecia postać widma drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstotliwości skrętnych drgań kadłuba $\omega_3 = 18.16 \text{ Hz}$



Rys. 9. Czwarta postać widna drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstotliwości symetrycznego zginania skrzydeł $\omega_4 = 22.97 \text{ Hz}$

i sztywnościowe dane samolotu zaczerpnięto z dostępnych źródeł oraz na bazie znajomości obciążeń działających na strukturę wyznaczonych zgodnie z amerykańskimi przepisami budowy samolotów wojskowych MIL.

Wyniki obliczeń widma samolotu zestawiono w tabeli 1 oraz pokazano na rys.6 ÷ rys.15. Zbadano również zbieżność obliczeń pierwszych pięciu $\omega_1 \div \omega_5$ częstości widma co ilustruje rys.5. Zamieszczone tu wykresy potwierdzają poprawność przyjętego algorytmu oraz zastosowanej metodyki obliczeń. Przedstawiają one zmianę względnego błędu:

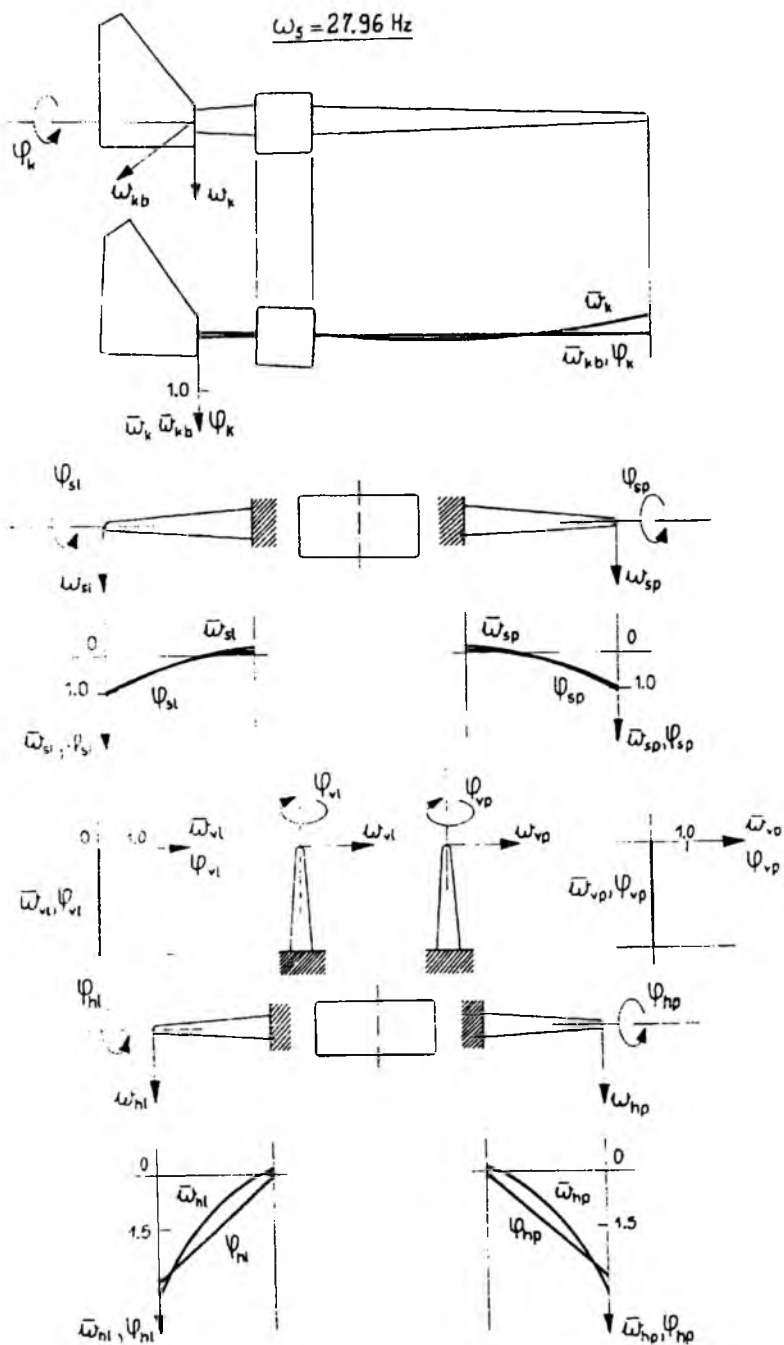
$$\Delta\omega_k = \frac{\omega_k - \omega_{k,n}}{\omega_k} 100\% \quad (7.1)$$

od zastosowanego podziału odkształcalnych zespołów $n = (n_1, n_2)$, gdzie $\omega_{k,n}$ oznacza częstość ω_k obliczoną przy podziale n . Jako wielkości odniesieniowe przyjęto częstości obliczone dla podziału $n_1 = 20$ i $n_2 = 10$ elementów, czyli układ zawierał 428 stopni swobody.

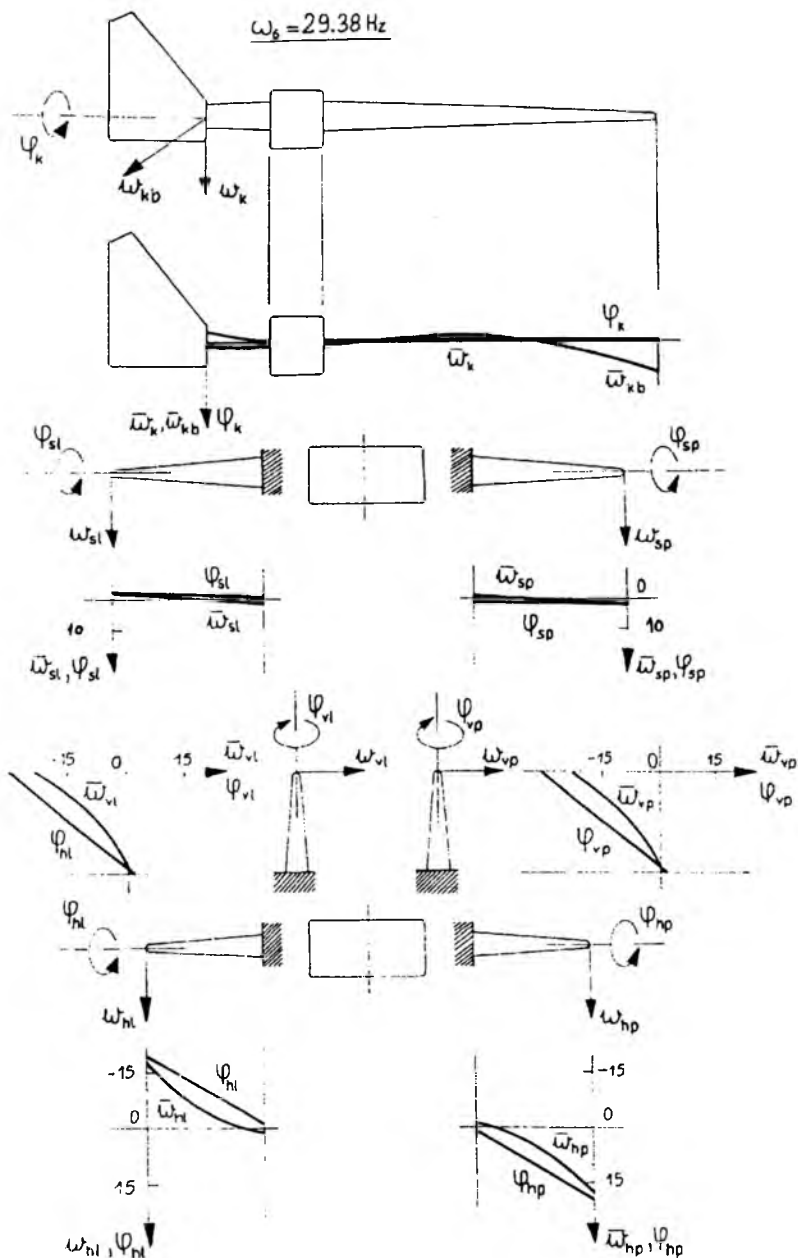
Na rysunkach 6÷14 pokazano rezultaty obliczeń częstości $\omega_1 \div \omega_{10}$ i odpowiadające im postacie drgań samolotu o symetrycznej budowie. Wykresy ilustrują przebiegi linii ugięcia kadłuba \bar{w}_k w płaszczyźnie symetrii i w płaszczyźnie bocznej \bar{w}_{kb} oraz kąta skręcenia φ_k ; dotyczy to zarówno środkowej części kadłuba jak i nosowej. Przedstawiono również ugięcia i skręcenia skrzydeł: prawego $\bar{w}_{sp}, \varphi_{sp}$ i lewego $\bar{w}_{sl}, \varphi_{sl}$, połówek usterzenia wysokości: prawej $\bar{w}_{hp}, \varphi_{hp}$ i lewej $\bar{w}_{hl}, \varphi_{hl}$ oraz zdwojonego usterzenia pionowego prawego $\bar{w}_{vp}, \varphi_{vp}$ i lewego $\bar{w}_{vl}, \varphi_{vl}$. Wykresy postaci wykonano przy założeniu jednostkowego ugięcia swobodnego końca prawego skrzydła tj. przyjęto $\bar{w}_{sp0} = 1$.

W celu przyporządkowania kolejnych częstości badanego widma odpowiednim odkształcalnym zespołom samolotu zastosowano metodykę przedstawioną w [7].

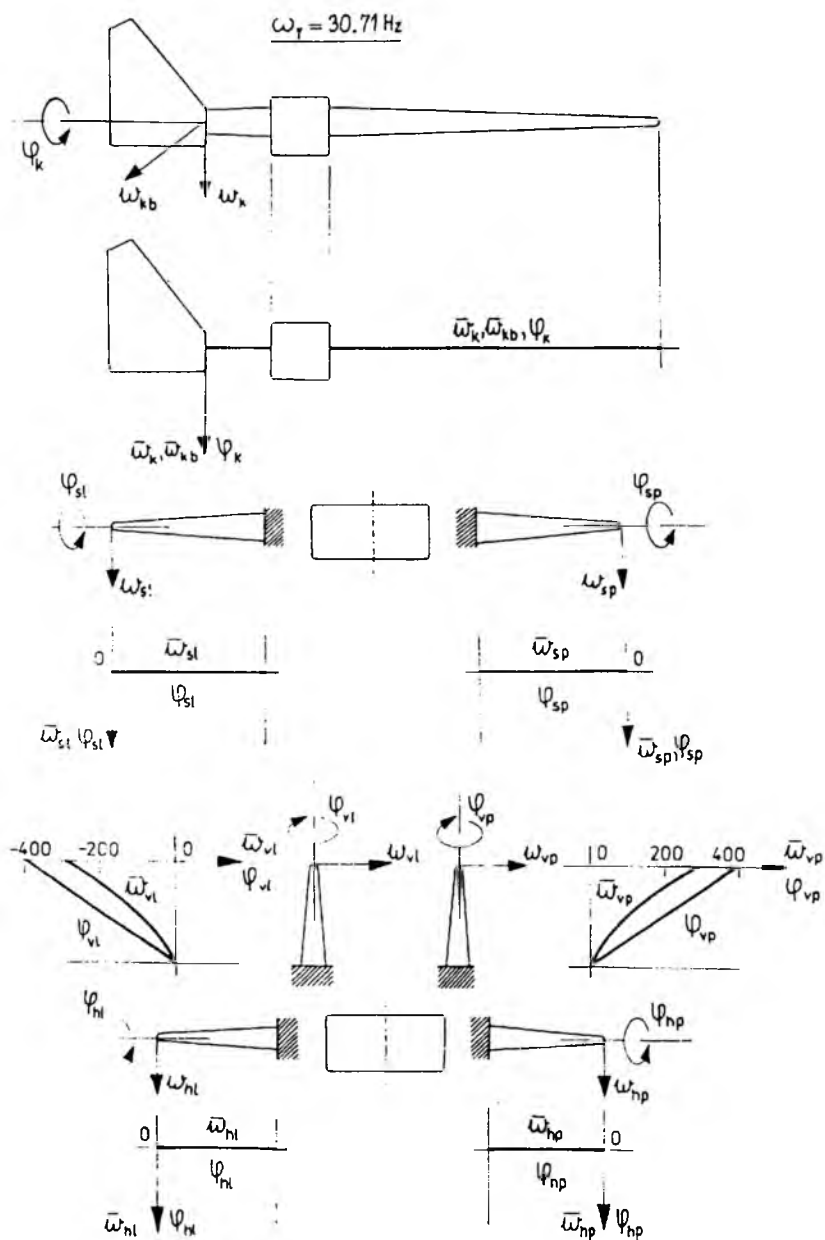
W wyniku przeprowadzonych obliczeń widma drgań samolotu wyznaczone częstości można przyporządkować zespołom układu. I tak, dla ω_1 dominujące znaczenie ma zginanie kadłuba w płaszczyźnie symetrii samolotu, dla ω_2 – zginanie kadłuba w płaszczyźnie bocznej, dla ω_3 – skręcanie kadłuba, dla ω_4 – symetryczne zginanie skrzydeł, dla ω_5 – symetryczne zginanie usterzenia wysokości, dla ω_6 – niesymetryczne zginanie usterzenia wysokości, dla ω_7 – symetryczne zginanie usterzeń kierunku, dla ω_8 – zginanie kadłuba w płaszczyźnie symetrii samolotu (druga postać), dla ω_9 – zginanie kadłuba w płaszczyźnie bocznej (druga postać) i dla ω_{10} podstawowe znaczenie ma niesymetryczne zginanie skrzydeł.



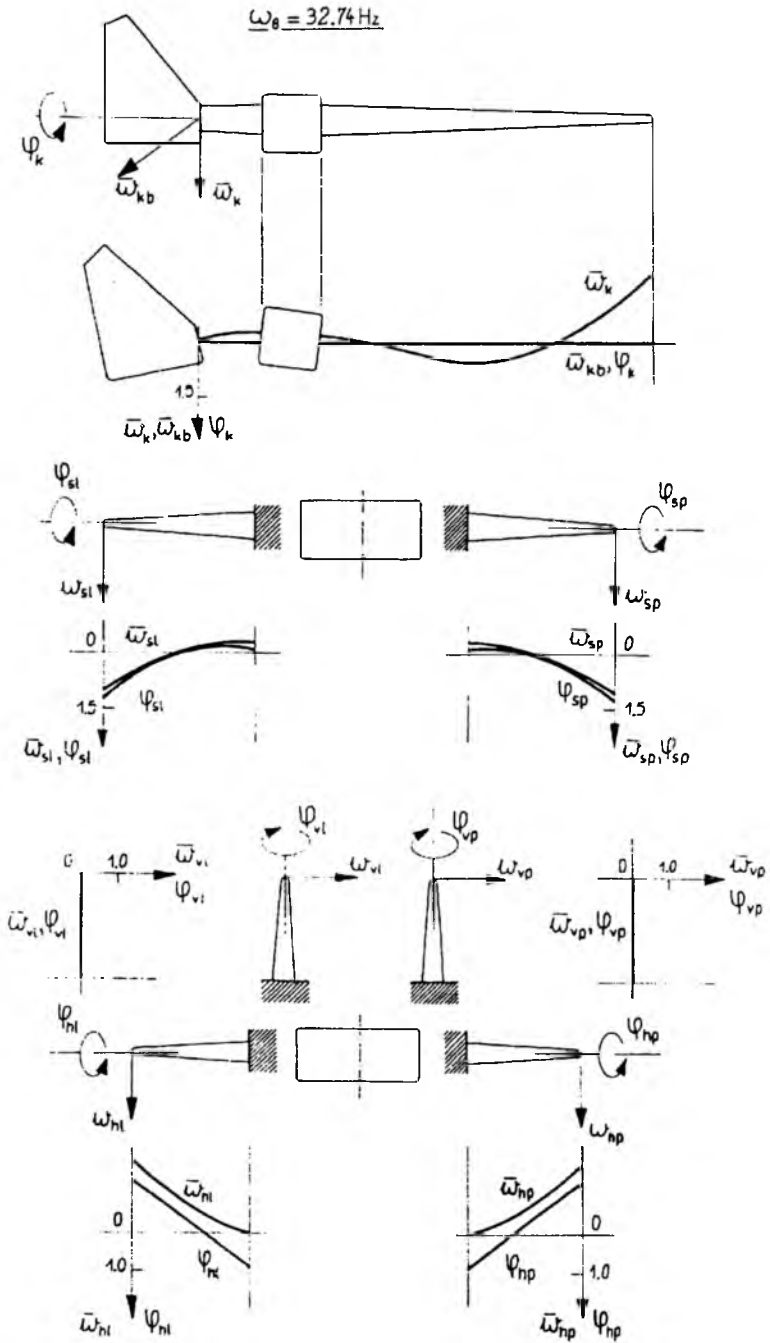
Rys. 10. Piąta postać widma drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstotliwości symetrycznego zginania usterzenia wysokości $\omega_5 = 27.96 \text{ Hz}$



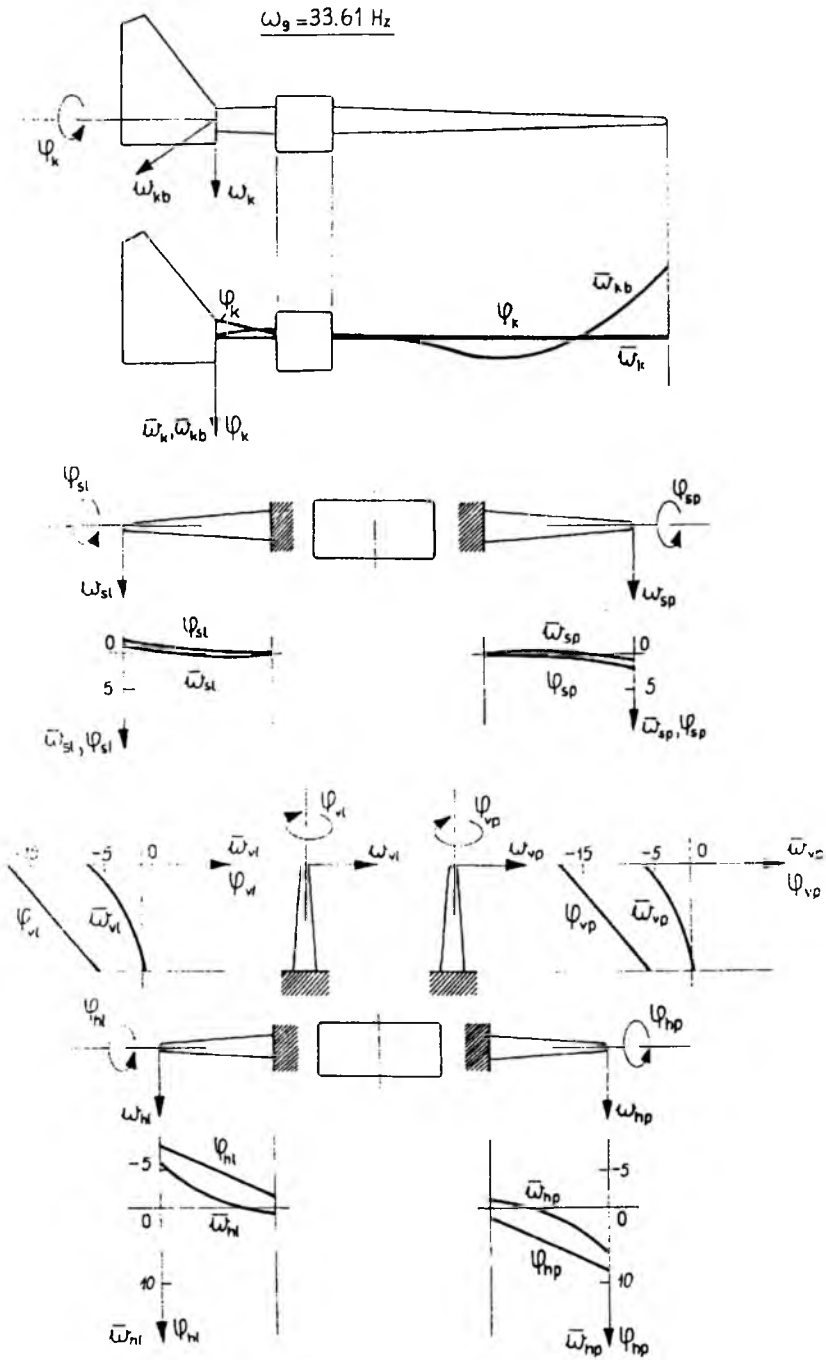
Rys. 11. Szósta postać widma drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstotliwości niesymetrycznego zginania usterzenia wysokości $\omega_6 = 29.38 \text{ Hz}$



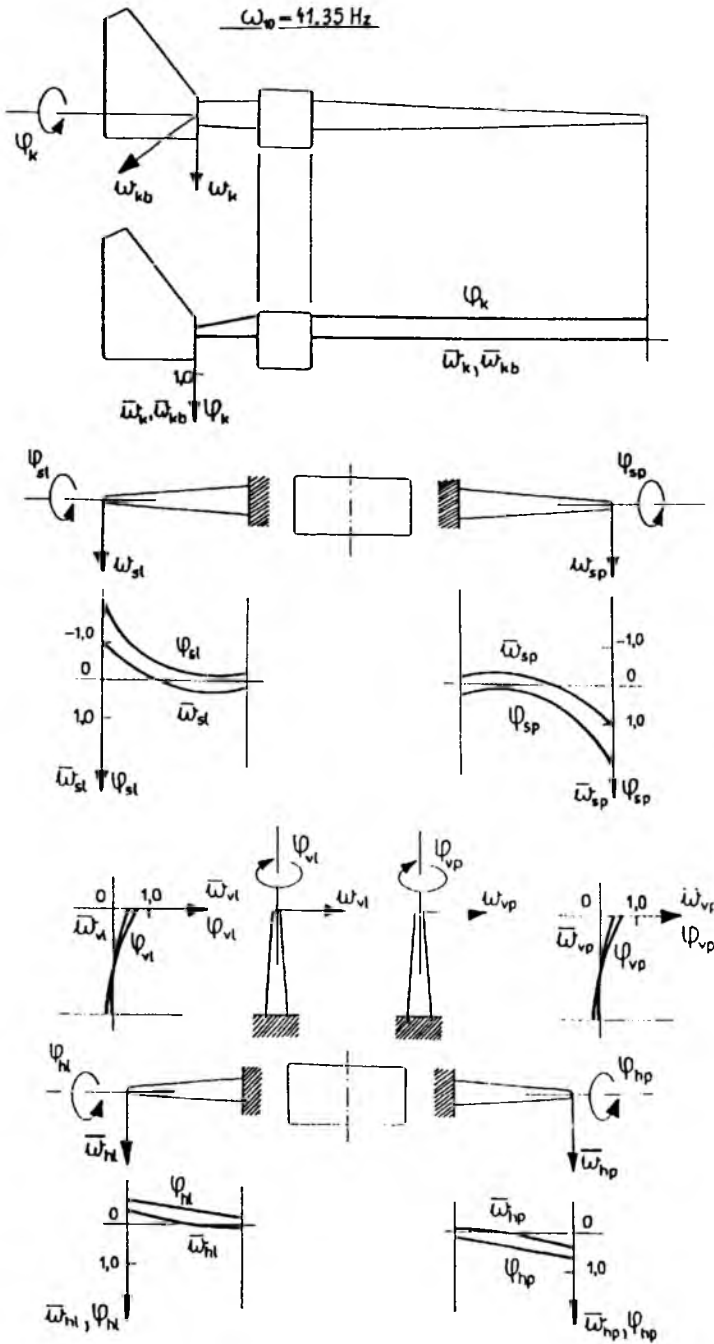
Rys. 12. Siódma postać widma drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstotliwości symetrycznego zginania usterzeń kierunku $\omega_7 = 30.71 \text{ Hz}$



Rys. 13. Ósma postać widma drgań samolotu; odpowiada drugiej częstotliwości symetrycznego zginania kadłuba $\omega_8 = 32.74 \text{ Hz}$



Rys. 14. Dziewiąta postać widma drgań samolotu; odpowiada drugiej częstotliwości niesymetrycznego zginania kadłuba $\omega_9 = 33.61 \text{ Hz}$



Rys. 15. Dziesiąta postać widma drgań samolotu; odpowiada pierwszej częstotliwości niesymetrycznego zginania skrzydeł $\omega_{10} = 41.35 \text{ Hz}$

Tabela 1. Zestawienie częstości samolotu

i	Częstości ω_i [Hz]	Zespół samolotu, postać drgań
1	12.08	Kadłub, I giętna, sym.
2	13.66	Kadłub, I giętna, nies.
3	18.16	Kadłub, I skrętna, nies.
4	22.97	Skrzydło, I giętna, sym.
5	27.96	Ust. wysokości, I giętna, sym.
6	29.38	Ust. wysokości, I giętna, nies.
7	30.71	Ust. kierunku, I giętna, sym.
8	32.74	Kadłub, II giętna, sym. (II postać)
9	33.61	Kadłub, II giętna, nies. (II postać)
10	41.35	Skrzydło, I giętna, nies.

Z przedstawionych wyników obliczeń dziesięciu częstości samolotu z zamocowanymi na sztywno ruchomymi powierzchniami sterowymi, można wyciągnąć wnioski:

- w widmie występuje po pięć częstości odpowiadających symetrycznym ($\omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_7, \omega_8$) i niesymetrycznym ($\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_9, \omega_{10}$) postaciom zespołów samolotu; w tym osiem częstości jest pierwszymi, dwie – drugimi;
- najwięcej częstości w widmie dotyczy kadłuba (pięć), w tym trzy występują jako najniższe w widmie ($\omega_1 \div \omega_3$) i dotyczą giętnych drgań tego zespołu w dwu płaszczyznach oraz drgań skrętnych; jednym z czynników mających istotny wpływ na niskie ich wartości ma fakt, że ponad 85% masy samolotu jest rozłożone wzdłuż długości kadłuba, ponadto w przyjętym modelu samolotu nosowa część kadłuba (traktowana jako belka wysięgnikowa) jest stosunkowo długa;
- wysoko jest umiejscowiona w widmie i ma dużą wartość giętna częstość skrzydła (ω_4), co wynika ze stosunkowo małej rozpiętości oraz dużej sztywności płata; jest to charakterystyczne dla samolotów manewrowych przenoszących duże obciążenia, przy tym naddźwiękowych;
- w wyznaczonym widmie brak jest częstości, które mogłyby świadczyć o podatności konstrukcji na wystąpienie flatteru; chodzi tu głównie o takie zespoły jak skrzydła i usterzenia.

Przedstawiony w niniejszej pracy uogólniony dynamiczny model samolotu ze zdwojonym usterzeniem pionowym, będący rozwinięciem poprzednich prac,

jest dobrym przybliżeniem rzeczywistych konstrukcji. Można go zastosować dla dowolnych konfiguracji masowych i sztywnościowych samolotu.

W następnych pracach, dla zaproponowanego modelu samolotu, będzie przedstawiony wpływ niesymetrii geometrycznej i masowej na jego właściwości dynamiczne.

Literatura

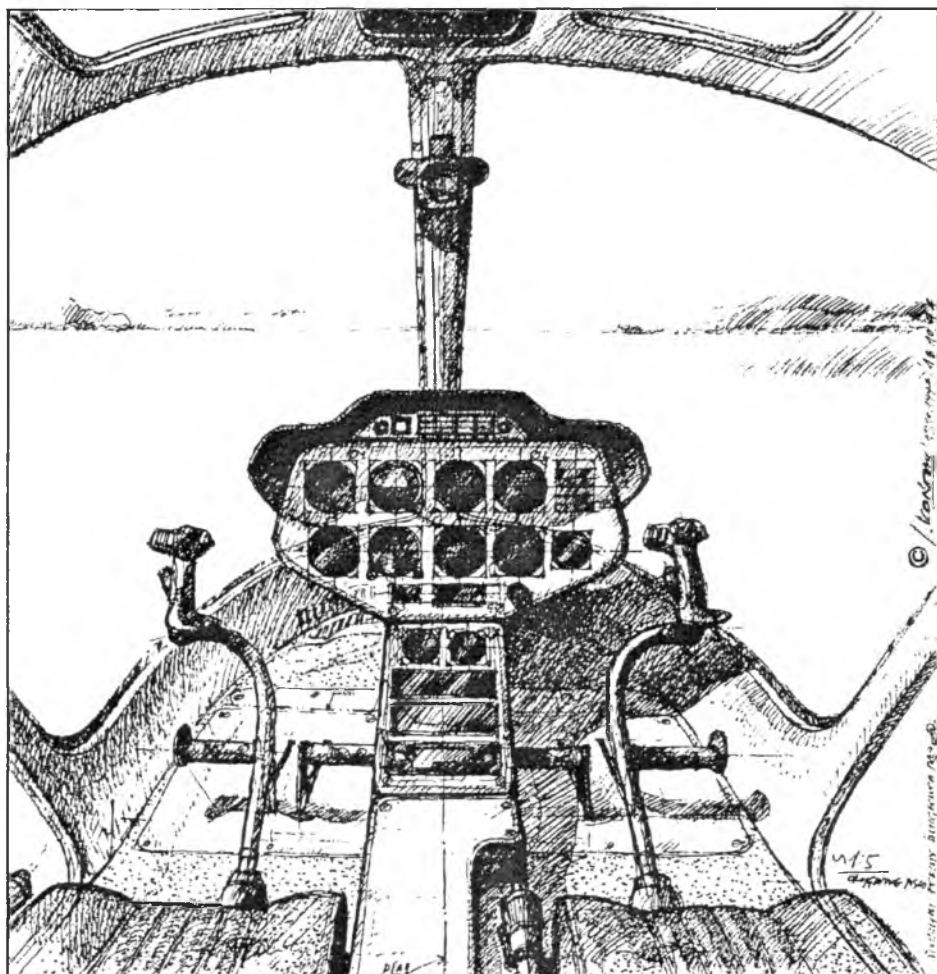
1. SCANLAN R.H., ROSENBAUM R., *Introduction to the study aircraft vibration and flutter*, New York, 1951
2. BISPLINGHOFF R.H., ASHLEY H., *Principles of aeroelasticity*, New York-London, 1962
3. DŻYGADŁO Z., KALISKI S., SOLARZ L., WŁODARCZYK E., (pod redakcją S. Kaliskiego), *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966
4. ZIENKIEWICZ O.C., *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, London 1971
5. NOWAK M., POTKAŃSKI W., *Metoda analizy flatteru samolotów lekkich*, Prace Inst. Lotn., 65, 1976
6. DŻYGADŁO Z., BŁASZCZYK J., *Dynamiczny model odkształcalnego samolotu do badania drgań własnych metodą elementów skończonych*, Biul. WAT, XXVI, 4, 1977
7. DŻYGADŁO Z., BŁASZCZYK J., *Analiza podłużnych drgań własnych metodą elementów skończonych*, Biul. WAT, XXVII, 7, 1978
8. SZMELTER J., *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa 1980
9. DŻYGADŁO Z., BŁASZCZYK J., *Metoda wielostopniowej syntezy struktury do analizy drgań odkształcalnego samolotu*, Mechanika i Komputer, t.4, 211-227, Warszawa-Poznań 1981
10. BŁASZCZYK J., *Analiza podłużnych drgań własnych odkształcalnego samolotu z zewnętrznymi podwieszeniami metodą elementów skończonych*, Biul. WAT, XXXI, 5, 1983
11. GAWROŃSKI W., KRUSZEWSKI J., OSTACHOWICZ W., TARNOWSKI J., WITTBRODT E., *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1984
12. DŻYGADŁO Z., NOWOTARSKI I., OLEJNIK A., *Dyskretny model odkształcalnego samolotu do badania drgań własnych*, Biul. WAT, XXXIII, 4, 1984
13. BŁASZCZYK J., *Dynamiczny model samolotu z płatem o niesymetrycznej zmianie geometrii do badania drgań własnych metodą elementów skończonych*, Biul. WAT, XXXX, 11, 1990
14. BOGUSZ W., DŻYGADŁO Z., ROGULA D., SOBCZYK K., SOLARZ L., *Vibrations*, PWN Warsaw, Elsevier Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo 1992

15. BŁASZCZYK J., KRASOŃ W., *Analiza drgań własnych samolotu z niesymetryczną zmianą geometrii płata*, Biul. WAT, XLI, 1, 1993
16. LEGRAS J., *Methodes et techniques de l'analyse numerique*, Dunod-Paris 1971
17. DAHLQUIST G., BJORCK A., *Numerical methods*, Prentice-Hall 1974

Numerical Analysis of Natural Vibrations of a Modern Supersonic Aircraft by the Finite Element Method

Summary

In the paper, the beam-solid type model of an aircraft with the twin-fin tail unit is presented. The structure showing asymmetrical mass and stiffness distribution is considered. Equations of motion of deformable assemblies and their dynamic, kinematic, and boundary coupling conditions are given. Finally, a complete set of equations is obtained for studying longitudinal-lateral free vibrations of an aircraft with the aerodynamical and constructional configuration defined. A supersonic aircraft is considered. The first ten natural frequencies of the spectrum are found and identified.



ŚMIGŁOWIEC DWUMIEJSCOWY IS-2

INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1995

IDENTYFIKACJA DYNAMIKI SAMOLOTU METODĄ KALMANA I CORBINA DLA POTRZEB ADAPTACYJNEGO UKŁADU STEROWANIA LOTEM

JERZY BOROWSKI

WIESŁAW SOBIERAJ

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

W artykule przedstawiono i porównano dwie spośród wielu metod identyfikacji dynamiki samolotu jako obiektu sterowania: metodę Kalmana i Corbina. Obiektem sterowania był samolot szkolno-bojowy typu "Iryda". Identyfikowana dynamika przedstawiona została za pomocą zlinearyzowanego modelu typu SISO. Model dynamiki samolotu opisuje właściwości izolowanego krótkookresowego ruchu podłużnego. Identyfikację przeprowadzono w oparciu o pomiar wielkości wejściowej i wyjściowej metodą "off-line". W metodzie Corbina model dynamiki traktowany jest jako ciągły, natomiast w metodzie Kalmana ten sam model traktowany jest jako dyskretny. Wymienione metody porównano z punktem widzenia szybkości i dokładności identyfikacji.

1. Wprowadzenie

Identyfikacja dynamiki samolotu jako obiektu sterowania jest podstawowym problemem w układach adaptacyjnego sterowania lotem. Od dokładności identyfikacji zależy poprawność wypracowania sygnałów sterujących i zapewnienie optymalnych procesów sterowania. Dynamika samolotu ulega w czasie lotu ciągłym zmianom w wyniku zmian właściwości środowiska, masy samolotu i parametrów ruchu. W dotychczas stosowanych rozwiązaniach, na naszych samolotach bojowych, wykorzystuje się identyfikację pośrednią przez pomiar wysokości i prędkości lotu lub ciśnienia dynamicznego i na tej podstawie dokonywana jest korekcja parametrów praw sterowania pilotów automatycznych. Identyfikacja taka nie uwzględnia jednak niektórych czynników jak np. zmiany masy samolotu, temperatury otoczenia itp.

W układach adaptacyjnych z zamkniętymi obwodami strojenia identyfikowana jest rzeczywista dynamika obiektu sterowania lub procesu sterowania.

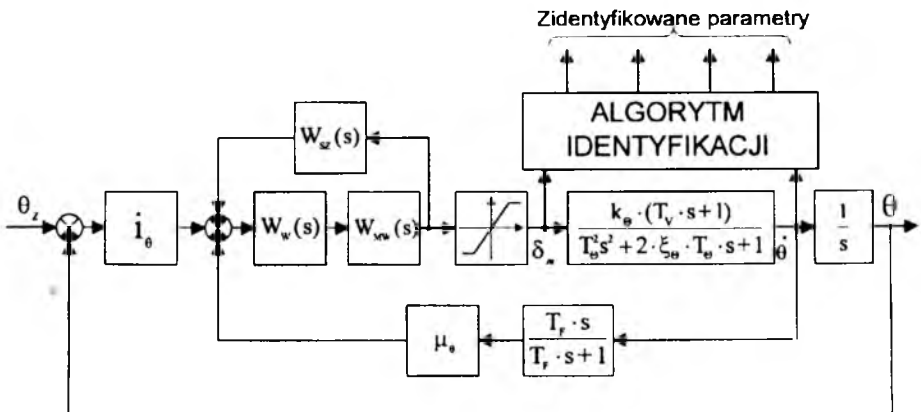
Proces identyfikacji w tym przypadku jest trudniejszy, jednak ma to istotne zalety.

Zaprezentowane zostaną dwie metody identyfikacji dynamiki samolotu jako obiektu sterowania – metoda Corbina i metoda Kalmana [1]. Badania algorytmów identyfikacji przeprowadzono metodą symulacji komputerowej o schemacie przedstawionym na rys.1. Identyfikowano dynamikę samolotu szkolno-bojowego "Iryda", którego charakterystyki aerodynamiczne uzyskano metodami badań tunelowych. Rozpatrując ruch samolotu w płaszczyźnie symetrii, dynamikę można przedstawić w postaci układu zlinearyzowanych równań operatorowych:

$$\begin{aligned} (s + n_{11})\Delta V_k + n_{13}\Delta\theta + n_{16}\Delta\alpha &= b_{11}\Delta\bar{n}_n \\ n_{24}s\Delta\theta + (s + n_{26})\Delta\alpha &= b_{21}\Delta\bar{n}_n + b_{22}\Delta\delta_m \\ s(s + n_{34})\Delta\theta + (n_{37}s + n_{36})\Delta\alpha &= b_{31}\Delta\bar{n}_n + b_{32}\Delta\delta_m \\ n_{34}\Delta\theta + n_{46}\Delta\alpha + s\Delta H &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie:

- n_{ik} – współczynniki operatorowych równań ruchu,
- $\Delta\alpha, \Delta\theta, \Delta V_k, \Delta H$ – przyrosty parametrów ruchu samolotu,
- $\Delta\bar{n}_n, \Delta\delta_m$ – przyrosty wymuszeń sterujących,
- s – operator Laplace'a.



Rys. 1. Identyfikacja dynamiki obiektu sterowania w układzie "SAMOLOT-PILOT AUTOMATYCZNY"

Układ symulacji komputerowej przedstawia dynamikę systemu "SAMOLOT-PILOT AUTOMATYCZNY" pracującego na zakresie "Stabilizacja".

Zadaniem tego układu jest stabilizacja kąta pochylenia samolotu. Układ ma dwie pętle regulacji. Pętla wewnętrzna pełni funkcję tłumienia krótkookresowych drgań samolotu natomiast pętla zewnętrzna realizuje proces stabilizacji. Dynamika serwonapędu przedstawiona jest w postaci transmitancji $W_W(s)$, $W_{MW}(s)$ i $W_{SZ}(s)$. Wypadkowa transmitancja serwonapędu przedstawiona jest w postaci członu oscylacyjnego drugiego rzędu. Element nieliniowy z nasyceniem odzwierciedla ograniczenie ruchu steru wysokości.

Algorytmy identyfikacji wykorzystują dwa sygnały zmienne w czasie: wychylenie steru wysokości $\delta_m(t)$ i zmianę pochodnej kąta pochylenia $\theta(t)$. Na tej podstawie identyfikowane są parametry dynamiki samolotu jako obiektu sterowania.

Dla potrzeb identyfikacji przyjęto, że stany nieustalone w układzie wywołane zostaną przez zmianę wartości zadanej kąta pochylenia θ_Z jako funkcji liniowo narastającej.

2. Metoda Corbina

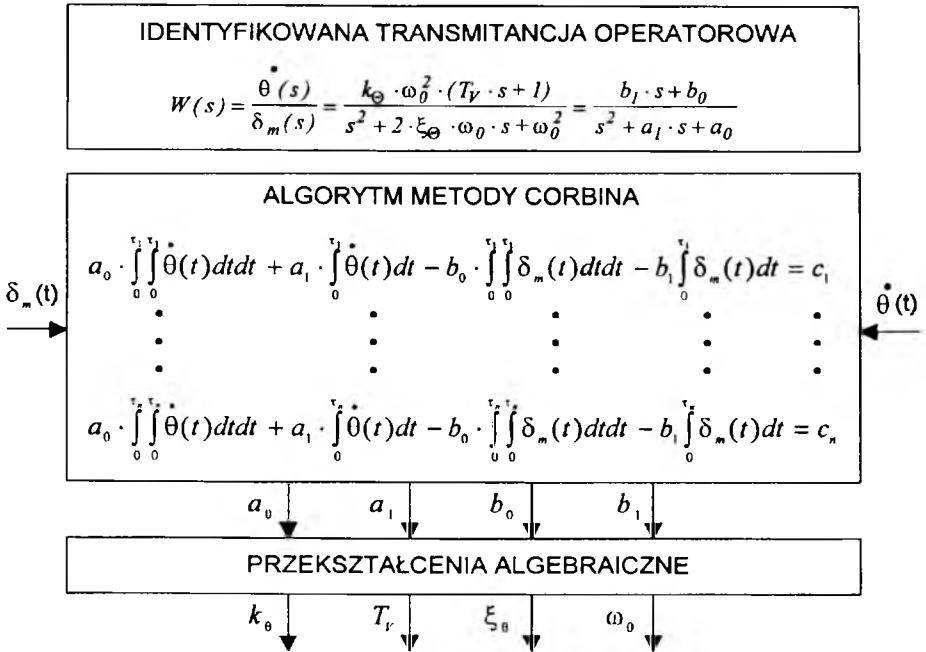
Jako pierwsza zaprezentowana zostanie metoda Corbina. W metodzie tej przyjęto, że identyfikowane będą parametry transmitancji operatorowej samolotu w krótkookresowym izolowanym ruchu podłużnym. Schemat algorytmu tej metody przedstawiono na rys.2. Identyfikowana transmitancja ma postać układu oscylacyjnego drugiego rzędu z forsowaniem:

$$W(s) = \frac{\Delta\dot{\theta}(s)}{\Delta\delta_m(s)} = \frac{k_\theta(T_v s + 1)}{T_\theta^2 s^2 + 2\xi_\theta T_\theta s + 1} \quad (2.1)$$

gdzie:

- $\Delta\dot{\theta}$ – przyrost prędkości kątowej pochylenia,
- $\Delta\delta_m$ – przyrost wychylenia steru wysokości,
- k_θ – wzmocnienie statyczne,
- T_v – stała czasu forsowania,
- ω_θ – częstość drgań własnych nietłumionych, $\omega_\theta = \frac{1}{T_\theta} = \omega_0$
- ξ_θ – współczynnik tłumienia.

Zależność na transmitancję otrzymuje się z układu równań operatorowych (1.1). Po dwukrotnym scałkowaniu jej równoważnego równania różniczkowego w przedziałach czasu $(0 \div \tau_1), \dots, (0 \div \tau_4)$ otrzymuje się układ czterech równań i czterech niewiadomych, którymi są poszukiwane parametry transmitancji operatorowej. Jak widać, w każdym równaniu przedział całkowania powinien



Rys. 2. Algorytm identyfikacji dynamiki samolotu metodą Corbina

być inny. Wynika z tego, że możliwa jest dowolna kombinacja wyboru tych przedziałów. Powstaje więc problem podziału przedziału czasu τ_4 na poszczególne podprzedziały $\tau_1 \div \tau_3$. W dalszych badaniach przyjęto, że różnica przedziału czasu maksymalnego τ_4 i minimalnego τ_1 zostanie podzielona na jednakowe odcinki, czyli:

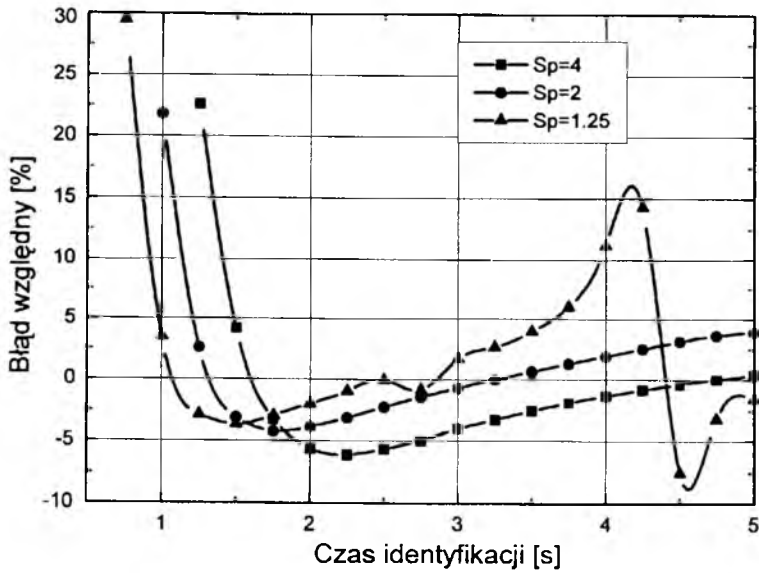
$$\tau_4 - \tau_3 = \tau_3 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_1$$

oraz wprowadzono wielkość nazwaną stosunkiem podziału spełniającą następującą zależność:

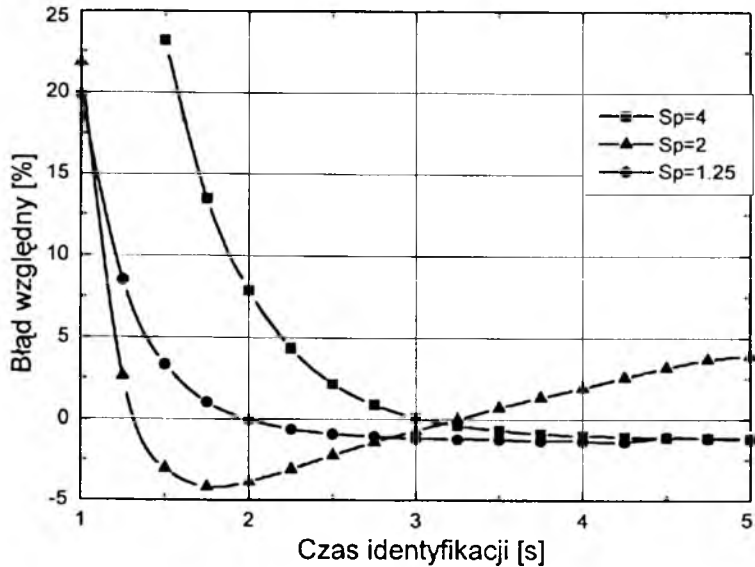
$$S_p = \frac{\tau_4}{\tau_1}$$

Badania dotyczące dokładności identyfikacji przeprowadzono więc nie tylko w funkcji przedziału czasu identyfikacji τ_4 ale również dla kilku wybranych wartości stosunku podziału S_p .

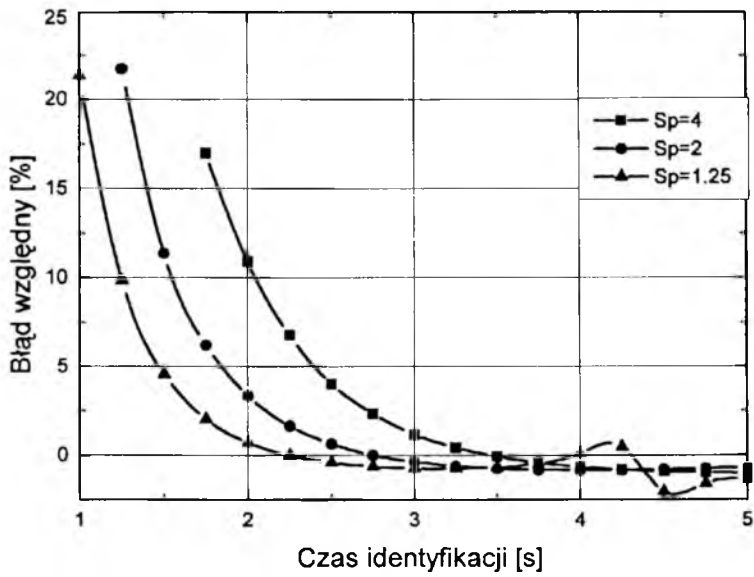
Przykładowe wyniki identyfikacji przedstawiono na rys.3 ÷ rys.6. Z przedstawionych rysunków wynika, że w badanym przedziale czasu identyfikacji błąd względny maleje ze wzrostem czasu dla każdego z identyfikowanych parametrów transmitancji operatorowej. Jest on również wyraźnie zależny od



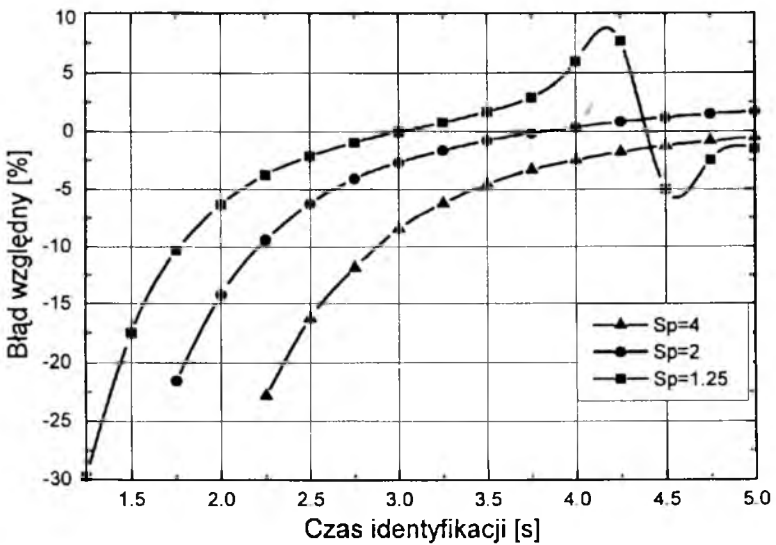
Rys. 3. Błąd względny określenia parametru ξ_θ transmitancji samolotu w funkcji przedziału czasu identyfikacji



Rys. 4. Błąd względny określenia parametru k_θ transmitancji samolotu w funkcji przedziału czasu identyfikacji



Rys. 5. Błąd względny określenia parametru ω_0 transmitancji samolotu w funkcji przedziału czasu identyfikacji



Rys. 6. Błąd względny określenia parametru T_v transmitancji samolotu w funkcji przedziału czasu identyfikacji

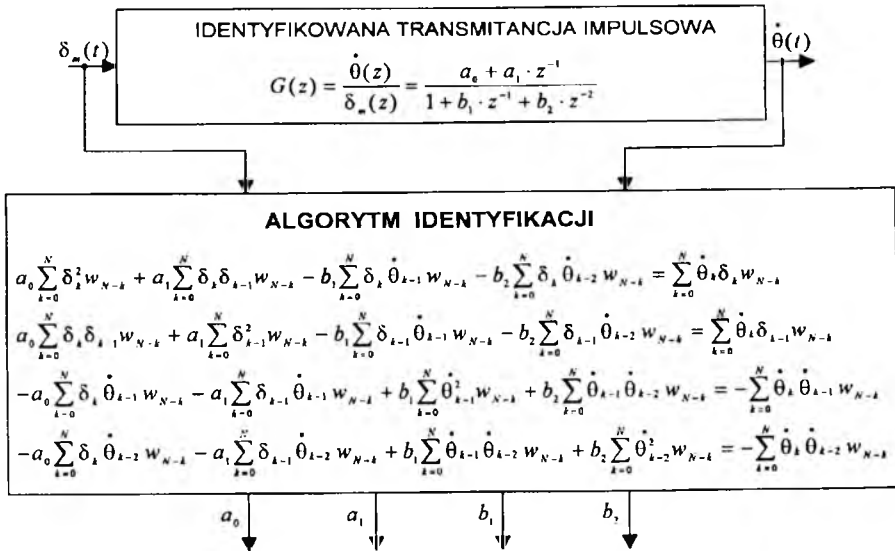
przyjętego stosunku podziału S_p . Przyjęcie małej wartości stosunku podziału (np. 1.25) powoduje, że błąd względny szybciej osiąga wartość minimalną, jednak w niektórych przypadkach może to spowodować pojawienie się oscylacji błędu po osiągnięciu minimalnej jego wartości. Wynika z tego, że istnieje optymalny stosunek podziału przy którym przedział czasu identyfikacji jest minimalny bez występowania oscylacji błędu.

Z przedstawionych rysunków widać, że najbardziej podatnym parametrem na identyfikację jest wzmocnienie statyczne k_θ , przy którym nie zaobserwowano niekorzystnych zjawisk oscylacji błędu identyfikacji. Najbardziej trudnym natomiast do zidentyfikowania jest współczynnik tłumienia ξ_θ .

W większości przypadków przedział czasu w którym następowała pełna identyfikacja parametrów transmitancji operatorowej z minimalnym błędem zawierał się w granicach 1.5 ÷ 3.5 s.

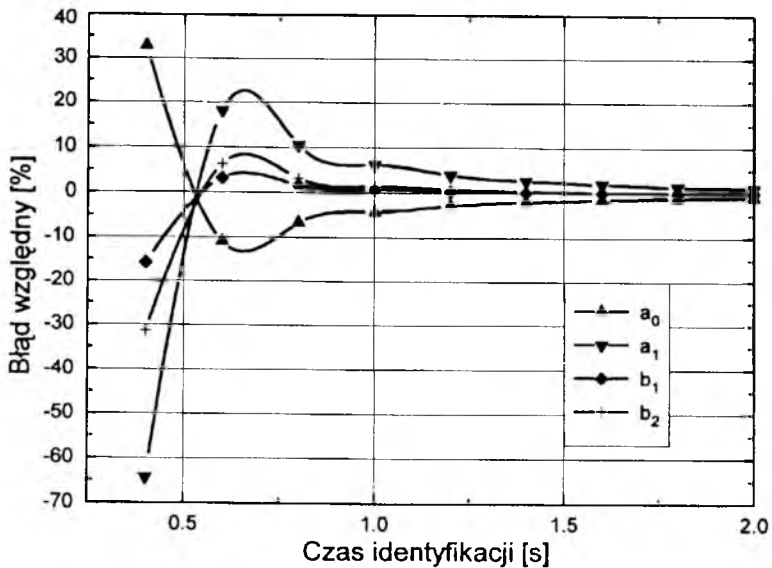
3. Metoda Kalmana

Następną rozpatrywaną metodą identyfikacji dynamiki samolotu jest metoda Kalmana. Schemat algorytmu tej metody przedstawiono na rys.7.



Rys. 7. Algorytm identyfikacji dynamiki samolotu metodą Kalmana; z – operator przekształcenia Z ; w_{N-k} – funkcja wagi; N – ilość próbek sygnału

W metodzie Kalmana identyfikacji podlega transmitancja impulsowa samolotu w krótkookresowym izolowanym ruchu podłużnym. Postać transmitancji impulsowej można wyznaczyć z transmitancji operatorowej (2.1). Analogicznie jak w poprzedniej metodzie wykorzystano zmianę w funkcji czasu wychylenia steru wysokości i pochodnej kąta pochylenia. Stany nieustalone w układzie wywołano w identyczny sposób jak w metodzie Corbina. Wyniki identyfikacji przedstawiono na rys.8.



Rys. 8. Błąd względny określenia parametrów transmitancji impulsowej samolotu w funkcji przedziału czasu identyfikacji

Z rysunku wynika, że najlepiej identyfikują się parametry mianownika transmitancji impulsowej. Porównując przedział czasu identyfikacji z poprzednią metodą widzimy, że dla metody Kalmana błąd identyfikacji nieznacznie szybciej maleje do zera. Nie wystąpiły w tej metodzie oscylacje błędu identyfikacji po osiągnięciu jego wartości minimalnej jak to miało miejsce w metodzie poprzedniej. Wykresy na rys.8 zostały sporządzone dla okresu próbkowania sygnałów 0.02 s. Dalsze zwiększenie częstotliwości próbkowania nie polepsza procesu identyfikacji ze względu na zbyt małe różnice w wyznaczonych współczynnikach układu równań algorytmu identyfikacyjnego. Zwiększenie okresu próbkowania sygnału powyżej 0.1 s również nie prowadzi do zmniejszenia czasu pełnej identyfikacji ze względu na wymaganą liczbę początkową próbek sygnału, niezbędną dla startu algorytmu identyfikacji.

Z przedstawionych rozważań wynika, że w zakresie przeprowadzonych badań identyfikacji dynamiki samolotu, metoda Kalmana jest lepsza od metody Corbina.

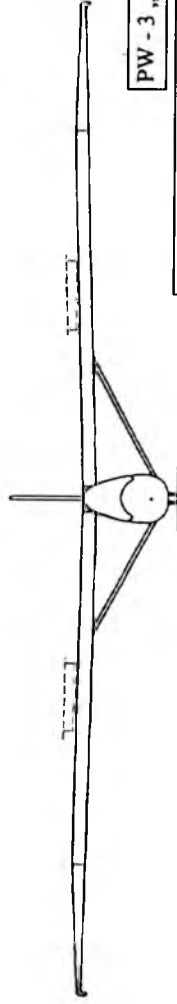
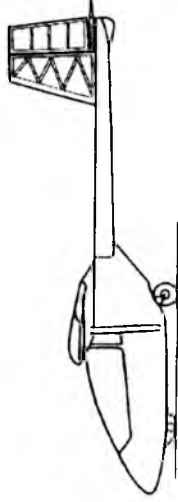
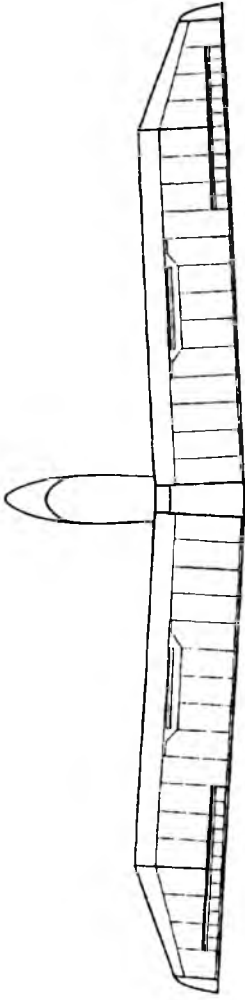
Literatura

1. MISHKIN E., BRAUN L., JR., *Adaptacyjne układy sterowania automatycznego*, WNT, Warszawa 1965
2. MCLEAN D., *Automatic Flight Control System*, Prentice Hall, 1990
3. BOROWSKI J., SOBIERAJ W., *Wpływ stopnia uproszczenia modelu na symulację dynamiki samolotu jako obiektu sterowania*, Mechanika w Lotnictwie, Warszawa 1992

Using of Kalman's and Corbin's Methods for Parameter Identification of Aircraft Dynamics for Adaptive Flight Control

Summary

In the paper Kalman's and Corbin's methods of an aircraft dynamic parameters identification for flight control purposes are presented and compared. The military training-aircraft "Iryda" was a control plant. The plant dynamics is described by a linear SISO model. The model describes properties of the uncoupled short-time longitudinal motion of the aircraft. For identification purposes the model input and output variables were "off-line" measured. The continuous-time model was used in the Kalman's method while the same but sampled model was used in the Corbin's method. The accuracy and fastness of identification algorithms in the above two methods are compared.



PW - 3 „Bakcyl”

Politechnika Warszawska
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Zespół Naukowo-Badawczy Lotniczych Konstrukcji Kompozytowych

PRZESTRZENNE NAPROWADZANIE RAKIET Z NIERUCHOMYM BIEGUNEM OBSERWACJI JAKO RUCH ZŁOŻONY

STANISŁAW DUBIEL

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Opracowanie poświęcono przestrzennemu ujęciu lotu sterowanego, jako złożonego ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi. Celem rozdzielenia ruchu sterowanego idealnie od ruchu w przestrzeni błędów skorzystano z bardzo przejrzystego wyznaczenia prędkości względnych w ruchu złożonym. Z warunku zerowania się normalnej i bocznej prędkości względnej wyznaczono idealnie sterowany lot wiązką prowadzącą. Rzeczywiste warunki lotu sterowanego wiązką dopełniają równania ruchu w przestrzeni błędów w obszarze osiągalności.

Stosowane oznaczenia

- $Oxyz$ – nieruchomy układ współrzędnych,
- $O\xi, \eta, \zeta$ – ruchomy układ współrzędnych,
- $O\xi$ – oś pola obserwacji celu i obiektu sterowanego,
- ε, β_n – kąty podniesienia i elewacji osi pola obserwacji,
- ξ, η, ζ – położenie rakiety względem ruchomego układu współrzędnych,
- η, ζ – błędy sterowania (uchyby),
- V – prędkość rakiety,
- V_c – prędkość celu,
- γ, κ – kąty wektora prędkości rakiety,
- ξ_c – odległość celu od bieguna obserwacji,
- p, q, r – prędkości kątowe: przechylenia, pochylenia i odchylenia,

- L, M, N – momenty: przechylający, pochylający i odchylający,
 P_z, P_y, P_x – siły aerodynamiczne: nośna, boczna i oporu,
 F – ciąg układu napędowego.

1. Wprowadzenie

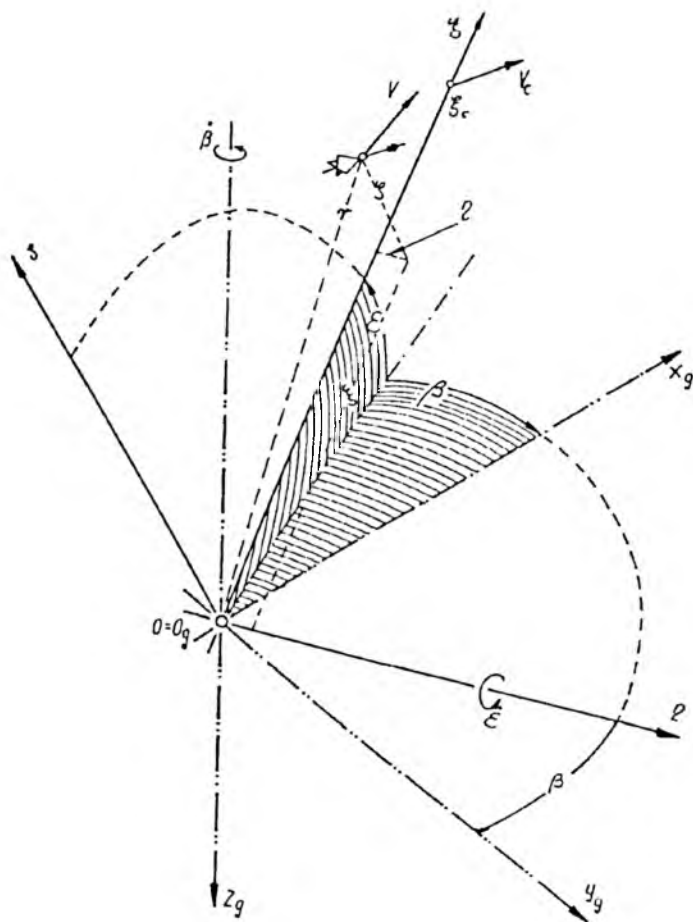
Metody zdalnego naprowadzania, jako klasyczny przykład ruchu złożonego, wyodrębniają ruch unoszenia, jako ruch związany z układem obserwacji [3]. Podłużna oś $O\xi$ układu unoszenia jest zarazem linią obserwacji układu śledzącego obiekt sterowany, a w przypadku sterowania wiązką pojedynczą, jest również linią obserwacji celu. Naziemne zestawy przeciwlotnicze mają nieruchomy biegun obserwacji, a więc i początek układu ruchomego będzie również nieruchomy i pokrywać się będzie z początkiem układu nieruchomego (patrz rys.1).

Ruch unoszenia dla przestrzennego lotu sterowanego dla nieruchomego bieguna jest ruchem kulistym Eulera, dlatego też dla określenia położenia układu unoszenia w przestrzeni "geograficznej" korzystniej będzie posługiwać się kątami Eulera. Odpowiednikami kątów Eulera w układach śledzenia są kąty: podniesienia ε i kąt elewacji β_n (rys.1).

Analogia między ruchem złożonym a metodami zdalnego naprowadzania wyłoniła się z ujęcia lotu sterowanego jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi [2]. Podział lotu sterowanego w równaniach ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi na ruch sterowany idealnie i ruch sterowany w przestrzeni błędów upraszcza znacznie badanie dynamiki lotu sterowanego. Ruch w przestrzeni błędów jest niczym innym jak ruchem względnym i jego współrzędne η, ζ są błędami sterowania (uchybami). Zmienna ξ natomiast jest rzutem rzeczywistego położenia rakiety na oś $O\xi$. Określa ona również położenie rakiety w locie sterowanym idealnie.

Zmienne η i ζ wejść więc razem z odpowiednimi pochodnymi i ewentualnie całkami w związkach sprzęgających do funkcji formowania sygnału sterującego [2,4]. Położenie zaś układu unoszenia określają, nazywane w literaturze niecałkiem ściśle "kinematyczne równania ruchu rakiety" [1,9]. W rzeczywistości są niczym innym jak równaniami więzów nieholonomicznych [8,10]. W układzie równań ruchu sterowanego jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi, występować będą jako równania więzów we współrzędnych biegunowych. Ujęciu przestrzennego lotu sterowanego z nieruchomym biegunem

obserwacji poświęca się niniejsze opracowanie.



Rys. 1. Nieruchomy $0xyz$ i ruchomy $0\xi\eta\zeta$ układ współrzędnych

2. Ruch układu unoszenia

Ruch układu unoszenia można wyznaczyć z programu sterowania lub z równań więzów, jeśli oś 0ξ jest zarazem linią obserwacji celu. Poniżej przyjęto za podstawę wyznaczenia równań ruchu układu ruchomego ten drugi przypadek.

Macierze transformacji między poszczególnymi układami zezwalają na przejście z jednego układu do drugiego. Jeżeli układ ruchomy posiada wspólny początek z układem nieruchomym wówczas dokonuje się wzajemnego przejścia przy pomocy następujących związków [10]:

$$\begin{aligned}x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta\end{aligned}\quad (2.1)$$

i przejście odwrotne:

$$\begin{aligned}\xi &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ \eta &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ \zeta &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z\end{aligned}\quad (2.2)$$

gdzie a_{ij} – cosinusy kierunkowe kątów między odpowiednimi osiami.

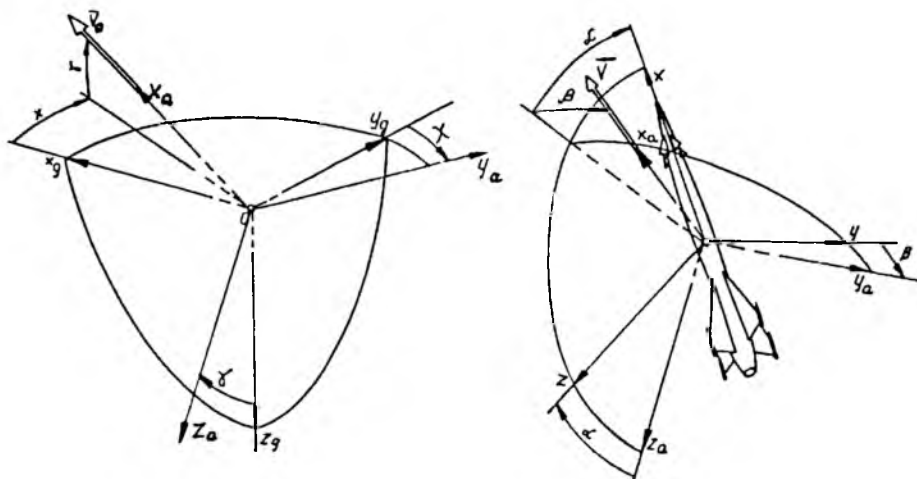
Związki (2.1) i (2.2) mają przejrzystą formę i przy dzisiejszych możliwościach obliczeniowych mogą okazać się przydatnymi. Szczególnie wygodne mogą się okazać przy korzystaniu z uniwersalnych programów rozwiązywania równań ruchu. Jeśli jednak zamierzeniem są badania jakościowe, czy optymalizacja procesu badanego, wówczas korzystniej będzie posługiwać się kątami Eulera i wykorzystać współrzędne biegunowe. Między innymi wyznaczenie prędkości kątowych linii obserwacji jest znacznie prostsze we współrzędnych biegunowych. Wypływa to z faktu, że współrzędne η i ζ są bardzo małe w porównaniu ze współrzędną ξ . Promień wodzący r , określający położenie rakiety względem początku układu ruchomego i nieruchomego jest związany ze współrzędnymi obu układów następującymi wzorami:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (2.3)$$

Ponieważ $\eta \ll \xi$ i $\zeta \ll \xi$ zatem $r \cong \xi$. Uprości to w wielu przypadkach dalsze badania. Odpowiednie kąty położenia wektora prędkości V oraz kąty natarcia i ślizgu, zarówno celu jak i rakiety, oznaczono na rys.2.

Niech wiązka prowadząca raketę będzie zarazem wiązką śledzącą cel. Współrzędne celu oznacza się z indeksem dolnym c . O prędkościach kątowych linii obserwacji decydować będzie odległość celu od bieguna obserwacji ξ_c i jego prędkość V_c . Pochodne współrzędnych biegunowych r , ε , β_n (patrz rys.1) uzyskuje się z następujących związków kinematycznych:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_c &= V_c[\cos \gamma_c \cos \varepsilon \cos(\kappa_c - \beta_n) + \sin \gamma_c \sin \varepsilon] \\ \xi_c \dot{\varepsilon} &= V_c[-\cos \gamma_c \sin \varepsilon \cos(\kappa_c - \beta_n) + \sin \gamma_c \cos \varepsilon] \\ \xi_c \dot{\beta}_n \cos \varepsilon &= V_c \cos \gamma_c \sin(\kappa_c - \beta_n)\end{aligned}\quad (2.4)$$



Rys. 2. Kąty: pochylenia i kierunku (a), natarcia i ślizgu (b)

Równania powyższe są niczym innym jak równaniami więzów w problemie sterowania rakieta. Określają ruch linii obserwacji celu, która jest osią wiązki sterującej i zarazem osią \$O\xi\$ układu ruchomego.

3. Lot sterowany wiązką jako ruch nieswobodny z więzami uogólnionymi

Układ równań opisujących lot rakiety sterowanej wiązką, podaje się poniżej jako układ równań ruchu nieswobodnego z więzami dynamicznymi w formie nieco zmodyfikowanej. Równania ruchu środka masy rakiety podaje się w układzie "półprędkościowym"

$$m \frac{dV}{dt} = F \cos \alpha \cos \beta - P_x - mg \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = F(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi) + P_z \cos \varphi - P_y \sin \varphi - mg \cos \gamma \quad (3.1)$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\kappa}{dt} = F(\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi) + P_z \sin \varphi + P_y \cos \varphi$$

$$\frac{dm}{dt} = -\mu$$

Równania ruchu dokoła środka masy w układzie związanym z rakieta:

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} &= L - (I_z - I_y)qr \\ I_y \dot{q} &= M - (I_x - I_z)rp \\ I_z \dot{r} &= N - (I_y - I_x)pq \end{aligned} \quad (3.2)$$

Równania więzów:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \dot{\xi}_c - V_c [\cos \gamma_c \cos \varepsilon \cos(\kappa_c - \beta_n) + \sin \gamma_c \sin \varepsilon] = 0 \\ \varphi_2 &= \xi_c \dot{\varepsilon} - V_c [-\cos \gamma_c \sin \varepsilon \cos(\kappa_c - \beta_n) + \sin \gamma_c \cos \varepsilon] = 0 \\ \varphi_3 &= \xi_c \cos \varepsilon \dot{\beta}_n - V_c \cos \gamma_c \sin(\kappa_c - \beta_n) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Związki sprzęgające:

$$\begin{aligned} \Phi_v(\delta_v, \dot{\delta}_v, \ddot{\delta}_v) &= Y(t_{kw}, t_{ke}) \psi(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}, \int \eta dt, t) \\ \Phi_h(\delta_h, \dot{\delta}_h, \ddot{\delta}_h) &= Y(t_{kw}, t_{ke}) \psi(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \int \zeta dt, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Zmienne η i ζ namierza układ obserwacji rakiety, dlatego korzystniej jest wyznaczyć ich pochodne jako prędkości względne. Korzysta się w tym celu z rys.1:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= V \cos \gamma \sin(\kappa - \beta_n) - \dot{\beta}_n \xi \cos \varepsilon \\ \dot{\zeta} &= V [-\cos \gamma \sin \varepsilon \cos(\kappa - \beta_n) + \sin \gamma \cos \varepsilon] - \xi \dot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zarówno równania ruchu obiektu latającego co najmniej płasko-symetrycznego, jak i wyrażenia na prędkości względne ulegają rozprzężeniu, przy pewnych uzasadnionych zresztą uproszczeniach. Rozprzężenie równań ruchu (3.1) i (3.2) jest uzasadnione szczególnie dla obiektów osiowo-symetrycznych, jakimi są rakiety przeciwlotnicze. Siła nośna jest generowana bez potrzeby przechylenia rakiety zatem przujmuje się jej stały kierunek pionowy. Półprędkościowy układ współrzędnych pokrywa się z układem prędościowym, którego oś $0z_a$ leży w płaszczyźnie pionowej. Zatem kąt $\varphi \equiv 0$ i równania ruchu ulegają automatycznie rozprzężeniu. Dodatkowe uproszczenie wypływa z równości momentów bezwładności względem osi normalnej i bocznej $I_y = I_z$. Pełny układ równań ruchu obiektów latających osiowo-symetrycznych przyjmie postać:

$$m \frac{dV}{dt} = F \cos \alpha \cos \beta - \bar{I}_x^2 - mg \sin \gamma$$

$$\begin{aligned}
 mV \frac{d\gamma}{dt} &= F \sin \alpha \cos \beta + P_z - mg \cos \gamma \\
 mV \cos \gamma \frac{d\kappa}{dt} &= F \cos \alpha \sin \beta - P_y \\
 -\frac{dm}{dt} &= -\mu \\
 I_x p &= L \\
 I_y q &= M - (I_z - I_x)rp \\
 I_z \dot{r} &= N - (I_x - I_y)pq
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Celem wyznaczenia położenia środka masy rakiety w przestrzeni "geograficznej" dochodzą dodatkowe równania:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \gamma \cos \kappa \\
 \frac{dy}{dt} &= V \cos \gamma \sin \kappa \\
 -\frac{dz}{dt} &= \frac{dh}{dt} = V \sin \gamma
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Kąty γ , κ , ε , β_n mogą być dowolne, ale ich różnice $\gamma - \varepsilon$ i $\kappa - \beta_n$ ze względów technicznych są na ogół małe, co daje:

$$\begin{aligned}
 \cos(\gamma - \varepsilon) &\cong 1 & \sin(\gamma - \varepsilon) &\cong \gamma - \varepsilon \\
 \cos(\kappa - \beta_n) &\cong 1 & \sin(\kappa - \beta_n) &\cong \kappa - \beta_n
 \end{aligned}$$

Wyrażenie na $\dot{\zeta}$ (3.5)₂ jest niezależne od wyrażenia na $\dot{\eta}$ (3.5)₁. Ponieważ równania ruchu podłużnego, przy pomijalnie małym iloczynie $rp \cong 0$, są również niezależne od ruchu bocznego, zatem i proces sterowania ruchem podłużnym jest niezależny od procesu sterowania ruchem bocznym. Równania sterowanego ruchu podłużnego mogą być rozwiązane niezależnie od równań ruchu bocznego.

Sterowany ruch boczny rakiety jest sprzężony z ruchem podłużnym funkcją $\cos \gamma$. Po rozwiązaniu równań ruchu podłużnego funkcja ta jest wiadomą funkcją czasu, a więc i rozwiązanie równań ruchu bocznego w następnej kolejności nie stanowi już żadnego problemu.

4. Lot sterowany idealnie

Koncepcja ujęcia lotu sterowanego jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi daje możliwość wyodrębnienia równań ruchu sterowanego idealnie od równań ruchu w przestrzeni błędów. Równania ruchu sterowanego idealnie określają żądany przebieg lotu sterowanego. Odchylenia rzeczywistego przebiegu lotu ujmują równania ruchu sterowanego w przestrzeni błędów. Odchylenia te są addytywne do parametrów lotu sterowanego idealnie z uwagi na fakt, że błędy sterowania η i ζ oraz ich pochodne są bardzo małe w porównaniu z przemieszczeniami y i z , określającymi rzeczywiste położenie obiektu.

Zmienne η , ζ jako funkcje czasu, wyznaczone z równań ruchu sterowanego w przestrzeni błędów, opisują procesy przejściowe rzeczywistego sterowania. Innymi słowy opisują efekty dynamiczne sterowania automatycznego lotem. Badanie lotu sterowanego idealnie i efektów dynamicznych sterowania przedstawiono poniżej.

Zależność sił aerodynamicznych: nośnej i bocznej oraz momentów aerodynamicznych ogranicza się do zależności liniowej od kątów α , β , δ , oraz ich pochodnych przy czym $q = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}$ i analogicznie dla ruchu boczego. Zależności te można wyrazić następującymi związkami:

$$\begin{aligned} P_z &= P_z^\alpha \alpha + P_z^\delta \delta_h & M &= M^\alpha \alpha + M^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M^q q + M^\delta \delta_h + M^{\dot{\delta}} \dot{\delta}_h \\ P_y &= P_y^\beta \beta + P_y^\delta \delta_v & N &= N^\beta \beta + N^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + N^r r + N^\delta \delta_v + N^{\dot{\delta}} \dot{\delta}_v \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sterowanie idealne pomija efekty dynamiczne wywołane zmianą położenia równowagi momentów. Jest to równoznaczne z pominięciem prędkości kątowych rakiety, czyli z przyjęciem ich zerowych wartości łącznie z ich pochodnymi. Otrzymuje się wówczas związki wypływające ze statycznej równowagi momentów w postaci:

$$\alpha = \frac{M^\delta}{M^\alpha} \alpha = \frac{C_M^\delta}{C_M^\alpha} \delta_h \quad \beta = \frac{N^{\delta_v}}{M^\beta} = \frac{C_N^\delta}{C_N^\beta} \delta_v$$

Uzyskuje się w ten sposób następujący układ równań lotu sterowanego idealnie:

$$m \frac{dV}{dt} = -mg \sin \gamma + mn_x g \quad (4.2)$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = -mg \cos \gamma + mb_h^\delta \delta_h \quad (4.3)$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\kappa}{dt} = mb_v^\delta \delta_v \quad (4.4)$$

$$-\dot{m} = -\mu \quad (4.5)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \kappa \quad (4.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \kappa \quad (4.7)$$

$$-\frac{dz}{dt} = V \sin \gamma \quad (4.8)$$

gdzie:

$$n_x = \frac{F - P_x}{mg} \quad b_h^\delta = \frac{F + P_z^\alpha}{m} \frac{C_M^\delta}{C_M^\alpha} + \frac{P_z^{\delta h}}{m}$$

$$F = w_e \mu \quad b_v^\delta = \frac{F + P_y^\beta}{m} \frac{C_N^\delta}{C_N^\beta} + \frac{P_y^{\delta v}}{m}$$

Równania więzów:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \dot{\xi}_c - V_c [\cos \gamma_c \cos \varepsilon \cos(\kappa_c - \beta_n) + \sin \gamma_c \sin \varepsilon] = 0 \\ \varphi_2 &= \xi_c \dot{\varepsilon} = V_c [-\cos \gamma_c \sin \varepsilon \cos(\kappa_c - \beta_n) + \sin \gamma_c \cos \varepsilon] = 0 \\ \varphi_3 &= \xi_c \cos \varepsilon \dot{\beta}_n = V_c \cos \gamma_c \sin(\kappa_c - \beta_n) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Związki sprzęgające dla lotu sterowanego idealnie sprowadzają się do równań na prędkości względne (3.5), przy założeniu: $\dot{\eta} \equiv 0$ i $\dot{\zeta} \equiv 0$:

$$0 \equiv V \cos \gamma (\kappa - \beta_n) - \xi \cos \varepsilon \dot{\beta}_n \quad (4.10)$$

$$0 \equiv V (\gamma - \varepsilon) - \xi \dot{\varepsilon}$$

Dodatkowe uproszczenia we wzorach (4.10) wypływają z małości różnic $(\kappa - \beta_n)$ i $(\gamma - \varepsilon)$ w procesie sterowania jednowiązkowego. Związki sprzęgające (3.4) nie są potrzebne bo kąty wychylenia sterów niezbędne do sterowania idealnego uzyskuje się z przekształcenia równań (4.10) i wykorzystaniu równań ruchu (3.3) i (3.4). Różniczkuje się w tym celu związki sprzęgające (4.10) względem czasu:

$$\begin{aligned} V \kappa \cos \gamma &= V \dot{\beta}_n \cos \gamma - (\dot{V} \cos \gamma - V \dot{\gamma} \sin \gamma) (\kappa - \beta_n) + \xi \dot{\beta}_n \cos \varepsilon + \\ &\quad - \xi \dot{\varepsilon} \dot{\beta}_n \sin \varepsilon + \xi \ddot{\beta}_n \cos \varepsilon \quad (4.11) \\ V \dot{\gamma} &= V \dot{\varepsilon} - \dot{V} (\gamma - \varepsilon) + \xi \dot{\varepsilon} + \xi \ddot{\varepsilon} \end{aligned}$$

Lewe strony otrzymanych pochodnych (4.11) są identyczne jak lewe strony równań ruchu (3.3) i (3.4). Z łatwością uzyskuje się związki między kątami wychylenia sterów a odpowiednimi składowymi przyspieszenia normalnego, niezbędnego do idealnego sterowania wiązką. Celem skrócenia zapisu odpowiednich związków porządkuje się prawe strony (4.11). Małe różnice kątów $(\kappa - \beta_n)$ i $(\gamma - \varepsilon)$ prowadzą do następujących uproszczeń: $\dot{\xi} \cong V$, $\cos \gamma \cong \cos \varepsilon$. Po ich wprowadzeniu do związków (4.11) otrzymuje się formę składowych przyspieszeń w ruchu złożonym, jakim jest lot sterowany idealnie wiązką prowadzącą:

$$a_v = a_{vu} + a_{vC} \quad (4.12)$$

$$a_h = a_{hu} + a_{hC}$$

przy czym:

$$\begin{aligned} a_{vu} &= \xi \ddot{\beta}_n \cos \varepsilon - (\dot{V} \cos \gamma - V \dot{\gamma} \sin \gamma)(\kappa - \beta_n) - \xi \dot{\varepsilon} \dot{\beta}_n \sin \varepsilon \\ a_{hu} &= \xi \ddot{\varepsilon} - \dot{V}(\gamma - \varepsilon) \end{aligned}$$

są składowymi przyspieszenia unoszenia, natomiast:

$$\begin{aligned} a_{vC} &= 2\dot{\xi}\dot{\beta}_n \cos \varepsilon \\ a_{hC} &= 2\dot{\xi}\dot{\varepsilon} \end{aligned}$$

są składowymi przyspieszenia Coriolisa.

Dzięki powyższemu uporządkowaniu zapisu związki określające kąty wychylenia sterów niezbędne do przestrzennego sterowania wiązką przyjmują bardzo przejrzystą postać:

$$\delta_v = \frac{a_v}{b_v^s} \quad \delta_h = \frac{a_h + g \cos \gamma}{b_h^s} \quad (4.13)$$

Drugie wyrażenie odpowiada przypadkowi sterowania bez programowej kompensacji składowej siły grawitacyjnej. Postać taka jest wskazana, jeśli wyrażenie (4.13)₂ ma być wykorzystane do rozwiązania równań ruchu celem wyznaczenia toru lotu sterowanego idealnie wiązką w przestrzeni geograficznej. Podstawia się w tym celu wyrażenia (4.13) odpowiednio do równań (3.3) i (3.4), a następnie rozwiązuje pełny układ równań (3.2) ÷ (3.8). Sposób rozwiązania może być dowolny zależnie od potrzeby. Ustalone warunki lotu celu i stała prędkość rakiety umożliwiają wykorzystanie znanych metod. Między innymi metody znanej pod nazwą metody "trzech punktów", która jest niczym innym jak przykładem rozwiązywania równań więzów holonomicznych.

Wprowadzenie założeń idealnego sterowania wiązką nie wymagało przyjęcia $\zeta \equiv 0$, jak to ma miejsce przy metodzie "trzech punktów". Wynika to z zasadniczej różnicy ujęcia proponowanego w niniejszej pracy. Sterowanie idealne jest bowiem przypadkiem sterowania ustalonego, do jakiego zmierza sterowanie rzeczywiste po zaniknięciu procesów przejściowych. Przejrzysty obraz takiego ujęcia wykaże rozwiązanie równań ruchu sterowanego w przestrzeni błędów.

5. Lot sterowany w przestrzeni błędów

Równania ruchu sterowanego w przestrzeni błędów, jako odchylenia lotu rzeczywistego od żądanego sterowania idealnego, wyprowadza się również ze związków sprzęgających, tym razem kompletnych (3.4) i (3.5). Zapisuje się je poniżej w formie znacznie uproszczonej (3.5) jak w punkcie poprzednim, natomiast związki (3.4) w formie najprostszej jaka jest niezbędna do skutecznego sterowania. Ich postać będzie więc jak poniżej:

$$\dot{\eta} = V(\kappa - \beta_n) \cos \gamma - \xi \dot{\beta}_n \cos \varepsilon \quad (5.1)$$

$$\dot{\zeta} = V(\gamma - \varepsilon) - \xi \varepsilon$$

$$\delta_v = Y(t_{kw}, t_{ke})[-k_{1v}f'(\eta)\dot{\eta} - k_{0v}f(\eta)] \quad (5.2)$$

$$\delta_h = Y(t_{kw}, t_{ke})[-k_{1h}f'(\zeta)\dot{\zeta} - k_{0h}f(\zeta)]$$

Funkcję włączeń i wyłączeń ogranicza się do jednokrotnego włączenia układu sterowania, ponieważ ta jednokrotna, skokowa zmiana położenia równowagi w wystarczający sposób wykaże efekty dynamiczne sterowania rzeczywistego. Zamiast więc funkcji $Y(t_{kw}, t_{ke})$ wprowadza się funkcję Heaviside'a $H(t - t_w)$. Podobnie jak w poprzednim punkcie różniczkuje się równania (5.1) względem czasu. Uzyskuje się w ten sposób wyrażenia, które po ponownym wykorzystaniu równań (3.3) i (3.4) zwiążą ruch w przestrzeni błędów z ruchem sterowanym idealnie i w ten sposób zezwolą na badanie warunków lotu rzeczywistego. Pochodne te zapisuje się w następującej formie:

$$\ddot{\eta} = V\dot{\kappa} \cos \gamma - a_v \quad (5.3)$$

$$\ddot{\zeta} = V\dot{\gamma} - a_h$$

gdzie a_v i a_h wyrażają się identycznie jak dla równań (4.12). Znak minus zmieni ich rolę w równaniach ruchu w przestrzeni błędów. Jeżeli w równaniach (4.12) określały składowe przyspieszenia normalnego, niezbędnego do idealnego sterowania wiązką, to w równaniach, które uzyskuje się po podstawieniu do równań (5.3) równań ruchu (3.3) i (3.4) a zamiast δ_v i δ_h związków sprzęgających (5.2), będą pełnić rolę funkcji wymuszających sygnały sterowania. Równania te przyjmują następującą postać:

$$\ddot{\eta} + H(t - t_w)[\lambda_{1v}f'(\eta)\dot{\eta} + \lambda_{0v}f(\eta)] = -a_v \quad (5.4)$$

$$\ddot{\zeta} + H(t - t_w)[\lambda_{1h}f'(\zeta)\dot{\zeta} + \lambda_{0h}f(\zeta)] = -a_h \quad (5.5)$$

Niezależność sygnałów sterujących sprawia, że równania (5.4) i (5.5) są sprzężone tylko wymuszeniem a_v . Ponieważ jednak proces przejściowy jest krótkotrwały, więc występujące w składowej a_v funkcje zmiennej γ i jej pochodnej można z nieznacznym błędem przyjąć jako wiadome funkcje czasu z rozwiązania równań lotu sterowanego idealnie. W ten sposób wykazano, że równania (5.4) i (5.5) są od siebie niezależne. Jest to jedna z najistotniejszych zalet koncepcji ujęcia lotu sterowanego jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi [2]. Równania lotu sterowanego w przestrzeni błędów można więc badać czy rozwiązywać niezależnie od siebie, co niezwykle upraszcza badania i rozwiązywania obu równań.

Postać obu równań jest identyczna z równaniem jakie uzyskiwano przy badaniu płaskiego lotu sterowanego [2,5]. Toteż i metody rozwiązywania jak i badania równań (5.4) i (5.5) mogą być z pełnym powodzeniem wykorzystywane jak w cytowanych pracach. Równania wyprowadzone z nieliniowej postaci związków sprzęgających mają formę nieliniowych równań Lienarda i celem ich rozwiązania dla $t \in \langle t_w, \infty \rangle$, nadaje się doskonale kwadratowa metoda rozwiązywania takich równań [5,6]. Jej zaletami są: większa dokładność od innych metod graficzno-analitycznych, a najważniejsza to łatwość programowania na cyfrowe maszyny obliczeniowe. Rozwiązywanie tych równań dla $t < t_w$ polega na scalkowaniu prawych stron jako wiadomych funkcji czasu, a więc nie stanowi problemu obliczeniowego.

Liniowe związki sprzęgające w postaci:

$$\delta_v = H(t - t_w)[-k_{1v}\dot{\eta} - k_{0v}\eta] \quad (5.6)$$

$$\delta_h = H(t - t_w)[-k_{1h}\dot{\zeta} - k_{0h}\zeta]$$

prowadzą do również liniowych równań dystrybucyjnych [2]:

$$\ddot{\eta} + H(t - t_w)[\lambda_{1v}\dot{\eta} + \lambda_{0v}\eta] = a_v \quad (5.7)$$

$$\ddot{\zeta} + H(t - t_w)[\lambda_{1h}\dot{\zeta} + \lambda_{0h}\zeta] = a_h \quad (5.8)$$

Równanie (5.7) jest sprzężone z równaniem (5.8) jedynie funkcją wymuszającą a_v , natomiast równanie (5.8) jest równaniem niezależnym. Jeżeli funkcja $a_h = \text{const}$, co może mieć miejsce przy $\dot{\varepsilon} = \text{const}$, wówczas uzyskuje się rozwiązanie równania (5.8) w całym przedziale czasu, a zatem dla $t < t_w$ i dla $t > t_w$ jak to wykazano w pracy [2]. Rozwiązanie to jest pewną kombinacją funkcji regularnych z elementarną dystrybucją $H(t - t_w)$. Daleko lepsze rezultaty badawcze uzyskuje się po sprowadzeniu równań zarówno (5.4) i (5.5) jak i równań (5.7) i (5.8) do równoważnych układów równań na płaszczyznach fazowych $\{\eta, \dot{\eta}\}$ i $\{\zeta, \dot{\zeta}\}$. Wyznacza się oddzielnie rozwiązania dla $t < t_w$ i oddzielnie dla $t > t_w$, a następnie "zszywa się" rozwiązania obszarami osiągalności [2,4].

Problemowi wyznaczania obszarów sterowalności i osiągalności dla sterowania lotem płaskim poświęcono już wiele prac oprócz powyżej cytowanych. Dlatego też w niniejszym opracowaniu nie rozważa się ich szczegółowo. Wykaz ważniejszych pozycji poświęconych temu problemowi można znaleźć w publikacjach [4,6]. Na rys.3 podaje się sposób przedłużania ("zszywania") rozwiązań obszarami osiągalności dla liniowych (5.6)₂ i nieliniowych (5.2)₂ związków sprzęgających. Obszar sterowalności ograniczają linie przeciążeń dopuszczalnych sterowania, zgodnie z nierównością:

$$n_z^2 - n_d^2 \leq 0 \quad (5.9)$$

Przeciążenie normalne wiąże z siłą sterującą następującą zależność:

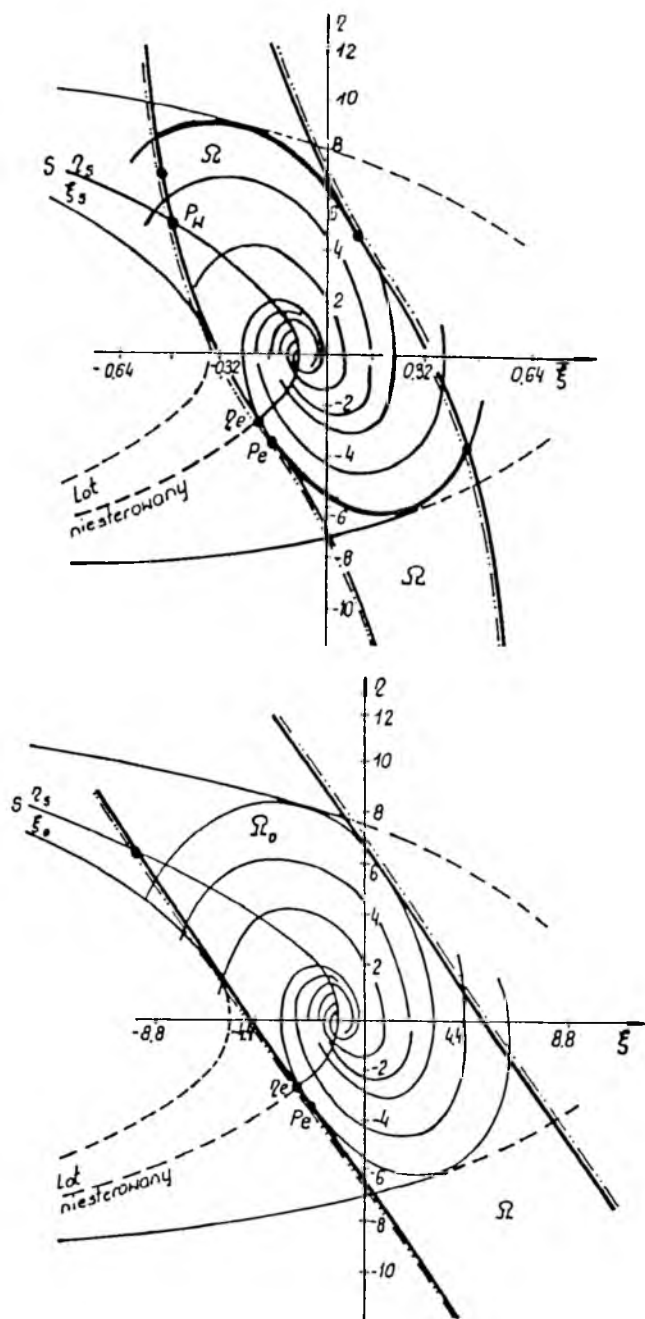
$$n_z g = -\lambda_1 f'(\zeta)\dot{\zeta} - \lambda_0 f(\zeta) \quad (5.10)$$

Zatem krzywe ograniczające obszar sterowalności na płaszczyźnie $\{\zeta, \dot{\zeta}\}$ wyznacza równość wynikająca z więzów jednostronnych (5.9):

$$[-\lambda_1 f'(\zeta)\dot{\zeta} - \lambda_0 f(\zeta)]^2 = (n_d g)^2 \quad (5.11)$$

Równość (5.11) wyznacza granice obszaru sterowalności również dla liniowych związków sprzęgających jeśli przyjąć $f(\zeta) = \zeta$ zaś $f'(\zeta) = 1$. Obszar ograniczony tymi krzywymi oznaczono przez Ω . Trajektorie fazowe, reprezentujące lot sterowany, asymptotyczne względem obszaru sterowalności Ω w sensie Ważewskiego (te, które wchodzi do obszaru Ω ale już z niego nie wychodzą) wyznaczają obszar osiągalności Ω_0 .

Rozwiązania układu równań na płaszczyźnie fazowej, równoważnego równaniom (5.5) i (5.8) dla $t < t_w$ wyznaczają trajektorie lotu niesterowanego. Naniesione na obszar osiągalności Ω_0 są przedłużane trajektoriami



Rys. 3. Obszary osiągalności dla nieliniowych (a) i liniowych (b) związków sprzęgających

lotu sterowanego. Bezpieczne przejście na lot sterowany jest możliwe tylko z tych trajektorii lotu niesterowanego, które przecinają obszar osiągalności Ω_0 . Wyznaczają one zarazem warunki bezpiecznego startu rakiety.

6. Podsumowanie i wnioski

Ujęcie lotu sterowanego jako nieswobodnego ruchu złożonego daje bardzo cenne korzyści badawcze. Rozdzielenie ogólnych równań ruchu z więzami uogólnionymi na równania ruchu sterowanego idealnie i równania ruchu w przestrzeni błędów, stwarza możliwość przejrzystej a zarazem znacznie prostszej formy badawczej złożonego procesu sterowania. Ponadto wprowadzenie ruchomego układu współrzędnych wykazuje istotne związki lotu sterowanego ze znanymi powszechnie zasadami badania ruchu złożonego w mechanice teoretycznej. Związki te do tej pory nie były zauważane.

Szczególnie wyraźnie upraszczają się badania lotu sterowanego obiektów osiowo-symetrycznych i to wcale nie w wyniku specjalnie do tego celu stosowanych uproszczeń. Ograniczono się jedynie do uzasadnionych uproszczeń, wynikających z rozwinięcia funkcji trygonometrycznych w szereg potęgowy. Wykazano uniezależnienie się równań ruchu w płaszczyźnie pionowej od równań ruchu bocznego, a jeszcze bardziej przekonujące uniezależnienie równań więzów dla kąta podniesienia od równań więzów dla kąta kierunku. Jak to wynika z rezultatów w formie równań lotu sterowanego w przestrzeni błędów (5.4) ÷ (5.8), badania tych równań można przeprowadzać znacznie rozwiniętymi do tej pory metodami badania lotu płaskiego.

Powyższe wnioski, wynikające z rezultatów przedstawionego opracowania, są jedynie wnioskami ogólnymi o dość istotnym znaczeniu praktycznym. Nie wyczerpują korzyści jakie daje opracowane ujęcie lotu sterowanego, którym poświęci się dalsze opracowania. Jednym z najważniejszych korzyści przewidywanych będzie bez wątpienia możliwość wyznaczenia równań więzów realizujących minimalno-czasowe przechwytywanie celów ruchomych. Zagadnieniu temu poświęci się najbliższe opracowanie.

Literatura

1. DOBROLENSKIJ I.P. I INNI, *Awtomatika upravlacnych snarjadow*, Oborongiz, Moskwa, 1963

2. DUBIEL S., *Więzy uogólnione i ich zastosowanie do badania sterowalności obiektów latających*, Praca hab. dod. do Biuletynu WAT, Nr 12, 1973, Warszawa
3. DUBIEL S., *Naprowadzanie rakiet na cele ruchome jako nieswobodny ruch złożony*, Biuletyn WAT, Nr 10, 1990
4. DUBIEL S., *Funkcja sił i asymptotyczne powiedzenie w sensie Ważewskiego w issledowanijach dinamičeskich sistem*, Mat. ICNO 75, Berlin, 1977
5. DUBIEL S., *Konstrukcja rakiet, Cz.I*, WAT, Warszawa, 1980
6. DUBIEL S., *Minimalno-czasowy problem sterowania w nawigacji*, Mat. Konf. Akademii Marynarki Wojennej, 1991
7. DUBIEL S., *Obszary stateczności a obszary sterowalności rakiety sterowanej wiązką*, Biuletyn WAT Nr 11, 1982
8. HUBER M.T., *Mechanika ogólna i techniczna*, PWN, Warszawa 1956
9. LOCKE A.S., *Guidance*, D. Van Nostrand Company, ICN Princeton, New Jersey, Toronto, New York, London, 1955
10. SUSŁOW G.K., *Mechanika teoretyczna*, PWN Warszawa, 1960

Space Guidance of Rockets with a Fixed Point of Observation in Terms of a Compound Motion

Summary

In this paper a controlled flight of rockets is defined as a compound non-free motion with generalized constrains. A simple way to separate the equations of an ideal controlled motion from those motion in an error space is described using the concept of relative velocity in a compound motion. Allowing the normal and side relative velocities to be zero, ideal beam-controlled flight is determined. It is shown that the equations of for a ideal controlled flight are supplemented by the equations of motion in the error space in the attainment region. In this way we can describe a controlled real flight.

RÓWNOLEGŁE ZBLIŻANIE JAKO GRANICZNY PRZYPADEK MINIMALNO-CZASOWEGO PROGRAMU PRZECHWYTYWANIA

STANISŁAW DUBIEL

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Osobliwym rozwiązaniem w problemie minimalno-czasowego przechwytywania jest równoległe zbliżanie przy stałej prędkości lotu celu i rakiety, jako druga faza sterowania. Eliminowanie ograniczeń bezpiecznego sterowania w fazie pierwszej prowadzi do skracania czasu wykonywania manewru dla dojścia do zbliżania równoległego, który w granicy maleje do zera. Czas przechwytywania jest wówczas czasem równoległego zbliżania z impulsową zmianą kierunku wektora prędkości rakiety w chwili rozpoczęcia procesu sterowania.

Stosowane oznaczenia

t	- czas,
Oxy	- nieruchomy układ współrzędnych,
$O\xi\eta$	- ruchomy układ współrzędnych,
$O\xi$	- oś pola obserwacji układu śledzącego cel,
β_n	- kąt elewacji w układzie śledzenia,
u	- sterowanie,
$t_w = t_0$	- chwila włączenia sterowania,
t_p	- chwila przełączania sterowania,
V	- prędkość rakiety,
V_c	- prędkość celu,
χ, χ_c	- kąt odchylenia wektora prędkości: rakiety, celu,
β	- kąt ślizgu rakiety,

ξ_c	–	odległość celu od bieguna obserwacji,
μ	–	wydatek masowy paliwa, $\mu = -\dot{m}$,
w_e	–	prędkość wylotowa gazów z dyszy silnika,
F	–	ciąg silnika raketowego, $F = \mu w_e$,
n_y	–	jednostkowe przyspieszenie boczne (przeciążenie),
n_d	–	dopuszczalne przeciążenie,
$y(t)$	–	poszukiwana ekstremala,
$F[y(t), \dot{y}(t), t]$	–	funkcja tworząca problem optymalizacji,
ζ	–	pewna nowa zmienna w zadaniu w formie Mayera,
λ_i	–	nieokreślone mnożniki Lagrange'a.

1. Wprowadzenie

Spotykana w literaturze interpretacja garnicznej fazy proporcjonalnej nawigacji, którą jest faza równoległego zbliżania, nie jest jednoznaczna. Większość autorów traktuje strategię zbliżania równoległego jako zbliżanie proporcjonalne z nieskończenie wielkim współczynnikiem proporcjonalności [5,6,7]. Pojawia się również przekonanie, że zbliżanie równoległe jest nawigacją proporcjonalną z zerowym współczynnikiem proporcjonalności. Można wykazać, że faza zbliżania równoległego jest fazą zbliżania z zerowym sygnałem sterowania kierunkiem z czego można wyciągnąć wniosek, że współczynnik proporcjonalności może być równy zeru.

Na gruncie funkcji regularnych obie interpretacje posiadają pewne uzasadnienie, z tym, że pierwszą posiada pewne pozory słuszności dla punktu początkowego, drugą natomiast również można "uzasadnić" dla ustalonego już procesu zbliżania równoległego. Istotnie w chwili rozpoczęcia procesu sterowania z warunkami początkowymi nie spełniającymi warunku równoległego zbliżania niezbędny jest impuls zmieniający kierunek wektora do położenia realizującego zbliżenie równoległe. Konieczna jest do tego celu siła normalna nieskończenie wielka i działająca w nieskończenie krótkim czasie.

Rozwiązanie minimalno-czasowego problemu przechwytywania zezwala na jednoznaczne ujęcie zbliżania równoległego jako granicznej fazy tegoż sterowania [1,5,6,7]. Konieczne będzie wykorzystanie do tego celu elementarnych dystrybucji, przy pomocy których można będzie wykazać istotę mechaniki tego sposobu sterowania. Zagadnieniu temu poświęca się niniejszą pracę.

2. Sformułowanie problemu

Problem minimalno-czasowego przechwytywania, a więc i jego zazwyczaj druga faza, zbliżanie równoległe, posiada już duże znaczenie praktyczne. Program takiego sterowania jest stosowany w wielu zestawach raketowych, zarówno przeciwlotniczych jak i morskich. Znaczenie jego wzrasta wraz ze wzrostem zdolności manewrowych rakiet, które dla nowoczesnych rakiet dochodzą do dopuszczalnych jednostkowych przyspieszeń normalnych (przeciążeń) $n_d = 40$. Przy tak dużych zdolnościach manewrowych rakiet zmiana kierunku lotu samą rakieta zachodzić może w znacznie krótszym czasie, aniżeli zmiana kierunku nosiciela (samolotu czy okrętu, a nawet wyrzutni). Dopuszczalne bowiem przeciążenia normalne samolotu ze względów technicznych są mniejsze od $n_d = 10$; nie pociągające natomiast utraty świadomości pilota powinny być mniejsze od $n_s = 5$.

Zadanie minimalno-czasowego przechwytywania rakieta polegać będzie na realizacji takiego manewru, który z dowolnego kierunku lotu rakiety zezwoli na osiągnięcie punktu spotkania z celem w jak najkrótszym czasie. Problem sprowadzi się do poszukiwania optymalnej strategii sterowania, którą opíše program minimalno-czasowego sterowania rakieta przechwytyjącą cel. Zadanie formuluje się następująco:

- Wyznaczyć minimalno-czasowy program sterowania rakieta o stałej prędkości lotu, przechwytyjącą cel w ustalonym locie.

Zadanie tak sformułowane jest, z punktu widzenia teoretycznego, banalnie proste, ale daje bardzo przejrzysty sposób przejścia do granicznego ujęcia przechwytywania metodą zbliżania równoległego.

3. Program minimalno-czasowego przechwytywania

Wyjściowym układem równań dla sformułowanego powyżej problemu w locie płaskim będą równania ruchu środka masy rakiety w płaszczyźnie poziomej [3,4]:

$$m \frac{dV}{dt} = F \cos \beta - P_x \quad (3.1)$$

$$mV \frac{d\chi}{dt} = F \sin \beta + P_y \quad (3.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \chi \quad (3.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \chi$$

Warunki bezpieczeństwa (więzy jednostronne):

$$0 \leq n_y \leq n_d \quad \text{dla} \quad \dot{\beta}_n > 0 \quad (3.4)$$

$$0 \geq -n_y \geq -n_d \quad \text{dla} \quad \dot{\beta}_n < 0$$

Założenie $V = \text{const.}$ zezwala pominąć równanie (3.1), zatem do rozwiązania problemu wystarczy wykorzystać pozostałe równania od (3.2). Ponadto w miejsce równań (3.3) wprowadzić można równania więzów dwustronnych, określających wzajemne położenie rakiety i celu, które powszechnie nazywa się kinematycznymi równaniami ruchu:

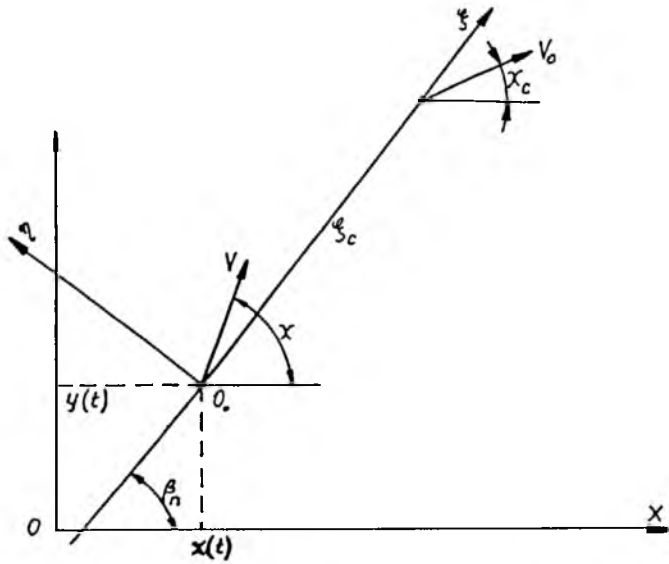
$$\xi_c \frac{d\beta_n}{dt} = -V \sin(\chi - \beta_n) + V_c \sin(\chi_c - \beta_n) \quad (3.5)$$

$$\frac{d\xi_c}{dt} = -V \cos(\chi - \beta_n) + V_c \cos(\chi_c - \beta_n)$$

Sytuację bieżącą, opisaną powyższymi więzami przedstawia rys.1.

Wprowadzenie związków (3.5) ujmuje lot sterowany jako ruch złożony, ponieważ związki te określają ruch układu ruchomego. Warto przy okazji zwrócić uwagę, że w procesie samonaprowadzania ruch rakiety jest zarazem ruchem unoszenia, ponieważ rakietka znajduje się w początku układu ruchomego. Jej położenie wyznacza całki z równań (3.3). Położenie bieżące rakiety można również wyznaczyć ze związków (3.5) względem bieżącego położenia celu, ponieważ związki te spełniają rolę równań więzów, które przy ustalonym locie celu i stałej prędkości rakiety są więzami holonomicznymi.

Zgodnie ze sformulowanym zadaniem lot celu jest lotem prostoliniowym ze stałą prędkością, a zatem $V_c = \text{const}$ i $\chi_c = \text{const}$. Nieruchomy układ współrzędnych można więc tak ukierunkować, że $\chi_c = 0$, natomiast położenie rakiety w chwili włączenia układu sterowania przyjąć w początku układu nieruchomego, czyli: $x(t_w) = 0$, $y(t_w) = 0$ i $t_w = t_0$.

Rys. 1. Nieruchomy $0xy$ i ruchomy $0_0\xi\eta$ układ współrzędnych

Potrzebne do optymalizacji związki ograniczą się do (3.2) i (3.5) uzupełnione jednostronnymi więzami, jako warunkami bezpieczeństwa (3.4). Warunki te przedstawia się w formie równości, po wprowadzeniu nowej zmiennej ζ [4,7]:

$$n_y(n_y + n_d) + \zeta^2 = 0 \quad (3.6)$$

$$n_y(n_d - n_y) - \zeta^2 = 0$$

Funkcjonałem jakości jest czas, zatem jego forma dla $t_0 = 0$ jest następująca:

$$I = \int_0^t dt = t \quad (3.7)$$

Zadanie polega na znalezieniu minimum funkcjonału (3.7) z warunkami w postaci równań więzów:

$$\varphi_1 \equiv \frac{d\chi}{dt} - \frac{g}{V} n_y = 0 \quad (3.8)$$

$$\varphi_2 \equiv \frac{d\beta_n}{dt} + \frac{1}{\xi_c} [V \sin(\chi - \beta_n) + V_c \sin \beta_n] = 0 \quad (3.9)$$

$$\varphi_3 \equiv \frac{d\xi_c}{dt} + V \cos(\chi - \beta_n) - V_c \cos \beta_n = 0 \quad (3.10)$$

$$\varphi_4 \equiv n_y(n_y + n_d) + \zeta^2 = 0 \quad (3.11)$$

Poszukuje się z pośród zmiennych niewiadomych χ , β_n , ξ_c , n_y i ζ funkcji minimalizujących funkcjonal (3.7). Buduje się w tym celu rozszerzoną funkcję tworzącą $F(\chi, \beta_n, \xi_c, n_y, \zeta)$ o postaci:

$$F(y_i, \dot{y}_i, t) = 1 + \sum_{i=0}^4 \lambda_i \varphi \quad (3.12)$$

dla której wyznacza się równania Eulera-Lagrange'a z formy:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = 0 \quad (3.13)$$

Uzyskuje się następujące postacie równań Eulera-Lagrange'a dla poszczególnych zmiennych niewiadomych:

— dla zmiennej χ :

$$\dot{\lambda}_1 - \frac{\lambda_2 V}{\xi_c} \cos(\chi - \beta_n) + V_c \sin(\chi - \beta_n) = 0 \quad (3.14)$$

— dla zmiennej β :

$$\dot{\lambda}_2 + \frac{\lambda_2}{\xi_c} [-V \cos(\chi - \beta_n) + V_c \sin \beta_n] + \lambda_3 [-V \sin(\chi - \beta_n) + V_c \sin \beta_n] = 0 \quad (3.15)$$

— dla zmiennej ξ_c :

$$\dot{\lambda}_3 + \frac{\lambda_2}{\xi_c^2} [V \sin(\chi - \beta_n) + V_c \cos \beta_n] = 0 \quad (3.16)$$

— dla zmiennej $n_y = u$:

$$-\lambda_1 \frac{g}{V} + \lambda_4 (2u + n_d) = 0 \quad (3.17)$$

— dla zmiennej ζ :

$$\lambda_4 \zeta = 0 \quad (3.18)$$

Funkcja F nie zależy w sposób jawny od czasu, a zatem całka pierwsza równań Eulera-Lagrange'a sprowadzi się do postaci:

$$\begin{aligned} C = & -\lambda_1 \frac{ug}{V} + \frac{\lambda_2}{\xi_c} [V \sin(\chi - \beta_n) + V_c \sin \beta_n] + \\ & + \lambda_3 [V \cos(\chi - \beta_n) - V_c \cos \beta_n] + \lambda_4 [u(u + n_d) + \zeta^2] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Warunki w punktach załamania (Erdmanna-Weierstrassa):

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right|_- = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right|_+$$

czyli:

$$\lambda_{1-} = \lambda_{1+} \quad \lambda_{2-} = \lambda_{2+} \quad \lambda_{3-} = \lambda_{3+}$$

Warunki transwersalności:

$$\left[dt + \left(F - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \dot{y}_i \right) dt + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i \right]_0^1 = 0$$

dają $C = -1$.

Rozwiązywanie równań Eulera-Lagrange'a najlepiej rozpocząć od równania (3.18), które jest rozwiązaniem alternatywnym:

$$(a) \lambda_4 = 0 \quad \text{lub} \quad (b) \zeta = 0 \quad (3.20)$$

Rozwiązanie (a) pociąga za sobą w myśl równania (3.17) $\lambda_1 = 0$ co przy dowolności λ_1 jest wykluczone. Wyklucza to zarazem rozwiązanie zmiennego $u(t)$. Rozwiązanie natomiast (b) daje dwie graniczne wartości:

$$u_1 = -n_d \quad u_2 = 0$$

Zależnie od znaku początkowej prędkości kątowej linii obserwacji pierwsze rozwiązanie można zapisać jako:

$$u_1 = n_d \operatorname{sign} \frac{d\beta_n}{dt}$$

W myśl równania (3.2) prowadzi to do następujących zależności kąta $\chi(t)$:

$$\chi(t) - \chi(t_0) = - \int_{t_0}^t \frac{n_d g}{V} d\tau = - \frac{n_d g}{V} (t - t_0) \quad (3.21)$$

Wyrażenie (3.21) można wstawić do wzoru na prędkość kątową linii obserwacji (3.5), przy czym jej wyznaczenie wymaga określenia zmiennych β_n i ξ_c . Można tego dokonać za pomocą współrzędnych położenia rakiety i celu. Zmianę położenia rakiety zezwala określić rozwiązanie (3.21) z zależności (3.3). Po ich scałkowaniu uzyskuje się:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t V \cos \chi(\tau) d\tau = x(t_0) - \frac{V^2}{n_d g} (\sin \chi - \sin \chi_0) \quad (3.22)$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t V \sin \chi(\tau) d\tau = y(t_0) - \frac{V^2}{n_d g} (\cos \chi - \cos \chi_0)$$

Analogicznie wyznacza się współrzędne położenia celu, które dla ustalonego lotu celu: $\chi_c = 0$ i $V_c = \text{const}$ dają końcowe wzory:

$$x_c(t) = x_c(t_0) + V_c(t - t_0) \quad (3.22)$$

$$y_c = H_0 = \text{const}$$

ponieważ dla lotu prostoliniowego celu dobiera się tak nieruchomy układ współrzędnych aby oś $0x$ była równoległa do kierunku prędkości celu V_c . Z zależności (3.22) i (3.23) już bardzo łatwo wyznaczyć $\xi_c(t)$ i $\beta_n(t)$:

$$\xi_c^2 = (x_c - x)^2 + (y_c - y)^2 \quad (3.24)$$

$$\text{ctg}\beta_n = \frac{x_c - x}{y_c - y} \quad (3.25)$$

Prędkość katową $\dot{\beta}_n$ można wyznaczyć po zróżniczkowaniu (3.25) lub z wyrażenia (3.9). Z uwagi na fakt, że istotny jest jedynie znak tejże prędkości katowej $\dot{\beta}_n$, wystarczy potraktować wyrażenie w nawiasie zależności (3.9) jako funkcję przełączania:

$$\sigma(t) = -n \sin(\chi - \beta_n) - \sin \beta_n \quad (3.26)$$

gdzie $n = V/V_c$, zaś kąty χ i β_n wyznaczyć można odpowiednio z zależności (3.21) i (3.25). Rozwiązanie na sterowanie w formie ogólnej można więc zapisać:

$$u(t) = \text{sign}\sigma(t)[H(t - t_0) - H(t - t_p)]n_d \quad (3.27)$$

Forma (3.27) obejmuje oba rozwiązania $u_1 = \text{sign}\sigma(t)n_d$ dla $t \in (t_0, t_p)$ i $u_2 = 0$ dla $t \geq t_p$, przy czym t_p odpowiada $\sigma(t_p) = 0$. Zmiana kierunku lotu rakiety wymaga impulsu sterowania, który można wyznaczyć z równania (3.8) po podstawieniu doń sterowania (3.27). Obustronne scałkowanie daje:

$$\chi(t_p) - \chi(t_0) = \text{sign}\sigma(t)[H(t - t_0) - H(t - t_p)]\frac{gn_d}{V}(t_p - t_0) \quad (3.28)$$

Oznacza się dalej: $I_{op} = n_d(t_p - t_0)$ jako impuls całkowity niezbędny do doprowadzenia sterowania do zbliżenia równoległego. Impuls I_{op} jest wielkością malejącą wraz ze zmniejszaniem się przedziału czasu $[t_0, t_p]$, a więc przy zwiększaniu dopuszczalnej wielkości sterowania n_d . Przy $t_p \rightarrow t_0$, a więc $n_d \rightarrow \infty$ wartość I_{op} zmierza do wartości określonej gwałtownym przejściem do zbliżenia równoległego, czyli:

$$\lim_{t_p \rightarrow t_0} I_{op} = \frac{V}{g}(\chi_r - \chi_0) = I'_{op} \quad (3.29)$$

gdzie χ_r jest kątem realizacji zbliżenia równoległego od chwili $t = t_0$. Wyznaczyć go można z warunku:

$$\sigma(t) = -n \sin(\chi_r - \beta_{n_0}) + \sin \beta_{n_0} = 0 \quad (3.30)$$

Sterowanie minimalno-czasowe można dalej zapisać w formie:

$$u(t) = \text{sign} \dot{\beta}_0 \frac{H(t - t_0) - H(t - t_p)}{t_p - t_0} I_{op} \quad (3.31)$$

Przy $t_p \rightarrow t_0$ sterowanie $u(t)$ zmierza do wyrażenia:

$$u(t) = \text{sign} \dot{\beta}_0 \delta(t - t_0) I'_{op} \quad (3.32)$$

Jest to graniczne rozwiązanie minimalno-czasowego sterowania, praktycznie nierealne z uwagi na $n_d \rightarrow \infty$. Posiada natomiast istotny sens teoretyczny jako dystrybucyjny zapis logiczny sterowania metodą zbliżania równoległego i to w ścisłym ujęciu. Celem ilustracji tego problemu rozważa się przykład z odpowiednimi danymi dla małych raket samonaprowadzających się.

4. Przykład sterowania minimalno-czasowego

Ilustrację sterowania minimalno-czasowego prezentuje się dla małej rakiety samonaprowadzającej się o następujących danych:

- prękość rakiety $V = 500 \text{ ms}^{-1} = \text{const}$,
- początkowy kąt kierunku $\chi(t_0) = \pi/2$,
- położenie rakiety w chwili $t = t_0$: $x(t_0) = 0$, $y(t_0) = 0$,
- prędkość celu $V_c = 300 \text{ ms}^{-1}$,
- odległość linii lotu celu od początkowego położenia rakiety, czyli parametr $d = 6000 \text{ m}$,
- początkowy kąt pochylenia linii obserwacji $\beta_{n_0} = \pi/3$,
- dopuszczalne przyspieszenia jednostkowe: $n_{d1} = 4.274$, $n_{d2} = 10$, $n_{d3} = 25$, $n_{d4} = 50$, $n_{d5} = 100$, $n_{d6} = \infty$.

Program minimalno-czasowego przechwytywania celu dla poszczególnych dopuszczalnych przeciążeń n_{di} zgodnie z wyrażeniami (3.31):

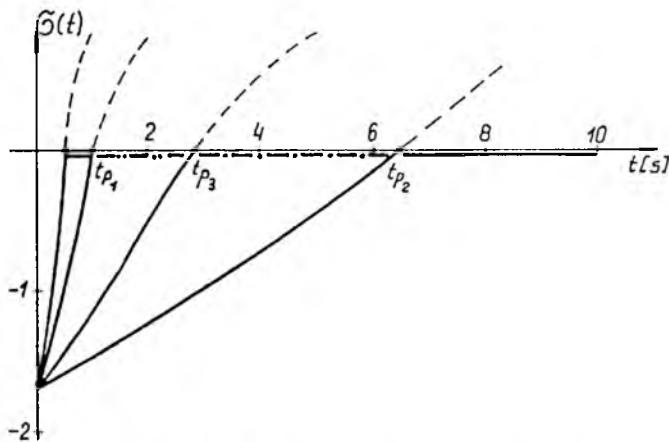
$$u(t) = n(t) = \text{sign} \dot{\beta}_n \frac{II(t - t_0) - II(t - t_p)}{t_p - t_0} I_{opi} \quad (4.1)$$

gdzie:

$$I_{opi} = n_{di}(t_p - t_0)$$

przy czym chwilę t_p wyznacza zerowanie się funkcji przełączania $\sigma(t)$. Dla różnych wartości n_{di} zmianę tej funkcji przedstawia rys.2. Warto podkreślić, że dla $t \geq t_p$ $\sigma(t) \equiv 0$. Poprawny zatem zapis sterowania przyjmuje postać:

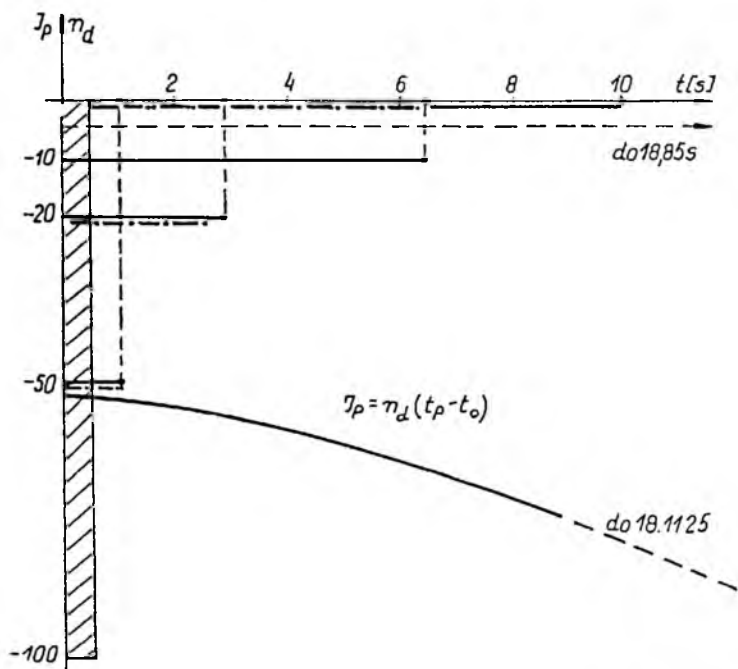
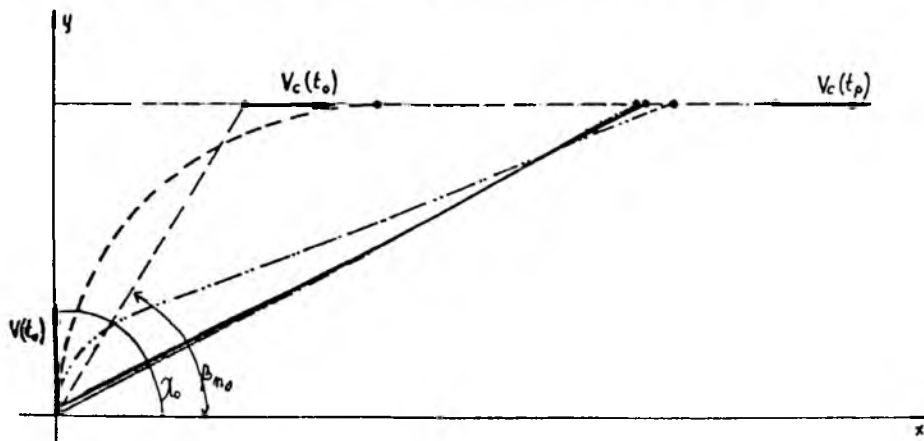
$$u(t) \equiv n(t) = \text{sign} \sigma(t) \frac{II(t - t_0) - II(t - t_p)}{t_p - t_0} I_{opi} \quad (4.2)$$



Rys. 2. Funkcja przełączania $\sigma(t)$

Ilustrację zmian impulsu potrzebnego do doprowadzenia procesu sterowania do zbliżenia równoległego dla różnych n_{di} podano na rys.3. Przebieg wykazuje zmniejszanie się I_{opi} wraz ze wzrostem n_{di} . Jest to zrozumiałe ponieważ czas wykonania manewru potrzebnego do doprowadzenia do zbliżenia równoległego maleje, a zatem maleje $\chi(t_p) - \chi(t_0)$.

Zmniejsza się również minimalny czas przechwycenia celu, jak to przedstawiono na rys.4. Droga rakiety sterowanej programami minimalno-czasowego przechwytywania jest różna dla różnych przeciążeń dopuszczalnych. Proporcjonalnym do długości drogi jest i czas przechwytywania ze względu na stałą prędkość lotu rakiety.

Rys. 3. Programy sterowania minimalno-czasowego dla różnych n_d 

Rys. 4. Tory lotu rakiety sterowanej programami minimalno-czasowymi

Rezultaty powyższe wykazują również istotę problemu minimalno-czasowego przechwytywania jako zadania warunkowego. Bez ograniczenia dopuszczalnych przeciążeń normalnych, jedynym rozwiązaniem minimalno-czasowego przechwytywania byłoby graniczne rozwiązanie, czyli zbliżenie równoległe (3.32). Ma ono jednak tylko znaczenie symboliczne ponieważ sterowanie takie jest niemożliwe do realizacji praktycznej.

Zbliżenie równoległe posiada znaczenie realne jedynie jako druga faza sterowania minimalno-czasowego. Współczynnik proporcjonalności przy takim sterowaniu nie może być ani równy zeru ani równy nieskończoności. Dla realizacji sterowania metodą zbliżania równoległego potrzebna jest skończona jego wartość i to tak dobrana aby jak najszybciej wygasić wszelkiego rodzaju odchylenia lotu od zbliżania równoległego. Problemowi temu należy poświęcić oddzielne opracowanie.

Literatura

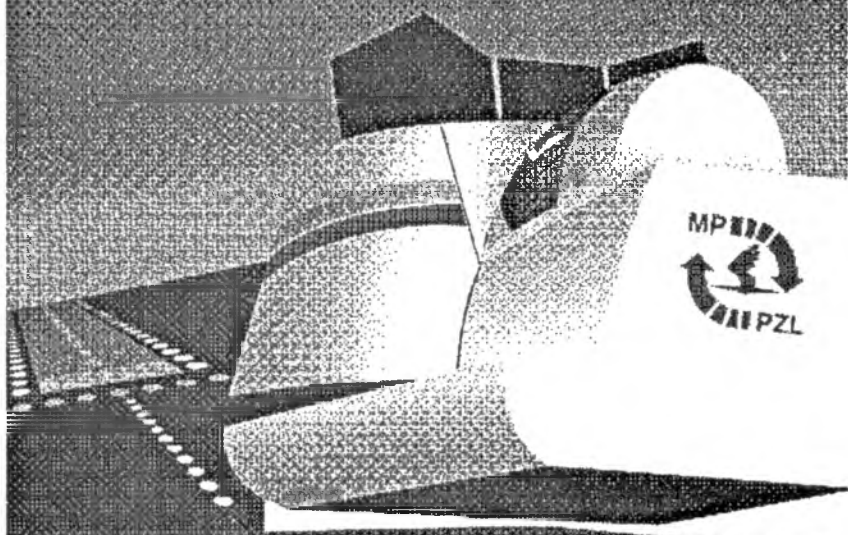
1. DOBROLENSKIJ I.P. i INNI, *Avtomatika upravlaemych snarjadow*, Oborongiz, Moskwa, 1963
2. DUBIEL S., HOMZIUK A., *Minimalno-czasowe strefy sterowalności*, Mech. Teor. i Stos., Warszawa 1991
3. DUBIEL S., *Naprowadzanie rakiet na cele ruchome jako nieswobodny ruch złożony*, Biul. WAT nr.10, Warsza 1990
4. DUBIEL S., MINIMALNO-CZASOWY PROBLEM STEROWANIA W NAWIGACJI, Mat. Konf. Akademii Marynarki Wojennej, 1991
5. GLAPSKI M., MOŻLIWOŚCI I OGRANICZENIA PROPORCJONALNEGO SAMONAPROWADZANIA RAKIET "POWIETRZE-POWIETRZE", Dodatek do Biul. WAT Nr 11, Warszawa 1985
6. LEBEDEV A.A., ČERNOBROVKIN A.S., *Dinamika polceta bezpilotnych letatelnych apparatov*, Oborongiz, Moskwa 1962
7. LEITMANN G., *Optimization Techniques with Applications to Acrospace Systems*, New York-London, Acad Press 1962
8. LOCKE A.S., *Gwidance*, D.Van Nostrand Company, ICN Princeton, New Jersey, Toronto, NewYork, London, 1955

Parallel Approach Method as a Limit Case of the Minimum-Time Interception Program

Summary

A parallel approach at a constant velocity of both the target and the rocket, as a second phase of control, is a singular solution to the minimum-time interception problem. Elimination of safe flight control restrictions in the first phase results in the execution time shortening changes of direction of flight to the parallel approach. In the limit case this time approaches zero. The time of interception is then equal to the time of a parallel approach with the impulsive change of direction of the rocket velocity vector at the beginning of the control process.

POLSKIE SYMULATORY



AEROSPACE INDUSTRIES

Al. Krakowska 110/114; 00-972 Warszawa; P.O. Box 112
Tel: (48-22) 46-54-17; Fax: (48-22) 46-54-18

EFEKTY DYNAMICZNE MINIMALNO-CZASOWEGO STEROWANIA RAKIETĄ

STANISŁAW DUBIEL

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Realizacja minimalno-czasowego programu sterowania pociąga za sobą pojawienie się procesów przejściowych, odchylających rzeczywisty przebieg sterowania od sterowania idealnego. Program sterowania idealnego wyznaczono dla rakiety potraktowanej jako punkt materialny [2]. Rzeczywisty ruch rakiety jako bryły pociąga za sobą pojawienie się odchyłeń, wywołanych bezwładnością samej rakiety jak i dynamiką układu napędowego sterów.

1. Wprowadzenie

Program minimalno-czasowego przechwytywania określa kształt sygnału sterującego i ideałem byłoby takie sterowanie, które wywoływałoby siły normalne, realizujące ten program bez odchyłeń. Reprezentantem sił normalnych są jednostkowe przyspieszenia normalne n_y (przeciążenia). Ich przebieg winien być identyczny do sygnału sterującego. Realizację takiego sterowania nazywa się sterowaniem idealnym.

Generacja siły normalnej, zmieniającej kierunek lotu, jest mocno złożona. Wymaga bowiem najczęściej zmiany położenia rakiety jako bryły o taki kąt natarcia, jaki jest konieczny do powstania siły nośnej (lub bocznej) odpowiadającej programowemu przeciążeniu. Pociąga to za sobą pewne opóźnienia wywołane bezwładnością rakiety i mechanizmu napędu sterów. Efekty te pociągają za sobą dość znaczne odchylenia przebiegów przeciążeń rzeczywistych w odniesieniu do minimalno-czasowego programu idealnego. Zasadniczym zamierzeniem niżej zapoczątkowanych badań będzie zbadanie w jakich warunkach odchylenia te będą najmniejsze.

2. Układ równań lotu w warunkach sterowania rzeczywistego

Badania rzeczywistych warunków realizacji minimalno-czasowego sterowania rakieta przeprowadza się dla lotu płaskiego w płaszczyźnie poziomej, analogicznie do wyznaczonych programów sterowania idealnego [2]. Proces sterowania bada się dla ustalonych warunków lotu celu i stałej prędkości rakiety. Równania lotu rakiety w płaszczyźnie poziomej ogranicza się w myśl równań z układu przestrzennego [3] do postaci:

$$m \frac{dV}{dt} = F \cos \beta - P_x \equiv 0 \quad (2.1)$$

$$mV \frac{d\chi}{dt} = F \sin \beta + P_y \quad (2.2)$$

$$\dot{m} = m\dot{u} = -\frac{P_x}{W_e} \quad (2.3)$$

$$I_x \dot{p} = L \quad (2.4)$$

$$I_z \dot{r} = N - (I_y - I_x) p q \quad (2.5)$$

Równania więzów, które są zarazem równaniami linii obserwacji celu jako osi $0_0\xi$ układu ruchomego [3] przedstawiają się następująco:

$$\varphi_1 \equiv \dot{\xi}_c + V_0 \cos(\chi_0 - \beta_n) - V_c \cos(\xi_c - \beta_n) = 0 \quad (2.6)$$

$$\varphi_2 \equiv \dot{\xi}_c \dot{\beta}_n + V_0 \sin(\chi_0 - \beta_n) - V_c \cos(\xi_c - \beta_n) = 0$$

Związek sprzęgający:

$$\Psi(\delta_v, \dot{\delta}_v, \ddot{\delta}_v) = Y(t_w, t_e) \Phi(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}, \dot{\beta}_n) \quad (2.7)$$

Zarówno równania więzów (2.6) jak i równanie związku sprzęgającego (2.7) wyrażono dla punktu obserwacji celu 0_0 nie pokrywającego się z położeniem rakiety [3]. Dla raket samonaprowadzających się układ obserwacji znajduje się na pokładzie rakiety, a więc położenie rakiety pokryje się z początkiem układu ruchomego. W związku z tym $\eta \equiv 0$, $\dot{\eta} \equiv 0$ i $\ddot{\eta} \equiv 0$, zaś w miejsce χ_0 wejdzie kąt pochylenia wektora prędkości rakiety χ .

3. Równanie wahań bocznych

Zależności sił i momentów aerodynamicznych ogranicza się do związków

liniowych od kąta ślizgu i odpowiednich prędkości kątowych. Ponadto przy ciągu silnika równoważającego opór aerodynamiczny zmiana masy określona równaniem (2.3) jest nieznaczna i wpływa w bardzo małym stopniu na efekty dynamiczne w procesie sterowania. Ruch obrotowy rakiety osiowo symetrycznej (2.4) nie jest sprzężony z ruchem bocznym, dlatego w dalszych rozważaniach zostaje pominięty. Kąt ślizgu β jak i prędkości kątowe p i q są nie wielkie, zatem znaczący wpływ na efekty dynamiczne zachowują równania (2.2) i (2.5). Wymienione powyżej ograniczenia upraszczają układy równań: lotu, więzów i związków sprzęgających do następujących postaci:

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= b'\beta \\ \dot{r} &= -a'_0\beta - a'_1\dot{\beta} - a'_2r + b'_0\delta - b'_1\dot{\delta}\end{aligned}\quad (3.1)$$

przy czym $r = \dot{\beta} + \dot{\chi}$ oraz:

$$\begin{aligned}b' &= \frac{F + P_y^\beta}{mV} & a'_0 &= \frac{N^\beta}{I_z} & a'_1 &= \frac{N^{\dot{\beta}}}{I_z} \\ a'_2 &= \frac{N^{\dot{r}}}{I_z} & b'_0 &= \frac{N^\delta}{I_z} & a'_1 &= \frac{N^{\dot{\delta}}}{I_z}\end{aligned}$$

Równania więzów:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_c + V \sin(\chi - \beta_n) + V_c \sin \beta_n &= 0 \\ \xi_c \dot{\beta}_n + V_c [p \cos(\chi - \beta_n) + \cos \beta_n] &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

Związek sprzęgający dla minimalno-czasowego sterowania [2]:

$$\delta = H(t - t_0) [a_p u_p(t) + a_b (\dot{\beta}_{np} - \dot{\beta}_n)] \quad (3.3)$$

przy czym:

$$a_p = \frac{a_0 g}{b V b} \quad a_b = \frac{a a_0}{b b}$$

zaś a jest współczynnikiem proporcjonalnej nawigacji.

Równania (3.1) wykazują, że bardzo łatwo można wyeliminować jedną ze zmiennych, a mianowicie χ lub β .

Ponieważ celem głównym niniejszego opracowania są efekty dynamiczne procesu sterowania, zatem korzystniej będzie wyeliminować zmienną β . Równania zatem zredukują się do postaci:

$$\ddot{\chi} + a_1 \dot{\chi} + a_0 \chi = b_0 \delta + b_1 \dot{\delta} \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_0 &= a'_0 + a'_2 b & a_1 &= b + a'_1 + a'_2 \\ b_0 &= b b'_0 & b_1 &= b b'_1 \end{aligned}$$

Równanie (3.4) jest właściwie równaniem drugiego rzędu zatem należy wprowadzić nową zmienną. Z uwagi na fakt, że sterowanie optymalne wprowadzono w formie przeciążeń zatem w miejsce zmiennej χ wprowadza się przeciążenie $n(t)$. Związek między tymi zmiennymi przedstawia się następująco:

$$\dot{\chi} = \frac{g}{V} n(t) \quad (3.5)$$

zatem równanie (3.4) można zapisać w postaci:

$$\ddot{n}(t) + a_1 \dot{n}(t) + a_0 n(t) = \text{sign} \dot{\beta}_n [H(t - t_0) - H(t - t_p)] n_d \quad (3.6)$$

Równanie (3.6) zezwala na wyznaczenie efektów dynamicznych sterowania minimalno-czasowego i dla uzyskania rezultatów zamierzonych w niniejszym opracowaniu posiada formę zadawalającą. Można jednakże uogólnić jego postać na formę ujmującą sterowanie rakieta samonaprowadzającą się łącznie z efektami dynamicznymi przez wprowadzenie wymuszenia związkiem sprzęgającym dla zasady zbliżenia proporcjonalnego. Oznacza się w tym celu wymuszenie w równaniu (3.6) przez $n_p(t)$ czyli:

$$n_p(t) = \text{sign} \dot{\beta}_n [H_0 - H_p] n_d \quad (3.7)$$

Celem skrócenia zapisu funkcje Heaviside'a oznaczono następująco:

$$H(t - t_0) = H_0 \quad H(t - t_p) = H_p$$

Wykorzystanie związku na zbliżanie proporcjonalne w formie nieco zmodyfikowanej:

$$\dot{\chi} = a(\dot{\beta}_p + \dot{\beta}) \quad (3.8)$$

zezwała na wprowadzenie uogólnionej postaci wymuszenia do równania (3.6), którego postać przyjmie formę:

$$\ddot{n}(t) + a_1 \dot{n}(t) + a_0 n(t) = a \frac{V}{g} (\dot{\beta}_p + \dot{\beta}) \quad (3.9)$$

W równaniach (3.8) i (3.9) i poniżej $\dot{\beta}$ jest prędkością kątową linii obserwacji (pominięto indeks dolny n).

Równanie (3.9) podane w powyższej formie wykazuje, że "sterowanie równoległe" wymaga skończonego współczynnika proporcjonalności, a jedynie wymuszenie programowe przyjmie formę:

$$a \frac{V}{g} \dot{\beta}_p = \text{sign} \dot{\beta}_0 b(t - t_p) I_{op} \quad (3.10)$$

zgodną z graniczną formą sterowania minimalno-czasowego [2].

4. Realna forma sterowania minimalno-czasowego

Rozwiązanie równania (3.9) zezwala na określenie warunków realnego sterowania minimalno-czasowego. Opisuje ono efekty dynamiczne wywołane realizacją programu minimalno-czasowego, które wykluczają program graniczny powyższego sterowania. Program taki jest nie realny ze względów technicznych. Jednakże efekty dynamiczne zezwolą ustalić realne warunki realizacji sterowania minimalno-czasowego.

Przebieg rozwiązań wywołany efektami dynamicznymi zezwala ustalić najkrótszy skończony czas wykonania zmiany kierunku lotu rakiety dla osiągnięcia drugiej fazy sterowania minimalno-czasowego (zbliżania równoległego). Efekty dynamiczne sterowania opisują następujące rozwiązania równania (3.6), których forma zależy od relacji między współczynnikami a_0 i a_1 .

Dla małych wysokości (np. $H = 1000$ m) $a_1^2 > 4a_0$ i pierwiastki charakterystyczne równania jednorodnego (3.6) są tylko rzeczywiste. Rozwiązania przyjmą postać:

$$n_y(t) = \text{sign} \dot{\beta}_0 n_d \left\{ (H_0 - H_p) \left[1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1(t-t_0)} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2(t-t_0)} \right] + \right. \\ \left. + H_p \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1(t-t_p)} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2(t-t_p)} \right] \right\} \quad (4.1)$$

Dla relacji $a_1^2 = 4a_0$, a więc dla a_1 , który daje najkrótszy czas uspokojenia procesów przejściowych: włączania i przelączania, równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek podwójny: $\lambda = 0.5a_1$ i rozwiązanie przyjmuje postać:

$$n_y(t) = \text{sign} \dot{\beta}_0 n_d \left\{ (H_0 - H_p) \left[1 - [1 + \lambda(t - t_0)] e^{-\lambda(t-t_0)} \right] + \right. \\ \left. + H_p [1 + \lambda(t - t_p)] e^{-\lambda(t-t_p)} \right\} \quad (4.2)$$

Dla $a_1^2 < 4a_0$ rozwiązanie ma postać:

$$n_y(t) = \text{sign} \dot{\beta}_0 n_d \left\{ (H_0 - H_p) \left[1 - \left(\cos \omega(t - t_0) + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega(t - t_0) \right) e^{-\lambda(t-t_0)} \right] + \right. \\ \left. + H_p \left(\cos \omega(t - t_p) + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega(t - t_p) \right) e^{-\lambda(t-t_p)} \right\} \quad (4.3)$$

gdzie:

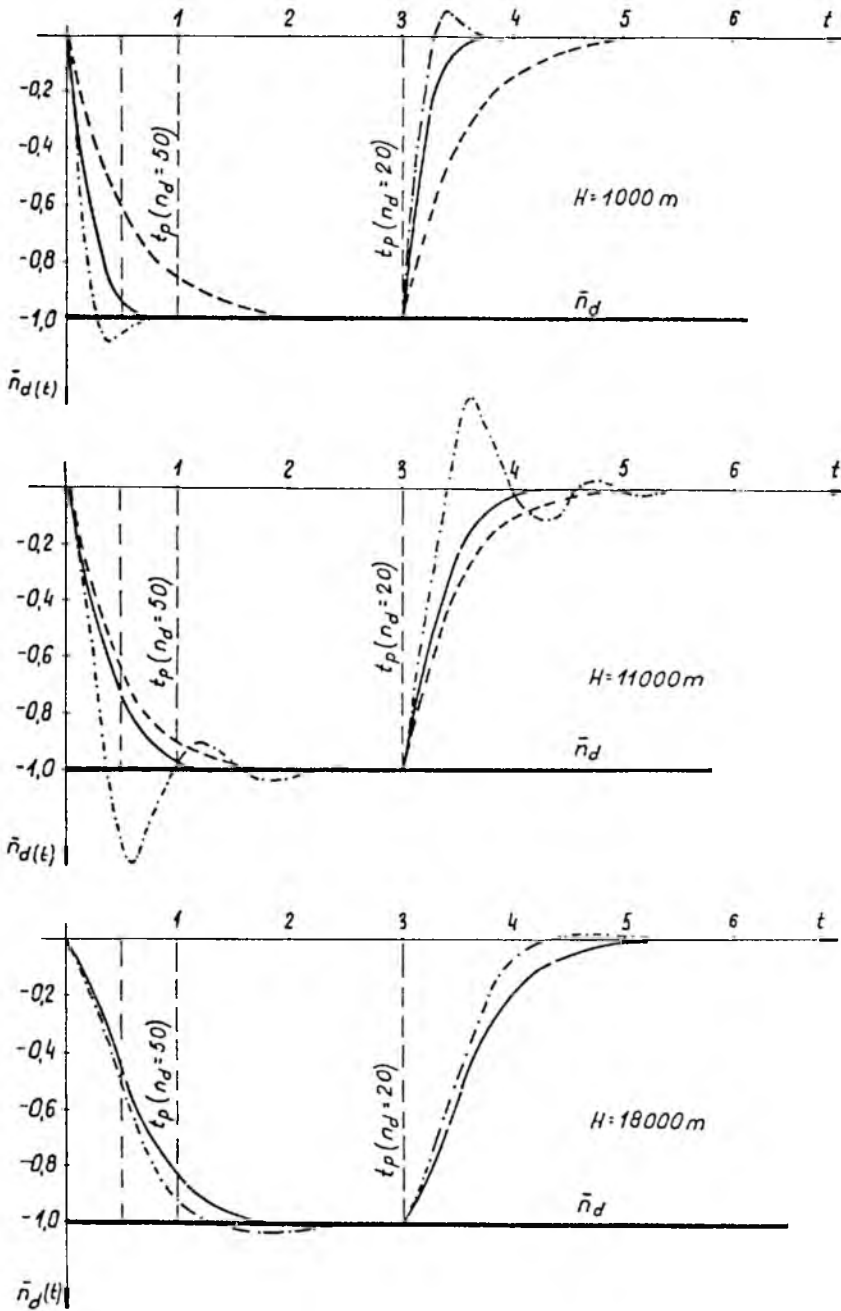
$$\lambda_1 = \frac{a_1}{2} - \Delta \qquad \lambda_2 = \frac{a_1}{2} + \Delta \qquad \Delta^2 = \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 - a_0 \\ \lambda = \frac{a_1}{2} \qquad \omega^2 = a_0 - \frac{a_1^2}{4}$$

Efekty dynamiczne zbadano dla różnych wysokości lotu przy tych samych charakterystykach aerodynamicznych. Charakterystyki te wyznaczono dla małej rakiety lotniczej o dużym wydłużeniu kadłuba ($\lambda_k = 20$) ze skrzydełkami umieszczonymi w tylnej części kadłuba i dość dużymi destabilizatorami z przodu. Układ taki daje bardzo duże współczynniki tłumienia przy dostatecznym zapasie stateczności statycznej [4]. Ponadto umożliwia dobieranie współczynnika tłumienia zależnie od potrzeb w procesie projektowania, a co ważniejsze nawet jego zmiany w czasie lotu.

Współczynniki a_0 i a_1 ulegają zmianie proporcjonalnie do zmiany gęstości względnej powietrza i ich wartości dla wybranych do badań wysokości: $H = 1000$ m, $H = 11000$ m i $H = 18000$ m przedstawiają się następująco:

H [m]	a_0	a_1
1000	80.24	45.82
11000	29.72	14.21
18000	10.01	5.26

Możliwość zmiany współczynnika tłumienia wykorzystano dla dobrania optymalnych jego wartości i mniejszych, które dają przebiegi oscylacyjne. Stwierdzono przy okazji, że dla wysokości; $H = 1000$ m i $H = 11000$ m wyznaczone dla przyjętego modelu współczynniki: a_0 i a_1 dają rozwiązania nieoscylacyjne i nawet celem uzyskania rozwiązania optymalnego współczynnik a_1 dla obu wysokości należałoby zmniejszyć. Dla wysokości $H = 1000$ m do $a_1 = 17.92$, a dla $H = 11000$ m do $a_1 = 10.90$. Dla wysokości $H = 18000$ m współczynnik a_1 jest już mniejszy od wartości optymalnej i dla uzyskania najszybszego tłumienia procesów przejściowych należałoby go zwiększyć do wartości $a_1 = 6.33$.



Rys. 1. Rzeczywiste zmiany przeciążeń względnych dla różnych wysokości:

--- $a_1^2 > 4a_0$; — $a_1^2 = 4a_0$; - · - · - $a_1^2 < 4a_0$

Przebiegi rozwiązań realizujących rzeczywiste sterowanie minimalno-czasowe przedstawia rys.1. Rozwiązania te pokazują zmianę przeciążeń normalnych (jednostkowych przyspieszeń) dla wybranych powyżej wysokości oznaczonych na rysunku. Reprezentują one efekty dynamiczne realizacji idealnego programu sterowania wyznaczonego w pracy [2]. Z przebiegu ich widać, że poważnemu zniekształceniu ulega realizacja programu minimalno-czasowego dla bardzo dużych przeciążeń dopuszczalnych, a więc $n_d > 25$.

Osiągnięcie przeciążeń większych od $n_y = 25$ przy generacji tylko aerodynamicznej siły normalnej jest problematyczne nawet na małych wysokościach. Poniżej wysokości $H = 1000$ m jest to możliwe tylko z uwzględnieniem składowej ciagi silnika, równoważącego opór aerodynamiczny. Ale już na wysokości $H = 1000$ m charakterystyka aerodynamiczna wybranego modelu przy kącie natarcia $\alpha = 15^\circ$ zezwala na osiągnięcie maksymalnej wartości jedynie $n_{max} = 19$. Zatem sterowanie aerodynamiczne może być praktycznie realizowane z przeciążeniami co najwyżej $n_d = 20$. Program sterowania idealnego poniżej takich n_d jest zniekształcony stosunkowo nieznacznie. Osiągane przeciążenia normalne dla większych wysokości zmniejszają proporcjonalnie do spadku względnej gęstości, a zatem zniekształcenia programu sterowania idealnego będą co raz mniejsze.

Dodatkowe zniekształcenia wywołane dynamiką napędu sterów będą pewno mniejsze, a ich zbadanie wymagałoby znacznego rozszerzenia niniejszej pracy. Badania tych odchyłek łączą się z koniecznością wprowadzenia dodatkowej metody optymalizacji zatem poświęcić im należy oddzielne opracowanie.

5. Zakończenie i wnioski

Graniczny proces sterowania minimalno-czasowego, a więc zbliżanie równoległe jest możliwe jedynie dla takich kątów γ_0 , dla których już w chwili t_0 jest spełniony warunek równoległego zbliżania. Ma to oczywiście miejsce tylko przy $\beta_0 = 0$. W innych przypadkach sterowanie graniczne jest nierealne zarówno z uwagi na niemożliwość uzyskania $n_y = \infty$, jak i na zniekształcenia rzeczywistym przebiegiem.

Realizacja rzeczywistego procesu sterowania jest najkorzystniejsza dla optymalnej wartości a_1 i to na wszystkich wysokościach lotu. Zniekształcenia procesu są niewielkie i skuteczność sterowania zmniejsza się stosunkowo mało. Mniejsze osłabienie skuteczności dają przebiegi oscylacyjne rozwiązań, jednakże przeregulowanie jakie wówczas występuje pociągnie za sobą przekroczenie przeciążeń dopuszczalnych. Jakkolwiek przekroczenie takie na dużych

wysokościach nie zagraża zniszczeniu konstrukcji, to jednak może być niebezpieczne ze względu na możliwą utratę stateczności, a więc jest również wykluczone.

Poważniejsze natomiast zniekształcenia dają zbyt duże wartości a_1 i przy projetowniu rakiet do lotu sterowanego na małych wysokościach rozwiązań takich należy unikać. Dodatkowego opracowania wymaga wyznaczenie wydłużenia minimalnego czasu przechwycenia, ale już z otrzymanych przebiegów można wywnioskować, że wydłużenie to nie przekroczy $\Delta t = 0.5$ s dla lotu na $H = 1000$ m i $\Delta t = 1.5$ s dla lotu na $H = 18000$ m.

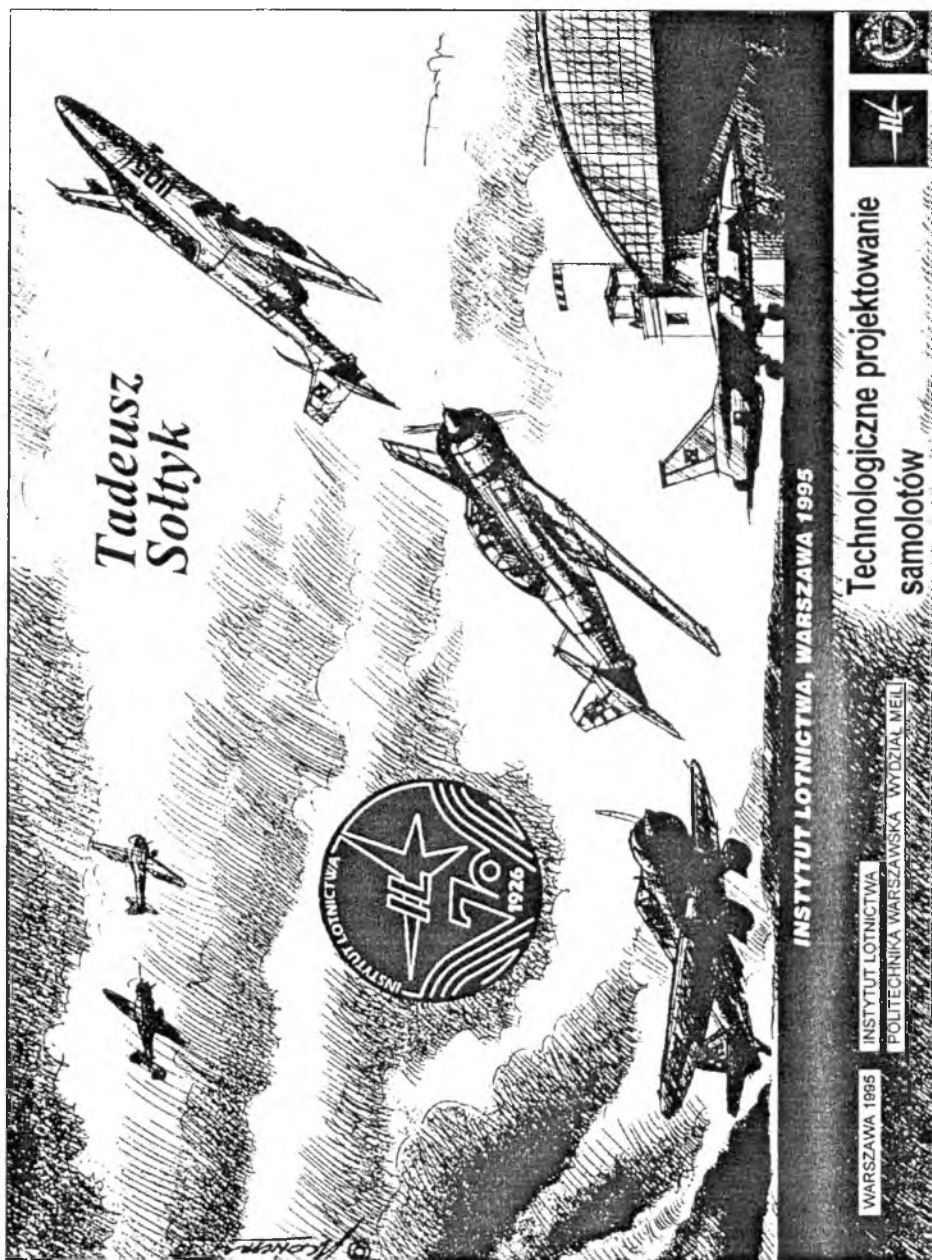
Literatura

1. DOBROLENSKIJ I.P., i INNI, *Automatika upravlaemych snarjadov*. Oborongiz, Moskwa, 1963
2. DUBIEL S., *Zbliżanie równoległe jako graniczny przypadek sterowania minimalno-czasowego*, "Mechanika w Lotnictwie" – Mat. Konferencji, Warszawa, 1994
3. DUBIEL S., *Naprowadzanie rakiet na cele ruchome jako nieswobodny ruch złożony*, Biuletyn WAT, Nr 10, 1990
4. DUBIEL S., *Konstrukcja rakiet, cz.I*, WAT, Warszawa, 1980
5. DUBIEL S., *Minimalno-czasowy problem sterowania w nawigacji*. Mat. Konf. Akademii Marynarki Wojennej, 1991

Dynamic Effects of Minimum-Time Rocket Guidance

Summary

The dynamic effects of a minimum-time control program emerge from temporary processes with deviation of the real trajectory from the ideal one. In designing the ideal control process a rocket is treated as a material point. Real motion of a rocket introduces a deviation of a real flight path from the that for a ideal control program. This deviation is the result of both the inertia of the rocket treated as a rigid body and the dynamic propulsion system system.



Tadeusz
Sołtyk



INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1995

Technologiczne projektowanie
samolotów

WARSZAWA 1995

INSTYTUT LOTNICTWA
POLITECHNIKA WARSZAWSKA WYDZIAŁ MECH



WYZNACZANIE POSTACI DRGAŃ ZŁOŻONYCH KONSTRUKCJI LOTNICZYCH ZA POMOCĄ NOWEJ METODY DWUFAZOWEJ

FRANCISZEK DUL

ITLiMS, Politechnika Warszawska

W pracy przedstawiono propozycję zastosowania nowej metody dwufazowej do wyznaczania częstości i postaci drgań własnych konstrukcji lotniczych oraz drgań akustycznych w kabinach samolotów. Omówiono podstawowe zastosowania postaci drgań własnych w zagadnieniach lotniczych oraz cechy charakterystyczne macierzowych zagadnień własnych mające istotny wpływ na możliwość numerycznego ich rozwiązywania. Porównano efektywność metod standardowych: iteracji podprzestrzennych i Lanczosa z efektywnością metody dwufazowej stwierdzając, że dla zagadnień rozwiązywanych obecnie, wymiary których nie przekraczają 10000, metody standardowe są szybsze, chociaż wymagają większej pamięci komputera. Zagadnienia bardzo wielkie, np. wyznaczanie postaci drgań całych samolotów, wymiary których osiągają 50000, nie mogą być rozwiązane za pomocą metod standardowych ze względu na zbyt małą pamięć komputerów oraz długie czasy obliczeń. Zadania takie, i większe, mogą być z powodzeniem rozwiązane za pomocą metody dwufazowej.

1. Wstęp

Analiza modalna stanowi ważne narzędzie pomocnicze przy projektowaniu konstrukcji lotniczych. W ostatnim okresie biura projektowe wyposażane są w coraz doskonalsze systemy CAD (AutoCAD, CADD5, Unigraphics), które pozwalają na projektowanie coraz bardziej złożonych konstrukcji lotniczych. Wywołuje to potrzebę używania również doskonałych narzędzi do wyznaczania postaci drgań projektowanych konstrukcji. Dotychczasowe wymagania praktyki nie przekraczały możliwości standardowych metod analizy modalnej. Jednakże obecnie coraz częściej pojawia się potrzeba wyznaczania postaci drgań konstrukcji, których modele otrzymane za pomocą MES-u cechują się bardzo wielkimi wymiarami. W takich przypadkach metody używane dotychczas mogą okazać się niewystarczające.

W pracy przedstawiono propozycję wykorzystania metody dwufazowej do rozwiązywania wielkich zagadnień własnych. W rozdziale 2 omówiono trzy główne obszary zastosowania postaci drgań: budowę równań ruchu, analizę drgań wymuszonych konstrukcji oraz analizę akustyki kabin samolotów. Krótkie omówienie sposobu budowy zagadnień własnych za pomocą MES-u przedstawiono w rozdziale 3. Rozdział 4 omawia cechy szczególne lotniczych zagadnień własnych. W rozdziale 5 przedstawiono metody standardowe: iteracji podprzestrzennych i Lanczosa oraz omówiono zakres ich zastosowania. Rozdział 6 omawia metodę dwufazową. W rozdziale 7 przedstawiono porównanie metod standardowych z metodą dwufazową na trzech przykładach bardzo wielkich zagadnień własnych.

2. Zastosowania postaci drgań własnych w lotnictwie

Zastosowania postaci drgań własnych obejmują kilka ważnych praktycznie zagadnień. Najważniejsze z nich, to: budowa równań ruchu samolotu odkształcalnego oraz analiza drgań wymuszonych konstrukcji. Odmienną klasę zadań stanowią zagadnienia akustyki kabin samolotów.

2.1. Budowa równań ruchu samolotu odkształcalnego

Nowoczesne metody symulacyjne badania stateczności aeroclastycznej pozwalają na wyznaczenie prędkości krytycznych flatteru i dywergencji samolotów poprzez bezpośrednie całkowanie sprzężonych modeli: konstrukcji i przepływu [1,2]. Modelem konstrukcji są z reguły równania modalne:

$$\ddot{q}_i(t) + 2h_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \int_S f_{AD}(\dot{q}, \ddot{q}, S) \Phi_i(S) dS \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

gdzie:

- $q_i(t)$ – współrzędne modalne, określające amplitudy poszczególnych postaci,
- h_i – współczynniki tłumienia,
- ω_i – częstości drgań własnych,

- S – powierzchnia obiektu,
 f_{AD} – ciśnienie aerodynamiczne,
 $\Phi_i(S)$ – postacie drgań własnych,
 m – liczba postaci drgań.

Ciśnienie aerodynamiczne, f_{AD} zależne zarówno od przepływu jak i od ruchu obiektu, wyznaczone jest za pomocą odpowiednich modeli aerodynamiki, np. potencjalnych, Eulera lub Naviera-Stokesa [3]. Wyznaczenie przebiegu zmiennych $q_i(t)$ poprzez całkowanie równań (2.1) pozwala na zbadanie stateczności aeroelastycznej układu, np. wyznaczenie krytycznej prędkości flatteru [2]. Równania modalne stosowane są powszechnie, ze względu na wiele zalet, m.in. wysoką dokładność opisu ruchu nawet dla niezbyt dużej liczby uwzględnionych postaci drgań, $m = 1 \div 10$ [-1].

2.2. Analiza drgań wymuszonych konstrukcji

Drgania konstrukcji wywołane pracą silników lub turbulencją nie mają wpływu na ruch samolotu, lecz powodują szereg niekorzystnych zjawisk, takich jak: zmęczenie materiału, lokalne osłabienie połączeń oraz niski komfort lotu powodujący zmęczenie pilota i pasażerów. Analiza drgań wymuszonych polega na znalezieniu tych elementów konstrukcji, które są najbardziej wzbudzone przez drgania silników. W tym celu należy wyznaczyć ruch konstrukcji pod wpływem wymuszenia za pomocą syntezy fourierowskiej, danej wzorem:

$$w(t, S) = \sum_{i=i_1}^{i=i_2} q_i(t) \Phi_i(S) \quad (2.2)$$

gdzie:

- $w(t, S)$ – przemieszczenia konstrukcji względem położenia nieodkształconego,
 $\Phi_i(S)$ – postacie drgań swobodnych,
 $q_i(t)$ – amplitudy, które należy wyznaczyć rozwiązując układ równań modalnych:

$$\ddot{q}_i(t) + 2h_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \int_S f_{\omega_w}(t, S) \Phi_i(S) dS \quad i = i_1, \dots, i_2 \quad (2.3)$$

przy czym $f_{\omega_w}(t, S)$ jest siłą wymuszającą. Ponieważ dominująca częstość siły wymuszającej ω_w jest zazwyczaj dużo wyższa, niż najniższe częstości drgań

$\omega_w \gg \omega_1, \omega_2, \dots$, to postaci Φ_i występujące we wzorze (2.2) i równaniach (2.3) pochodzą z innego przedziału spektrum niż miało to miejsce w przypadku budowy równań ruchu:

$$\omega_i \in (\omega_w - \Delta\omega, \omega_w + \Delta\omega) \quad i = i_1, \dots, i_2 \quad (2.4)$$

Szerokość pasma $\Delta\omega$ powinna być tak dobrana, aby zapewnić wystarczającą dokładność analizy.

2.3. Zagadnienia akustyki kabin samolotów

Zagadnienia tego typu różnią się od wymienionych wyżej tym, że dotyczą nie konstrukcji, lecz pola akustycznego wewnątrz kabiny samolotu. Należy wyznaczyć częstotliwości akustyczne oraz przebieg linii węzłów i strzałek postaci akustycznych w celu stwierdzenia, czy nie zajdzie wzbudzenie którejs z postaci na skutek drgań konstrukcji, a jeśli tak, to które miejsca kabiny będą szczególnie hałaśliwe [5]. Modelem matematycznym drgań akustycznych jest równanie Helmholtza:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} p \quad \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (2.5)$$

gdzie:

- $p(x, y, z)$ – ciśnienie akustyczne określone w kabynie Ω ograniczonej ścianką S ,
- c – prędkość dźwięku w powietrzu nieruchomym,
- \mathbf{n} – wektor normalny do ścianki kabiny S .

Podobnie jak w przypadku analizy drgań wymuszonych konstrukcji, należy wyznaczyć te postaci p_j , których częstotliwości ω_i są bliskie częstotliwości wymuszenia ω_w .

Rozpatruje się także połączenie zadania akustyki kabiny z zadaniem drgań wymuszonych konstrukcji. Wyznaczenie ruchu konstrukcji ze wzoru (2.2) pozwala na sformułowanie ogólniejszego zagadnienia drgań akustycznych, w którym warunek brzegowy na ściance ma postać [5]:

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_S = -\rho \dot{w}_n \quad (2.6)$$

gdzie ρ jest gęstością powietrza, zaś $w_n(t, S) = w(t, S)\mathbf{n}$ jest składową normalną przemieszczenia ścianki. Rozwiązanie niejednorodnego równania Helmholtza pozwala na wyznaczenie rozkładu ciśnienia w kabynie za pomocą szeregu fourierowskiej (2.2) (por[5]).

3. Algebraiczne zagadnienie własne

Postacie drgań własnych można wyznaczać doświadczalnie bądź numerycznie. Postacie wyznaczone doświadczalnie są wprawdzie bardziej wiarygodne, lecz nie są dostępne na etapie projektowania konstrukcji. W dalszej części rozważać będziemy jedynie metody numeryczne.

3.1. Wyprowadzanie algebraicznego zagadnienia własnego

Numeryczne wyznaczanie postaci i częstości drgań własnych polega na rozwiązaniu odpowiedniego algebraicznego zagadnienia własnego. W zagadnieniach mechaniki konstrukcji otrzymuje się je z reguły poprzez użycie Metody Elementów Skończonych (MES). Idea jest następująca. Konstrukcję dzieli się na *elementy* o prostych kształtach geometrycznych zakładając, że ich odkształcenia mogą być opisane za pomocą wielomianów niskiego stopnia, tzw. *funkcji kształtu*, zależnych od przemieszczeń tzw. *węzłów elementu*. Założenie to pozwala sformułować dla każdego elementu wyrażenia określające jego energię potencjalną sprężystości i energię kinetyczną jako funkcje przemieszczeń i prędkości węzłów. Spójność konstrukcji osiąga się poprzez zapewnienie zgodności przemieszczeń w węzłach łączących poszczególne elementy. Dla każdego elementu można napisać równania Lagrange'a II rodzaju, w których współzrędnymi uogólnionymi są przemieszczenia węzłów. W rezultacie otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych, w którym liczba równań N jest równa liczbie węzłów N_w pomnożonej przez liczbę stopni swobody w węźle L_s . W przypadku konstrukcji liniowej otrzymuje się macierzowy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (3.1)$$

w którym macierze \mathbf{M} , \mathbf{C} i \mathbf{K} o wymiarach $N \times N$ noszą odpowiednio nazwy: bezwładności, tłumienia i sztywności.

$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ jest wektorem uogólnionych przemieszczeń węzłów, a $\mathbf{F}(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_N(t)]^T$ jest wektorem uogólnionych sił zewnętrznych (węzłowych). Sposoby wyboru typów elementów, funkcji kształtu oraz szczegółowa metodyka postępowania opisana jest w wielu monografiach dotyczących MES-u, np. [6÷8].

Równanie macierzowe swobodnych drgań konstrukcji otrzymuje się zakładając: brak wymuszenia $\mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{0}$, brak tłumienia $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, oraz przyjmując,

że ruch jest harmoniczny:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

gdzie ω jest częstotliwością drgań, a $\Phi = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)]^T$ jest wektorem amplitud ruchu węzłów. Podstawiając (3.2) do równań ruchu (3.1) otrzymuje się równanie drgań swobodnych:

$$\mathbf{K}\Phi = \omega^2 \mathbf{M}\Phi \quad (3.3)$$

Równanie (3.3) definiuje uogólnione algebraiczne zagadnienie własne, które stanowi podstawę wyznaczania częstości i postaci drgań konstrukcji. Rozwiązaniem układu (3.3) jest zbiór częstości i postaci drgań (zwanymi również parami własnymi):

$$\{\omega_i, \Phi_i\} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

Ze względu na przybliżony charakter równań ruchu (3.1) otrzymanych za pomocą MES-u, tylko postaci odpowiadające najniższym m częstościom stanowią dobre przybliżenie postaci drgań konstrukcji rzeczywistej, $m \ll N$, poza tym dokładność kolejnych postaci jest coraz mniejsza. Wynika stąd, że wymiar układu N nie może być zbyt mały, zwłaszcza jeśli chcemy wyznaczyć wyższe częstości i postaci drgań.

Dyskretyzacja zagadnień polowych (2.5) za pomocą MES-u prowadzi również do równania modalnego (3.3) z tym, że do dyskretyzacji najczęściej wykorzystuje się metodę Galerkinia lub odpowiednią zasadę wariacyjną [5÷7].

3.2. Własności macierzy bezwładności i sztywności

Macierze sztywności \mathbf{K} i bezwładności \mathbf{M} otrzymane za pomocą MES-u są najczęściej symetryczne $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ (z wyjątkiem macierzy zagadnień giroskopowych), dodatnio określone lub półokreślone $\forall \mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \geq 0$. Macierze mogą być osobliwe; macierz sztywności wówczas, gdy konstrukcja jest swobodna, macierz bezwładności zaś wtedy, gdy w modelu konstrukcji występują elementy bezmasowe (np. gdy pominięto bezwładności obrotowe). Macierze \mathbf{K} i \mathbf{M} mają ponadto dwie ważne własności: są *rzadkie*, co oznacza, że liczba elementów niezerowych jest rzędu kN , $k = 10 \div 50$ a nie N^2 , oraz *pasmowe* – elementy niezerowe są skupione w pobliżu głównej diagonalii. Miarą pasmowości macierzy jest tzw. *szerokość pasma* m_b , która określa średnią odległość elementów niezerowych od diagonalii:

$$m_b(\mathbf{K}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_{K_{ij} \neq 0, j \leq i} (i - j + 1) \quad (3.5)$$

Wielkość ta ma zasadnicze znaczenie dla efektywności metod numerycznych używanych do wyznaczenia postaci drgań, gdyż najważniejsze z nich używają rozkładu trójkątnego macierzy:

$$\mathbf{LDL}^T := (\mathbf{K} - \sigma \mathbf{M}) \quad (3.6)$$

gdzie:

- \mathbf{L} – macierz trójkątna dolna,
- \mathbf{D} – macierz diagonalna,
- σ – tzw. przesunięcie.

Koszt takiego rozkładu bardzo silnie (z kwadratem) zależy od szerokości pasma m_b :

$$C_{LDL^T} \sim \frac{1}{2} m_b^2 N \quad (3.7)$$

a wymagany obszar pamięci roboczej dla macierzy \mathbf{L} jest równy:

$$P_{LDL^T} \sim m_b N \quad (3.8)$$

W typowych zadaniach dynamiki konstrukcji szerokości pasm zależą bardzo silnie od topologii siatki węzłów i ich numeracji. Ponieważ topologia siatki zależy od wymiaru fizycznego zadania, to szerokości pasm można oszacować następująco:

– dla zadań dwuwymiarowych

$$m_b \sim N^{1/2} \quad (3.9)$$

– dla zadań trójwymiarowych

$$m_b \sim N^{2/3} \quad (3.10)$$

Prowadzi to do następujących oszacowań kosztu obliczeń i pamięci roboczej:

– zadania dwuwymiarowe

$$C_{LDL^T} \sim \frac{1}{2} N^2 \quad P_{LDL^T} \sim N^{3/2} \quad (3.11)$$

– zadania trójwymiarowe

$$C_{LDL^T} \sim \frac{1}{2} N^{7/3} \quad P_{LDL^T} \sim N^{5/3} \quad (3.12)$$

Z oszacowań (3.11) i (3.12) wynika, że w przypadku wielkich zadań, wymagany obszar pamięci może znacznie przekroczyć możliwości dostępnych komputerów, co zupełnie uniemożliwi rozwiązanie zadania. Również czas obliczeń będzie bardzo długi. Z tego powodu stosuje się specjalne techniki numeryczne, znane pod ogólną nazwą Technologii Macierzy Rzadkich (Sparse

Matrix Technology), pozwalające istotnie zmniejszyć zarówno koszt rozkładu trójkątnego, jak i wymaganą pamięć roboczą. Techniki te polegają na takiej zamianie (permutacji) wierszy i kolumn macierzy, aby macierz trójkątna zawierała najmniejszą możliwą liczbę elementów niezerowych:

$$\mathbf{LDL}^T := \mathbf{P}(\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M})\mathbf{P}^T \quad (3.13)$$

gdzie \mathbf{P} jest macierzą permutacji, wyznaczaną kilkoma algorytmami: Cuthill-McKee, najniższego stopnia (Minimal Degree), cięć zagnieżdżonych (Nested Dissection) lub cięć równoległych (Parallel Dissection) [9]. Dla typowych zadań otrzymuje się następujące oszacowania kosztu rozkładu i wymaganej pamięci roboczej [9,10]:

– zadania dwuwymiarowe

$$C_{LDL^T} \sim 10N^{3/2} \quad P_{LDL^T} \sim 4N \log_2 N \quad (3.14)$$

– zadania trójwymiarowe

$$C_{LDL^T} \sim 3N^2 \quad P_{LDL^T} \sim 30N^{4/3} \quad (3.15)$$

Technologia Macierzy Rzadkich jest bardzo skuteczna dla zadań dwuwymiarowych, natomiast w przypadku zadań trójwymiarowych zysk nie jest już wielki, gdyż np. wymagana pamięć jest mniejsza dopiero dla $N > 20000$ (por. [10]).

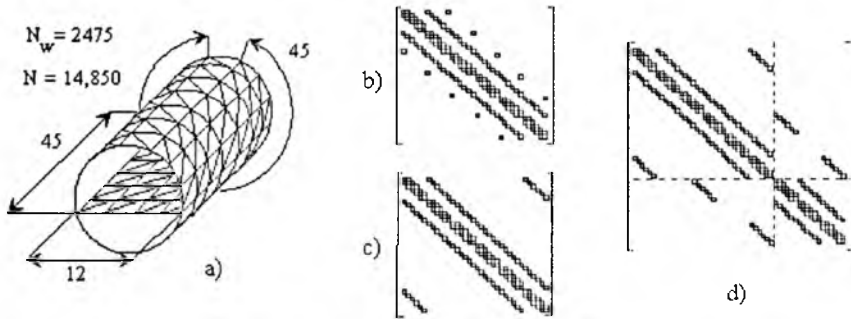
4. Specyfika lotniczych zagadnień własnych

Zagadnienia własne występujące w lotnictwie to zarówno zagadnienia konstrukcyjne, jak i polowe. W praktyce lotniczej spotyka się różne rodzaje zadań konstrukcyjnych. Najczęściej dotyczą one wyznaczania drgań własnych pojedynczych elementów, zwłaszcza skrzydeł, usterzenia czy kadłuba. Zadania tego rodzaju są często dwuwymiarowe, na przykład wtedy, gdy modeluje się cienkie skrzydło lub usterzenie za pomocą płaskich elementów płytowych.

Ostatnio jednak coraz częściej podejmuje się próby analizy całych samolotów z uwzględnieniem ich struktury wewnętrznej. Powodem jest chęć wykorzystania tych samych danych do analizy wytrzymałościowej (statycznej), jak i dynamicznej, gdyż w ten sposób unika się budowy oddzielnych modeli [11]. Pozwala to na znaczne oszczędności zarówno czasowe, jak i finansowe. Oznacza to, że w przyszłości coraz częściej zachodzić będzie konieczność wyznaczania

postaci drgań wielkich, złożonych konstrukcji trójwymiarowych. Zagadnienia konstrukcji lotniczych są zagadnieniami trójwymiarowymi, lecz należy zauważyć, że struktura konstrukcji kadłuba czy skrzydła jest bardziej zbliżona do dwuwymiarowej, ze względu na to, iż składa się ze szkieletu i cienkiego pokrycia (ta sama uwaga dotyczy konstrukcji laminatowych), które, choć zamknięte w trzech wymiarach, są w istocie dwuwymiarowe. Istotne jest to, że proces podziału na elementy skończone dotyczy konstrukcji, a nie przestrzeni, którą ona zajmuje. Fakt ten wpływa bardzo istotnie na strukturę macierzy, zwłaszcza zaś na szerokość jej pasma.

Aby pokazać, jaki jest wpływ geometrii konstrukcji cienkościennych oraz dodatkowych elementów usztywniających na własności macierzy, rozważmy kadłub walcowy wzmocniony podłogą (rys.1a). Dzieląc kadłub na elementy trójkątne powłokowe mające 6 stopni swobody w węzle, otrzymuje się macierze o strukturze przedstawionej na rys.1b, i rys.1c.



Rys. 1. Powłoka walcowa z usztywnieniem (a) oraz struktury elementów niezerowych macierzy powłoki bez usztywnienia (b,c) i z usztywnieniem (d)

Obliczając średnią szerokość pasma otrzymujemy, w zależności od przyjętego uporządkowania węzłów: $(m_b)_b = 270 \sim 2.5N^{1/2}$ dla uporządkowania przedstawionego na rys.1b lub $(m_b)_c = 510 \sim 5N^{1/2} \sim N^{2/3}$ dla uporządkowania z rys.1c. Dla płaskiej płyty mamy zaś $(m_b)_{płyty} = 261 \sim 2.5N^{1/2}$. Jest widoczne, że szerokość pasma macierzy jest zbliżona do tej, jaką miałaby macierz prostokątnej płyty powstałej z rozwinięcia poboczniccy walca. Fakt, że pobocznicca ta jest zamknięta, odzwierciedla się w dodatkowych niezerowych blokach macierzy. Ponieważ to właśnie średnia szerokość pasma decyduje o koszcie rozkładu trójkątnego, to koszt ten nie będzie tak wielki, jak wynikałoby to z przybliżonych oszacowań (3.12) opartych na założeniu trójwymiarowości obiektu.

Rozważmy wpływ usztywniających elementów konstrukcyjnych na szerokość

kość pasma macierzy. Każdy taki element, np. podłoga z rys.1a, wprowadza dodatkowe powiązania pomiędzy węzłami konstrukcji, a co za tym idzie, zwiększa średnią szerokość pasma (rys.1d), $m_b = 938 \sim 1.6N^{2/3}$. Im więcej elementów dodamy, tym bardziej szerokość pasma będzie zbliżona do tej, jaką mają zadania trójwymiarowe.

Jak widzimy, typowe zagadnienia dynamiki konstrukcyjne spotykane w lotnictwie mają cechy pośrednie pomiędzy zadaniami dwu- i trójwymiarowymi.

Istnieją w lotnictwie zadania konstrukcyjne typowo trójwymiarowe. Dotyczą one na przykład analizy drgań łopatek turbin silników odrzutowych. Łopatką taką jest zwykle zwartą bryłą metalu, w której wydrążone są kanały dla przepływu cieczy chłodzącej. Modelowanie jej za pomocą elementów bryłowych prowadzi do typowego zadania trójwymiarowego.

Zadania akustyki kabin są również trójwymiarowe, chociaż ich wymiary są nieco mniejsze ze względu na to, że poszukuje się funkcji skalarnych, a więc każdy węzeł ma tylko jeden stopień swobody. Przykładowo, dla wnętrza kadłuba walcowego z rys.1a otrzymamy $N_w = N = 40500$, $m_b = 900 \sim 0.95N^{2/3}$.

5. Standardowe metody rozwiązywania zagadnień własnych

Standardowymi metodami obliczania postaci i częstości drgań własnych są: metoda iteracji podprzestrzennych [6,12] i metoda Lanczosa [12].

Metoda iteracji podprzestrzennych, używana w wielu profesjonalnych pakietach oprogramowania, np. NASTRAN, ADINA, FEAP, polega na iteracyjnym obliczaniu par własnych za pomocą iteracji odwrotnych:

$$(\mathbf{K} - \sigma \mathbf{M})z_i = \mathbf{M}\Phi_i^n \quad i = 1, \dots, m \quad (5.1)$$

gdzie $\Phi^n = [\Phi_1^n, \dots, \Phi_m^n]$ jest macierzą przybliżeń wektorów własnych w n -tym kroku iteracyjnym o wymiarach $N \times m$ oraz procedury Rayleigha-Ritza:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m &:= \mathbf{Z}^T \mathbf{K} \mathbf{Z} & \mathbf{M}_m &:= \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{Z} & \mathbf{K}_m \mathbf{Y} &= \mathbf{M}_m \mathbf{Y} \Delta \\ \Phi^{n+1} &:= \mathbf{Z} \mathbf{Y} & \mathbf{Z} &= [z_1, \dots, z_m] \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdzie \mathbf{K}_m , \mathbf{M}_m są rzutami macierzy \mathbf{K} , \mathbf{M} na podprzestrzeń rozpiętą wektorami Φ^n , \mathbf{Y} – macierzą wektorów własnych zadania zredukowanego (5.2)₃, Δ – macierzą diagonalną wartości własnych. Rozwiązanie równania (5.1) wymaga

wykonania rozkładu trójkątnego (3.6). Wybór przesunięcia σ ma istotne znaczenie dla efektywności metody. Pary własne wyznacza się kolejno począwszy od najniższej. Obliczoną postać usuwa się z macierzy Φ zastępując ją nowym wektorem roboczym. Aby zapewnić wystarczającą zbieżność procesu iteracyjnego konieczne jest zwykle wykonanie więcej niż jednego rozkładu trójkątnego (3.6), średnio – jeden rozkład na $5 \div 10$ wyznaczonych postaci. Metoda iteracji podprzestrzennych cechuje się wysoką niezawodnością oraz starannie dopracowanymi szczegółami implementacyjnymi. Nie występują też żadne dodatkowe problemy związane z jej użyciem.

Metoda Lanczosa, chociaż opracowana wcześniej, uważana jest za bardziej nowoczesną. Polega ona na generowaniu zbioru tzw. wektorów Ritza v_j w procesie rekurencyjnym [12]:

$$\|v_{j+1}\| M v_{j+1} := K v_j - (v_j, K v_j) v_j - (v_{j-1}, K v_j) v_{j-1} \quad j = 1, \dots, p \quad (5.3)$$

Wektory własne wyznacza się jako odpowiednie kombinacje liniowe wektorów Ritza:

$$\Phi_i^p := \sum_{j=1}^p \gamma_{ij}^p v_j \quad (5.4)$$

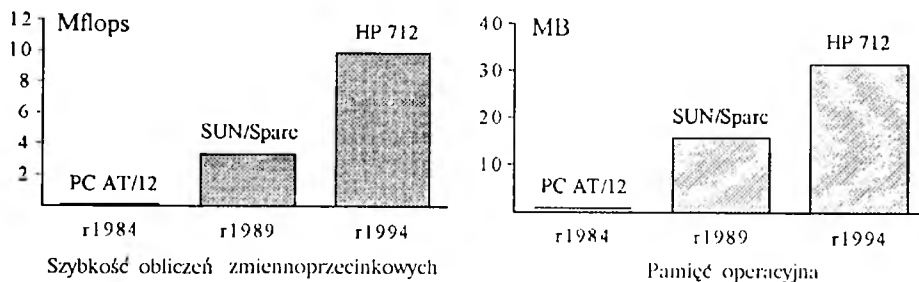
a współczynniki γ_{ij}^p oblicza się rozwiązując pomocnicze zagadnienie własne z macierzą trójdziagonalną.

Efektywność metody Lanczosa jest szczególnie wysoka, jeżeli w procesie rekurencyjnym (5.3) zamiast macierzy K użyje się macierzy odwrotnej w postaci czynników rozkładu (3.6) $(K - \sigma M)^{-1} \equiv L^{-1} D^{-1} L^{-T}$. Poważną wadą metody Lanczosa jest generowanie kopii wektorów własnych, co zmusza do używania specjalnych zabiegów mających na celu ich eliminację tzw. ortogonalizacji selektywnej [12]. W przypadku wielokrotnych wartości własnych (pojawiających się, gdy konstrukcja jest symetryczna) metoda Lanczosa może opuścić niektóre z nich. Kłopot sprawia także konieczność pamiętania wszystkich p wektorów Ritza.

Metoda Lanczosa cechuje się bardzo wysoką efektywnością, co spowodowało olbrzymi wzrost jej popularności w ostatnich latach, zwłaszcza w zagadnieniach konstrukcyjnych.

Metody standardowe mają ugruntowaną pozycję w środowisku inżynierskim, zwłaszcza metoda iteracji podprzestrzennych, używana od ponad ćwierćwiecza. Pozwalają one na niemal rutynowe rozwiązywanie większości zagadnień własnych mających znaczenie praktyczne. Zastosowanie Technologii Macierzy Rzadkich pozwala zmniejszyć koszt rozkładu trójkątnego tak znacznie, że metody standardowe (zwłaszcza metoda Lanczosa) są efektywne nawet

dla $N \sim 10000$. Przykładowo, dla zadania o wymiarze $N = 8000$, $m_b = 400$ czas rozkładu zwykłego (3.6) wyniósł 31 min a macierz L zajęła 31 MB. Zastosowanie porządkowania metodą cięć zagnieżdżonych spowodowało, że czas rozkładu (3.13) wyniósł 6min 30sek, a macierz L zajęła 12 MB. Mając na uwadze własności zadań lotniczych opisane w rozdziale 3 można stwierdzić, że klasa zadań, dla których metody standardowe będą wystarczająco efektywne, jest szeroka. Z tego powodu nie ma obecnie dużego zapotrzebowania na nowe metody. Dodatkowym czynnikiem, który sprzyja utrzymaniu dominującej pozycji przez metody standardowe jest wzrost mocy obliczeniowej komputerów (rys.2). Widoczne jest, że szybkość działania wzrosła ok. $3 \div 4$ -krotnie w ciągu pięciu lat, a pamięć $2 \div 3$ -krotnie. Oznacza to, że granica opłacalności stosowania metod standardowych będzie się przesuwac w kierunku większych wymiarów.



Rys. 2. Wzrost mocy obliczeniowej komputerów w ostatniej dekadzie

Często jednak wyrażany jest pogląd, że rosnące potrzeby przemysłu będą wymagały rozwiązywania coraz większych zagadnień własnych [13]. Dokładne odwzorowanie kształtu oraz struktury elementów konstrukcyjnych: kadłuba, skrzydeł, gondoli silników i usterzenia za pomocą elementów skończonych odpowiedniego typu prowadzić będzie do zadań własnych o bardzo dużych wymiarach, osiągających $N \sim 10^5$. Ich udział będzie prawdopodobnie rósł wraz ze wzrostem możliwości nowoczesnych systemów komputerowego wspomaganie projektowania i produkcji CAD/CAM. W przypadku tak wielkich zadań wymagany obszar pamięci może znacznie przekroczyć możliwości dostępnych komputerów, zwłaszcza PC, a nawet stacji roboczych (stanowiących coraz częściej standardowe wyposażenie biur projektowych), co zupełnie uniemożliwi rozwiązanie zadania. Również czas obliczeń będzie bardzo wysoki, wielokrotnie większy niż dla metod nie używających rozkładu trójkątnego (3.6). Powyższa wada metod standardowych jest więc istotna, gdyż powoduje, że są one nieefektywne dla zadań o wymiarach przekraczających 20000. Jeżeli

moc obliczeniowa komputerów będzie rosła wolniej niż potrzeby projektantów, to metody standardowe nie będą wystarczające, co może wywołać wzrost zainteresowania metodami bardziej efektywnymi.

6. Metoda dwufazowa obliczania częstości i postaci drgań

Opracowana przez autora niniejszego artykułu nowa *metoda dwufazowa* wyznaczania częstości i postaci drgań własnych cechuje się wysoką efektywnością i małym zapotrzebowaniem na pamięć komputera [14÷16]. Idea metody dwufazowej polega na iteracyjnym wyznaczaniu kolejnych par własnych w dwu fazach: wstępnej, za pomocą procedury Rayleigha-Ritza (5.2) i właściwej, za pomocą metody iteracji ilorazu Rayleigha:

$$\mathbf{S}^{-1}[\mathbf{K} - \mu(\Phi_i^n)\mathbf{M}]z_i = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\Phi_i^n \quad i = 1, \dots, m \quad (6.1)$$

$$\Phi^{n+1} := Z/\|Z\|_M$$

gdzie $\mu(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} / \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ jest ilorazem Rayleigha, a \mathbf{S} tzw. macierzą skalującą. Układy nieokreślonych, prawie osobliwych równań liniowych (6.1) rozwiązuje się za pomocą metod iteracyjnych (MINRES) co pozwala uniknąć wykonywania rozkładu trójkątnego (3.6). Użycie skalowania (preconditioning) powoduje znaczne zwiększenie efektywności metody. Macierz \mathbf{S} jest wyznaczana za pomocą tzw. niepełnego rozkładu trójkątnego (ICCG).

Efektywność metody dwufazowej jest bardzo wysoka, szczególnie dla zadań o wielkich wymiarach. Metoda dwufazowa pozwala m.in. wyznaczyć postacie drgań złożonych konstrukcji lotniczych, modelowanych elementami belkowymi, płytowymi bądź powłokowymi, dla których wymiary algebraicznych zadań własnych osiągają $N \sim 50000$, przy użyciu mikrokomputera PC-486/66MHz z pamięcią 32MB. Rozwiązanie podobnych zadań za pomocą metod standardowych nie byłoby możliwe nawet na stacjach roboczych, gdyż wymagałoby to pamięci operacyjnej rzędu 1GB, a czas obliczeń byłby ok. dwudziestokrotnie dłuższy niż w przypadku użycia metody dwufazowej. Metoda dwufazowa pozwala wyznaczać typowe w zadaniach lotniczych sztywne postacie drgań oraz rozwiązywać zadania własne z osobliwymi macierzami bezwładności. Opracowywana jest również wersja pozwalająca wyznaczać postacie drgań elementów wirujących (łopat śmigłowców, wirników turbin silników odrzutowych, itp.), dla których macierze sztywności i bezwładności są niesymetryczne.

Zastosowanie metody dwufazowej nie ogranicza się do mechaniki klasycznej. Pewne jej cechy są szczególnie atrakcyjne przy rozwiązywaniu bardzo wielkich ($N \sim 1000000$) zadań własnych chemii kwantowej.

7. Porównanie metod standardowych z metodą dwufazową

W celu zaprezentowania możliwości metody dwufazowej przedstawione zostaną wyniki obliczeń otrzymane za pomocą metody dwufazowej i metod standardowych. Wyznaczane będzie $m = 10$ częstości i postaci drgań własnych typowych konstrukcji zdyskretyzowanych za pomocą elementów belkowych i powłokowych o sześciu stopniach swobody w węzle, oraz postaci akustyczne kabiny zdyskretyzowanej za pomocą czworościennych elementów liniowych. Ze względu na to, że metody standardowe wymagałyby we wszystkich rozpatrywanych przypadkach pamięci daleko większych niż te, do których autor miał dostęp, ocenę efektywności metod standardowych przeprowadzono za pomocą oszacowań (3.15). Należy przy tym pamiętać, że są to oszacowania dolne. Czasy obliczeń dla metod standardowych oszacowano porównując liczbę operacji obliczoną za pomocą (3.15) z rzeczywistą liczbą operacji wykonaną przez metodę dwufazową. Szacując czas obliczeń dla metody Lanczosa założono, że rozkład (3.6) wykonany został tylko raz, zaś w przypadku metody iteracji podprzestrzennych – 1 lub 2 razy, przy czym dla wyznaczonej liczby postaci ta druga wartość jest bliższa rzeczywistości. Wszystkie obliczenia wykonano na mikrokomputerze PC-486, z pamięcią 32MB, o szybkości obliczeń zmiennoprzecinkowych ok. 2 Mflops.

Tabela 1. Zadanie konstrukcyjne średniej wielkości. $N_w = 1728$, $N = 10368$, $m_b = 864$

	L. operacji	Czas obl. (godz)	Pamięć (MB)
Iteracje podprzestrzenne	$2 \div 4 \cdot 10^9$	$2 \div 4$	51
Metoda Lanczosa	$2 \cdot 10^{11}$	2	51
Metoda dwufazowa	$1.5 \cdot 10^{10}$	1	18

Tabela 2. Wielkie zadanie konstrukcyjne, $N_w = 9702$, $N = 58212$, $m_b = 2900$

	L. operacji	Czas obl. (godz)	Pamięć (MB)
Iteracje podprzestrzonne	$2 \div 4 \cdot 10^{11}$	$200 \div 400$	700
Metoda Lanczosa	$2 \cdot 10^{11}$	200	700
Metoda dwufazowa	$1.5 \cdot 10^{10}$	15	32

Tabela 3. Wielkie zadanie akustyki kabiny, $N_w = N = 80000$, $m_b = 2000$

	L. operacji	Czas obl. (godz)	Pamięć (MB)
Iteracje podprzestrzonne	$1.8 \div 3.6 \cdot 10^{11}$	$180 \div 360$	1000
Metoda Lanczosa	$1.8 \cdot 10^{11}$	180	1000
Metoda dwufazowa	$8 \cdot 10^9$	8	32

Przedstawione porównania wskazują na zasadniczą przewagę metody dwufazowej nad metodami standardowymi nawet wówczas, gdy używają one Technologię Macierzy Rzadkich, jeżeli wymiary zadań są duże. Zadania o wymiarach $N \sim 50000$ całkowicie wykraczają poza możliwości zarówno metody iteracji podprzestrzennych, jak i Lanczosa. Granica opłacalności stosowania metody dwufazowej przebiega dla $N \sim 5000$, jeśli porównać ją z metodą iteracji podprzestrzennych, oraz dla $N \sim 10000$ w przypadku metody Lanczosa.

Powyższe przykłady ilustrują jednocześnie najistotniejszy kłopot związany z rozwiązywaniem bardzo wielkich zadań własnych – brak pamięci, który często może być znacznie większym ograniczeniem, niż długie czasy obliczeń. Pracochłonne obliczenia można bowiem najczęściej przeprowadzać w godzinach, gdy komputery są nieobciążone, możliwa jest też zwykle praca wykonywana etapami. Brak odpowiednio wielkiej pamięci jest zaś barierą trudną do szybkiego pokonania, gdyż wiąże się to z dość poważnymi inwestycjami.

8. Wnioski

- Obecne potrzeby lotniczych biur konstrukcyjnych, dotyczące numerycznego wyznaczania częstości i postaci drgań własnych, są niemal całkowicie zaspokojone za pomocą metod standardowych – iteracji podprzestrzennych i Lanczosa.

- Dyskretyzacja złożonych konstrukcji lotniczych przy użyciu MES-u prowadzi do zadań własnych o bardzo wielkich wymiarach. Rozwiązywanie takich zadań za pomocą metod standardowych jest bardzo czasochłonne, a czasami niemożliwe ze względu na ograniczoną pamięć komputera.
- Zastosowanie metody dwufazowej na etapie projektowania nowoczesnych konstrukcji lotniczych mogłoby przyczynić się do znacznego skrócenia czasu obliczeń, a w związku z tym kosztów projektowania.

9. Literatura

1. DUL F.A., *Metody symulacyjne badania stateczności acroclustycznej*, PTMTiS, "Mechanika w Lotnictwie", 161-180, Warszawa, 1992
2. DUL F.A., *Analiza flatterowa skrzydła opisanego modelem całkowicie-różniczkowym za pomocą metody symulacyjnej*, PTMTiS, "Mechanika w Lotnictwie", 181-198, Warszawa, 1992
3. DUL F., *Modele aerodynamiki w symulacyjnej analizie flatteru samolotów*, Materiały pokonferencyjne, "Aerodynamika Lotnicza", Warszawa 1993
4. BENNET R.M., BATINA J.T., CUNNINGHAM H.J., *Wing-Flutter Calculations with the CAP-TDS Unsteady Small-Disturbance Program*, J. of Aircraft, **26**, 9, 876-882, 1989
5. GUTOWSKI R. I INNI, *Sprawozdania z pracy "Analiza modalna drgań akustycznych kabiny samochodu"*, ITLiMS PW, Części 1-4, 1988-1990, Warszawa
6. BATHE K.J., WILSON E., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall 1976
7. ZIENKIEWICZ O.C., *Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1977
8. KRUSZEWSKI J. I INNI, *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Arkady, Warszawa, 1984
9. GEORGE A., LIU J.W.H., *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981
10. DUFF I.S., ERISMAN, A.M., REID, J.K., *On George's Nested Dissection Method*, SIAM J. Numer. Anal., **13**, 686-695, 1976
11. MATTHIES H.G., *A Subspace Lanczos Method for the Generalized Symmetric Eigenproblem*, Comp. & Struct., **21**, 1/2, 319-325, 1984
12. PARLETT B.N., *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980
13. PARLETT B.N., *The Software Scene in the Extraction of Eigenvalues from Sparse Matrices*, SIAM J. on Sci. Stat. Comp., **5**, 3, 590-604, 1984
14. DUL F.A., ARCZEWSKI K., *The Two-Phase Method for Finding a Great Number of Eigenpairs of the Symmetric or Weakly Non-Symmetric Large Eigenvalue Problems*, Journal of Computational Physics, **111**, 1, 89-109, 1994

15. DUL F.A., *Nowa metoda wyznaczania częstości i postaci drgań własnych układów fizycznych o wielkiej liczbie stopni swobody*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Mechanika, z.115, 79-85, 1994
16. DUL F.A., ARCZEWSKI K., *Solving Very Large Generalized Symmetric and Some Non-Symmetric Eigenproblems by the Two-Phase Method*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 75, S11, S623-S624, 1995

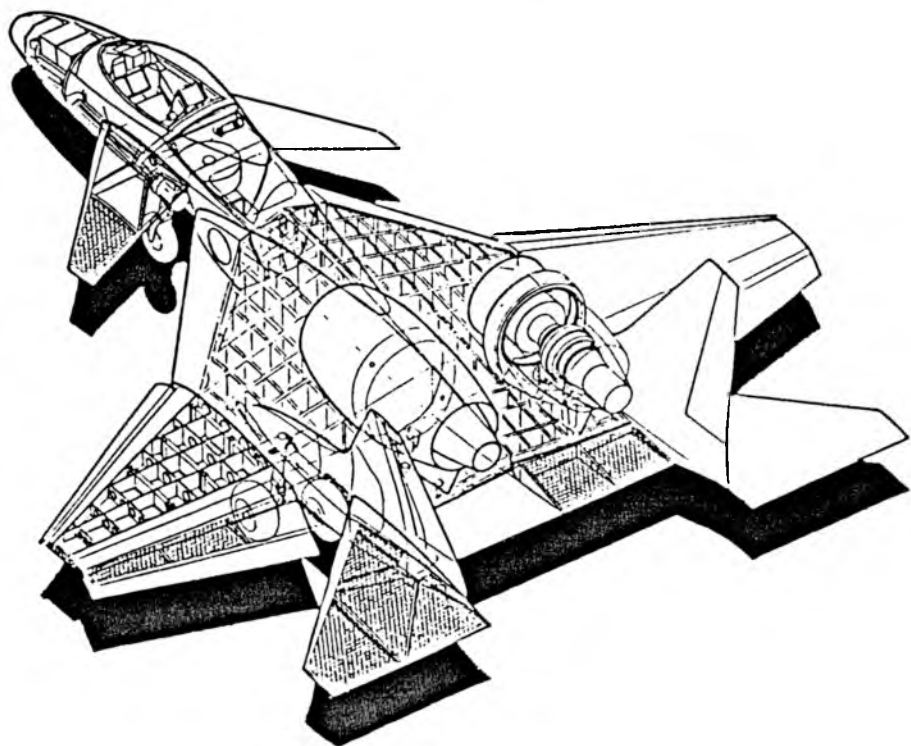
Computation of Mode Shapes of the Complex Aerospace Constructions by the New Two-Phase Method

Summary

In this paper a proposition of the new Two-Phase method using for computing frequencies and mode shapes of aerospace constructions or acoustic vibrations in the interiors of aircraft is proposed. The main areas of applications of the mode shapes in the aerospace engineering are discussed. Specific properties of the matrix eigenproblems, crucial for their solvability, are analyzed. A comparison of efficiency of the Two-Phase and the standard methods: the Subspace Iterations and the Lanczos method, is presented. The conclusion is, that for the typical eigenproblems, dimensions of which do not exceed 10000, the standard methods are more efficient, although they require larger memory than the Two-Phase method. Very large eigenproblems, e.g., computation of mode shapes of entire aircraft, dimensions of which attain 50000, cannot be solved by means of the standard methods, because of too large memory requirement and unacceptable computational costs. Such problems (or larger) may be solved effectively by the Two-Phase method.

PZL-230

Skorpion



BOJOWY SAMOŁOT POLA WALKI -
DUŻEJ MANEWROWOŚCI

ANALIZA DYNAMIKI PRZESTRZENNEGO RUCHU SAMOLOTU ZE SKRZYDŁEM PASMOWYM

ZBIGNIEW DŻYGADŁO

GRZEGORZ KOWALECZKO

KRZYSZTOF SIBILSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

W pracy rozpatrzono dynamikę lotu samolotu odrzutowego ze skrzydłem pasmowym w wybranych figurach akrobacji lotniczej i na zakresie nadkrytycznych kątów natarcia tzw. "deep stall manoeuvres". Przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń cyfrowej symulacji "beczki sterowanej" oraz charakterystycznej dla tego typu samolotów figury wykonywanej na zakresie bardzo dużych kątów natarcia - "Kobry".

1. Nieliniowe równania ruchu samolotu

Równania ruchu środka masy samolotu zapisane w prędkościowym układzie współrzędnych mają postać [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} \left\{ \left[F \cos(\alpha + \varphi_s) - mg(\sin \Theta \cos \alpha - \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha) \right] \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + mg \cos \Theta \sin \Phi \sin \beta - P_{xa} \right\} \\ \frac{d\alpha}{dt} &= Q - (P \cos \alpha + R \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{mV \cos \beta} \left[F \sin(\alpha + \varphi_s) + \right. \\ &\quad \left. - mg(\sin \Theta \sin \alpha + \cos \Theta \cos \Phi \cos \alpha) + P_{za} \right] \\ \frac{d\beta}{dt} &= P \sin \alpha - R \cos \alpha - \frac{1}{mV} \left\{ \left[F \cos(\alpha + \varphi_s) - mg(\sin \Theta \cos \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha) \right] \sin \beta - mg \cos \Theta \sin \Phi \cos \beta - P_{ya} \right\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

oraz równania ruchu obrotowego dookoła środka masy samolotu

$$\begin{aligned} I_x \frac{dP}{dt} + (I_z - I_y)QR - I_{xz} \left(\frac{dR}{dt} + PQ \right) &= L_c \\ I_y \frac{dQ}{dt} + (I_x - I_z)PR + I_{xz}(P^2 - R^2) &= M_c \\ I_z \frac{dR}{dt} + (I_y - I_x)PQ - I_{xz} \left(\frac{dP}{dt} - QR \right) &= N_c \end{aligned} \quad (1.2)$$

Równania (1.1) i (1.2) należy uzupełnić równaniami związków kinematycznych:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{R \cos \Phi + Q \sin \Phi}{\cos \Theta} \\ \frac{d\Theta}{dt} &= Q \cos \Phi - R \sin \Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \Theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_g}{dt} &= u \cos \Theta \cos \Psi + v(\sin \Theta \sin \Phi \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\ &+ w(\sin \Theta \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi) \\ \frac{dy_g}{dt} &= u \cos \Theta \sin \Psi + v(\sin \Theta \sin \Phi \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\ &+ w(\sin \Theta \cos \Phi \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi) \\ \frac{dz_g}{dt} &= -u \sin \Theta + v \cos \Theta \sin \Phi + w \cos \Theta \cos \Phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

gdzie:

$$u = V \cos \alpha \cos \beta \quad v = V \sin \beta \quad w = V \sin \alpha \cos \beta \quad (1.5)$$

Przy czym:

- V – prędkość lotu,
- F – ciąg silników,
- m – masa samolotu,

- I_x, I_y, I_z, I_{xz} – momenty bezwładności samolotu,
 P_{xa}, P_{ya}, P_{za} – siły aerodynamiczne działające na samolot,
 g – przyspieszenie ziemskie,
 L_c, M_c, N_c – składowe wektora momentu na osie układu współrzędnych związanego z samolotem,
 P, Q, R – składowe wektora prędkości kątovej samolotu na osie układu współrzędnych związanego z samolotem,
 α, β – kąty natarcia i ślizgu,
 φ_s – kąt zaklinowania silników,
 Θ, Φ, Ψ – kąty pochylenia, przechylenia i odchylenia samolotu.

Równania (1.1) ÷ (1.5) uzupełniono równaniami dynamiki silnika:

— równaniem obrotów:

$$n_T = K_1^T(\text{Ma}, \tau, \rho) \frac{n_{T \max} - n_{T0}}{\delta T_{\max}} \delta_T \quad (1.6)$$

— równaniem ciągu:

$$T = T_0(n_T) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0.7} (A + B\text{Ma} + C\text{Ma}^2) \quad (1.7)$$

— równaniem prędkości kątovej obrotów zespołu turbo-sprężarki:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{60} n_T \quad (1.8)$$

Wartości współczynników τ , K_1^T , A , B i C wyznaczone zostały na podstawie charakterystyk wysokościowych i prędkościowych silnika [1].

2. Prawa sterowania na zakresie tłumienia

System CAY na zakresie tłumienia pozwala na polepszenie charakterystyk sterowności i stateczności samolotu w całym zakresie eksploatacyjnym. Zakres tłumienia jest podstawowym stanem pracy autopilota (włącza się on automatycznie po zakończeniu pracy testera pokładowego). Prawa sterowania, zidentyfikowane w oparciu o [1] i [2] w poszczególnych kanałach autopilota dane są zależnościami:

— w kanale pochylenia:

$$\dot{\delta}_{II} + \delta_{II} = \dot{Q}(f_I + 0.2) \quad (2.1)$$

— w kanale przechyłania:

$$0.25\dot{\delta}_L + \delta_L = -(0.25\dot{P} + P)(0.1 + 0.12f_2) \quad (2.2)$$

— w kanale odchyłania:

$$1.25\dot{\delta}_V + \delta_V = (\dot{n}_y + n_y)(7f_1^\alpha + 8)f_2 + (0.5f_2 + 0.5)f_1\dot{P} + (0.5f_2 + 0.5)\dot{R} \quad (2.3)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} n_y &= n_y^\beta \beta + n_y^P P + n_y^R R + n_y^{\delta_V} \delta_V \\ \dot{n}_y &= \dot{n}_y^\beta \dot{\beta} + \dot{n}_y^P \dot{P} + \dot{n}_y^R \dot{R} + \dot{n}_y^{\delta_V} \dot{\delta}_V \end{aligned}$$

Oznaczenia:

- n_y — współczynnik przeciążenia bocznego,
- f_1, f_2, f_4^α — funkcje zależne od ciśnienia statycznego i dynamicznego [1].

Maksymalne wartości przyrostów wychyleń poszczególnych sterów spowodowane działaniem autopilota pracującego na zakresie tłumienia wynoszą:

- dla steru wysokości $\pm 3.5^\circ$,
- dla lotek $\pm 5^\circ$,
- dla steru kierunku $\pm 5.75^\circ$.

3. Charakterystyki aerodynamiczne samolotu

Siły aerodynamiczne działające na samolot, zgodnie z przyjętymi założeniami, są zapisane w prędkościowym układzie współrzędnych, natomiast wektor momentu jest zrzutowany na osie układu związanego z samolotem.

Dla sił otrzymuje się związki:

$$\begin{aligned} P_{xa} &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_x \\ P_{ya} &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y \\ P_{za} &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie:

- S — powierzchnia skrzydła,
- ρ — gęstość powietrza.

Dla momentów otrzymano:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho V^2 S l C_l \\ M &= \frac{1}{2} \rho V^2 S b_A C_m \\ N &= \frac{1}{2} \rho V^2 S l C_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie:

- l – rozpiętość samolotu,
- b_A – średnia cięciwa aerodynamiczna.

Współczynnik oporu aerodynamicznego C_x jest funkcją kąta natarcia α , kąta ślizgu β , liczby Macha Ma , oraz w ogólnym przypadku prędkości kątowej pochylenia Q , prędkości zmian kąta natarcia $\dot{\alpha}$ i kąta wychylenia steru wysokości δ_H .

Można zatem przyjąć że:

$$C_x = C_x(\alpha, \beta, Ma) + C_x^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_x^Q Q + C_x^{\delta_H} \delta_H \quad (3.3)$$

Można przyjąć, że [1]:

$$C_x^Q = C_x^{\dot{\alpha}} = C_x^{\delta_H} \approx 0 \quad (3.4)$$

zatem $C_x = C_x(\alpha, \beta, Ma)$.

Zależność ta została określona na podstawie badań modelu samolotu w tunelu aerodynamicznym Zakładu Aerodynamiki ITL WAT. W zakresie ściślejszym funkcje $C_x(\alpha, Ma)$ otrzymano na podstawie danych literaturowych. Charakterystyki otrzymane na podstawie badań modelu samolotu zostały przeliczone ze względu na liczbę Reynoldsa, [3,4,5]. Przykładowy przebieg przeliczonej charakterystyki (dla $\beta = 0$) przedstawiono na rys.1.

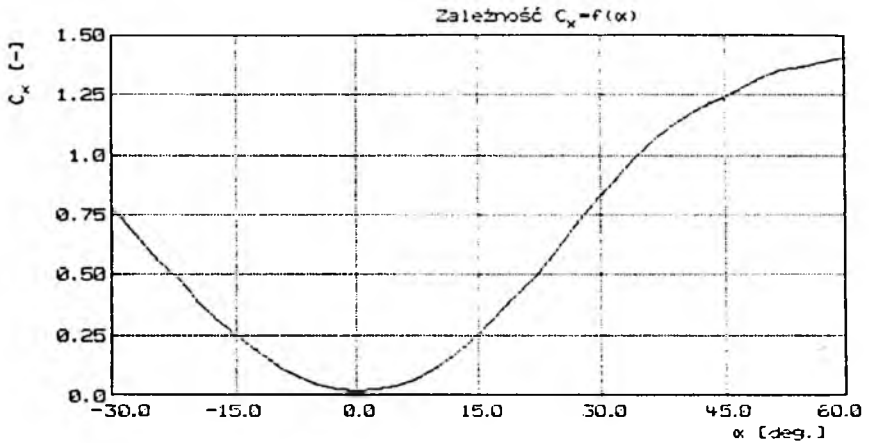
Współczynnik siły bocznej C_y jest funkcją kąta natarcia α , ślizgu β , liczby Macha Ma , prędkości kątowych P , R , oraz kątów wychylenia sterów kierunku δ_V i lotek δ_L :

$$C_y = C_y(\alpha, \beta, Ma, P, R) + C_y^{\delta_V}(\alpha, \beta, Ma) \delta_V + C_y^{\delta_L}(\alpha, \beta, Ma) \delta_L \quad (3.5)$$

Zależność $C_y(\alpha, \beta)$ otrzymano z badań modelu samolotu w tunelu aerodynamicznym ITL WAT.

Wartość współczynnika siły nośnej samolotu jest funkcją kąta natarcia α , kąta ślizgu β , liczby Macha Ma , prędkości kątowej pochylenia Q , prędkości zmian kąta natarcia $d\alpha/dt$, oraz kąta wychylenia steru wysokości δ_H :

$$C_z = C_z(\alpha, \beta, Ma, Q, \dot{\alpha}) + C_{zH}(\alpha, \beta, Ma, \delta_H) \quad (3.6)$$

Rys. 1. $C_x = f(\alpha)$ przeliczone dla samolotu

Przebieg funkcji $C_z(\alpha, \beta)$ przedstawiono w [1]. Przykładowy przebieg tej funkcji dla $\beta = 0$ przedstawiono na rysunku 2.

Wartość współczynnika C_{zH} na zakresie małych kątów natarcia wyznaczono z zależności:

$$C_{zH}(\alpha, \beta, Ma) = C_{zH}^{\alpha H}(\beta, Ma)\alpha_H \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\alpha_H = \alpha + \delta_H - \varepsilon$$

przy czym:

δ_H – kąt wychylenia płytowego statecznika wysokości,

ε – kąt odchylenia strug na usterzeniu poziomym:

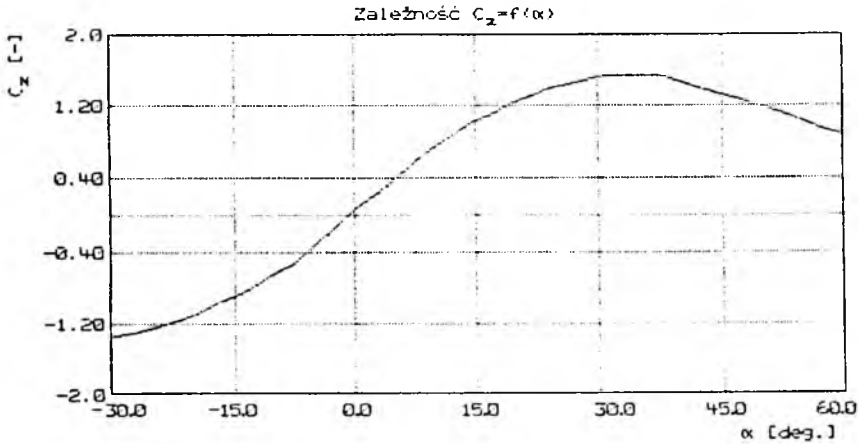
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon^\alpha \alpha \quad (3.8)$$

Na dużych kątach natarcia przyjęto, że funkcja $C_{zH}(\alpha_H)$ zmienia się podobnie jak funkcja $C_z(\alpha)$ dla samolotu [1].

Pochodną $C_z^{\dot{\alpha}}$ obliczono uwzględniając jedynie wpływ usterzenia poziomego [1].

Przyjęto, że współczynnik momentu przychyłającego C_l jest funkcją kąta natarcia α , kąta ślizgu β , liczby Macha Ma , prędkości kątowych P i R , oraz liniową funkcją kątów wychylenia steru kierunku i lotek:

$$C_l = C_l(\beta, P, R, Ma) + C_l^{\delta V} \delta_V + C_l^{\delta L} \delta_L \quad (3.9)$$

Rys. 2. $C_z = f(\alpha)$ przeliczone dla samolotu

Pochodne występujące w (3.8) są funkcjami liczby Ma . Metodyka ich wyznaczania została przedstawiona w [1]. Metodykę wyznaczania $C_l(\beta)$ przedstawiono także w [1].

Metodyka określania wpływu prędkości kątowych P i R na współczynnik momentu przechylającego podano w dalszej części pracy.

Współczynnik momentu odchylającego C_n jest funkcją kąta natarcia α , kąta ślizgu β , prędkości kątowych P , R , liczby Macha Ma , oraz liniową funkcją kątów wychylenia steru wysokości i lotek:

$$C_n = C_n(\alpha, \beta, P, R, Ma) + C_n^{\delta V} \delta V + C_n^{\delta L} \delta L \quad (3.10)$$

Występujące w zależności (3.9) pochodne obliczono wg. algorytmów podanych w [1] na podstawie danych literaturowych. Pochodne te są funkcjami liczby Ma . Zależność $C_n(\alpha, \beta)$ została określona na podstawie badań modelu samolotu w tunelu aerodynamicznym ITL WAT [1].

Ocenę wpływu prędkości kątowych P i R na wartość momentu odchylającego przedstawiono w dalszej części pracy.

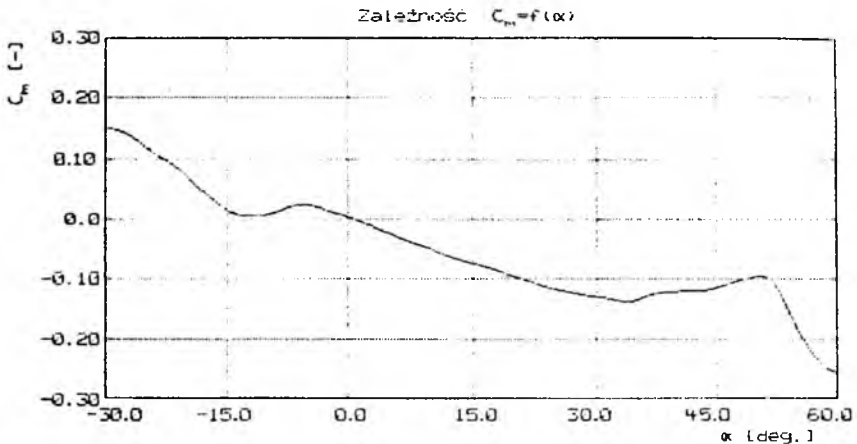
Współczynnik momentu pochylającego można obliczyć z następującej zależności:

$$C_m = C_m(\alpha, \beta, Ma) + C_m^Q(Ma)Q + C_m^{\dot{\alpha}}(Ma)\dot{\alpha} + C_m^{\delta H}(Ma)\delta H \quad (3.11)$$

Wartość poszczególnych pochodnych otrzymano na podstawie danych literatury oraz wyników obliczeń numerycznych i badań aerodynamicznych samolotu, zob. [1]. Wartość współczynnika momentu pochylającego $C_m(\alpha)$ wy-

znaczono na podstawie badań modelu samolotu w tunelu aerodynamicznym ITL WAT.

Wyniki tych badań są przedstawione w [1]. Wyniki badań modelu samolotu w tunelu aerodynamicznym zostały następnie przeliczone dla samolotu ze względu na liczbę Re (wg. algorytmów podanych w [3,4,5]). Przebieg charakterystyki $C_m(\alpha)$ przedstawiono na rys.3. Wpływ liczby Ma na wartość momentu pochylającego określono na podstawie literatury (zob. [1]).



Rys. 3. $C_m = f(\alpha)$ przeliczone dla samolotu

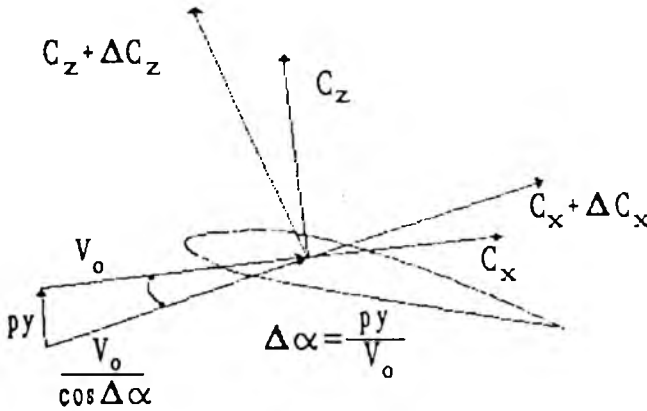
Wpływ prędkości kątowych P , Q i R na wielkość momentów L , M , N obliczono metodą pasową. Na elementarnym pasku $b \times dy$ odległym o y od osi obrotu nastąpi przyrost kąta natarcia o wielkość $\Delta\alpha = Py/V$, zwiększą się również odpowiednio C_z i C_x i będą się one odnosiły do nowego kierunku prędkości [1] (rys.4).

Moment przechylający będzie całką momentów elementarnych pasków:

$$L(P) = -\frac{1}{2}\rho \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{V}{\cos \Delta\alpha} \right)^2 [(C_z + \Delta C_z) \cos \Delta\alpha + (C_x + \Delta C_x) \sin \Delta\alpha] b(y) y dy \quad (3.12)$$

Całkę tą obliczono numerycznie, zastępując ją sumą:

$$L(P) = -\frac{1}{2}\rho \sum_i \left\{ \left(\frac{V}{\cos \Delta\alpha} \right)^2 [(C_z + \Delta C_{z_i}) \cos \Delta\alpha_i + (C_x + \Delta C_{x_i}) \sin \Delta\alpha_i] b(y_i) y_i \Delta y \right\} \quad (3.13)$$



Rys. 4. Składowe prędkości i współczynniki aerodynamicznych na profilu

gdzie $\Delta\alpha_i = Py_i/V$ oraz

y_i - odległość i -tego paska skrzydła od osi obrotu,

Δy - szerokość tego paska,

$b(y_i)$ - cięciwa przekroju skrzydła w odległości y_i od osi obrotu.

Moment $N(P)$ obliczamy podobnie stosując metodę pasową:

$$N(P) = \frac{1}{2}\rho \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{V}{\cos \Delta\alpha}\right)^2 [-(C_z + \Delta C_z) \sin \Delta\alpha + (C_x + \Delta C_x) \cos \Delta\alpha] b(y) y dy \quad (3.14)$$

zastępując całkę sumowaniem, po podziale skrzydła na i elementarnych pasków otrzymamy:

$$N(P) = \frac{1}{2}\rho \sum_i \left\{ \left(\frac{V}{\cos \Delta\alpha}\right)^2 [-(C_z + \Delta C_{z_i}) \cos \Delta\alpha_i + (C_x + \Delta C_{x_i}) \cos \Delta\alpha_i] b(y_i) y_i \Delta y \right\} \quad (3.15)$$

W podobny sposób uwzględnimy wpływ prędkości kątowej R na wielkość momentów L, N .

Uwzględnimy w tym przypadku, że prędkość kątowa odchylenia R powoduje w przekroju odległym o y od osi Oz przyrost prędkości Ry , a wynikający

stąd moment jest równy:

$$L(R) = \frac{1}{2}\rho \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_z(V + Ry)^2 y b(y) dy \quad (3.16)$$

lub zastępując całkowanie sumowaniem:

$$L(R) = \frac{1}{2}\rho \sum_i [C_z(V + Ry_i)^2 y_i b(y_i) \Delta y] \quad (3.17)$$

Wpływ prędkości kątowej R na wielkość momentu odchylającego skrzydła wyznaczmy w analogiczny sposób:

$$N(R) = -\frac{1}{2}\rho \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_x(V + Ry)^2 y b(y) dy \quad (3.18)$$

lub zastępując całkowanie sumowaniem:

$$N(R) = -\frac{1}{2}\rho \sum_i [C_x(V + Ry_i)^2 y_i b(y_i) \Delta y] \quad (3.19)$$

Siły i momenty aerodynamiczne działające na samolot wyznaczono numerycznie wykorzystując podprogram SM wykorzystywany do obliczeń pochodnych aerodynamicznych [1,4].

4. Wpływ silników na dynamikę ruchu samolotu

Siły pochodzące od napedów stanowią sumy ciągu poszczególnych silników. Odpowiednie składowe na osie prędkościowego układu współrzędnych są sumami składowych ciągu poszczególnych silników na osie tego układu współrzędnych.

Moment sił pochodzący od ciągu silników i efektów giroskopowych ma postać:

$$M^T = \sum_i M_i^T = \sum_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{T}_i + J_{T_i} \omega_{T_i} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (4.1)$$

gdzie:

- \mathbf{r}_i – wektor łączący środek masy samolotu z punktem przyłożenia ciągu silnika,
- \mathbf{T}_i – wektor ciągu silnika,
- J_{Ti} – biegunowy moment bezwładności silnika,
- $\boldsymbol{\omega}_{Ti}$ – wektor prędkości kątowej silnika,
- $\boldsymbol{\Omega}$ – wektor prędkości kątowej samolotu.

5. Analiza wybranych figur akrobacji lotniczej

Modele fizyczny i matematyczny samolotu zastosowane do numerycznej analizy przestrzennego, niustalonego ruchu samolotu zostały zaprezentowane w [1].

Badania figur akrobacji lotniczej przeprowadzono na przykładzie beczki sterowanej oraz charakterystycznej figury wykonywanej na zakresie nadkrytycznych kątów natarcia – ”Kobry”.

5.1. Symulacja beczki sterowanej

Do symulacji beczki przyjęto prawo sterowania, które jest dobrym przybliżeniem sposobu sterowania samolotem stosowanego w praktyce przez pilotów. Zmieniając parametry tego prawa można otrzymać rodzinę torów beczek, z której można wyznaczyć tory spełniające określone kryteria.

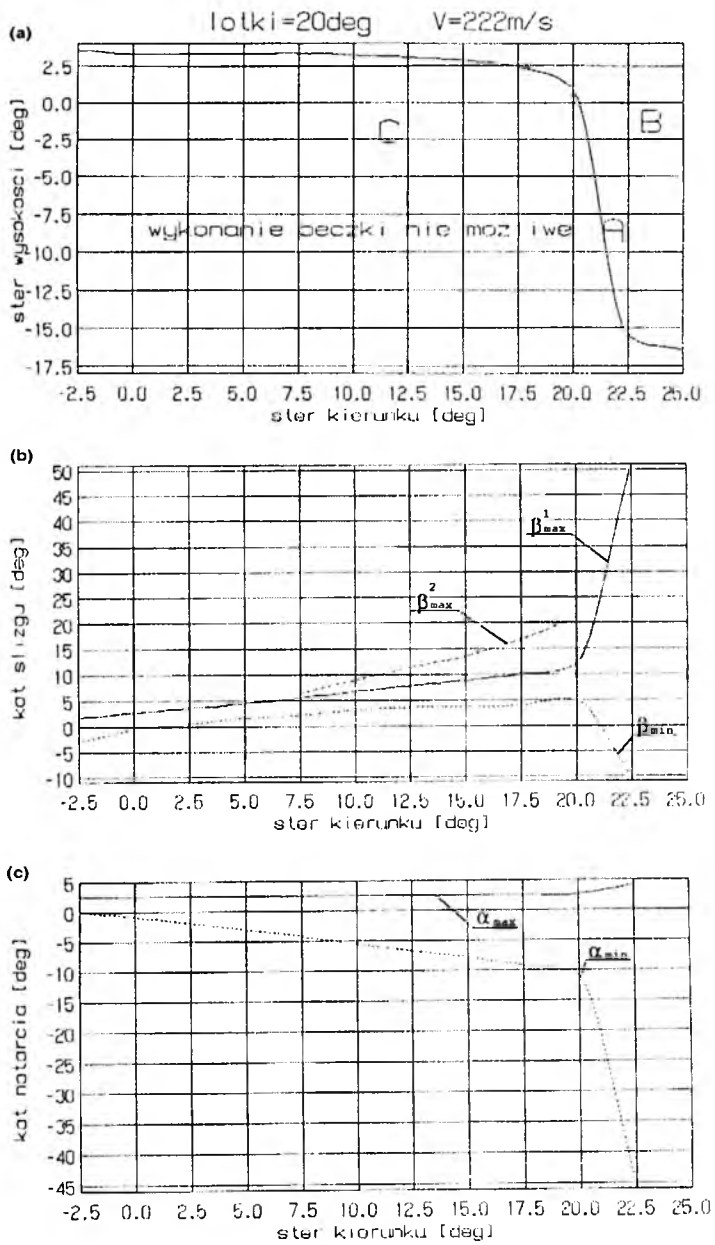
Przyjęto, że w chwili $t_0 = 0$ samolot wykonuje ustalony lot poziomy z prędkością V_0 . Samolot jest sterowany za pomocą ciągu T , kąta wychylenia steru wysokości, steru kierunku i lotek. Wychylenia steru wysokości zależą od kąta pochylenia i kąta przechylenia samolotu:

1. $\Theta < 15^\circ$ $\delta_{II} = -1.5^\circ \sin(90\Theta/15) + \delta_{IIrówn}$
2. $\Theta > 15^\circ$ $\delta_{II} = -1.5^\circ + \Delta\delta_{II} \sin(0.5\Phi)$

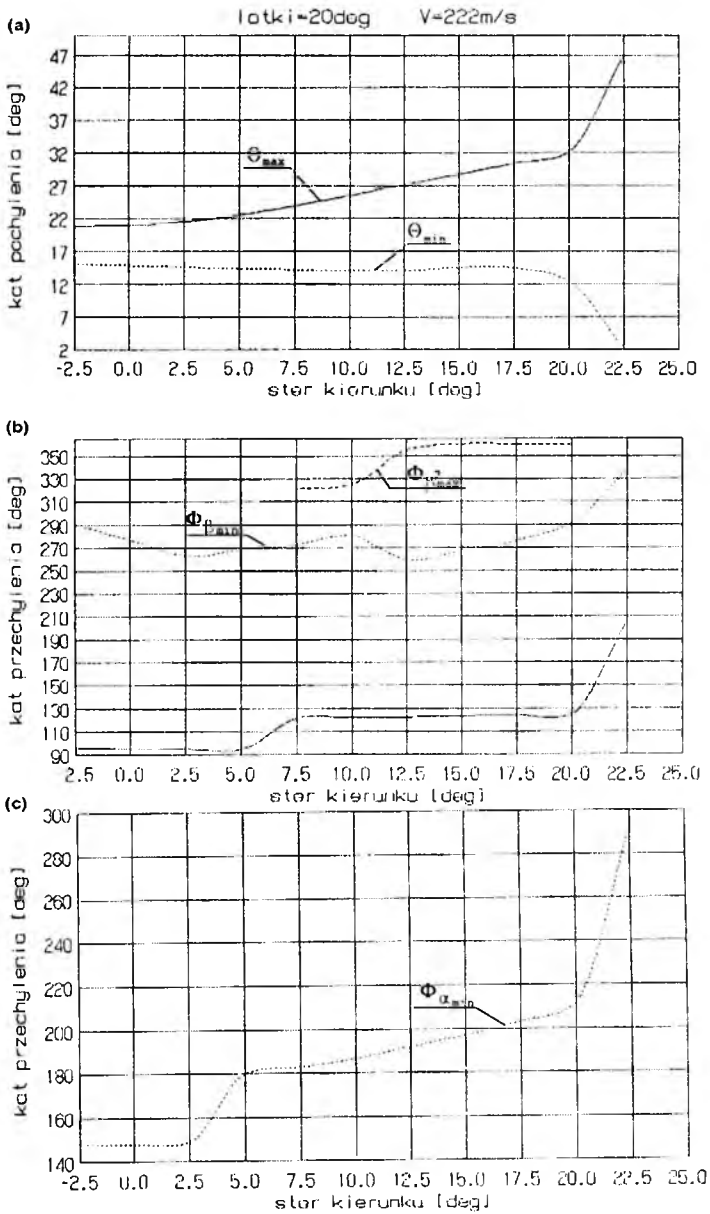
Kąt wychylenia lotek zależy od kąta przechylenia samolotu i narasta od 0 dla $\Phi = 0^\circ$ do wartości maksymalnej osiąganej przy $\Phi = 45^\circ$, potem jest stały (do wartości $\Phi = 330^\circ$), po czym maleje do zera (dla $\Phi = 360^\circ$).

Kąt wychylenia steru kierunku zależy od kąta przechylenia samolotu i wynosi:

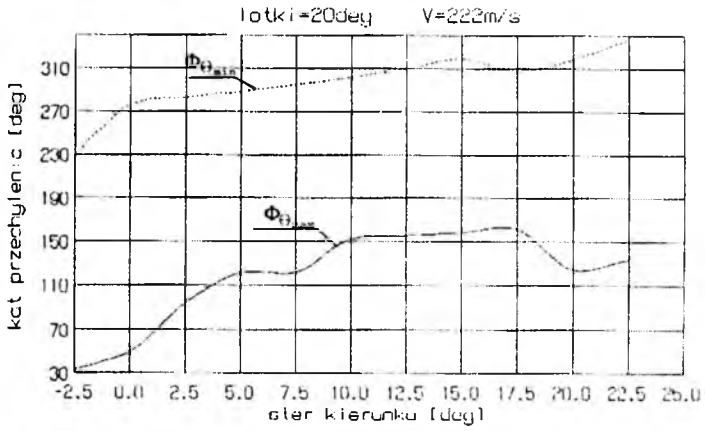
$$\delta_v = -\Delta\delta_v \sin \Phi$$



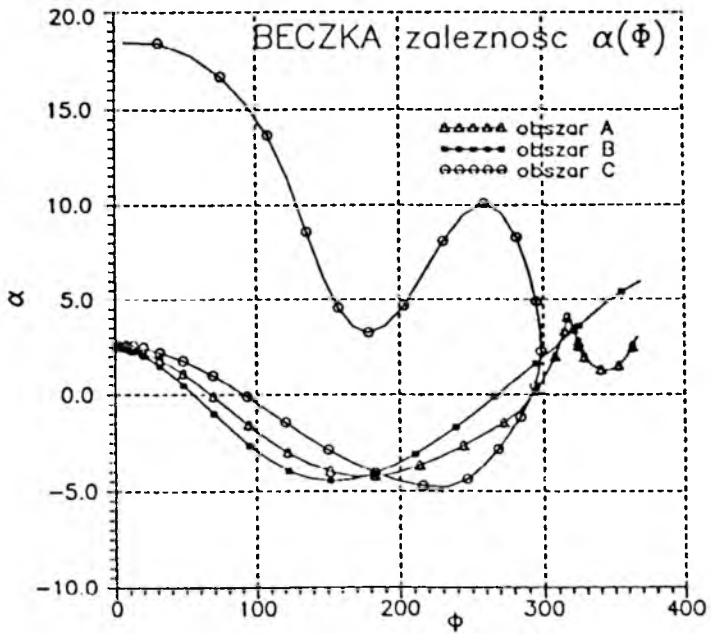
Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 8.

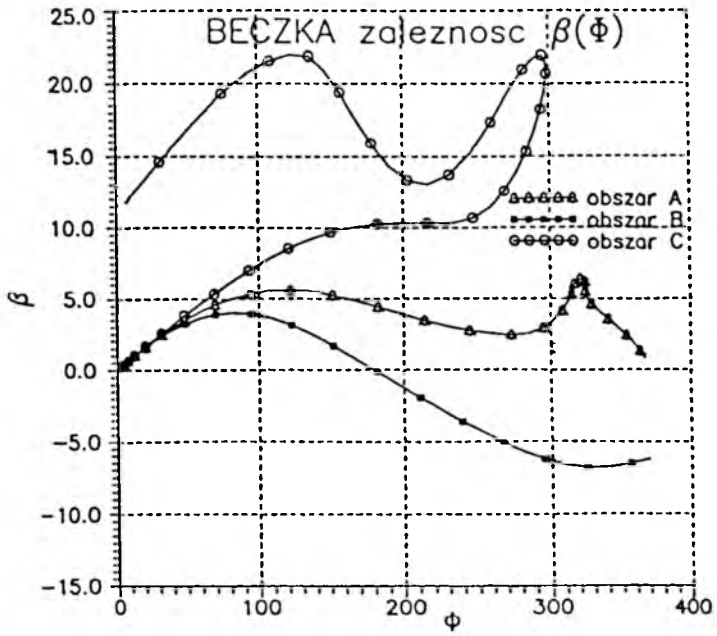
W czasie trwania manewru ciąg jest stały.

Wyniki obliczeń symulacyjnych beczki sterowanej przedstawiono na rys.5 ÷ rys.12.

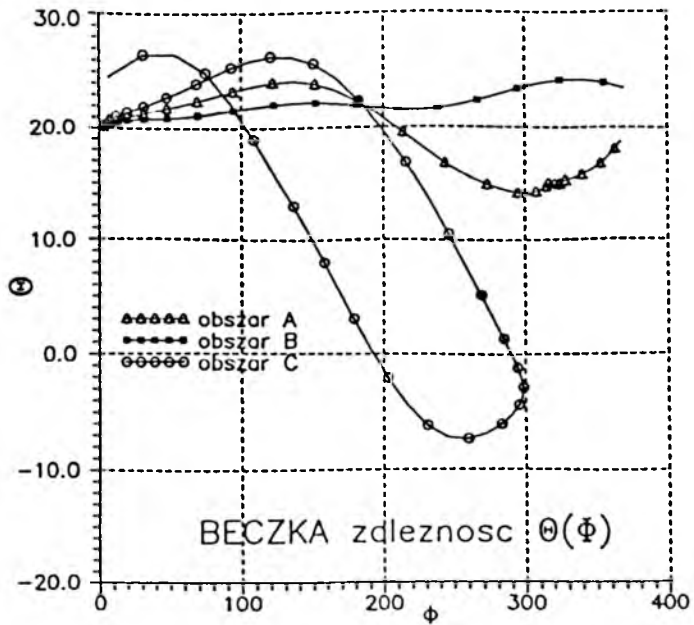
Rysunki 5 ÷ 7 obrazują wpływ wielkości wychylenia sterów na wielkość maksymalnych i minimalnych wartości wybranych parametrów lotu, oraz przedstawiają obszary dopuszczalnych sterowań, przy których wykonywana jest beczka sterowana (rys.5a). Obszar poniżej krzywej na rys.5a przedstawia takie kombinacje wychyleń sterów wysokości i kierunku, przy których wykonanie beczki sterowanej jest niemożliwe. Kombinacje wychyleń sterów kierunku i lotek leżące na krzywej z rys.5a umożliwiają wykonanie beczki sterowanej. Samolot wykona także beczkę, gdy wychylenia sterów będą leżały powyżej tej krzywej. Obszar sterowań, dla których samolot nie wykona beczki nazwiemy obszarem *C*. Obszar sterowań dających poprawną figurę (leżących na krzywej) nazwany został obszarem *A*. Obszar leżący nad krzywą, nazwany został obszarem *B*. Sterowania z obszaru *B* także umożliwiają wykonanie beczki.

Rys.5b przedstawia maksymalne i minimalne wartości kąta ślizgu osiągnane w beczce sterowanej w zależności od kąta wychylenia steru kierunku. Rys.5c przedstawia zależność minimalnej i maksymalnej wartości kąta natarcia od kąta wychylenia steru kierunku, natomiast rys.6a obrazuje zależność zmian kąta pochylenia samolotu w od kąta wychylenia steru kierunku. Widać, że kąt ślizgu zmienia się w przedziale $50^\circ \div -10^\circ$, kąt natarcia zmienia się w przedziale $2.5^\circ \div -15^\circ$, zaś kąt pochylenia samolotu zmienia się w granicach $2^\circ \div 47^\circ$.

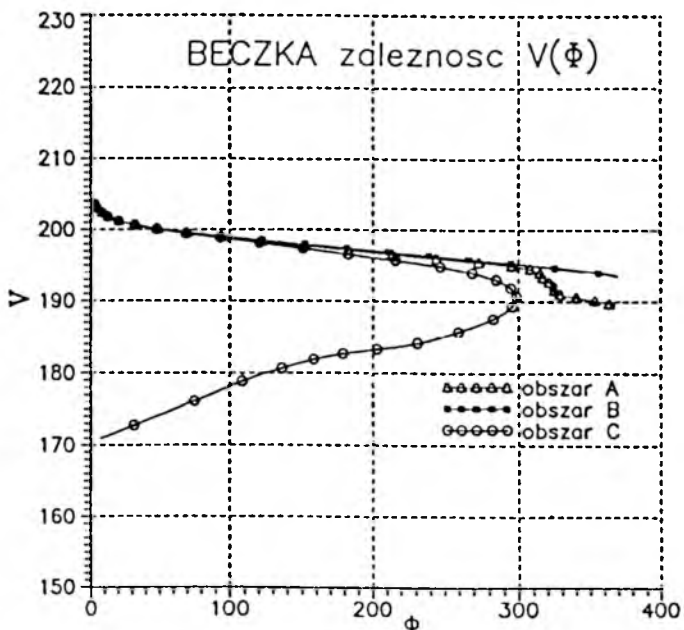
Następne rysunki pokazują przy jakiej wartości kąta przechylenia, w zależności od kąta wychylenia steru kierunku osiągną maksymalne i minimalne wartości: – kąt ślizgu (rys.6b), kąt natarcia (rys.6c), kąt pochylenia (rys.7). Rysunki 8 ÷ 10 przedstawiają zmiany kąta natarcia, ślizgu, pochylenia samolotu w zależności od kąta przechylenia dla beczek z obszaru sterowań *A*, *B* i *C*. Widać, że najmniejsze zmiany parametrów w czasie wykonywania beczki występują dla sterowań z obszaru *A* (leżących na linii – rys.5a). Rys.11 obrazuje zmiany prędkości w zależności od kąta przechylenia, natomiast rys.12 przedstawia zależność "zejścia z kursu" w czasie wykonywania beczki sterowanej. Dla sterowań *B* samolot w czasie wykonywania beczki praktycznie nie schodzi z kursu.



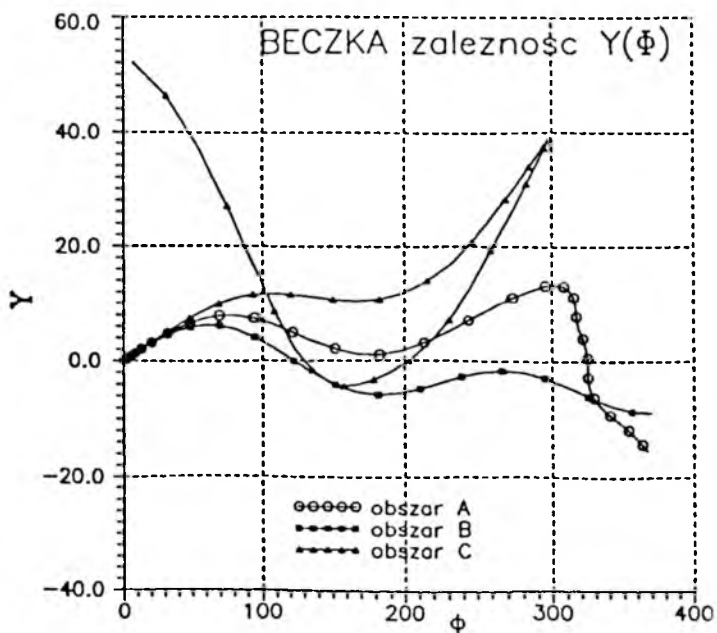
Rys. 9.



Rys. 10.



Rys. 11.

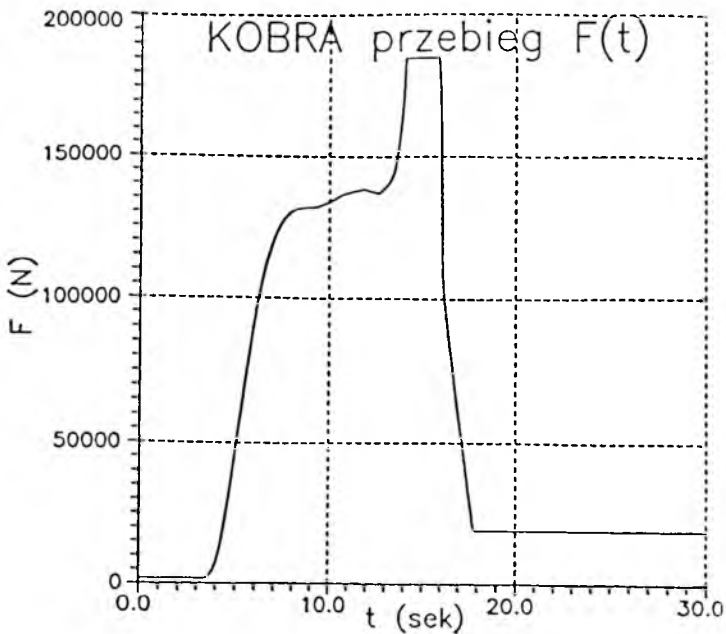


Rys. 12.

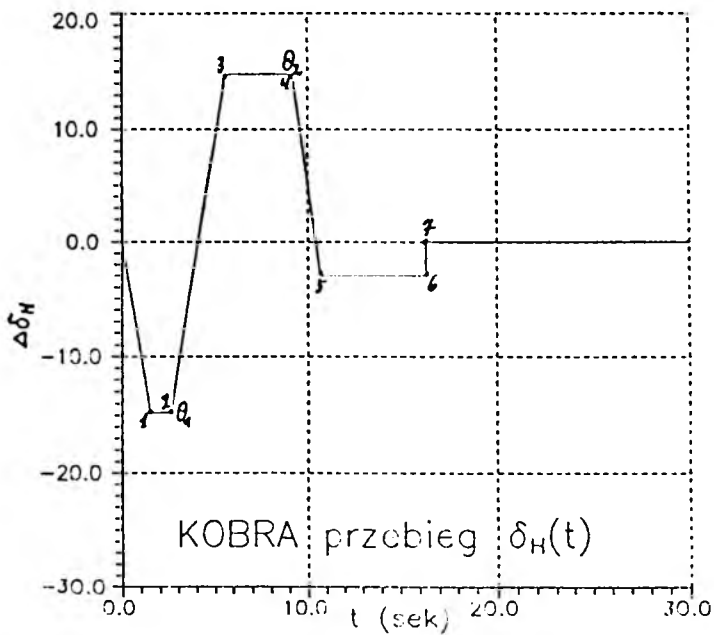
5.2. Symulacja "Kobry"

Rysunki 13 ÷ 19 przedstawiają przykładowo przebieg parametrów lotu w czasie dla figury "Kobra".

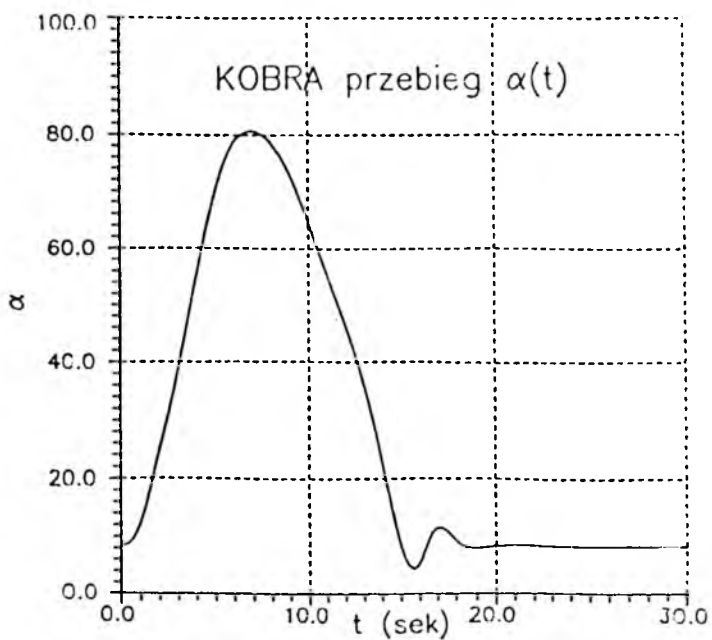
Rys.13 pokazuje jak musi zmieniać się ciąg samolotu, zaś rys.14 obrazuje wymagany w czasie trwania figury przebieg zmian kąta wychylenia steru wysokości. Pozostałe stery muszą być tak wychylane by równoważone były momenty odchylający i przechylający. Rys.15 przedstawia zmianę kąta natarcia w trakcie manewru. W symulowanej "Kobrze" maksymalna wartość tego kąta osiąga 80° . Badana "Kobra" wykonana była przy niewielkich współczynnikach przeciążenia ($n_z < 2$) – rys.16. Rys.17 przedstawia zmiany kąta pochylenia samolotu w funkcji czasu, rys.18 pokazuje jak w funkcji czasu zmienia się prędkość kątowna pochylenia samolotu, zaś rys.19 przedstawia zmiany prędkości lotu. W krytycznym momencie figury prędkość spada poniżej 40 m/s.



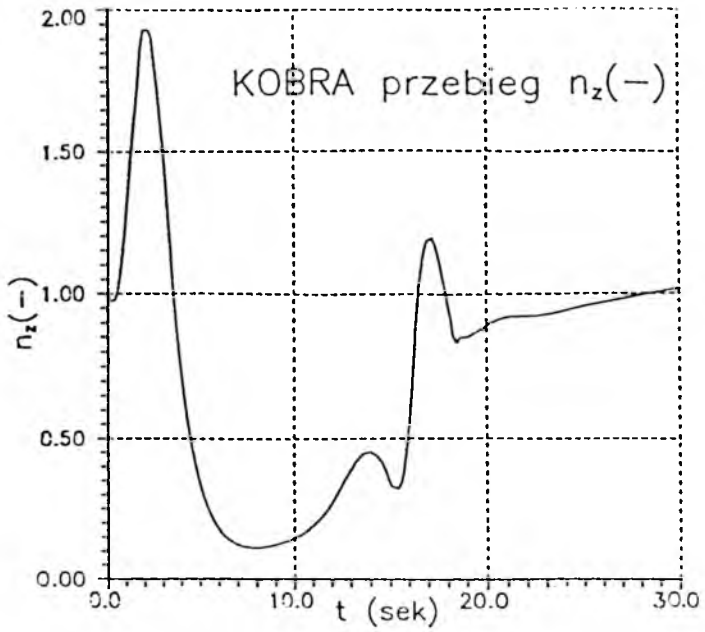
Rys. 13.



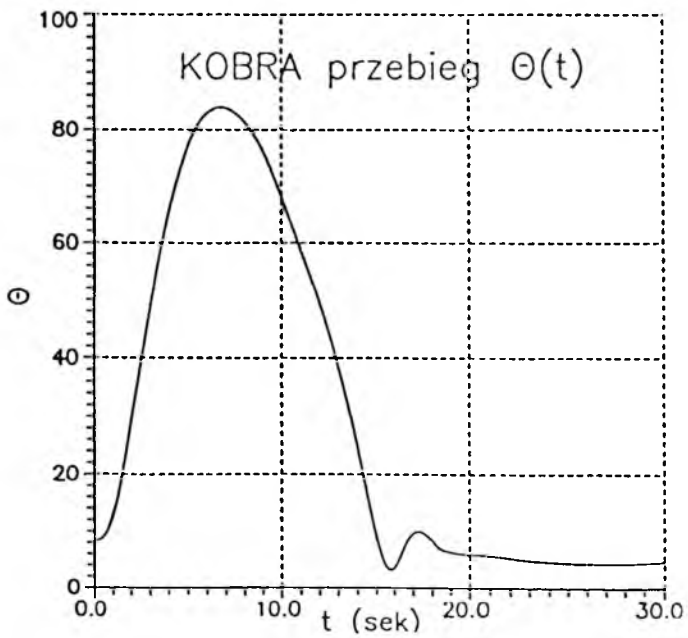
Rys. 14.



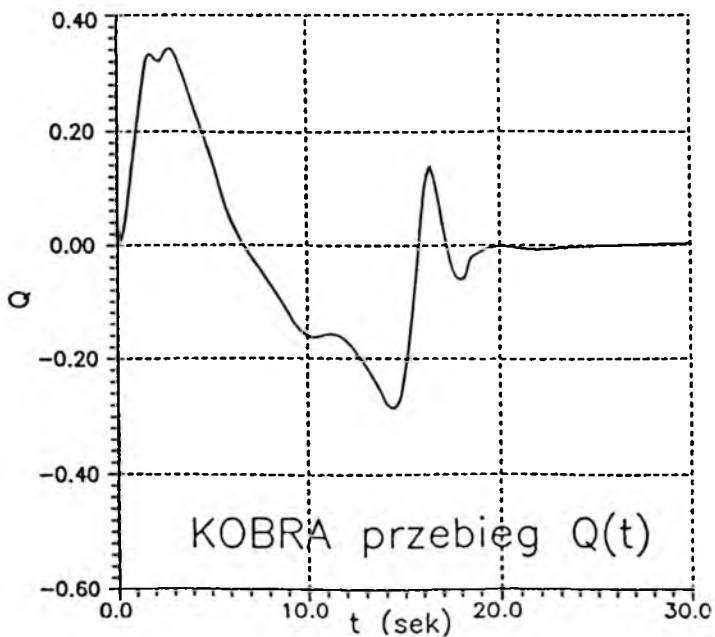
Rys. 15.



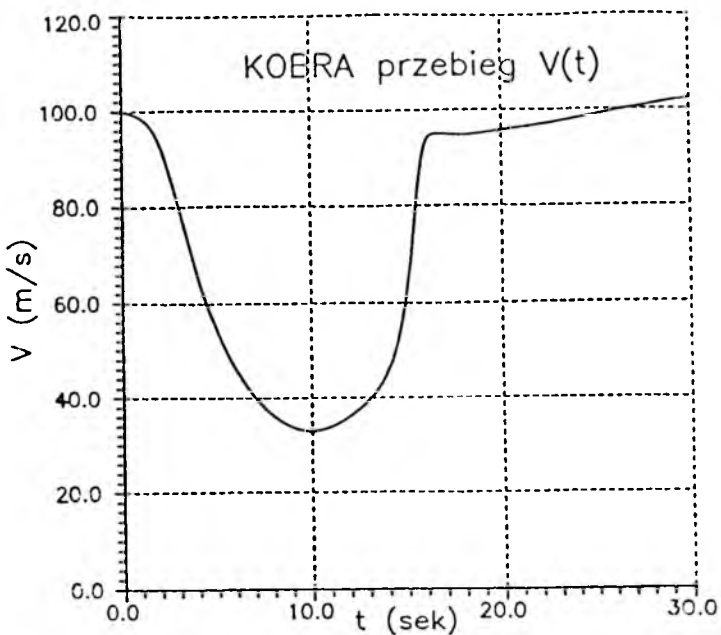
Rys. 16.



Rys. 17.



Rys. 18.



Rys. 19.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika również, że na przykład, gdy prędkość początkowa manewru "Kobra" jest równa $V = 180$ m/s, to maksymalny kąt pochYLENIA samolotu $\Theta \approx 122^\circ$, przeciążenie $n_{zmax} = 4.6$, a maksymalny kąt natarcia wynosi $\alpha = 82^\circ$.

Literatura

1. *Analiza osobliwości dynamiki lotu i konstrukcji samolotu MiG 29*, Sprawozdania z pracy nr 001-WAT-91 (9-91-STL-WAT), *Kompleksowa analiza systemu eksploatacji samolotu MiG 29*, etapy I-VII, WAT, Warszawa 1991, 1994
2. *SAU-451-04 Rukowodstvo po tehničeskoj ekspluatacji*, 1988
3. POPE A., *Low Speed Wind Tunnel Testing*, J. Willey & Sons, 1966
4. GORLIN S., *Aerodinamičeskie izmiercnija*, Izd. Nauka, Moskwa 1964
5. WEEKS D., *An Investigation of Scale Effects on the Transonic Flow over Swept Wings*, Part 1,2, R & M No.3812, London 1976, 1977

Analysis of Spatial Motion Dynamics of a Strake Wing Aircraft

Summary

Dynamics of spatial controlled motion of an aircraft with strake wings is considered for a broad range of angles of attack.

The nonlinear equations of spatial motion are applied, where the force equations are introduced in wind axes, while the moment equations – in body axes.

Aerodynamic characteristics of the aircraft are established making use of the results of wind tunnel investigations and theoretical calculations.

Results of numerical modelling of the dynamics of two aerobatic manoeuvres are presented; that is, the controlled (slow) roll and cobra manoeuvres at high angles of attack are investigated.

ANALIZA DRGAŃ PODWÓJNEGO WIRNIKA LOTNICZEGO SILNIKA TURBINOWEGO

ZBIGNIEW DŻYGADŁO

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

JACEK WARCHULSKI

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa

Rozpatrzono drgania giętne podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego stosując metodę elementów skończonych.

Model dyskretny układu opracowano przy założeniu, że wentylator, sprężarka i turbiny są sztywnymi zespołami, natomiast wały obu wirników są odkształcalnymi konstrukcjami.

Przeprowadzono analizę numeryczną wpływu parametrów zespołu dwuwirnikowego na drgania własne, prędkości krytyczne i drgania wymuszone układu.

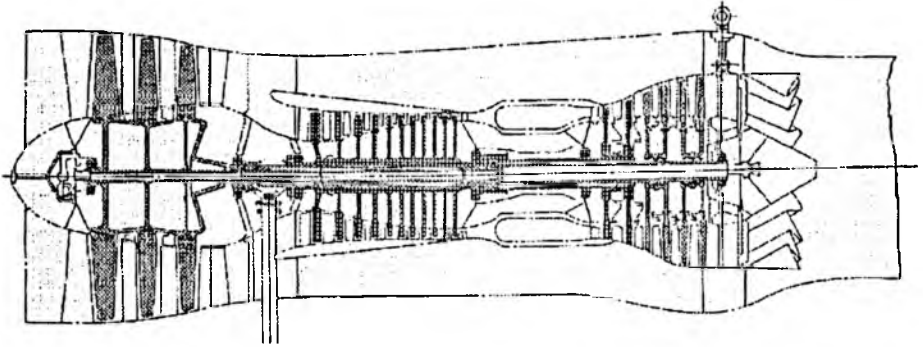
1. Wstęp

Analizę drgań giętych podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego z zastosowaniem techniki elementów skończonych [6] przedstawiono w pracach [3] i [4], w których rozpatrywano model silnika składający się z dwu wirników oraz korpusu, które są ciałami osiowo-symetrycznymi o konstrukcji powłokowo-tarczowej. Przemieszczenia obu wirników były sprzężone przez odkształcalne podpory połączone z korpusem. Sztywnościowy model zdyskretyzowanego układu zbudowano za pomocą pierścieniowych elementów w postaci powłok stożkowych o zmiennej grubości. Dyskretny model masowy składał się ze skupionych mas oraz masowych momentów bezwładności średnicowych i osiowych poszczególnych elementów. Równania ruchu wyznaczono metodą sił [2].

W analizie przedstawionej w niniejszej pracy oparto się na układzie konstrukcyjnym silnika D-30KU [5].

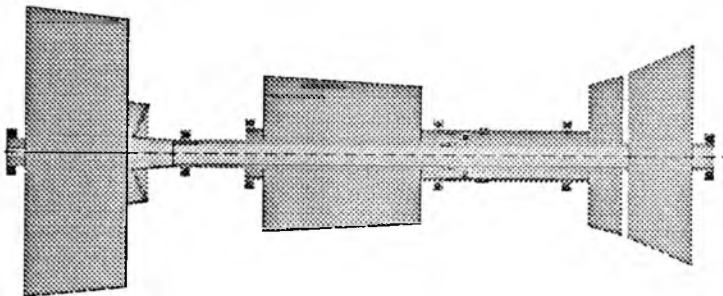
W modelu fizycznym (rys.1) wirnik niskiego ciśnienia składa się z trójstopniowego wentylatora połączonego wałem z czterostopniową turbiną tego

wirnika. Wirnik wysokiego ciśnienia zawiera jedenastostopniową sprężarkę połączoną wałem z dwustopniową turbiną. Oba wirniki są ułożyskowane w korpusie silnika na sześciu podporach oraz sprzęgnięte między sobą przez jedną podporę-łożysko. Poszczególne odcinki wałów są łączone za pomocą połączeń wielowypustowych.



Rys. 1. Model fizyczny zespołu dwuwirnikowego

W modelu dyskretnym (rys.2) założono, że wentylator, sprężarka i turbiny są sztywnymi zespołami, natomiast wały obu wirników są konstrukcjami odkształcalnymi, które będą aproksymowane za pomocą odkształcalnych elementów skończonych, wykorzystując model belki typu Timoshenki [1]. Zakłada się, że wszystkie podpory obu wirników są odkształcalne i mają właściwości sprężysto-tłumiące. Połączenia wielowypustowe modelowane są w postaci przegubów, także o zmiennej sztywności.



Rys. 2. Model dyskretny zespołu dwuwirnikowego

Drgania podwójnego wirnika rozpatrzono w nieruchomym układzie współrzędnych. Wyznaczono równania równowagi dynamicznej odkształcalnych

oraz sztywnych elementów skończonych a następnie złożono je w równania całej struktury wirników.

Przeprowadzono szereg obliczeń umożliwiających analizę wpływu konfiguracji zespołu dwuwirnikowego oraz podatności podpór na charakter jego drgań autonomicznych i wymuszonych (por. [5]).

2. Założenia przyjęte do budowy modelu. Zależności wyjściowe

Założenia przyjęte do budowy modelu [5]:

- wirniki składają się ze skończonych liczb elementów o krawędziach prostopadłych do osi sztywności,
- wirniki są ciałami osiowosymetrycznymi o osi symetrii Ox ,
- rozpatrywane są małe drgania, opisane liniowymi równaniami ruchu,
- przyjęto liniową zależność charakterystyki materiału wirników (naprężenie-odkształcenie: $\sigma = f(\varepsilon)$),
- sprzężenie obu wirników zachodzi przez odkształcalne podpory, w których może występować także tłumienie,
- sprężystość i tłumienie wszystkich podpór ma charakter liniowy.

Przyjęto następujące związki między odkształceniami a siłami wewnętrznymi dla belki Timoshenki:

$$\begin{aligned} M_y &= -EJ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & M_z &= -EJ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ Q_y &= kGA\gamma_y & Q_z &= kGA\gamma_z \end{aligned} \quad (2.1)$$

oraz związek określający wielkość kąta ugięcia:

$$\frac{\partial U_y}{\partial x} = \varphi_y + \gamma_y \quad \frac{\partial U_z}{\partial x} = \varphi_z + \gamma_z \quad (2.2)$$

gdzie:

- U_y, U_z – przemieszczenia osi przekroju elementu,
 M_y, M_z – momenty zginające w przekroju elementu,
 Q_y, Q_z – siły tnące w przekroju elementu,
 φ_y, φ_z – kąty obrotu przekroju poprzecznego odkształconego elementu,
 γ_y, γ_z – kąty odkształcenia postaciowego,
 E, G – moduły sprężystości podłużnej oraz postaciowej (poprzecznej),
 J – moment bezwładności przekroju elementu względem średnicy,
 A – pole przekroju poprzecznego elementu,
 k – współczynnik uwzględniający nierównomierność rozkładu naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym (współczynnik ścinania).

Założono, w ogólnym przypadku, zmianę sztywności na zginanie i ścinanie wzdłuż osi elementu, tzn.:

$$EJ = EJ(x) \qquad kGA = kGA(x) \qquad (2.3)$$

Energia odkształcenia sprężystego elementu wyraża się wzorem:

$$V_{syj} = \frac{1}{2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} EJ \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} kGA \gamma_y^2 dx \qquad (2.4)$$

$$V_{szj} = \frac{1}{2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} EJ \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} kGA \gamma_z^2 dx$$

Siły bezwładności elementu o jednostkowej długości określają zależności:

$$P_y = -m \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \qquad P_z = -m \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \qquad (2.5)$$

Momenty sił bezwładności M_y i M_z działających na wirnik określają zależności:

— momenty bezwładności obrotu przekrojów:

$$M_y^1 = -I_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \qquad M_z^1 = -I_1 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \qquad (2.6)$$

— momenty giroskopowe:

$$M_y^0 = -I_0\Omega \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} \qquad M_z^0 = I_0\Omega \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \quad (2.7)$$

Zewnętrzne obciążenie poprzeczne wynikające z niewyważenia wirnika określają zależności:

$$f_y = m\epsilon\Omega^2 \cos \Omega t \qquad f_z = m\epsilon\Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.8)$$

Równania równowagi dynamicznej elementu otrzymuje się korzystając z zasady prac wirtualnych, zgodnie z którą praca sił wewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych równa jest pracy sił zewnętrznych, masowych i krawędziowych na tych przemieszczeniach, tzn:

$$\delta V_{sj} = \delta W_{fj} + \delta W_{mj} + \delta W_{kj} \quad (2.9)$$

gdzie:

- δV_{sj} – praca sił wewnętrznych równa wariacji energii sprężystej odkształcenia elementu,
- $\delta W_{fj}, \delta W_{mj}, \delta W_{kj}$ – odpowiednio: praca sił zewnętrznych, masowych i krawędziowych na przemieszczeniach wirtualnych.

3. Macierze odkształcalnego elementu skończonego wirnika

3.1. Funkcje przemieszczenia odkształcalnego elementu

Jako współrzędne uogólnione przyjęto ugięcia oraz kąty obrotu przekrojów poprzecznych i odkształcenia postaciowego.

Przemieszczenia w płaszczyźnie Oxy założono w postaci:

$$\begin{aligned} U_{yj} &= U_{yj}(x, t) = u_{yj}(x)U_{yj}(t) \\ \varphi_{yj} &= \varphi_{yj}(x, t) = \varphi_{yj}(x)U_{yj}(t) \\ \gamma_{yj} &= \gamma_{yj}(x, t) = \gamma_{yj}(x)U_{yj}(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wektor uogólnionych przemieszczeń krawędzi elementu wprowadza się w postaci:

$$\mathbf{U}_{yj}(t) = [\bar{u}_{yj-1}, \varphi_{yj-1}, \gamma_{yj-1}, u_{yj}, \varphi_{yj}, \gamma_{yj}]^T \quad (3.2)$$

gdzie L_{od} – długość odniesieniowa oraz:

$$\bar{u}_{yj-1} = \frac{u_{yj-1}}{L_{od}} \quad u_{yj} = \frac{u_{yj}}{L_{od}}$$

Funkcje zmiennej x przyjęto w formie wielomianów i przemieszczenia w płaszczyźnie Oxy przedstawiono w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{yj}(x) &= L_{od} \mathbf{a}(\xi) \\ \varphi_{yj}(x) &= \mathbf{b}(\xi) \\ \gamma_{yj}(x) &= \mathbf{c}(\xi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie $\xi = (x - x_{j-1})/l_j$ oraz $\mathbf{a}(\xi)$, $\mathbf{b}(\xi)$ i $\mathbf{c}(\xi)$ są macierzami wierszowymi określającymi postać przemieszczeń osi elementu [5].

Stąd przemieszczenia w płaszczyźnie Oxy otrzymuje się w postaci:

$$\begin{aligned} U_{yj}(x, t) &= L_{od} \mathbf{a}(\xi) U_{yj}(t) \\ \varphi_{yj}(x, t) &= \mathbf{b}(\xi) U_{yj}(t) \\ \gamma_{yj}(x, t) &= \mathbf{c}(\xi) U_{yj}(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Analogiczną postać mają przemieszczenia w płaszczyźnie Oxz .

Korzystając z zasady prac wirtualnych wyznaczono dla elementu odkształcalnego [5]:

— macierz sztywności elementu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_j &= \mathbf{K}_j^{(1)} + \mathbf{K}_j^{(2)} \\ \mathbf{K}_j^{(1)} &= \frac{1}{l_j} E \int_0^1 J(\xi l_j + x_{j-1}) \frac{d}{d\xi} [\mathbf{b}(\xi)]^T \frac{d}{d\xi} \mathbf{b}(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_j^{(2)} &= l_j G \int_0^1 k_A(\xi l_j + x_{j-1}) [\mathbf{c}(\xi)]^T \mathbf{c}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.5)$$

— macierz mas:

$$\mathbf{m}_j = l_j L_{od}^2 \int_0^1 m(\xi l_j + x_{j-1}) [\mathbf{a}(\xi)]^T \mathbf{a}(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

— macierz bezwładności obrotu elementu:

$$\mathbf{I}_{1j} = l_j \int_0^1 I_1(\xi l_j + x_{j-1}) [\mathbf{b}(\xi)]^T \mathbf{b}(\xi) d\xi \quad (3.7)$$

— macierz momentów giroskopowych:

$$\mathbf{I}_{0j} = l_j \int_0^1 I_0(\xi l_j + x_{j-1}) [\mathbf{b}(\xi)]^\top \mathbf{b}(\xi) d\xi \quad (3.8)$$

— wektor uogólnionych sił krawędziowych:

$$\mathbf{R}_{yj} = [-Q_{yj-1} L_{od}, M_{yj-1}, 0, Q_{yj} L_{od}, -M_{yj}, 0]^\top \quad (3.9)$$

$$\mathbf{R}_{zj} = [-Q_{zj-1} L_{od}, M_{zj-1}, 0, Q_{zj} L_{od}, -M_{zj}, 0]^\top$$

— wektor obciążeń poprzecznych:

$$\mathbf{F}_{1j} = l_j L_{od} \Omega^2 \int_0^1 m(\xi l_j + x_{j-1}) c(\xi l_j + x_{j-1}) [\mathbf{a}(\xi)]^\top d\xi \quad (3.10)$$

3.2. Równania równowagi dynamicznej odkształcalnego elementu skończonego

Równania równowagi dynamicznej otrzymano porównując pracę sił wewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych z pracą sił zewnętrznych, masowych i krawędziowych na tych przemieszczeniach. Otrzymano:

$$\mathbf{K}_j \mathbf{U}_{yj} + (\mathbf{m}_j + \mathbf{I}_{1j}) \ddot{\mathbf{U}}_{yj} + \Omega \mathbf{I}_{0j} \dot{\mathbf{U}}_{zj} = \mathbf{R}_{yj} + \mathbf{F}_{1j} \cos \Omega t \quad (3.11)$$

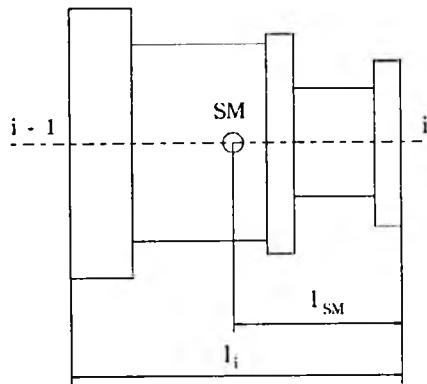
$$\mathbf{K}_j \mathbf{U}_{zj} + (\mathbf{m}_j + \mathbf{I}_{1j}) \ddot{\mathbf{U}}_{zj} - \Omega \mathbf{I}_{0j} \dot{\mathbf{U}}_{yj} = \mathbf{R}_{zj} + \mathbf{F}_{1j} \sin \Omega t$$

4. Macierze sztywnego elementu skończonego wirnika

4.1. Założenia i warunki sprzęgające

Zależności między kątami obrotu przekrojów i odkształcenia postaciowego przedstawiają związki:

$$\begin{aligned} \varphi_y(x) = \varphi_{yi-1} = \varphi_{yi} & & \gamma_y(x) = \gamma_{yi-1} = \gamma_{yi} = 0 \\ \varphi_z(x) = \varphi_{zi-1} = \varphi_{zi} & & \gamma_z(x) = \gamma_{zi-1} = \gamma_{zi} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$



Rys. 3. Model sztywnego elementu skończonego

Stąd związki między przemieszczeniami krawędzi elementu mają postać:

$$u_{yi-1} = u_{yi} - \varphi_{yi} l_i \quad (4.2)$$

$$u_{zi-1} = u_{zi} - \varphi_{zi} l_i$$

Powyższe zależności stanowią kinematyczne warunki sprzęgające element sztywny z odkształcalnymi.

Korzystając z zasady prac wirtualnych, dla sztywnego elementu skończonego wyznaczono [5]:

— macierz masy:

$$\mathbf{M}_{szi} = [\mathbf{a}_{szi}]^T m_{sz} \mathbf{a}_{szi} L_{od}^2 \quad (4.3)$$

— macierz bezwładności obrotu przekroju:

$$\mathbf{l}_{1szi} = [\mathbf{b}_{szi}]^T I_{1sz} \mathbf{b}_{szi} \quad (4.4)$$

— macierz momentów giroskopowych:

$$\mathbf{l}_{0szi} = [\mathbf{b}_{szi}]^T I_{0sz} \mathbf{b}_{szi} \quad (4.5)$$

— wektor obciążenia poprzecznego:

$$\mathbf{F}_{szi} = L_{od} [\mathbf{a}_{szi}]^T m_{sz} \mathbf{e}_{sz} \Omega^2 \quad (4.6)$$

gdzie \mathbf{a}_{szi} , \mathbf{b}_{szi} , m_{sz} , I_{1sz} , I_{0sz} , \mathbf{e}_{sz} — macierze przemieszczeń oraz parametry sztywnego elementu skończonego [5].

4.2. Równania równowagi dynamicznej

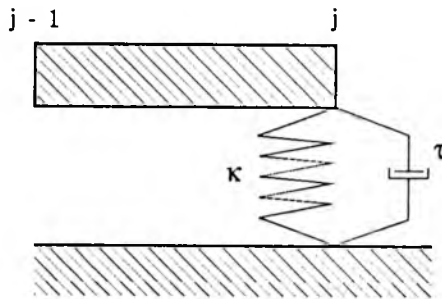
Równania równowagi dynamicznej sztywnego elementu skończonego mają postać:

$$\begin{aligned} (M_{szi} + I_{1szi})\ddot{U}_{yi} + \Omega I_{0szi}\dot{U}_{zi} &= F_{szi} \cos \Omega t + R_{yi} \\ (M_{szi} + I_{1szi})\ddot{U}_{zi} - \Omega I_{0szi}\dot{U}_{yi} &= F_{szi} \sin \Omega t + R_{zi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

5. Warunki brzegowe

5.1. Podpory kałużbowe

Zespół dwuwirnikowy podparty jest na sprężysto-tłumiących podporach. Przyjęto, iż charakterystyki sprężystości i tłumienia podpór są liniowe. Współczynniki sztywności podpór oznacza się przez κ , współczynniki tłumienia przez τ .



Rys. 4. Model podpory sprężysto-tłumiącej

Stosując zasadę prac wirtualnych, dla sprężysto-tłumiącej podpory określa się [5]:

— macierze sztywności podpory:

$$\begin{aligned} \kappa_{yj} &= \kappa_y [\mathbf{a}(\xi)]^T \mathbf{a}(\xi) \\ \kappa_{zj} &= \kappa_z [\mathbf{a}(\xi)]^T \mathbf{a}(\xi) \end{aligned} \quad (5.1)$$

— macierze tłumienia podporowego:

$$\begin{aligned}\tau_{yj} &= \tau_y[\mathbf{a}(\xi)]^T \mathbf{a}(\xi) \\ \tau_{zj} &= \tau_z[\mathbf{a}(\xi)]^T \mathbf{a}(\xi)\end{aligned}\quad (5.2)$$

5.2. Warunki sprzęgające równania równowagi dynamicznej wału wirnika niskiego ciśnienia z równaniami równowagi dynamicznej wału wirnika wysokiego ciśnienia

Wykorzystując zasadę prac wirtualnych, wariacja energii sprężystej odkształcenia i praca sił tłumienia na przemieszczeniach wirtualnych podpory sprzęgającej ruch obu wirników w punkcie odpowiadającym i -tej krawędzi jednego z nich i j -tej krawędzi drugiego, przykładowo w kierunku osi $0y$ ma postać [5]:

$$\begin{aligned}\delta V_{\kappa y}^{ww} &= \{\delta u_{yij}^{ww}\}^T \kappa_{yij}^{ww} u_{yij}^{ww} \\ \delta W_{\tau y}^{ww} &= -\{\delta u_{yij}^{ww}\}^T \tau_{yij}^{ww} \dot{u}_{yij}^{ww}\end{aligned}\quad (5.3)$$

Przemieszczenie rozpatrywanej podpory jest zależne od przemieszczeń krawędzi obu wirników, tj.:

$$u_{yij}^{ww} = u_{yi} - u_{yj} \quad (5.4)$$

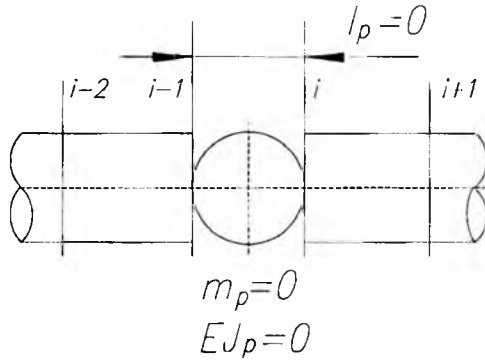
gdzie u_{yi} , u_{yj} przemieszczenia i -tej i j -tej krawędzi wirników w miejscu podpory międzywałowej.

Stąd otrzymuje się wyrażenia określające wariację energii sprężystej odkształcenia i pracę sił tłumienia na przemieszczeniach wirtualnych podpory międzywałowej w postaci:

$$\begin{aligned}\delta V_{\kappa y}^{ww} &= [\delta u_{yi}, \delta u_{yj}] \begin{bmatrix} \kappa_{yij}^{ww} & -\kappa_{yij}^{ww} \\ -\kappa_{yij}^{ww} & \kappa_{yij}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yi} \\ u_{yj} \end{bmatrix} \\ \delta W_{\tau y}^{ww} &= -[\delta u_{yi}, \delta u_{yj}] \begin{bmatrix} \tau_{yij}^{ww} & -\tau_{yij}^{ww} \\ -\tau_{yij}^{ww} & \tau_{yij}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{yi} \\ \dot{u}_{yj} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.5)$$

5.3. Macierz przegubu wirnika

Przyjmuje się model przegubu w postaci elementu o długości $l_p = 0$, masie $m_p = 0$ i sztywności $EJ_p = 0$.



Rys. 5. Model przegubu

Stąd macierz przegubu będzie macierzą zerową, powodującą rozprężenie układu w globalnym układzie współrzędnych, co odpowiada istnieniu w miejscu przegubu dwóch belek o swobodnych końcach.

Warunkiem sprzęgającym te dwie belki jest równość przemieszczeń na brzegach przegubu, tzn.:

$$u_{yi-1} = u_{yi} = u_{yp} \quad (5.6)$$

$$u_{zi-1} = u_{zi} = u_{zp}$$

Warunki te są uwzględniane w globalnym układzie współrzędnych. W tym celu wprowadza się wektor przemieszczeń U_p^* , spełniający następujące warunki:

$$U_p^* = T_p U_p \quad (5.7)$$

lub:

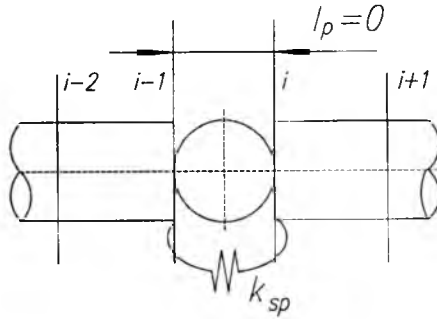
$$\begin{bmatrix} \dots \\ u_{i-1}^* \\ \varphi_{i-1}^* \\ \gamma_{i-1}^* \\ u_i^* \\ \varphi_i^* \\ \gamma_i^* \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & & & & & & & & \\ & 0 & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ u_{i-1} \\ \varphi_{i-1} \\ \gamma_{i-1} \\ u_i \\ \varphi_i \\ \gamma_i \\ \dots \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Jeżeli Z_p oznacza macierz całego wirnika bez przegubów to uwzględnienie przegubów powoduje jej przekształcenie wg zależności:

$$Z_{pp} = [T_p]^T Z_p T_p \quad (5.9)$$

5.4. Przegub sprężysty

W dalszych rozważaniach wprowadza się warunki na kąty zginania. W tym modelu przyjmuje się, że obie belki przegubu połączone są sprężyną o sztywności k_{sp} .



Rys. 6. Model przegubu sprężystego

Oprócz warunku sprzęgającego obie belki (równości przemieszczeń liniowych na brzegach przegubu) uwzględnia się zmianę przemieszczeń kątowych.

Przemieszczenie kątowe przegubu jest zależne od przemieszczeń kątowych obu krawędzi "belek" przegubu, tzn:

$$\varphi_{yp} = \varphi_{yi} - \varphi_{yi-1} \quad (5.10)$$

$$\varphi_{zp} = \varphi_{zi} - \varphi_{zi-1}$$

Uwzględniając istnienie połączenia sprężystego w przegubie otrzymuje się macierz przegubu sprężystego:

$$\mathbf{Z}_{ps} = \mathbf{Z}_{pp} + \mathbf{K}_{sp}^{\varphi} U \quad (5.11)$$

gdzie $\mathbf{K}_{sp}^{\varphi}$ jest macierzą zawierającą związki między momentami gnącymi obu "belek" przegubu na skutek istnienia w nim połączenia sprężystego.

6. Autonomiczne drgania giętne zespołu dwuwirnikowego

6.1. Sformułowanie problemu. Równania równowagi dynamicznej elementów odkształcalnych i sztywnych wirników

Wprowadzono wektory uogólnionych przemieszczeń i sił krawędziowych w

następującej zespolonej postaci:

$$\begin{aligned} U_e(t) &= U_{y_e}(t) + jU_{z_e}(t) \\ R_e(t) &= R_{y_e}(t) + jR_{z_e}(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Pomijając tłumienie zewnętrzne, równanie obracającego się elementu otrzymuje się w postaci:

$$\mathbf{K}_e U_e + (\mathbf{M}_e + \mathbf{I}_{1_e}) \ddot{U}_e - j\Omega \mathbf{I}_{0_e} \dot{U}_e = R_e \quad (6.2)$$

Rozwiązanie równania zakłada się w następującej postaci harmonicznie zmiennej:

$$U_e(t) = U_{0_e} e^{j\omega t} \quad R_e(t) = R_{0_e} e^{j\omega t} \quad (6.3)$$

Stąd otrzymuje się układ równań algebraicznych o postaci:

$$\left[\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e - \omega^2 \left(1 - 2 \frac{\Omega}{\omega} \right) \mathbf{I}_{1_e} \right] U_{0_e} = R_{0_e} \quad (6.4)$$

lub w uproszczonej formie zapisu:

$$\mathbf{Z}_e(\Omega, \omega) U_{0_e} = R_{0_e} \quad (6.5)$$

Dla celów dalszych rozważań równanie przekształcono do następującej postaci bezwymiarowej:

$$\bar{\mathbf{Z}}_e(\bar{\Omega}, \bar{\omega}) U_{0_e} = \bar{R}_{0_e} \quad (6.6)$$

Bezwymiarowe częstotliwości drgań i prędkości obrotowe mają postać:

$$\bar{\Omega} = \Omega p \quad \bar{\omega} = \omega p \quad (6.7)$$

$$p = \frac{L_{od}^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{m_{od}}{E J_{od}}}$$

gdzie:

$E J_{od}, m_{od}$ – odniesieniowe wartości sztywności giętej i masy jednostkowej,

L_{od} – długość odniesieniowa.

Analogicznie, dla sztywnego elementu skończonego otrzymuje się algebraiczne równanie równowagi dynamicznej elementu w postaci:

$$\bar{\mathbf{Z}}_{sz_e}(\bar{\Omega}, \bar{\omega}) \bar{U}_{0_e} = \bar{R}_{0_e} \quad (6.8)$$

6.2. Drgania wirników z odkształcalnymi i sztywnymi elementami skończonymi

Równanie równowagi dynamicznej wirnika otrzymuje się składając macierze elementu w macierz struktury, co w ogólnym przypadku można zapisać:

$$\bar{\mathbf{Z}}(\bar{\Omega}, \bar{\omega}) \bar{\mathbf{U}}_0 = \sum_c \mathbf{Z}_c(\Omega, \omega) \bar{\mathbf{U}}_{0c} \quad (6.9)$$

Równania drgań własnych wirnika z uwzględnieniem warunków sprzęgających elementy sztywne z odkształcalnymi mają następującą (bezwymiarową) postać:

$$\bar{\mathbf{Z}}_{sz}(\bar{\Omega}, \bar{\omega}) \bar{\mathbf{U}}_0 = 0 \quad (6.10)$$

Dla i -tego sztywnego elementu warunki sprzęgające w bezwymiarowej postaci określone są przez zależności:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{0sz-1} &= \bar{\varphi}_{0szi} \\ \bar{\gamma}_{0szi-1} &= \bar{\gamma}_{0szi} = 0 \\ \bar{u}_{0szi-1} &= \bar{u}_{0szi} - \bar{\varphi}_{0szi} \frac{l_i}{L_{od}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Wprowadzenie powyższych sprzężeń w globalnym układzie współrzędnych pociąga za sobą modyfikację wektora przemieszczeń $\bar{\mathbf{U}}_0$ wg następujących zależności:

$$\bar{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{T} \bar{\mathbf{U}}'_0 \quad (6.12)$$

lub:

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \bar{u}_{i-1} \\ \bar{\varphi}_{i-1} \\ \bar{\gamma}_{i-1} \\ \bar{u}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{\gamma}_i \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 0 & & 1 & -\frac{l_i}{L_{od}} & & & \\ & & 0 & & 1 & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \bar{u}'_{i-1} \\ \bar{\varphi}'_{i-1} \\ \bar{\gamma}'_{i-1} \\ \bar{u}'_i \\ \bar{\varphi}'_i \\ \bar{\gamma}'_i \\ \dots \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Po przekształceniach otrzymuje się równanie równowagi z nowymi współrzędnymi w postaci:

$$\bar{\mathbf{Z}}'_{sz}(\bar{\Omega}, \bar{\omega}) \bar{\mathbf{U}}'_0 = 0 \quad (6.14)$$

gdzie $\bar{\mathbf{U}}'_0$ – wektor przemieszczeń uwzględniający wprowadzone sprzężenia oraz:

$$\bar{\mathbf{Z}}'_{sz}(\bar{\Omega}, \bar{\omega}) = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{Z}}_{sz}(\bar{\Omega}, \bar{\omega}) \mathbf{T} \quad (6.15)$$

7. Drgania wymuszone

7.1. Sformułowanie problemu

Wymuszenie zespołu stanowią odśrodkowe siły bezwładności. Powstawanie tych sił jest skutkiem nie pokrywania się środków masy przekrojów elementów z ich osiami wirowania. Siły te stanowią zewnętrzne wymuszenie okresowe, o częstości równej prędkości obrotowej wirnika.

Równanie drgań wymuszonych elementu przy uwzględnieniu warunków brzegowych (5.1) i (5.2) ma postać [5]:

$$\mathbf{K}_e^\kappa \mathbf{U}_e - j\Omega \mathbf{l}_{0e} \dot{\mathbf{U}}_e + (\mathbf{M}_e + \mathbf{l}_{1e}) \ddot{\mathbf{U}}_e + \tau_e \dot{\mathbf{U}}_e = \mathbf{R}_e + \mathbf{F}_{1e} \quad (7.1)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_e^\kappa = \mathbf{K}_e + \boldsymbol{\kappa}_e$$

Rozwiązanie równania zakłada się w następującej postaci harmonicznie zmiennej:

$$\mathbf{U}_e(t) = \mathbf{U}_{0e} e^{j\Omega t} \quad \mathbf{R}_e(t) = \mathbf{R}_{0e} e^{j\Omega t} \quad (7.2)$$

Wstawiając wyżej wymienione zależności oraz uwzględniając, że $\mathbf{l}_0 = 2\mathbf{l}_1$ otrzymuje się równanie w postaci:

$$\left[\mathbf{K}_e^\kappa - \Omega^2 (\mathbf{M}_e - \mathbf{l}_{1e}) + j\Omega \tau_e \right] \mathbf{U}_{0e} = \mathbf{R}_{0e} + \mathbf{F}_{1e} \quad (7.3)$$

lub w uproszczonej formie zapisu:

$$\mathbf{Z}_e(\Omega) \mathbf{U}_{0e} = \mathbf{R}_{0e} + \mathbf{F}_{1e} \quad (7.4)$$

i w postaci bezwymiarowej:

$$\bar{\mathbf{Z}}_e(\bar{\Omega}) \bar{\mathbf{U}}_{0e} = \bar{\mathbf{R}}_{0e} + \bar{\mathbf{F}}_{1e} \quad (7.5)$$

7.2. Drgania wymuszone wirników z odkształcalnymi i sztywnymi elementami skończonymi

Składając macierze elementów w macierz struktury otrzymuje się równanie drgań wymuszonych niejednorodnych wirników z uwzględnieniem sztywnych elementów skończonych w postaci [5]:

$$\bar{\mathbf{Z}}'_{sz}(\bar{\Omega}) \bar{\mathbf{U}}'_0 = \bar{\mathbf{F}}'_{sz}(\Omega) \quad (7.6)$$

Rozwiązując układ równań otrzymuje się wektor uogólnionych przemieszczeń krawędzi elementu w postaci:

$$\bar{U}'_0 = \operatorname{Re} U'_0 + j \operatorname{Im} U'_0 \quad (7.7)$$

skąd można obliczyć następujące zależności:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= A_i e^{j(\Omega t + \theta_i^u)} \\ \varphi_i(t) &= \Phi_i e^{j(\Omega t + \theta_i^\varphi)} \\ \gamma_i(t) &= \Gamma_i e^{j(\Omega t + \theta_i^\gamma)} \end{aligned} \quad (7.8)$$

gdzie:

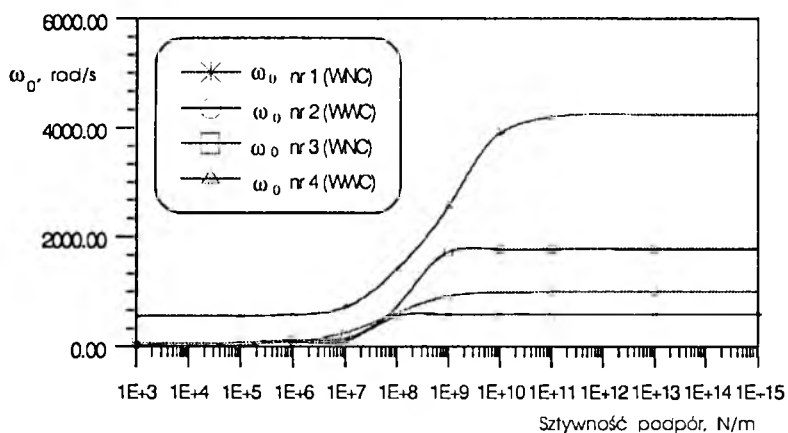
- A_i, Φ_i, Γ_i – amplitudy współrzędnych uogólnionych,
- $\theta_i^u, \theta_i^\varphi, \theta_i^\gamma$ – kąty przesunięcia fazowego tych współrzędnych.

8. Omówienie wyników obliczeń

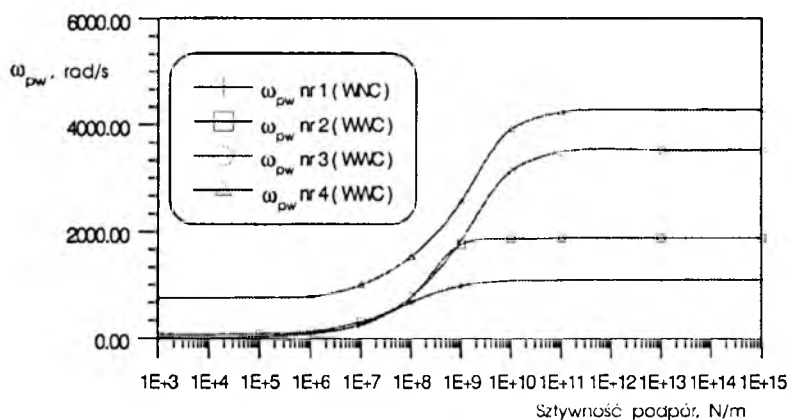
Pierwszy zbiór wykresów obrazuje wyniki obliczeń numerycznych zespołu dwuwirnikowego ze sztywno połączonymi wałami (bez przegubów).

Przebiegi (rys.7 i rys.8) obrazują zmianę częstości drgań własnych i prędkości krytycznych precesji współbieżnej w funkcji sztywności podpór kadłubowych zespołu (zmienianych wszystkich w jednakowym stopniu). Największy zakres zmian częstości własnych zachodzi w przedziale sztywności podpór od 10^7 do 10^9 N/m – w przypadku prędkości krytycznych precesji współbieżnej jest szerszy - do 10^{11} N/m. Wyższymi wartościami częstości i prędkości krytycznych charakteryzuje się sztywniejszy wirnik wysokiego ciśnienia.

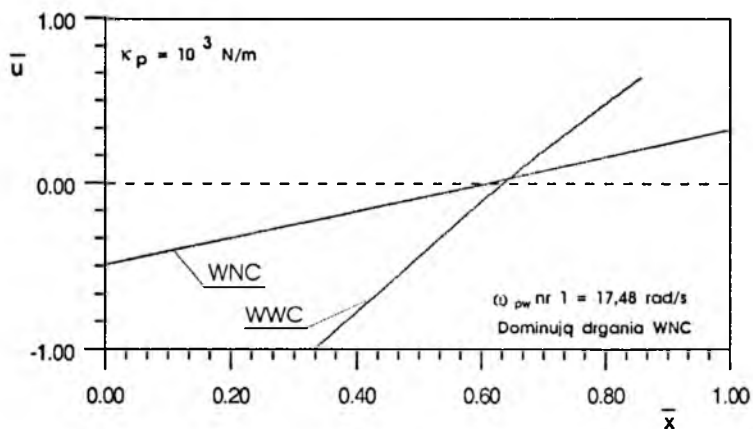
Krzywe na rys.9 i rys.10 obrazują postacie drgań zespołu dwuwirnikowego drgającego z pierwszą prędkością krytyczną precesji współbieżnej. Wykres na rys.9 przedstawia drgania zespołu na podatnych podporach, wykres na rys.10 – na podporach sztywnych. Zespół dwuwirnikowy podparty na podatnych podporach w czasie drgań z pierwszą prędkością krytyczną precesji współbieżnej wykonuje drgania jak ciało sztywne, bez odkształceń sprężystych wirników. Zwiększenie sztywności podpór powoduje zmniejszenie amplitud przemieszczeń węzłów podporowych i powstawanie odkształceń sprężystych wirników. W tym przypadku z maksymalnymi amplitudami przemieszczeń drgają turbiny wirników.



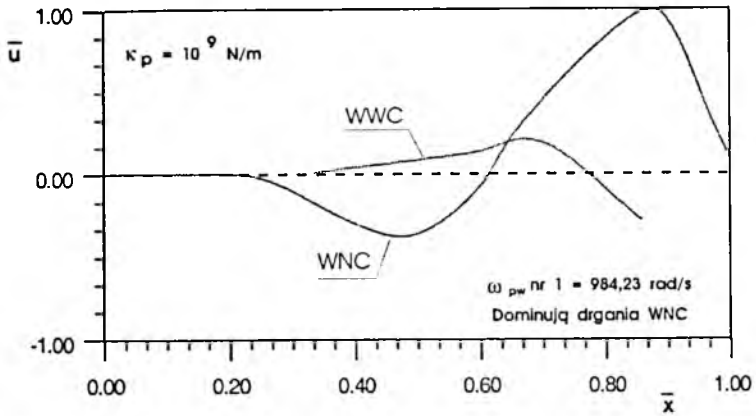
Rys. 7. Częstości własne



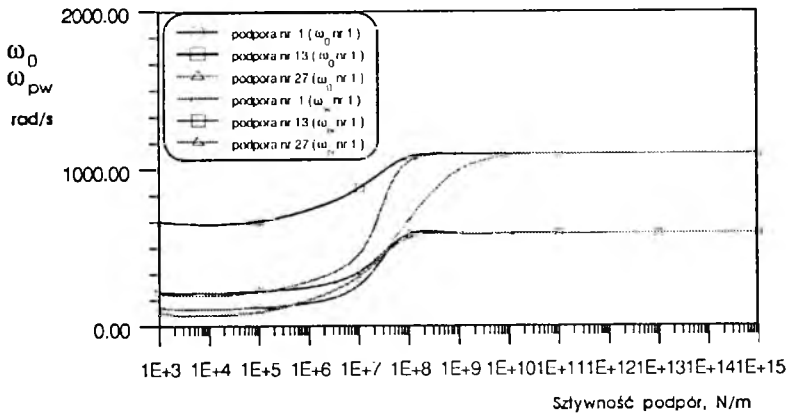
Rys. 8. Prędkości krytyczne precesji współbieżnej



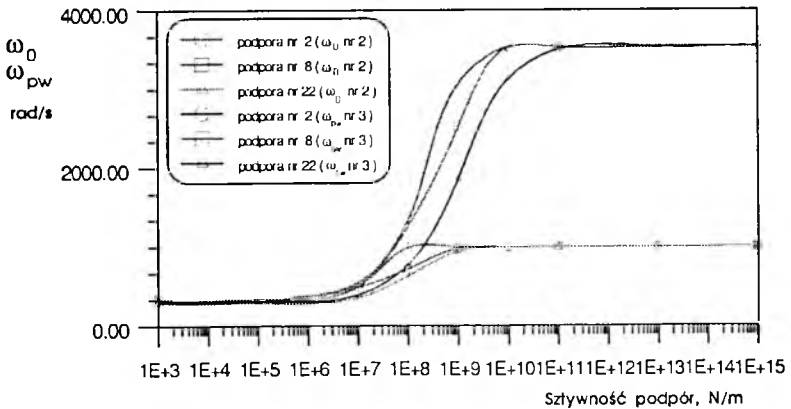
Rys. 9. Postacie drgań zespołu dwuwirnikowego



Rys. 10. Postacie drgań zespołu dwuwirnikowego



Rys. 11. Podpory wirnika niskiego ciśnienia



Rys. 12. Podpory wirnika wysokiego ciśnienia

Analizie poddano także wpływ sztywności poszczególnych podpór wirników na zmianę częstości drgań własnych i prędkości krytycznych obu wirników zespołu (rys.11 i rys.12). Największy wpływ na zmianę częstości własnych i prędkości krytycznych mają podpory turbin obu wirników. Częstości własne i prędkości krytyczne ulegają zmianie w najszerszym przedziale zmian sztywności tych właśnie podpór.

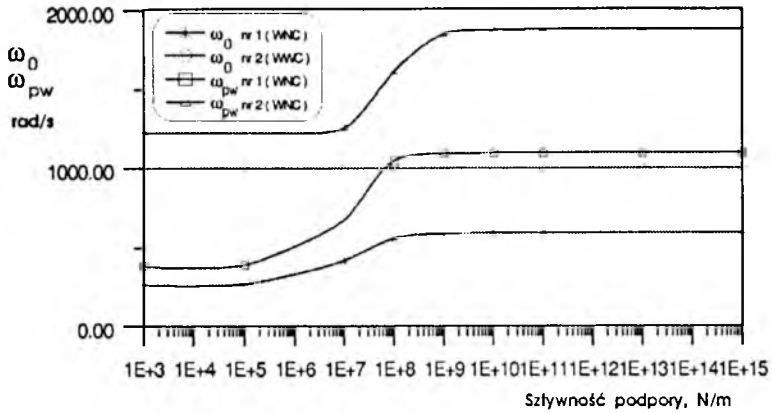
Wykres na rys.13 obrazuje zmianę częstości własnych i prędkości krytycznych zespołu dwuwirnikowego w funkcji sztywności podpory międzywałowej. Wykres ten wykonano dla sztywnych podpór kadłubowych. W głównym stopniu zmiana sztywności podpory międzywałowej wpływa na drgania wirnika niskiego ciśnienia. Wynika to z faktu, że:

- wirnik wysokiego ciśnienia jest sztywniejszy niż wirnik niskiego ciśnienia,
- wirnik wysokiego ciśnienia jest w obszarze podpory międzywałowej podparty na dwóch podporach kadłubowych, usztywniających go i ograniczających jego amplitudy przemieszczeń.

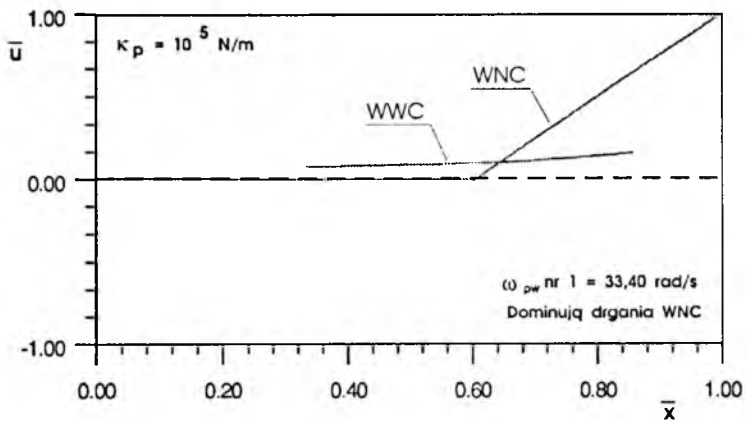
Wykresy na rys.14 i rys.15 obrazują postacie drgań zespołu z przegubem w węźle łączącym zespoły wentylatora i turbiny wirnika niskiego ciśnienia ze względu na specyficzne właściwości tego połączenia, odróżniającego je od innych przegubów. W przypadku drgań zespołu na podatnych podporach (rys.14) oba wirniki drgają z pierwszą prędkością krytyczną precesji współbieżnej jak ciało sztywne – bez odkształceń sprężystych, z załamaniem linii ugięcia wirnika w węźle przegubowym. Wzrost sztywności podpór (rys.15) powoduje ograniczenie przemieszczeń węzłów podporowych i odkształcenia sprężyste wirników. W tym przypadku zwracają uwagę stosunkowo duże przemieszczenia węzła przegubowego.

Wzrost sztywności węzła przegubowego według zaprezentowanego modelu sztywności przegubu nie powoduje istotnych zmian częstości własnych i prędkości krytycznych (rys.16). Powoduje jednak ograniczenie amplitudy ugięcia w węźle przegubowym i zmianę kształtu linii ugięcia całego wirnika (rys.17).

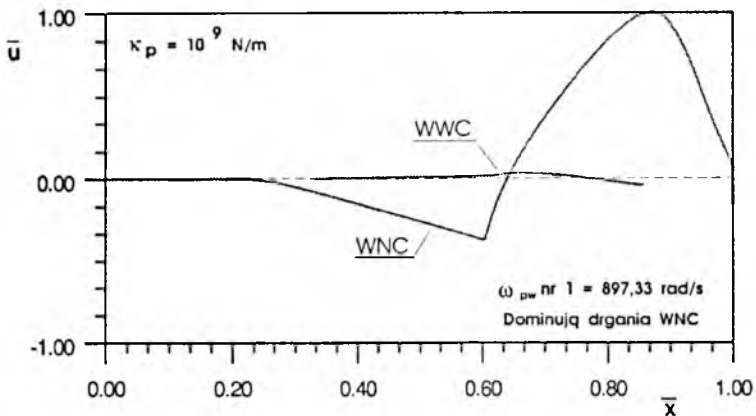
Obliczenia drgań wymuszonych zespołu dwuwirnikowego pozwalają na określenie amplitud ugięć elementów zespołu dwuwirnikowego w funkcji prędkości obrotowej. Na rys.18 i rys.19 przedstawiono przebieg tej charakterystyki dla węzła przegubowego łączącego zespół wentylatora i turbiny wirnika niskiego ciśnienia. Wykres na rys.19 stanowi powiększenie fragmentu z rys.18 w celu bardziej czytelnego przedstawienia wpływu zwiększenia tłumienia podpór zespołu na obniżenie względnej amplitudy ($\bar{A} = A/c_{max}$) drgań tego węzła w rezonansie.



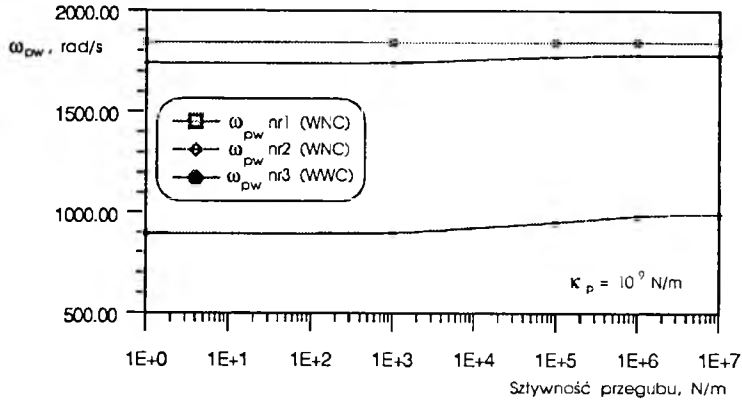
Rys. 13. Podpora międzywałowa



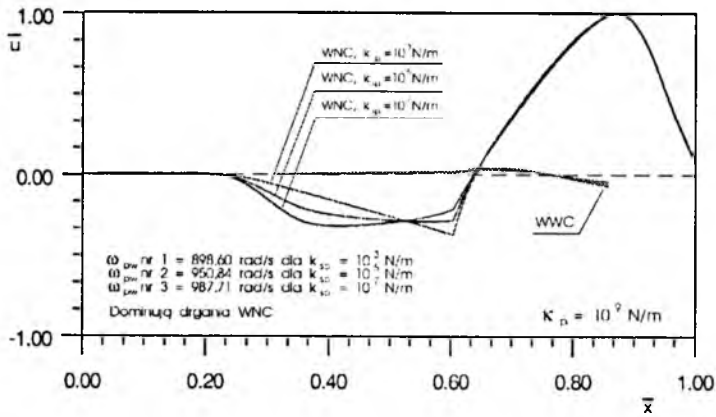
Rys. 14. Postacie drgań zespołu dwuwirnikowego z przegubem



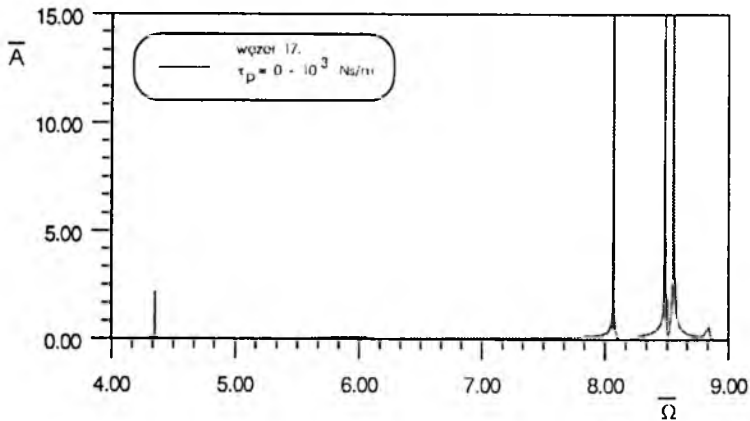
Rys. 15. Postacie drgań zespołu dwuwirnikowego z przegubem



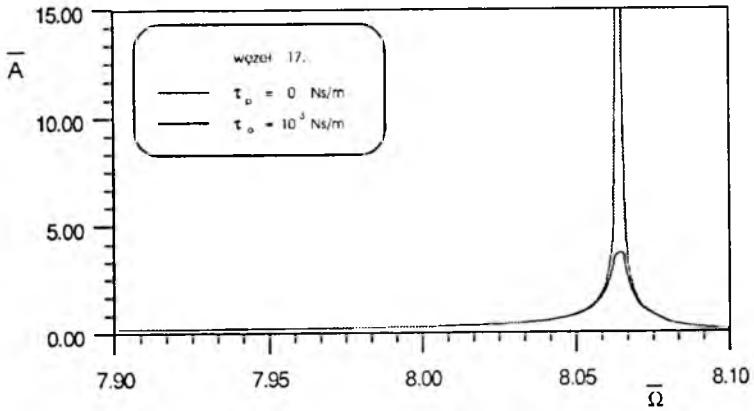
Rys. 16. Prędkości krytyczne precesji współbieżnej zespołu dwuwirnikowego z przegubem sprężystym



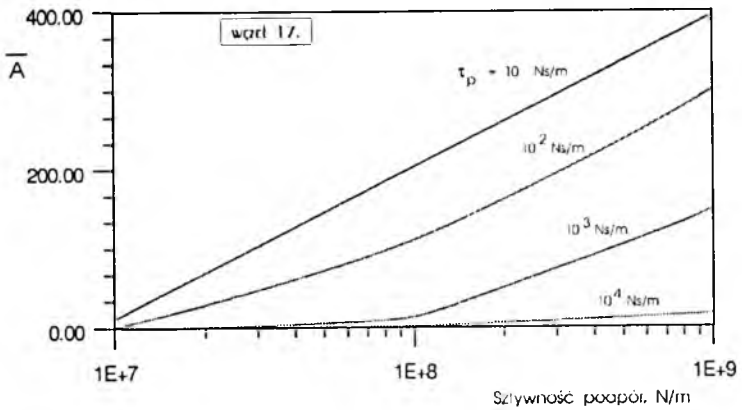
Rys. 17. Postacie drgań zespołu dwuwirnikowego z przegubem sprężystym



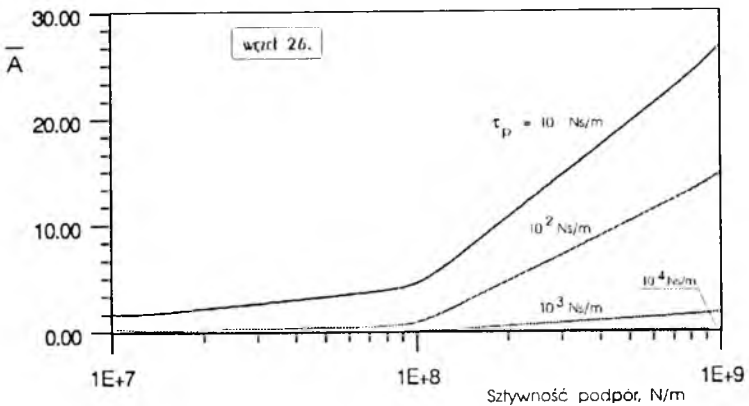
Rys. 18. Drgania wymuszone zespołu dwuwirnikowego z przegubem sprężystym



Rys. 19. Drgania wymuszone zespołu dwuwirnikowego z przegubem



Rys. 20. Drgania wymuszone zespołu dwuwirnikowego



Rys. 21. Drgania wymuszone zespołu dwuwirnikowego

Na rys.20 i rys.21 przedstawiono zmiany maksymalnych względnych amplitud przemieszczeń wspomnianego węzła WNC, w którym modelowany był przegub (węzeł 17) oraz turbiny WWC (węzeł 26) w rezonansie w funkcji sztywności podpór kadłubowych przy różnych współczynnikach ich tłumienia. Uzyskanie określonych wartości amplitud przemieszczeń możliwe jest drogą odpowiedniego doboru współczynników sztywności i tłumienia podpór. W ogólnym przypadku: w celu zachowania założonej wartości amplitudy drgań – zwiększenie sztywności podpór wymaga również zwiększenia ich tłumienia.

Literatura

1. DŻYGADŁO Z., *Finite Element Analysis of Natural and Forced Flexural Vibrations of Rotor Systems*, J. Tech. Phys., 21, 1, 1980
2. DŻYGADŁO Z., LYŻWIŃSKI M., OTYŚ J., SZCZECIŃSKI S., WIATREK R., *Napędy lotnicze. Zespoły wirnikowe silników turbinowych*, WKiŁ, Warszawa 1982
3. DŻYGADŁO Z., NOWOTARSKI I., OLEJNIK A., MROZEK B., ZALEWSKI P., *Obliczenia dynamiki modelu dwuprzepływowego silnika odrzutowego*, ITL WAT, Warszawa 1990 (praca niepublikowana)
4. DŻYGADŁO Z., NOWOTARSKI I., OLEJNIK A., ZALEWSKI P., MROZEK B., *Zastosowanie dyskretnego modelu dynamicznego do analizy drgań i prędkości krytycznych podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego*, Mechanika w Lotnictwie, Warszawa 1992
5. WARCHULSKI J., *Analiza drgań podwójnego wirnika lotniczego silnika turbino-wego*, Rozprawa doktorska, WAT, Warszawa 1994
6. ZIENKIEWICZ O.C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972

Analysis of Vibrations of a Birotor System of an Aircraft Turbine Engine

Summary

Bending vibrations of a birotor system of an aircraft turbine engine are considered making use of the finite element method.

A discrete model of the system is determined on the assumption that the fan, the compressor and the turbines are rigid bodies, while the shafts of both rotors are deformable structures.

All the supports of the birotor system are deformable units and they manifest elastic and damping properties. Splined couplings of the shafts elements are treated as articulated joints.

The equations of dynamic equilibrium of rigid and deformable finite elements are determined and then the equations of the whole structure are established.

Results of numerical analysis are presented, which show the effect of the parameters of the birotor system on natural vibrations, critical speeds and forced vibrations of the system.

MODELOWANIE PROCESU NAPROWADZANIA OBIEKTU LATAJĄCEGO NA CEL MANEWRUJĄCY

JÓZEF GACEK

BOGDAN MACHOWSKI

MACIEJ MRÓZ

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Dla przyjętej hipotetycznej rakiety przeciwlotniczej (rakiety plot.) średniego zasięgu i hipotezy ruchu celu powietrznego, opracowano model matematyczny procesu naprowadzania rakiety metodą trzech punktów oraz metodą połowicznego prostowania toru.

1. Wprowadzenie

Skomplikowane i kosztowne w eksploatacji urządzenia techniczne powodują konieczność stosowania różnego rodzaju symulatorów i imitatorów.

Technika uzbrojenia wymaga ponadto odpowiedniego przygotowania obsługi oraz sprzętu do użycia (sprawdzenia techniczne, dane do startu rakiet, dane do strzelania pociskami klasycznymi, programy torów lotu obiektów latających, szkolenie załóg, itp.).

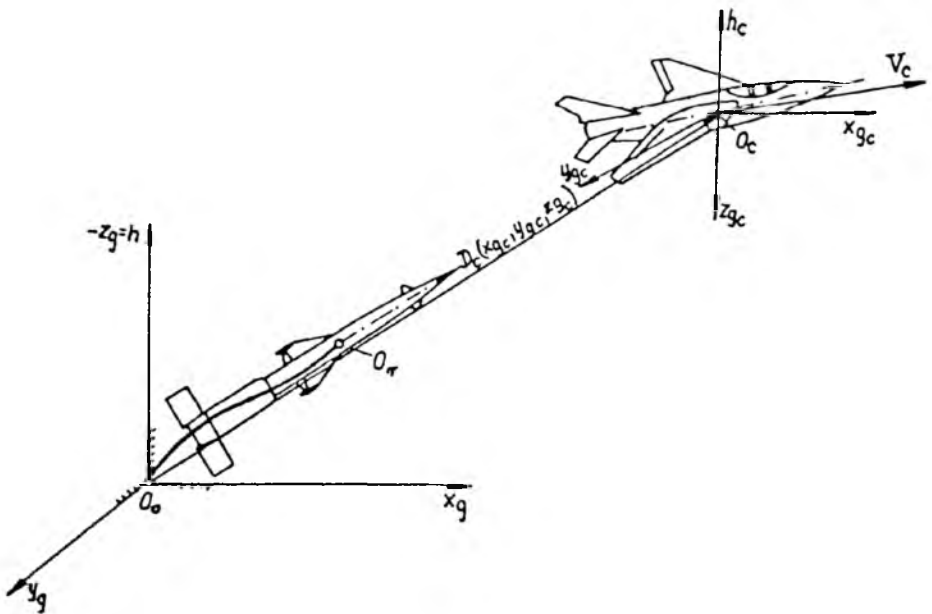
Niezbędnym składnikiem praktycznej realizacji większości tego typu zadań jest poprawnie wykonany proces modelowania występujących w nich zjawisk fizycznych. Do znacznego wzrostu roli modelowania podczas rozwiązywania problemów technicznych, szkoleniowych i innych, przyczyniła się również stale rozszerzająca się dostępność nowoczesnych i efektywnych urządzeń elektronicznej techniki obliczeniowej.

Proces modelowania odgrywa także podstawową rolę w symulacji i badaniu dynamiki lotu obiektów. Podstawowe elementy symulatorów złożonych procesów lotu, walki powietrznej, procesów naprowadzania oraz przygotowania danych do strzelania (startu, zrzutu) stanowią algorytmy obliczeniowe oparte o odpowiednie modele matematyczne.

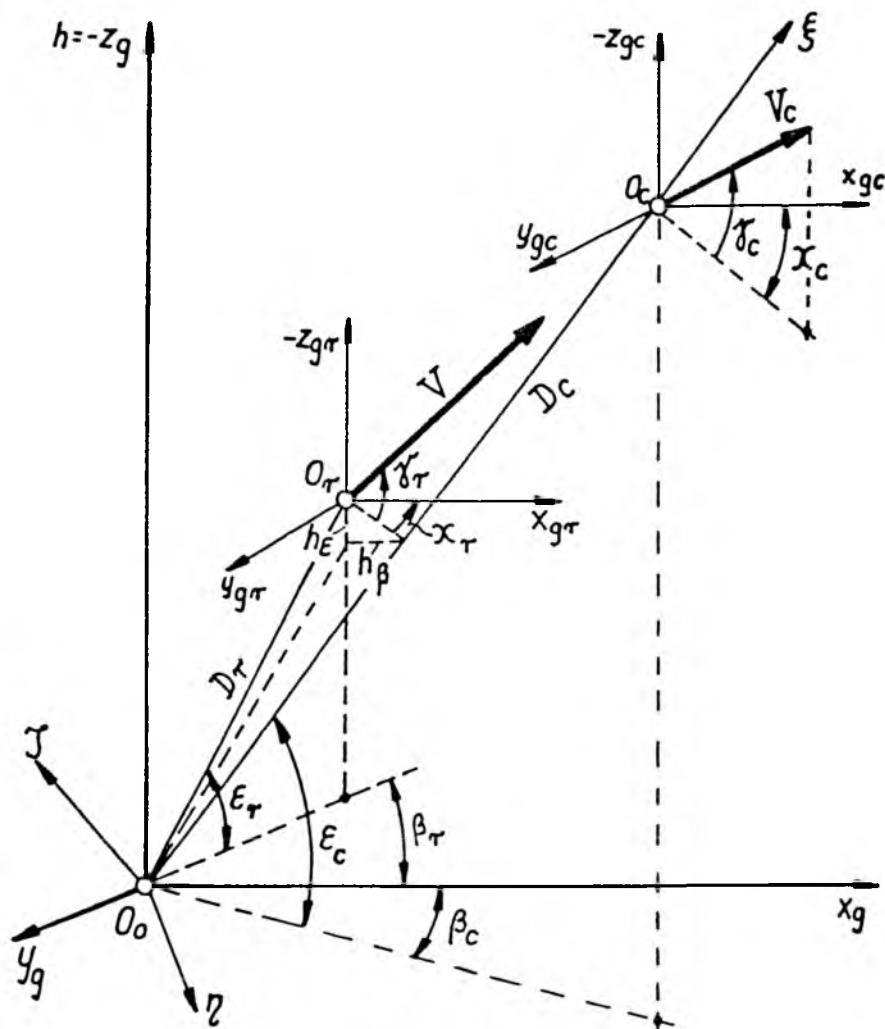
W niniejszym opracowaniu oznaczenia wielkości fizycznych przyjęto zgodnie z Polską Normą PN-83 [9].

2. Przyjęty schemat naprowadzania rakiety oraz hipoteza ruchu celu

Przy rozpatrywaniu zagadnień związanych z określaniem stref startu rakiet przeciwlotniczych przyjmowana jest hipoteza prostoliniowego lotu celu na określonej wysokości ze stałą prędkością. Założenie to w wielu przypadkach jest niewystarczające, szczególnie w przypadkach analizy wpływu manewrów celu na dynamikę rakiet przeciwlotniczych w procesie naprowadzania. Manewr celu określony przez zmianę prędkości (zarówno co do modułu jak i kierunku) wpływa w decydujący sposób na wymagania jakim muszą sprostać właściwości dynamiczne rakiety w procesie naprowadzania. Z tego względu należy uwzględnić możliwości manewrowe celu wynikające z jego maksymalnych dopuszczalnych przeciążeń [2,3,5].



Rys. 1. Przyjęty schemat naprowadzania rakiety na cel manewrujący



Rys. 2. Schemat ilustrujący kąty: γ_c , χ_c , ϵ_c i β_c

Przyjęty schemat procesu naprowadzania rakiety przeciwlotniczej na cel manewrujący przedstawiono na rys.1 i rys.2. Zgodnie ze schematem przedstawionym na rys.2 położenie wektora prędkości celu V_c w nieruchomym ziemskim układzie współrzędnych $0_0x_gy_gz_g$ opisują kąty γ_c i χ_c , a położenie linii obserwacji celu – kąty ε_c oraz β_c . Odpowiednio do tego przyjęto następujący model matematyczny ruchu celu [2,3]:

— równania ruchu postępowego celu

$$\begin{aligned}\frac{dx_{gc}}{dt} &= V_{xgc} = V_c \cos \gamma_c \cos \chi_c \\ \frac{dy_{gc}}{dt} &= V_{ygc} = -V_c \cos \gamma_c \sin \chi_c \\ \frac{dh_c}{dt} &= -V_{zgc} = V_c \sin \gamma_c\end{aligned}\quad (2.1)$$

— równania opisujące zmianę odległości D_c oraz prędkości V_c

$$\begin{aligned}D_c &= \sqrt{x_{gc}^2 + y_{gc}^2 + h_c^2} \\ V_c &= \sqrt{\dot{x}_{gc}^2 + \dot{y}_{gc}^2 + \dot{h}_c^2}\end{aligned}\quad (2.2)$$

— równania opisujące zmianę kątów ε_c i β_c (rys.2)

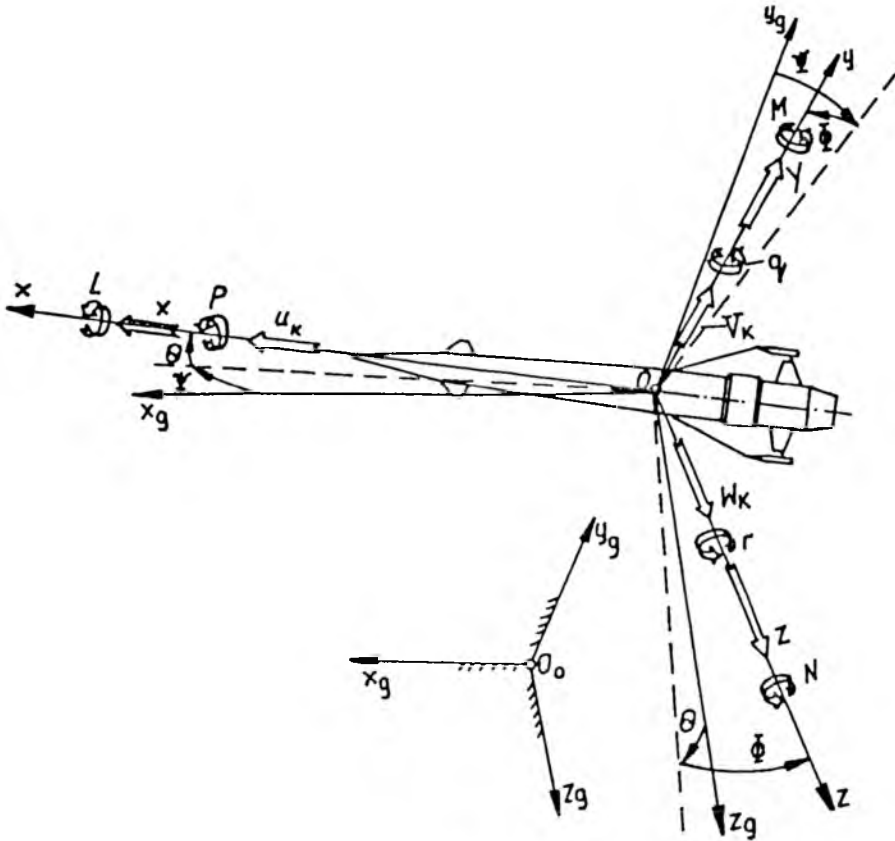
$$\sin \varepsilon_c = \frac{h_c}{D_c} \quad \sin \beta_c = -\frac{y_g}{D_c \cos \varepsilon_c}\quad (2.3)$$

Tak sformułowany model matematyczny ruchu celu może stanowić podstawowy element algorytmu do przeprowadzania badań procesów naprowadzania rakiet przeciwlotniczych. W szczególności ruch celu można programować drogą odpowiedniego doboru warunków początkowych: x_{gc0} , y_{gc0} , z_{gc0} , V_{c0} , ε_{c0} , β_{c0} lub na podstawie doboru warunków początkowych uzupełnionych programowymi zmianami kątów γ_c i χ_c , tzn. przyjęcie funkcji: $\gamma_c(t) = f_{1pr}(t)$, $\chi_c(t) = f_{2pr}(t)$.

3. Model matematyczny ruchu przestrzennego rakiety w systemie naprowadzania na cel powietrzny

W procesie formułowania modelu matematycznego procesu naprowadzania rakiety w ruchomym układzie odniesienia $0xyz$, jako inercjalny przyjęto

układ współrzędnych związany z Ziemią $0_0x_0y_0z_0$, (rys.3) [2,6]. Określono przy tym związki między wielkościami mierzonymi w układach odniesienia ruchomym: $0xyz$ i inercyjnym $0_0x_0y_0z_0$. Zależności te nazwano *związkami geometrycznymi i kinematycznymi* [2,6].



Rys. 3. Przyjęte współrzędne: liniowe x_g, y_g, z_g , katowe ψ, θ, ϕ ; prędkości ich zmian: u_k, v_k, w_k, p, q, r ; siły i momenty sił zewnętrznych działających na raketę w układzie współrzędnych związanym $0xyz$

Przyjmując także, że rakieta jest bryłą nieodkształcalną charakteryzującą się płaszczyznami symetrii ($x0z$ i $x0y$): geometrycznej, aerodynamicznej i masowej sformulowano następujący model matematyczny rakiety, w nieswobodnym ruchu przestrzennym, w układzie współrzędnych sztywno związanym z rakieta $0xyz$, (rys.3) [1,2,6,7].

Model ten opisują następujące równania:

(a) dynamiczne równania ruchu postępowego środka masy rakiety, czyli

ruchu podłużnego, bocznego i wznoszącego zapisane w układzie współrzędnych związanym z rakieta $0xyz$ (rys.3):

$$\begin{aligned}
 m\left(\frac{du_k}{dt} + w_k q - v_k r\right) &= F - mg(h) \sin \Theta + \\
 &\quad - \frac{\rho(h)V^2}{2} S(C_x \cos \alpha \cos \beta + C_y \cos \alpha \sin \beta - C_z \sin \alpha) + P_s + X_q^* q \\
 m\left(\frac{dv_k}{dt} + u_k r - w_k p\right) &= mg(h) \cos \Theta \sin \Phi + \\
 &\quad + \frac{\rho(h)V^2}{2} S(-C_x \sin \beta + C_y \cos \beta) + Y_r^* r \\
 m\left(\frac{dw_k}{dt} + v_k p - u_k q\right) &= mg(h) \cos \Theta \cos \Phi + \\
 &\quad - \frac{\rho(h)V^2}{2} S(C_x \sin \alpha \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta + C_z \cos \alpha) + Z_q^* q
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(b) dynamiczne równania ruchu obrotowego rakiety, czyli ruchu przechylenia, pochylania i odchylenia zapisane w układzie współrzędnych związanym $0xyz$, (rys.3) [5]:

$$\begin{aligned}
 I_x \frac{dp}{dt} - [I_y - I_z]qr &= mg(h)(y_G \cos \Theta \cos \Phi - z_G \cos \Theta \sin \Phi) + \\
 &\quad + \frac{\rho(h)V^2}{2} S[-y_A(C_x \sin \alpha \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta + C_z \cos \alpha) + \\
 &\quad + z_A(C_x \sin \beta - C_y \cos \beta) - l(C_{la}^A \cos \alpha \cos \beta + C_{ma}^A \cos \alpha \sin \beta + \\
 &\quad - C_{na}^A \sin \alpha)] + L_p^* p + L_r^* r \\
 I_y \frac{dq}{dt} - [I_z - I_x]rp &= -mg(h)(z_G \sin \Theta + x_G \cos \Theta \cos \Phi) + \\
 &\quad + \frac{\rho(h)V^2}{2} S[-z_A(C_x \cos \alpha \cos \beta + C_y \cos \alpha \sin \beta - C_z \sin \alpha) + \\
 &\quad + x_A(C_x \sin \alpha \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta + C_z \cos \alpha) + \\
 &\quad + b_A(-C_{la}^A \sin \alpha \cos \beta + C_{ma}^A \cos \beta)] + P_s z_{ps} + M_q^* q \\
 I_z \frac{dr}{dt} - [I_x - I_y]pq &= -F y_F + mg(h)(x_G \cos \Theta \sin \Phi + y_G \sin \Theta) + \\
 &\quad + \frac{\rho(h)V^2}{2} S[x_A(-C_x \sin \beta + C_y \cos \beta) + y_A(C_x \cos \alpha \cos \beta + \\
 &\quad + C_y \cos \alpha \sin \beta) - C_z \sin \alpha] - b_A(C_{la}^A \sin \alpha \cos \beta + \\
 &\quad + C_{ma}^A \sin \alpha \sin \beta + C_{na}^A \cos \alpha)] - P_s y_{ps} + N_r^* r
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

(c) Związki kinematyczne prędkości kątowych (przechylenia, pochylenia i odchylenia):

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dt} &= q \cos \Phi - r \sin \Phi \\ \frac{d\Psi}{dt} &= (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \sec \Theta \\ \frac{d\Phi}{dt} &= p + q \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta + r \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta\end{aligned}\quad (3.3)$$

(d) Związki kinematyczne prędkości liniowych (ruchu podłużnego, bocznego, i wznoszenia) w układzie $0_0x_gy_gz_g$, (rys.3):

$$\begin{aligned}\frac{dx_g}{dt} &= u_k \cos \Theta \cos \Psi + v_k (\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\ &+ w_k (\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi) \\ \frac{dy_g}{dt} &= u_k \cos \Theta \sin \Psi + v_k (\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\ &+ w_k (\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi) \\ \frac{dz_g}{dt} &= -u_k \sin \Theta + v_k \sin \Phi \cos \Theta + w_k \cos \Phi \cos \Theta\end{aligned}\quad (3.4)$$

gdzie:

$x_G, y_G, z_G, x_A, y_A, z_A$ – odpowiednio współrzędne wektorów wodzących: $\mathbf{r}_G, \mathbf{r}_A$ punktów przyłożenia wypadkowych sił zewnętrznych działających na raketę w locie (grawitacyjnych \mathbf{G} , aerodynamicznych \mathbf{R}_A) względem początku 0 związanego układu współrzędnych $0xyz$;

b_A, l – średnia cięciwa aerodynamiczna oraz rozpiętość skrzydła;

S – powierzchnia charakterystyczna rakiety.

Zastosowanie układu równań (3.1) ÷ (3.4) do analizy procesu naprowadzania rakiety w warunkach rzeczywistych wymaga uzupełnienia go następująco:

- (a) zależnościami do wyznaczania bieżących wartości charakterystyk określających strukturę rakiety: $m(t), x_{sm}(t), y_{sm}(t), z_{sm}(t), I_x(t), I_y(t), I_z(t), F(t)$, [2,7];
- (b) zależnościami do wyznaczenia wartości bieżących ośrodka ruchu [2,3,7]:
- przyśpieszenia siły ciężkości $g(h)$;
 - parametrów atmosfery;
- (c) zależnościami do określenia sił i momentów zewnętrznych działających na raketę w locie przestrzennym [2,3,6,7].

Dla znanych wartości sił i momentów sił zewnętrznych (ciągu, aerodynamicznych, grawitacyjnych, sterujących) występujących w prawych stronach równań (3.1) i (3.2) model matematyczny (2.1) ÷ (3.1) może być stosowany do analizy właściwości dynamicznych oraz symulacji lotu dowolnej nieodkształcalnej rakiety przeciwlotniczej.

Techniczne rozwiązania rakiet przeciwlotniczych charakteryzują się płaszczyznami symetrii: geometrycznej i aerodynamicznej w układzie $0xyz$, którego osie stanowią jednocześnie główne centralne osie bezwładności rakiety, zatem słuszne są następujące związki:

$$x_G = x_G(t) \qquad y_G = z_G = 0$$

Z tego względu równania dynamiczne ruchu postępowego (3.1) i ruchu obrotowego rakiety (3.2) znacznie się upraszczają [2,7].

System sterowania rakieta wykorzystuje trójpunktowe metody naprowadzania do wytworzenia odpowiednich sił aerodynamicznych $P_s(t)$ na jej powierzchniach sterowych [4,5]. Realizowane jest to zazwyczaj w dwóch niezależnych kanałach sterowania: pochylenia i odchylenia, o identycznej strukturze.

Ogólne równania metod trójpunktowych dla ruchu przestrzennego mają postać:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_c + \varepsilon_w \qquad \beta_k = \beta_c + \beta_w \qquad (3.5)$$

gdzie:

ε_k, β_k – wymagane kąty położenia rakiety na torze kinematycznym;

ε_w, β_w – kąty wyprzedzenia.

Aby zapewnić przejście toru kinematycznego przez cel przyjmujemy, że kąty wyprzedzenia wyliczane są z zależności:

$$\varepsilon_w = \beta_w = m_{met}(D_c - D_r) = m_{met}\Delta D \qquad (3.6)$$

gdzie:

$$D_r = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2} \qquad (3.7)$$

Podstawiając (3.6) do (3.5) otrzymujemy ogólne równanie naprowadzania:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_c + m_{met}\Delta D \qquad (3.8)$$

$$\beta_k = \beta_c + m_{met}\Delta D$$

Dla $D_c = D_r$ zachodzi równość $\varepsilon_k = \varepsilon_c$ oraz $\beta_k = \beta_c$ co czyni zadość wymaganiu, aby tor kinematyczny przechodził przez cel.

Równania (3.8) wykorzystywane są dla klasyfikacji metod trójpunktowych, przy czym jako kryterium przyjmuje się wartość współczynnika m_{met} , i tak:

- $m_{met} = \text{const} \neq 0$ – metoda wyprzedzenia;
- $m_{met} = \text{var}$ – metoda prostowania;
- $m_{met} = 0$ – metoda pokrycia (metoda trzech punktów).

W procesie zdalnego naprowadzania rakiet wykorzystywane są głównie; metoda pokrycia oraz szczególny przypadek metody prostowania toru – metoda połowicznego prostowania. Własności kinematyczne metody wyprzedzenia ustępują znacznie walorom wymienionych metod i dlatego nie znalazła ona zastosowania w praktyce.

Do formowania sygnałów sterujących, przesyłanych na pokład rakiety, naziemna stacja naprowadzania wykorzystuje zazwyczaj rozbieżności liniowe h_ε i h_β , będące względnym przemieszczeniem w układzie ruchomym $0_0\xi\zeta\eta$ (rys.2) [1], określone na podstawie pomiaru odległości do rakiety D_r oraz uchybów kątowych:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \varepsilon_c - \varepsilon_r & \Delta\beta &= \beta_c - \beta_r \\ h_\varepsilon &= D_r \sin(\varepsilon_c - \varepsilon_r) & h_\beta &= D_r \sin(\beta_c - \beta_r) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rozbieżności te uzupełnione ich pochodnymi oraz sygnałami kompensacyjnymi stanowią sygnały do wypracowania odpowiednich funkcji kątów δ_H , δ_V wychylenia powierzchni sterowych, w których następnie powstają siły: $P_s = f(\delta_H, \delta_V)$, kierujące rakieta.

Ogólna postać związków sprzęgających wychylenie steru rakiety z parametrami sterującymi może być przedstawiona zależnościami:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_H + b_1\dot{\delta}_H + b_0\delta_H &= \sigma(k_1\dot{h}_\varepsilon, k_0h_\varepsilon, h_d, h_c, h_{prz}, m_{met}) \\ \ddot{\delta}_V + b_1\dot{\delta}_V + b_0\delta_V &= \sigma(k_1\dot{h}_\beta, k_0h_\beta, h_d, h_c, h_{prz}, m_{met}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

gdzie:

- h_d – poprawka kompensująca ustaloną wartość błędu dynamicznego naprowadzania;
- h_c – poprawka kompensująca ciężar rakiety;
- h_{prz} – poprawka uwarunkowana błędami przyrządowymi określającymi współrzędne rakiety i celu.

Dla uzyskania odpowiednich własności dynamicznych rakiety w procesie naprowadzania poszczególne człony funkcji (3.10) pilota automatycznego powinny zawierać parametry: b_1 , b_0 charakteryzujące stosowany napęd steru oraz współczynniki wzmocnienia: k_1 , k_0 , określone z uwzględnieniem algorytmów optymalizacyjnych [7].

4. Wnioski końcowe

- Przedstawiony model matematyczny stanowi podstawowy człon algorytmu badań procesu naprowadzania rakiety przeciwlotniczej na manewrujące cele powietrzne.
- Algorytm ten był opracowany głównie dla potrzeb symulatora do szkolenia i treningu obsługi zestawów rakiet przeciwlotniczych średniego zasięgu. Ze względu jednak na uogólnione podejście do opisu procesów naprowadzania może także znaleźć on zastosowanie np. przy wyznaczaniu stref startu i rażenia zarówno istniejących jak i nowo opracowywanych rakiet.
- W procesie teoretycznych badań dynamicznych właściwości obiektów latających należy przywiązywać właściwą wagę do weryfikacji zarówno na etapie modelowania fizycznego i matematycznego, jak i podczas przeprowadzania obliczeń. Należy przy tym określić przedziały zmian wielkości fizycznych, dla których opracowany model może być stosowany. W przedstawionym opracowaniu weryfikację przeprowadzono na podstawie dostępnych wyników badań eksperymentalnych dla rakiety rzeczywistej o takim samym schemacie aerodynamicznym co rozważana rakietka hipotetyczna.

Literatura

1. DUBIEL S., *Naprowadzanie rakiet na cele ruchome jako nieliniowy ruch złożony*, Biul. WAT nr.10, Warszawa 1990r
2. GACEK J., *Modelowanie i badanie dynamicznych właściwości obiektów balistycznych*, Rozprawa habilitacyjna, WAT, Warszawa 1992
3. GACEK J., MACHOWSKI B., MRÓZ M., *Modelowanie dynamicznych właściwości rakiety przeciwlotniczej jako obiektu w systemie samonaprowadzania na cel manewrujący*, Materiały IV Konferencji Naukowej "Sterowanie i regulacja w radiolokacji i obiektach latających", Biuletyn WOSR nr 2(15), 87-104, Jelenia Góra 1993
4. GLAPSKI M., *Proporcjonalne zbliżenie równoważne kątowym metodom "prostowania toru"*, Biul. WAT Nr 2, Warszawa 1993r
5. GRYCEWICZ H., MOSIEWICZ R., PIETRASIEŃSKI J., *Systemy radiosterowania cz.I*, WAT, Warszawa 1984
6. MARYNIAK J., *System symulacji trenażera lotu, naprowadzania i walki powietrznej samolotu*, MTiS, 25, 1-2, 189-214, Warszawa 1987

7. MRÓZ M., *Optymalne warunki zdalnego sterowania obiektów latających w systemie bezprzewodowym*, Rozprawa habilitacyjna, Wyd. WAT, Warszawa 1992
8. OGATA K., *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa 1974
9. Polska Norma PN-83, *Mechanika lotu samolotów i szybowców*, L-01010.01 do L-01010.10

Model of the Flying Object Guidance onto the Manoeuvring Target

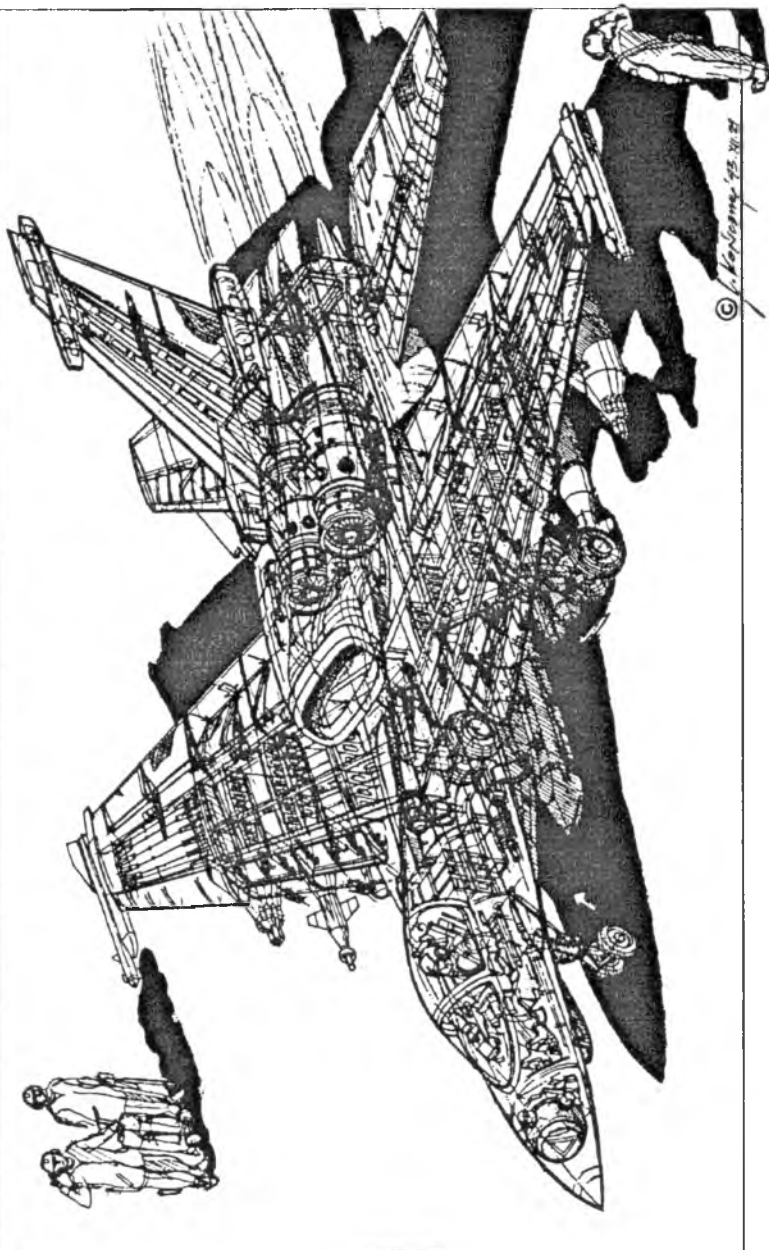
Summary

In the present contribution for a hypothetical anti-aircraft, medium-range missile and the target motion assumed, the mathematical model of missile guidance has been presented in terms of the "three-point" and "half-to-half lead guidance law" methods, respectively.

INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1995



KOBRA 2000



WYZNACZANIE ORIENTACJI PRZESTRZENNEJ STATKU POWIETRZNEGO Z WYKORZYSTANIEM POMIARU WEKTORA PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ

ZDZISŁAW GOSIEWSKI

ALBERT ORTYL

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Krytycznym zakresem pracy bezkardanowego systemu nawigacji inercyjnej jest wyznaczenie wzajemnego położenia katowego dwóch układów współrzędnych – układu pomiarowego (ruchomego) i układu nawigacyjnego (nieruchomego). W układzie pomiarowym, który jest związany ze statkiem powietrznym (SP), odczytujemy składowe wektora przyspieszenia pozornego oraz wektora prędkości katowej ruchu SP względem inercyjnego układu współrzędnych. W celu wyznaczenia pozycji SP należy zmierzone przyspieszenia przeliczyć do nawigacyjnego układu współrzędnych, czyli należy znać wzajemne położenie katowe układu pomiarowego i nawigacyjnego. Mierzac wektor prędkości katowej obrotu układu pomiarowego względem układu inercyjnego można określić wzajemne położenie tych układów współrzędnych, rozwiązując odpowiedni układ równań różniczkowych, w których prędkość katowa jest wielkością wejściową. Przy znanym położeniu katowym układu nawigacyjnego względem układu inercyjnego i wyznaczonym położeniu katowym układu pomiarowego względem układu inercyjnego w prosty sposób obliczamy położenie układu pomiarowego względem nawigacyjnego.

Nowoczesne samoloty wykonują manewry z prędkościami katowymi rzędu $200 \div 400$ °/s. Nakłada to wymagania na jakość i zakresy pomiarowe mierników prędkości katowych, wybór parametrów opisujących orientację przestrzenną SP w funkcji mierzonych prędkości katowych, sposoby dyskretnego rozwiązywania równań różniczkowych, dobór okresu próbkowania oraz szybkość komputera nawigacyjnego.

W niniejszym referacie przedstawiono teoretyczne podejście do analitycznego wyznaczania orientacji przestrzennej SP, fizyczna interpretacja określenia wzajemnego położenia katowego dwóch układów współrzędnych przy pomocy metody kosinusów kierunkowych i parametrów Rodrigeza-Hamiltona, odnośne równania różniczkowe, niektóre aspekty ich numerycznego rozwiązania oraz jakościową analizę porównawczą wybranych metod.

1. Wprowadzenie

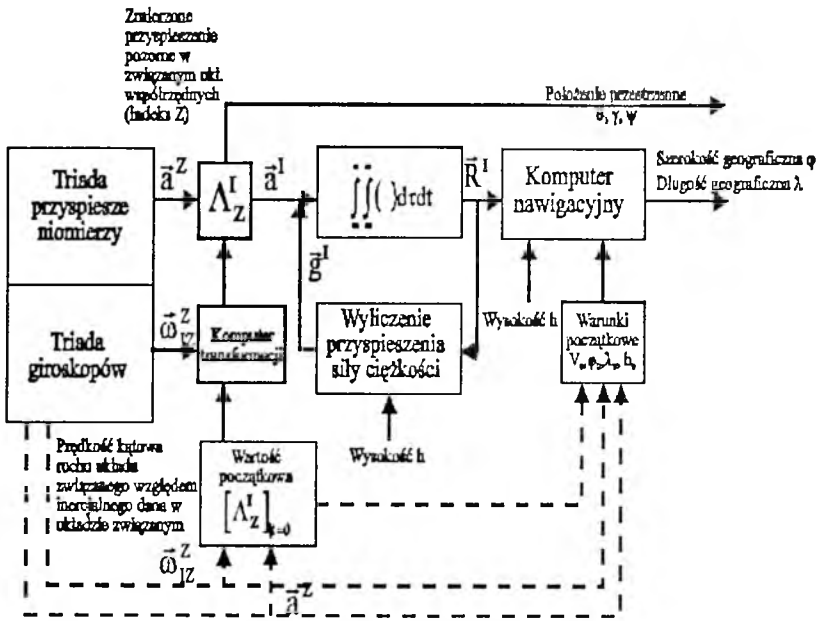
W systemach nawigacji inercjalnej z giroskopowo stabilizowaną platformą (GSP) giroskopy umieszczone na platformie, mierzą składowe prędkości kątovej ruchu statku powietrznego (SP), a układy nadążne wykorzystują je do stabilizacji położenia platformy. Tym sposobem giroskopy i przyspieszeniomierze na GSP są izolowane od ruchu kątowego SP, a platforma w sposób fizyczny modeluje nawigacyjny układ współrzędnych. W znaczny sposób upraszcza to dalsze wyliczenia. Poprzez dwukrotne całkowanie, zmierzonego przez przyspieszeniomierze przyspieszenia pozornego (z uwzględnieniem warunków początkowych) i przeprowadzenie koniecznych korekcyj możemy otrzymać bieżące współrzędne położenia SP.

W bezkardanowych systemach nawigacji inercjalnej (BSNI) elementy pomiarowe są bezpośrednio (lub poprzez układ wibroizolacji) zamontowane na SP. Sygnały wyjściowe z elementów pomiarowych reprezentują przyspieszenie pozorne i prędkość kątową SP względem inercjalnego układu współrzędnych. Parametry te są określone w pomiarowym układzie współrzędnych (prawoskrętny, ortogonalny układ współrzędnych wyznaczony przez osie czułości elementów pomiarowych; zazwyczaj układ ten pokrywa się z układem współrzędnych związanym ze SP – wyznaczonym przez główne osie SP). W celu otrzymania wartości przyspieszenia pozornego w przyjętym nawigacyjnym układzie współrzędnych (np. inercjalnym) komputer musi dokonać transformacji współrzędnych z układu związanego ze SP do układu nawigacyjnego. W tym celu wykorzystuje się sygnały wyjściowe z giroskopów (mierzących ruch kątowy SP w przestrzeni inercjalnej, czyli zmiany jego orientacji przestrzennej) oraz informacje o początkowym położeniu przestrzennym SP (warunki początkowe). Dalsza praca systemu jest analogiczna jak w systemach nawigacji inercjalnej z GSP. Proces ten ilustruje rys.1.

Mierzone przez BSNI prędkości o kilka rzędów przewyższają prędkości kątove działające na elementy pomiarowe zamontowane na GSP, ponieważ te ostatnie mierzą ruch stabilizowanej platformy. Jest to zasadniczy problem jaki należy rozwiązać przy projektowaniu BSNI. W BSNI mierzone prędkości kątove są z jednej strony ograniczone dopuszczalnym progiem nieczułości giroskopów ok. $0.01^\circ/\text{h}$, a z drugiej maksymalną wartością prędkości kątovej SP – $400^\circ/\text{s}$.

Na algorytmy pracy BSNI składają się specyficzne operacje lub procesy matematyczne przy pomocy których cyfrowy komputer przekształca sygnały z elementów pomiarowych na parametry użyteczne do sterowania i nawigacji SP.

Sygnały są mierzone w pomiarowym układzie współrzędnych i są to



Rys. 1. Bezkardanowy system nawigacji inercjalnej pracujący w inercjalnym układzie współrzędnych

prędkości kątowe ruchu SP względem przestrzeni inercjalnej oraz przyspieszenia liniowe (pozorne) środka masy SP względem przestrzeni inercjalnej. Zmierzone prędkości kątowe (przyrosty kątów) wykorzystywane są do obliczenia zmian orientacji przestrzennej SP względem warunków początkowych (początek cyklu obliczeń). Wynikowa funkcja transformacji jest wykorzystywana do przekształcenia zmierzonych przyspieszeń (przyrostów prędkości) z układu pomiarowego do układu nawigacyjnego, gdzie podlegają dalszej obróbce.

Algorytmy systemów bezkardanowych są zawsze kompromisem między dokładnością a kosztami realizacji w pokładowym komputerze nawigacyjnym. Duża liczba iteracji, nowoczesne techniki całkowania i jak najdłuższe słowo maszynowe poprawiają dokładność, lecz podwyższają koszty. Algorytmy są optymalizowane poprzez symulację na komputerach laboratoryjnych.

Wymagane parametry, takie jak położenie przestrzenne, prędkość i pozycja SP oraz ich dokładność są uzależnione od zamierzonych zastosowań systemu – od prostych systemów orientacji do precyzyjnych, autonomicznych systemów nawigacyjnych.

2. Parametry kinematyczne

Zasadniczym zakresem pracy BSNI, różniącym je od systemów kardano-
wych, jest sposób analitycznego określenia orientacji przestrzennej bloku po-
miarowego. Jedyłą dostępną i mierzalną wielkością mogącą do tego służyć
jest wektor prędkości kąto-
wej obrotu bloku pomiarowego (co jest równo-
znaczne z obrotem SP). Ważną rolę odgrywa wybór parametrów kinema-
tycznych odpowiadających trzem stopniom swobody obracającego się ciała
(SP). Istnieje szereg parametrów wykorzystywanych do opisu ruchu kulistego
ciała sztywnego: kosinusy kierunkowe, kąty Eulera i Krylowa, parametry
Cayleya-Kleina i parametry Rodrigeza-Hamiltona. Niektóre z nich są bar-
dziej popularne od innych, drugie mają prostszą interpretację geometryczną
lub prostszy zapis. Przed przystąpieniem do opracowania algorytmu wyzna-
czania orientacji przestrzennej należy dokonać wyboru konkretnego zapisu
matematycznego. Wybór ten powinien być wynikiem kompromisu pomiędzy
dokładnością obliczeń, szybkością, wszechstronnością (przejście przez punkty
osobliwe), niezbędną wielkością pamięci i obciążeniem procesora.

Po wstępnej analizie i rozpatrzeniu własności równań kinematycznych do
dalszych rozważań wybrano kosinusy kierunkowe i kwaterniony. Równania
kinematyczne wyrażone przez kąty Eulera i Krylowa mają punkty osobliwe,
w których układ traci jeden stopień swobody, natomiast parametry Cayleya-
Kleina są zespoloną kombinacją kwaternionów.

Celem rozważań zawartych w niniejszej publikacji jest dokonanie jakości-
wej analizy porównawczej wybranych parametrów ze względu na dokładność
obliczeń.

Jednym z najprostszych sposobów orientacji przestrzennej obracającego się
ciała jest zorientowanie związane z ciałem ortogonalnego (kartezjańskiego)
układu współrzędnych.

Niech z ciałem sztywnym jest związany prawoskrętny, prostokątny układ
współrzędnych E , mający wersory e_1, e_2, e_3 . Ruch ciała sztywnego będziemy
rozpatrywać względem układu I mającego wersory i_1, i_2, i_3 . Układy
współrzędnych E i I będziemy nazywać odpowiednio *układem związanym* i
układem nieruchomym. Przyjmijmy dalej, że początki tych układów są w
jednym punkcie, wokół którego realizowany jest obrót SP.

2.1. Kosinusy kierunkowe

Położenie dowolnej osi e_k układu E w układzie I określone jest trzema

kosinusami kierunkowymi, wiążącymi tę oś z osiami \mathbf{i}_j ($k, j = 1, 2, 3$):

$$a_{k1} = \mathbf{e}_k \mathbf{i}_1 \quad a_{k2} = \mathbf{e}_k \mathbf{i}_2 \quad a_{k3} = \mathbf{e}_k \mathbf{i}_3$$

Układ dziewięciu kosinusów kierunkowych jednoznacznie określa orientację układu związanego \mathbf{E} względem układu nieruchomego \mathbf{I} , wstawiając te kosinusy do macierzy o rozmiarze 3×3 otrzymujemy *macierz kosinusów kierunkowych*:

$$\mathbf{A} = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Z uwagi, że przekształcenie to opisuje ruch ciała sztywnego, to macierz (2.1) jest macierzą przekształcenia ortogonalnego, elementy a_{ij} spełniają warunki ortogonalności:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^3 a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = k \\ 0 & \text{dla } j \neq k \end{cases} \quad (2.2)$$

Warunki ortogonalności są wyrazem właściwości ciała sztywnego, zachowującego niezmienną odległość między dowolnymi jego punktami.

Dowolny wektor układu związanego \mathbf{E} może być przedstawiony przez wektor układu \mathbf{I} przy pomocy następujących związków:

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_k \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{e}_k \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2 + (\mathbf{e}_k \mathbf{i}_3) \mathbf{i}_3 = \sum_j a_{kj} \mathbf{i}_j \quad (2.3)$$

Wykorzystując operację mnożenia macierzy, przekształcenie (2.3) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{I} \quad \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{A}^T \mathbf{E} \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\mathbf{I} = [\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3]^T \quad \mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]^T$$

Wprowadzając macierze kolumnowe składające się z elementów nieruchomego wektora \mathbf{r} w obu układach współrzędnych (odpowiednio \mathbf{I} oraz \mathbf{E}):

$$\mathbf{R}_I = [r_1, r_2, r_3]^T \quad \mathbf{R}'_E = [r'_1, r'_2, r'_3]^T$$

wektor \mathbf{r} można zapisać w postaci:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}'_E{}^T \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{R}'_E = (\mathbf{A} \mathbf{I})^T \mathbf{R}'_E = \mathbf{I}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R}'_E \quad (2.5)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{I}^T \mathbf{R}_I = \mathbf{R}_I^T \mathbf{I}$$

skąd:

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{A}^\top \mathbf{R}'_E \qquad \mathbf{R}'_E = \mathbf{A} \mathbf{R}_I \qquad (2.6)$$

Przekształcenie ortogonalne w postaci (2.4) lub (2.6) jest określone przez macierz \mathbf{A} , którą można rozpatrywać jako operator przekształcenia układu \mathbf{I} w \mathbf{E} , lub operator definiujący przejście między składowymi niezmiennego wektora podczas przekształcania układów współrzędnych. Rozpatrzone przekształcenie ortogonalne określone przez macierz kosinusów kierunkowych \mathbf{A} jest najogólniejszym sposobem definiowania obrotu ciała sztywnego.

Istnieje jednakże jeszcze jeden sposób zdefiniowania obrotu ciała sztywnego, mający inną interpretację przekształcenia ortogonalnego. Rozpatrzmy wektor, położenie którego nie zmienia się względem związanego układu współrzędnych. Wektor ten zmienia swoje położenie w przestrzeni razem z tym układem współrzędnych. Zgodnie z tym wektor \mathbf{r} po przekształceniu układu współrzędnych przechodzi w nowy wektor \mathbf{r}' . Niech składowe wektora \mathbf{r} w nieruchomym układzie współrzędnych oraz składowe wektora \mathbf{r}' w związanym układzie współrzędnych są jednakowe $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}'_E = \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sum_{j=1}^3 r_j \mathbf{i}_j = \mathbf{R}_I^\top \mathbf{I} = \mathbf{R}^\top \mathbf{I} \\ \mathbf{r}' &= \sum_{j=1}^3 r_j \mathbf{e}_j = \mathbf{R}'_E{}^\top \mathbf{E} = \mathbf{R}^\top \mathbf{E} \end{aligned}$$

Uwzględniając zależność (2.4) otrzymujemy przekształcony wektor \mathbf{r}' :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}^\top \mathbf{E} = \mathbf{R}^\top \mathbf{A} \mathbf{I} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{R})^\top \mathbf{I} = \mathbf{R}'^\top \mathbf{I}$$

gdzie \mathbf{R}' – macierz kolumnowa z elementów wektora \mathbf{r}' w układzie \mathbf{I} .

Z powyższego otrzymujemy:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{R} \qquad (2.7)$$

lub w zapisie umownym przy przekształcaniu wektorów:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{r}$$

Zapisy (2.6) i (2.7) formalnie są do siebie podobne. Jednakże wzór (2.6) określa współrzędne jednego i tego samego wektora w różnych układach współrzędnych, natomiast (2.7) określa faktycznie różne wektory w jednym układzie współrzędnych (w naszym przypadku w układzie \mathbf{I}). W wyniku tego, przekształcenie \mathbf{R} na \mathbf{R}' w przypadku (2.6) realizowane jest przez macierz \mathbf{A}^\top , natomiast w przypadku (2.7) – przez macierz odwrotną \mathbf{A}^\top .

2.2. Parametry Rodrigeza-Hamiltona

Niech w trójwymiarowej przestrzeni określonej układem \mathbf{I} i wersorami $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$ dany będzie wektor \mathbf{r} . Niech będzie dana macierz $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ określająca liniowe przekształcenie ortogonalne wektora \mathbf{r} w wektor \mathbf{r}' :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{B}\mathbf{r}$$

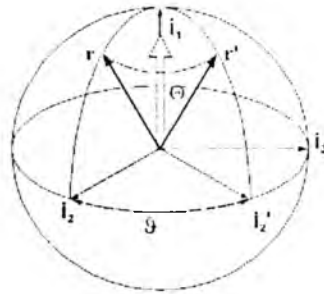
Rozpatrzmy czterowymiarową przestrzeń ponad zespoloną \mathbf{H} określoną jednościami $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$ formalnie pokrywającymi się z wersorami trójwymiarowego układu \mathbf{I} . Niech w przestrzeni \mathbf{H} będzie zdefiniowana operacja obrotu, określona przez kwaternion jednostkowy, która przekształca wektor \mathbf{r} w wektor \mathbf{r}' :

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda} \quad (2.8)$$

Wektor \mathbf{r}' otrzymujemy obracając \mathbf{r} po stożku wokół osi $\text{vect}\Lambda$ o podwójny kąt $\text{arc}\Lambda$. Jeśli:

$$\Lambda = \cos \frac{\vartheta}{2} + \zeta \sin \frac{\vartheta}{2}$$

to \mathbf{r}' otrzymujemy obracając \mathbf{r} wokół osi wektora ζ o kąt ϑ (rys.2).



Rys. 2.

Z powyższego wynika, że grupie obrotów w trójwymiarowej przestrzeni \mathbf{I} , określonym przez ortogonalną macierz \mathbf{B} , odpowiada operacja obrotu w przestrzeni ponad zespolonej zdefiniowana przez kwaternion Λ . Wobec tego, znając elementy macierzy \mathbf{B} można określić elementy kwaternionu Λ :

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 3\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 = 4\lambda_0^2 - 1$$

$$\lambda_0 = \pm \frac{\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}}{2}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \pm \frac{b_{32} - b_{23}}{4\lambda_0} = \frac{b_{32} - b_{23}}{2\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}} \\ \lambda_2 &= \pm \frac{b_{13} - b_{31}}{4\lambda_0} = \frac{b_{13} - b_{31}}{2\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}} \\ \lambda_3 &= \pm \frac{b_{21} - b_{12}}{4\lambda_0} = \frac{b_{21} - b_{12}}{2\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Przedstawmy kwaternion przekształcenia \mathbf{A} jako funkcję trójwymiarowego wektora:

$$\frac{\mathbf{A}}{\lambda_0} = \mathbf{1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \mathbf{i}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \mathbf{i}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \mathbf{i}_3 = 1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda_0} = \mathbf{1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Theta} \quad (2.10)$$

która charakteryzuje kwaternion \mathbf{A} jednym wektorem:

$$\boldsymbol{\Theta} = 2 \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda_0} \quad (2.11)$$

Wektor $\boldsymbol{\Theta}$ nazywamy *wektorem ruchu kulistego*. Wykorzystując własności kwaternionu otrzymujemy, że wektor ruchu kulistego wynosi:

$$\boldsymbol{\Theta} = 2\zeta \mathbf{1} g \frac{\vartheta}{2} \quad (2.12)$$

Elementy kwaternionu można teraz zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} & \lambda_1 &= \gamma_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \\ \lambda_2 &= \gamma_2 \sin \frac{\vartheta}{2} & \lambda_3 &= \gamma_3 \sin \frac{\vartheta}{2}\end{aligned}\quad (2.13)$$

gdzie $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – kosinusy kierunkowe wektora $\boldsymbol{\Theta}$ względem osi rozpatrywanego układu.

Elementy kwaternionu w układzie przekształcanym przez ten kwaternion, podane w postaci (2.13) nazywane są parametrami Rodrigeza-Hamiltona. Kwaternion taki ma równe elementy w obu układach współrzędnych.

Kwaternion, którego elementami będą parametry Rodrigeza-Hamiltona będzie oznaczany gwiazdką i jest kwaternionem *własnym* przekształcenia.

Elementy macierzy przekształcenia $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$ wyrażone przez parametry Rodrigeza-Hamiltona określa zależność:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

zaś odwrotnie wzory (2.9).

3. Równania kinematyczne

Równania kinematyczne wiążą wektor prędkości kątovej ruchu ciała sztywnego (SP) z parametrami kinematycznymi. Postać tych równań zależy od wyboru parametrów kinematycznych – dla kosinusów kierunkowych czy też parametrów Rodrigeza-Hamiltona są one różne.

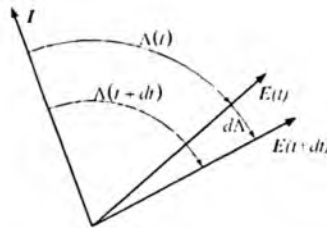
3.1. Kwaterniony

Przy wyprowadzaniu równań kinematycznych wektor ω wyrażamy jedynie przez jego składowe rzutowane na osie układu \mathbf{I} lub \mathbf{E} (a nie jakiegokolwiek innego układu).

Będziemy rozpatrywać nieruchomy układ współrzędnych \mathbf{I} i poruszający się względem niego z prędkością kątową ω układ współrzędnych \mathbf{E} . Niech przejście z układu \mathbf{I} do \mathbf{E} określa kwaternion Λ przy pomocy następującej operacji:

$$\mathbf{E} = \Lambda \circ \mathbf{I} \circ \bar{\Lambda} \quad (3.1)$$

Wskutek wzajemnego ruchu układów współrzędnych, kwaternion Λ będzie wielkością zmienną. Oznacza to, że elementy kwaternionu λ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) będą funkcjami czasu $\lambda_i(t)$. Aby otrzymać wielkość prędkości zmian elementów kwaternionu, rozpatrzmy dwa sąsiednie położenia układu \mathbf{E} w momencie czasu t i $t + dt$. Jasne jest, że położenia te będą określone względem nieruchomego układu współrzędnych \mathbf{I} przez kwaterniony $\Lambda(t)$ i $\Lambda(t + dt)$. Z drugiej strony, wzajemne położenie układu \mathbf{E} w momentach t i $t + dt$ będzie zależęć od prędkości kątovej ruchu układu \mathbf{E} i będzie określone przez kwaternion nieskończenie małego obrotu $d\Lambda = 1 + \frac{1}{2}\omega dt$ (rys.3).



Rys. 3.

Można stąd otrzymać zależności między kwaternionami $\Lambda(t)$, $\Lambda(t + dt)$ i $d\Lambda$. Jednakże celowe jest rozpatrzenie na jaki układ współrzędnych należy

rzutować otrzymaną zależność, tzn. jakie odwzorowanie danych kwaternionów należy wykorzystywać. Jeżeli kwaternion $d\Lambda$ chcemy wyrazić w składowych na osiach układu \mathbf{E} – wówczas jego elementami będą składowe prędkości kątowej wzdłuż ruchomego układu współrzędnych, lub na osiach układu \mathbf{I} – w tym przypadku elementami kwaternionu $d\Lambda$ będą składowe prędkości kątowej wzdłuż nieruchomego układu współrzędnych. W pierwszym przypadku, oznaczając kwaternion odwzorowujący wektor ω na układ \mathbf{E} przez $\omega_E = \mathbf{0} + \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3$, otrzymujemy:

$$\Lambda^*(t + dt) = \Lambda^*(t) \circ d\Lambda_E^* \quad (3.2)$$

$$\Lambda^*(t + dt) = \Lambda^*(t) \circ \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2} \omega dt \right)$$

gdzie:

- $\Lambda^*(t), \Lambda^*(t + dt)$ – kwaterniony, których elementami są parametry Rodrigeza-Hamiltona, przekształcające układ \mathbf{I} w układy $\mathbf{E}(t)$ i $\mathbf{E}(t + dt)$,
- $d\Lambda_E^*$ – kwaternion, którego elementy są składowymi prędkości kątowej wzdłuż osi ruchomego układu współrzędnych $\mathbf{E}(t)$.

W drugim przypadku:

$$\Lambda^*(t + dt) = d\Lambda_I \circ \Lambda^*(t) \quad (3.3)$$

$$\Lambda^*(t + dt) = \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2} \omega_I dt \right) \circ \Lambda^*(t)$$

gdzie:

- ω_I – kwaternion odwzorowujący prędkość kątową ω na układ \mathbf{I} , $\omega_I = \mathbf{0} + \Omega_1 \mathbf{i}_1 + \Omega_2 \mathbf{i}_2 + \Omega_3 \mathbf{i}_3$,
- $d\Lambda_I^*$ – kwaternion, którego elementami są składowe wektora prędkości kątowej wzdłuż osi wyjściowego (nieruchomego) układu współrzędnych.

Wzory (3.2) oraz (3.3) możemy zapisać [1] w następującej postaci:

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} = \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \omega_E \quad (3.4)$$

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} = \frac{1}{2} \omega_E \circ \Lambda^* \quad (3.5)$$

Przypomnę, że kwaternion Λ^* określa przejście z układu współrzędnych \mathbf{I} do układu \mathbf{E} przy pomocy operacji (3.1).

3.2. Kosinusy kierunkowe

W celu wyprowadzenia równań kinematycznych wiążących pochodną macierzy kosinusów z elementami wektora prędkości kątowej wykorzystamy zależność (2.7), w której macierz \mathbf{A}^T zastąpimy równą jej macierzą \mathbf{B} :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{B}\mathbf{r} \quad \mathbf{R}' = \mathbf{B}\mathbf{R} \quad (3.6)$$

Przekształcenie to opisuje zmianę wektora, nieruchomego względem związanego układu współrzędnych, wynikająca z ruchu tego układu współrzędnych. Składowe wektora \mathbf{r} w nieruchomym układzie współrzędnych oraz składowe wektora \mathbf{r}' w związanym układzie współrzędnych są jednakowe $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}'_E = \mathbf{R}$, skąd wynika, że macierz \mathbf{R} jest stała.

Różniczkując zależność (3.6) otrzymujemy:

$$\dot{\mathbf{R}}' = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{R} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T\mathbf{R}' \quad (3.7)$$

Jeżeli zmiana wektora \mathbf{R}' wynika tylko z obrotu z prędkością kątową $\boldsymbol{\Omega}_I$ to [1]:

$$\dot{\mathbf{R}}' = \boldsymbol{\Omega}_I\mathbf{R}' \quad (3.8)$$

Macierz $\boldsymbol{\Omega}_I$ we wzorze (3.8) ma postać:

$$\boldsymbol{\Omega}_I = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie składowe wektora $\boldsymbol{\omega}$ w układzie I oznaczamy Ω_i tj.:

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 + \Omega_3\mathbf{i}_3$$

Porównując wzory (3.7) i (3.8) otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\Omega}_I = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T \quad (3.9)$$

Mnożąc (3.9) prawostronnie przez niezerową macierz \mathbf{B} otrzymujemy:

$$\dot{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Omega}_I\mathbf{B} \quad (3.10)$$

Jest to równanie kinematyczne dla kosinusów kierunkowych, w którym występują składowe wektora prędkości kątowej rzutowane na osie nieruchomego układu współrzędnych.

W drugim przypadku, gdy znane są składowe wektora prędkości kątowej w ruchomym układzie współrzędnych \mathbf{E} równanie kinematyczne ma postać:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\Omega_E \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\Omega_E = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$$

4. Rozwiązanie równań kinematycznych

Równania kinematyczne w BSN1 są rozwiązywane w sposób dyskretny z bardzo dużą częstotliwością powtarzania T (uaktualniania funkcji transformacji). Wymaganie to jest uwarunkowane dużą manewrowością współczesnych samolotów, a co za tym idzie, zmiana kąta w przyjętej jednostce czasu może być duża, np. przy prędkości $100^\circ/\text{s}$ $T = 0.01$ s następuje zmiana kąta o 1° . Równocześnie istniejące mierniki prędkości kątowej wyprowadzają informację w postaci całki prędkości kątowej w przedziale całkowania $(t, t+T)$, co wpływa na postać algorytmów.

Do analizy porównawczej wybrano kosinusy kierunkowe oraz kwaterniony.

Równania kinematyczne uaktualniania macierzy kosinusów kierunkowych (3.11), kwaternionów (3.4) mają ogólną postać:

$$\frac{dx}{x} = \alpha$$

którego rozwiązanie ma postać:

$$\log x = \int_t^{t+T} \alpha \, d\tau = \Delta\alpha$$

skąd:

$$x = e^{\Delta\alpha}$$

Tabela 1

Parametr kinematyczny	Równanie kinematyczne	Prędkość kąтова
Kwaterniony	(3.4)	ω_E
	(3.5)	ω_I
Kosinusy kierunkowe	(3.11)	Ω_E
	(3.10)	Ω_I

4.1. Kosinusy kierunkowe

Dla kosinusów kierunkowych równanie kinematyczne ma postać:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\Omega_E \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\Omega_E = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$$

jest skośnie symetryczną macierzą utworzoną ze składowych wektora prędkości kątovej $\boldsymbol{\omega}$ w układzie ruchomym \mathbf{E} .

Równanie (4.1) jest macierzowym jednorodnym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach [5,6]. Jeżeli kierunek wektora prędkości kątovej w przedziale całkowania jest stały, to rozwiązanie równania (4.1) można zapisać w prostej postaci:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t_0) \mathbf{e}^{\Theta} \quad (4.2)$$

gdzie $\mathbf{B}(t_0)$ – warunki początkowe \mathbf{B} oraz:

$$\Theta = \int_{t_0}^{t+T} \Omega_E dt = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozkładając macierz \mathbf{e}^{Θ} w szereg Taylora oraz uwzględniając, że $\Theta^3 = -\Theta\theta_0^2$, $\Theta^5 = \Theta\theta_0^4$ otrzymujemy:

$$\exp \Theta = I_{[3 \times 3]} + \Theta + \frac{\Theta^2}{2!} - \frac{\Theta\theta_0^2}{3!} - \frac{\Theta^2\theta_0^2}{4!} + \frac{\Theta\theta_0^4}{5!} +$$

$$+ \frac{\Theta^2\theta_0^4}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{\Theta\theta_0^{2k}}{(2k+1)!} + (-1)^k \frac{\Theta^2\theta_0^{2k}}{2(2k+1)!} \dots \quad k \rightarrow \infty$$

Grupując wyrazy z Θ pierwszego rzędu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Theta - \frac{\Theta\theta_0^2}{3!} + \frac{\Theta\theta_0^4}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{\Theta\theta_0^{2k}}{(2k+1)!} + \dots = \\ = \frac{\Theta}{\theta_0} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{3!} + \frac{\theta_0^4}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{\theta_0^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \right] = \Theta \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \end{aligned}$$

Sumując pozostałe wyrazy otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_{[3 \times 3]} + \frac{\Theta^2}{2!} - \frac{\Theta^2\theta_0^2}{4!} + \frac{\Theta^2\theta_0^4}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{\Theta^2\theta_0^{2k}}{2(k+1)!} + \dots = \\ = I_{[3 \times 3]} + \frac{\Theta^2}{\theta_0^2} \left[\frac{\theta_0^2}{2!} - \frac{\theta_0^4}{4!} + \frac{\theta_0^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{\theta_0^{2(k+1)}}{2(k+1)!} + \dots \right] = \\ = I_{[3 \times 3]} + \frac{\Theta^2}{\theta_0^2} \left[1 - \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2!} + \frac{\theta_0^4}{4!} - \frac{\theta_0^6}{6!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{\theta_0^{2(k+1)}}{2(k+1)!} + \dots \right) \right] = \\ = I_{[3 \times 3]} + \Theta^2 \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0^2} \end{aligned}$$

Ostatecznie macierz e^Θ ma postać:

$$e^\Theta = I + \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \Theta + \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0^2} \Theta^2 = I + S_\infty \Theta + C_\infty \Theta^2$$

która po rozwinięciu do zapisu macierzowego wygląda następująco:

$$e^\Theta = \begin{bmatrix} 1 - (\theta_2^2 + \theta_3^2)C_\infty & \theta_1\theta_2C_\infty - \theta_3S_\infty & \theta_3\theta_1C_\infty + \theta_2S_\infty \\ \theta_1\theta_2C_\infty + \theta_3S_\infty & 1 - (\theta_3^2 + \theta_1^2)C_\infty & \theta_2\theta_3C_\infty - \theta_1S_\infty \\ \theta_3\theta_1C_\infty - \theta_2S_\infty & \theta_2\theta_3C_\infty + \theta_1S_\infty & 1 - (\theta_1^2 + \theta_2^2)C_\infty \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

gdzie:

$$\theta_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \theta_i^2} \quad C_\infty = \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0^2} \quad S_\infty = \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \quad (4.4)$$

Współczynniki C_∞ i S_∞ wyrażone są przez funkcje trygonometryczne, które do realizacji na komputerze cyfrowym, aproksymuje się szeregiem MacLaurina. Wartości współczynników dla n wyrazów szeregu przedstawione są w tabeli 2.

Tabela 2

n	C_n	S_n
1	0	1
2	1/2	1
3	1/2	$1 - \theta_0^2/6$
4	$1/2 - \theta_0^2/24$	$1 - \theta_0^2/6$

4.2. Kwaterniony

Dla kwaternionów równanie kinematyczne ma postać:

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} = \frac{1}{2}\Lambda^* \circ \omega_E \quad (4.5)$$

gdzie:

$$\omega_E = \mathbf{0} + \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3$$

Rozwiązanie równania (4.5) ma postać:

$$\Lambda(t+T) = \Lambda(t) \circ \exp\left[\frac{1}{2} \int_t^{t+T} (\omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3) d\tau\right] = \Lambda(t) \circ \exp\left[\frac{\Theta}{2}\right] \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\Theta = \mathbf{0} + \theta_1 \mathbf{i}_1 + \theta_2 \mathbf{i}_2 + \theta_3 \mathbf{i}_3$$

$$\theta_i = \int_t^{t+T} \omega_i d\tau \quad i = 1, 2, 3$$

Z iloczynu dwóch kwaternionów:

$$\left[\frac{\Theta}{2}\right]^2 = -\left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\theta_i}{2}\right)^2\right] = -\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2$$

Rozwijając kwaternion $\exp\left[\frac{\Theta}{2}\right]$ w szereg Taylora otrzymujemy:

$$\exp\left[\frac{\Theta}{2}\right] = 1 + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]}{1!} + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^2}{2!} + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^3}{3!} + \dots + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^k}{k!} + \dots \quad k \rightarrow \infty$$

Grupując wyrazy o parzystych potęgach otrzymujemy:

$$1 + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^2}{2!} + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^4}{4!} + \dots + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^{2k}}{(2k)!} + \dots =$$

$$1 - \frac{\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4}{4!} \pm \dots + \frac{\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \dots = \cos \frac{\theta_0}{2}$$

Grupując pozostałe wyrazy otrzymujemy:

$$\left[\frac{\Theta}{2}\right] + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^3}{3!} + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^5}{5!} + \dots + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots =$$

$$\left[\frac{\Theta}{2}\right] - \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2}{3!} + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4}{5!} \pm \dots + \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{2k}}{(2k+1)!} (-1)^k \dots =$$

$$= \frac{\left[\frac{\Theta}{2}\right]}{\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \left(\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \frac{\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^5}{5!} \pm \dots + \frac{\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \dots \right) = \Theta \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\theta_0}$$

Zatem kwaternion $\exp\left[\frac{\Theta}{2}\right]$ wyraża się wzorem:

$$\exp\left[\frac{\Theta}{2}\right] = (\theta_1 \mathbf{i}_1 + \theta_2 \mathbf{i}_2 + \theta_3 \mathbf{i}_3) \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\theta_0} + \cos \frac{\theta_0}{2} =$$

$$= (\theta_1 \mathbf{i}_1 + \theta_2 \mathbf{i}_2 + \theta_3 \mathbf{i}_3) S_\infty + C_\infty \quad (4.7)$$

gdzie:

$$\theta_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \theta_i^2} \quad C_\infty = \cos \frac{\theta_0}{2} \quad S_\infty = \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\theta_0} \quad (4.8)$$

Po wymnożeniu kwaternionów otrzymujemy:

$$\lambda_0(+T) = \frac{1}{2} [\lambda_0 C_\infty - S_\infty (\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \lambda_3 \theta_3)]$$

$$\lambda_1(+T) = \frac{1}{2} [\lambda_1 C_\infty + S_\infty (\lambda_0 \theta_1 + \lambda_2 \theta_3 - \lambda_3 \theta_2)]$$

$$\lambda_2(+T) = \frac{1}{2} [\lambda_2 C_\infty + S_\infty (\lambda_3 \theta_1 + \lambda_0 \theta_2 - \lambda_1 \theta_3)]$$

$$\lambda_3(+T) = \frac{1}{2} [\lambda_3 C_\infty + S_\infty (\lambda_1 \theta_2 - \lambda_2 \theta_1 + \lambda_0 \theta_3)] \quad (4.9)$$

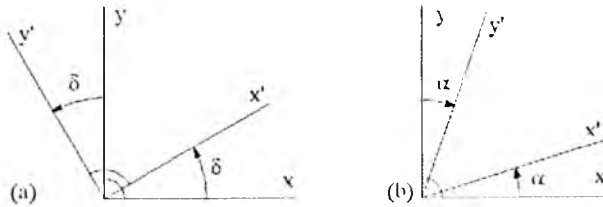
Współczynniki C_∞ i S_∞ wyrażone są przez funkcje trygonometryczne, które do realizacji na komputerze cyfrowym, aproksymuje się przyjmując n wyrazów z rozwinięcia w szereg Taylora. Wartości współczynników dla n wyrazów szeregu przedstawione są w tabeli 3.

Tabela 3

n	C_n	S_n
1	1	1/2
2	$1 - \theta_0^2/8$	1/2
3	$1 - \theta_0^2/8$	$1/2(1 - \theta_0^2/24)$
4	$1 - (\theta_0^2/8) + (\theta_0^4/384)$	$1/2(1 - \theta_0^2/24)$

5. Błędy transformacji

Generalnie, dla wszystkich metod transformacji można wyszczególnić trzy rodzaje błędów: błąd przekoszenia, modulu i obrotu [5,7,8,9]. Bardzo ważna jest analiza wielkości tych błędów, gdyż warunkuje to optymalny dobór metody transformacji możliwej do wykorzystania w projektowanym algorytmie orientacji przestrzennej.



Rys. 4. Błąd obrotu (a), błąd przekoszenia (b)

Rozpatrzmy przykład dwuwymiarowy. Na rys.4 xy jest prostokątnym układem współrzędnych, mającym właściwą (z naszego punktu widzenia) orientację. Na rys.4a układ $x'y'$ jest obrócony względem xy o kąt δ jednakże osie x' i y' są wzajemnie prostopadłe. Błąd ten nazywamy błędem obrotu. Na rys.4b osie x' i y' są obrócone, lecz w przeciwnych kierunkach, o kąt α . Nie tworzą prostokątnego układu współrzędnych. Błąd ten nazywany jest *błędem przekoszenia*. Obracając tylko oś y' można doprowadzić sytuację z rys.4b do rys.4a, co wyeliminuje błąd przekoszenia, jednakże powstanie błąd

obrotu. Trzecim błędem, który może wystąpić podczas przetwarzania macierzy jest *błąd modulu*. Wystąpi on wówczas, gdy wektor jednostkowy po przekształceniu nie będzie wektorem jednostkowym.

Niech rozpatrywany wektor będzie wektorem jednostkowym, którego składowe wzdłuż odpowiednich osi nieruchomego układu współrzędnych \mathbf{I} opisują następujące wzory:

$$R_{I1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_{I2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_{I3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Po przekształceniu do układu związanego \mathbf{E} , składowe wektora będą kolumnami macierzy \mathbf{B} :

$$R_{E1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \quad R_{E2} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \quad R_{E3} = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Dla powyższych wektorów błąd modulu będzie rozumiany jako różnica długości wektora przekształconego i wektora jednostkowego:

$$\varepsilon_i = \sqrt{b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + b_{3i}^2} - 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

Powyższy wzór można aproksymować szeregiem potegowym, w którym pozostawiono tylko wyraz najniższego rzędu:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + b_{3i}^2 - 1) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

Przez błąd przekoszenia rozumiemy różnicę pomiędzy 90° a kątem zawartym pomiędzy osiami układu na rys.4b. Błąd ten określamy z iloczynu skalarnego wektorów:

$$\varepsilon_i = \sin^{-1}(b_{1j}b_{1k} + b_{2j}b_{2k} + b_{3j}b_{3k} - 1) \quad (5.5)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad j = 2, 3, 1 \quad k = 3, 1, 2$$

Aproksymując szeregiem potegowym, w którym pozostawiono tylko wyraz najniższego rzędu otrzymujemy:

$$\varepsilon_i = b_{1j}b_{1k} + b_{2j}b_{2k} + b_{3j}b_{3k} \quad (5.6)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad j = 2, 3, 1 \quad k = 3, 1, 2$$

Rozpatrzone dwa błędy wynikają z warunku ortogonalności macierzy transformacji.

Trzeci błąd, błąd obrotu, reprezentuje błąd orientacji przekształconego wektora względem wektora przekształconego przez macierz idealną. O ile bieżąca macierz jest ortogonalna, to błąd obrotu można zdefiniować jako przekształcenie przez macierz błędu symbol ε :

$$\varepsilon = \mathbf{B}_n \mathbf{B}_\infty^T \quad (5.7)$$

gdzie \mathbf{B}_n jest macierzą bieżącą, a \mathbf{B}_∞ – macierzą idealną. Niech:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(e_{kj} - e_{jk}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.8)$$

Ze wzoru (4.3) otrzymujemy:

$$\varepsilon_i = \theta_i \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.9)$$

5.1. Analiza błędów macierzy kosinusów kierunkowych

Błąd modułu można wyznaczyć stosując wzór (5.1) do (4.3) z uwzględnieniem wielkości z tabeli 2:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(\theta_j^2 + \theta_k^2)(S_n^2 - 2C_n + \theta_0^2 C_n^2) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.10)$$

Błąd przekoszenia otrzymujemy stosując zależność (5.6) do (4.3):

$$\varepsilon_i = -\theta_j \theta_k (S_n^2 - 2C_n + \theta_0^2 C_n^2) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

Błąd obrotu otrzymujemy stosując (5.10) i (5.11) do (4.3)

$$\varepsilon_i = \theta_i [S_n - S_\infty + \theta_0^2 (C_n S_\infty - S_n C_\infty)] \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.12)$$

Wartości błędów z uwzględnieniem współczynników z tabeli 2 przedstawione są w tabeli 4. Zauważmy, że zmniejszenie błędu obrotu można osiągnąć zwiększając błędy przekoszenia i modułu. Te ostatnie można skompensować dokonując okresowej korekcji ortogonalności macierzy.

5.2. Analiza błędów przetwarzania kwaternionów

Błąd modulu otrzymujemy wykorzystując (5.3) we wzorze (2.14):

$$\varepsilon_i = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.13)$$

Wynika z tego, że błąd modulu jest zerowy, gdy kwaternion jest unormowany ($\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$). Stosując (5.13) do (4.7) otrzymujemy:

$$\varepsilon_i = \theta_0^2 S_n^2 + C_n^2 - 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.14)$$

Wstawiając wartości S_n i C_n z tabeli 3 otrzymujemy wyrażenia zawarte w tabeli 4.

Błąd przekoszenia otrzymujemy stosując (5.6) do (2.14):

$$\varepsilon_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.15)$$

Błąd obrotu wyznaczamy jako podwójny iloczyn aktualnie wyliczonego kwaternionu i odwrotnego kwaternionu idealnego:

$$\varepsilon_i = 2\Lambda_n \circ \Lambda_\infty^{-1} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.16)$$

Przyjmując, że kwaternion jest unormowany to $\Lambda^{-1} = \tilde{\Lambda}$. Stosując zależność (5.16) do (4.7) otrzymujemy:

$$\varepsilon_i = 2(C_n C_\infty + \theta_i^2 S_n S_\infty) + 2\theta_i(S_n C_\infty - C_n S_\infty) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.17)$$

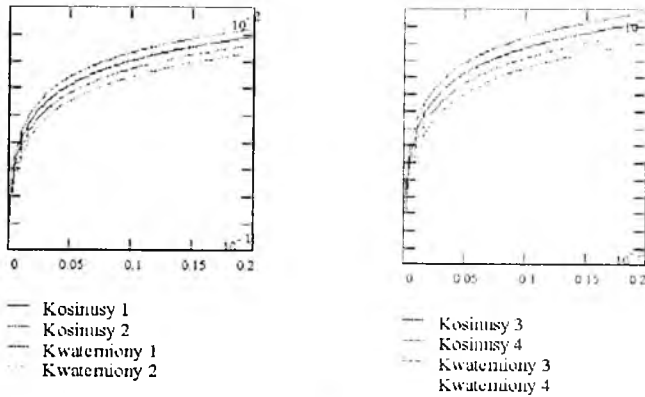
Przyjmując, że wyrażenia w pierwszym nawiasie (5.17) są wyrazami małymi wyższych rzędów otrzymujemy:

$$\varepsilon_i = 2\theta_i(S_n C_\infty - C_n S_\infty) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.18)$$

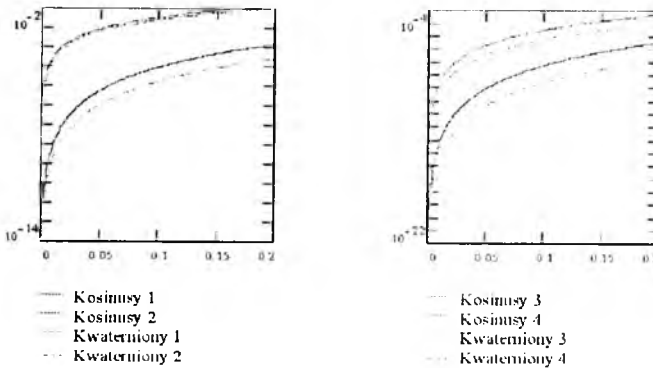
Wstawiając do wzoru (5.18) wartości z tabeli 3, rozwijając w szereg MacLaurina oraz pomijając wyrazy małe wyższych rzędów otrzymujemy zależności na błędy obrotu przedstawione w tabeli 4.

Tabela 4

	Błąd obrotu		Błąd przekosz.		Błąd modulu	
	Kosin.	Kwatern.	Kosin.	Kwatern.	Kosin.	Kwatern.
1	$-\frac{\theta_0^2}{3}\theta_i$	$-\frac{\theta_0^2}{12}\theta_i$	$-\theta_j\theta_k$	0	$\frac{1}{2}(\theta_j^2 + \theta_k^2)$	$\frac{\theta_0^2}{4}$
2	$\frac{\theta_0^2}{6}\theta_i$	$\frac{\theta_0^2}{24}\theta_i$	$-\theta_0^2\theta_j\theta_k$	0	$\frac{\theta_0^2}{8}(\theta_j^2 + \theta_k^2)$	$\frac{\theta_0^4}{64}$
3	$\frac{\theta_0^4}{30}\theta_i$	$\frac{\theta_0^4}{480}\theta_i$	$\frac{\theta_0^2}{12}\theta_j\theta_k$	0	$-\frac{\theta_0^2}{24}(\theta_j^2 + \theta_k^2)$	$-\frac{\theta_0^4}{192}$
4	$-\frac{\theta_0^6}{120}\theta_i$	$-\frac{\theta_0^6}{1920}\theta_i$	$\frac{\theta_0^4}{72}\theta_j\theta_k$	0	$-\frac{\theta_0^4}{144}(\theta_j^2 + \theta_k^2)$	$-\frac{\theta_0^6}{4608}$



Rys. 5. Błąd obrotu dla algorytmów: (a) 1-go i 2-go rzędu, (b) 3-go i 4-go rzędu w funkcji kroku obliczeń T



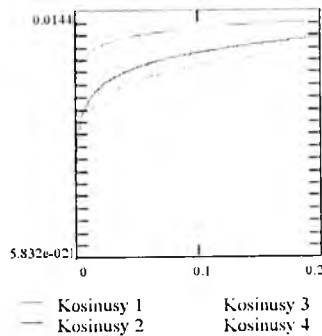
Rys. 6. Błąd skali algorytmów: (a) 1-go i 2-go rzędu, (b) 3-go i 4-go rzędu w funkcji kroku obliczeń T

Wynik obliczeń numerycznych dla różnych kroków obliczeń $T \in (0.01 \div 0.2)$ przedstawione są na rys.5÷7.

Porównanie dokładności obliczeń metodą kosinusów kierunkowych i kwaternionów można również przeprowadzić wyznaczając sumaryczny błąd obcięcia szeregu Taylora [10].

Poszukując wariacji z różnicy macierzy \mathbf{B} kolejnym kroku i uwzględniając współczynniki z tabeli 2 [11] otrzymujemy zależności na sumaryczny błąd obcięcia na jednym kroku obliczeń T dla metody kosinusów kierunkowych:

$$\delta \mathbf{B}_i(t+T) - \delta \mathbf{B}_i(t) = \frac{1}{(i+1)!} \Theta^{i+1} \mathbf{B}_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.19)$$



Rys. 7. Błąd przekoszenia dla algorytmów 1-go, 2-go, 3-go i 4-go rzędu w funkcji kroku T

gdzie indeks i przy macierzach oznacza rząd algorytmu.

Kryterium wielkości macierzy jest jej norma, dlatego do analizy błędów przyjmujemy oceny:

$$D_i(t) = \frac{1}{(i+1)!} \|\Theta^{i+1} \mathbf{B}_i(t)\| \quad (5.20)$$

gdzie $D_i(t)$ – normy macierzy błędów wywołanych obcięciem wyrazów szeregu, rozumiana jako największa z jej wartości osobliwych [12].

Postępując analogicznie ze wzorem (4.6) i tabelą 3 otrzymujemy zależności na sumaryczny błąd obcęcia na jednym kroku obliczeń T dla metody kwaternionów:

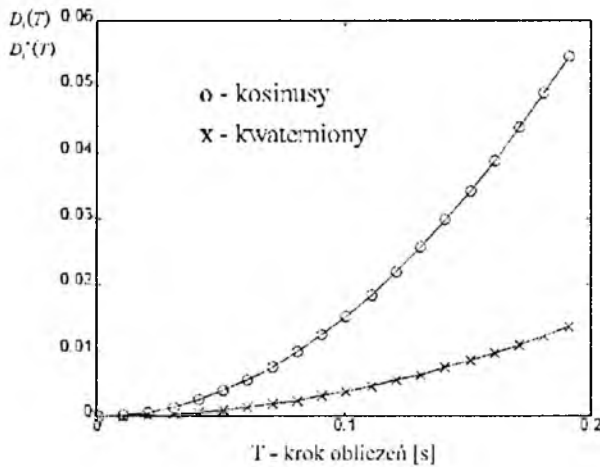
$$D_i^*(t) = \frac{1}{(i+1)! 2^{i+1}} \|\Theta^{i+1} \Lambda_i(t)\| \quad (5.21)$$

gdzie $D_i^*(t)$ – normy macierzy błędów wywołanych obcięciem wyrazów szeregu.

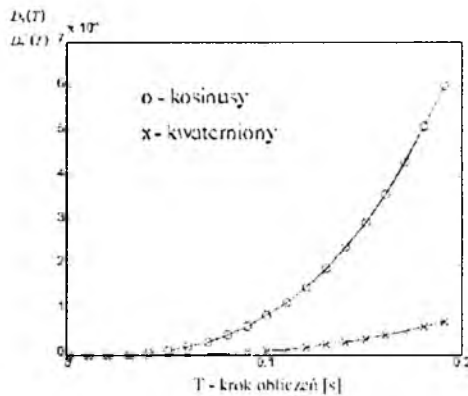
Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone dla $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega = 1$ [s^{-1}] i przedstawione na rys.8 i 9.

6. Wnioski

Porównanie wyników pozwala wnioskować, że wykorzystanie kwaternionów oraz algorytmów wyższych rzędów prowadzi do podwyższenia dokładności obliczeń. Błędy przekoszenia i modulu można zmniejszyć sprawdzając ortogonalność macierzy lub normę kwaternionu, a następnie dokonując ich korekcji. Dobór rzędu algorytmu powinien być jednak optymalizowany pod względem



Rys. 8. Błąd obciążenia dla algorytmów 1-go rzędu



Rys. 9. Błąd obciążenia dla algorytmów 2-go rzędu

szybkości obliczeń oraz obciążenia procesora, aby relatywnie mały wzrost dokładności nie był osiągnięty znacznym spowolnieniem obliczeń. Ze wstępnych szacunków wynika, że algorytmy 2-go rzędu powinny zapewnić wystarczającą dokładność.

Otrzymane wyniki będą bardzo pomocne przy projektowaniu algorytmu bezkardanowego systemu orientacji przestrzennej.

Literatura

1. BRANEC W.N., ŠMYGLEVSKIJ I.P., *Primenenie kwaternionov v zadačach orientacii tverdogo tela*, Izdatelstvo Nauka, Moskwa 1973
2. LEYKO J., *Mechanika ogólna*, PWN, Warszawa 1980
3. PN-83/L-01010.00, *Mechanika lotu samolotów i śmigłowców. Terminologia*
4. VANBRONKHORST A., *Strapdown System Algorithms*, AGARD, 1983
5. WILCOX J.C., *A New Algorithm for Strapped-Down Inertial Navigation*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 5, 796-802, 1967
6. LEBEDEV R.K., *Stabilizacija letatel'nogo apparata besplatformennoj inercialnoj sistemoj*, Mašinostroenie, Moskwa 1977
7. MORTENSEN R.E., *Strapdown Guidance Error Analysis*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 10, 4, 451-457, 1974
8. JIANG Y.F., LIN Y.P., *Error Analysis of Quaternion Transformations*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 27, 4, 634-638, 1991
9. JIANG Y.F., LIN Y.P., *Improved Strapdown Coning Algorithms*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 28, 2, 484-489, 1992
10. BARANOVSKIJ V.N., ŠVAČIČ B.S., *K vyboru parametrov orientacii besplatformennoj inercialnoj sistemy nawigacii*, Priborostroenie, 6, 78-81, 1973
11. GELFAND I.M., FOMIN S.W., *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1979
12. BJORCK A., DAHLQUIST G., *Melody numeryczne*, PWN, Warszawa 1987

Method of the Aircraft Orientation Calculation with the Aid of Measured Angular velocity vector

Summary

A critical parts of the strapped-down inertial navigation systems are the calculation algorithms for orientation between two co-ordinate systems; i.e., measurement (moving) system and navigation (stationary) system. Components of on acceleration and angular velocity vectors of the aircraft (AC) are measured in the moving co-ordinate system which is fixed to the AC. To calculate the AC location the measured acceleration should be transformed to the navigation co-ordinate system by using of the angles of mutual orientation of the two systems obtained earlier. These angles form the solution to the differential matrix equation in which the angular velocity is an input variable. When orientations of the measurement and navigational co-ordinate systems in relation to inertial co-ordinate system are known the calculation of the measurement system orientation in relation to the navigation system is quite easy.

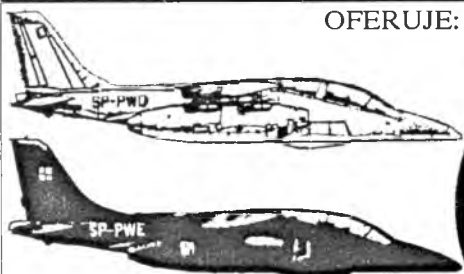
The present day AC angular velocity reaches $200 \div 400^\circ/\text{sek}$. It imposes strong requirements on quality and measurement ranges of the instruments, and on a proper choice of the AC orientation parameters as functions of the measured angular velocity. To integrate in real-time the differential matrix equation we need the fast computer and a proper algorithm.

In the paper the analytical approach to calculation of the AC orientation is theoretically presented. The physical interpretation of the orientation described by the direction cosine matrix and the Rodriguez-Hamilton parameters is given. The differential equations and some aspects of their numerical solutions are considered. The quality comparison of the different methods of orientation calculation is carried out.

KOMBINAT PZL-HYDRAL S.A.
PL 51-317 WROCŁAW
ul. BIERUTOWSKA 57-59

PZL-HYDRAL S.A.

OFERUJE:



UKŁADY PALIWOWO-REGULACYJNE LOTNICZYCH SILNIKÓW

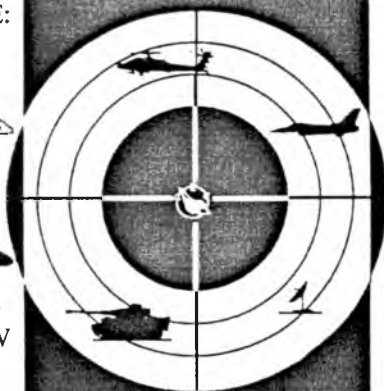
- TURBOŚMIGŁOWYCH
- TURBOODRZUTOWYCH
- TŁOKOWYCH

UKŁADY HYDRAULICZNE STEROWANIA LOTEM I MECHANIZACJI PŁATOWCA DO

- I-22 IRYDA
- TS-11 ISKRA
- AN-28
- AN-2
- W-3 W-3A SOKÓŁ
- MI-2

UKŁADY ELEKTRONICZNE STEROWANIA

PARAMETRAMI PRACY SYSTEMÓW HYDRAULICZNYCH



NAPĘDY HYDRAULICZNE STEROWANIA DZIAŁ PRZECIWOLOTNICZYCH ARMAT CZOŁGOWYCH I ANTEN RADAROWYCH DO OBIEKTÓW

- Wróbel
- Turkus
- Jaguar
- Nida Bożena



FAX 071 252565 TLX 071 2216

TEL. 071 251834

ZASTOSOWANIE OBSERWATORÓW DO DIAGNOZOWANIA WYPOSAŻENIA POKŁADOWEGO STATKÓW POWIETRZNYCH

ZDZISŁAW GOSIEWSKI

ZDZISŁAW ROCHAŁA

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

W artykule przyjęto, że diagnozowany obiekt jest liniowy, a niesprawności uzewnętrzniają się w postaci zmian wartości elementów macierzy stanu. Opracowano algorytm identyfikacji zmian w macierzy stanu, przy czym jako sygnały odniesienia wykorzystano sygnały wyjściowe obserwatora zbudowanego dla "sprawnego" obiektu. Proponowane rozwiązanie pozwala oceniać on-line stan techniczny obiektu.

1. Wstęp

Współczesny statek powietrzny jest obiektem technicznym charakteryzującym się dużą złożonością. Składa się ze zbioru wzajemnie powiązanych i współdziałających ze sobą zespołów, instalacji, urządzeń, podzespołów i elementów. Niemal wszystkie elementy tego zbioru podlegają procesowi sterowania, w związku z tym do każdego z tych elementów doprowadzony jest sygnał wejściowy i wyprowadzony sygnał wyjściowy.

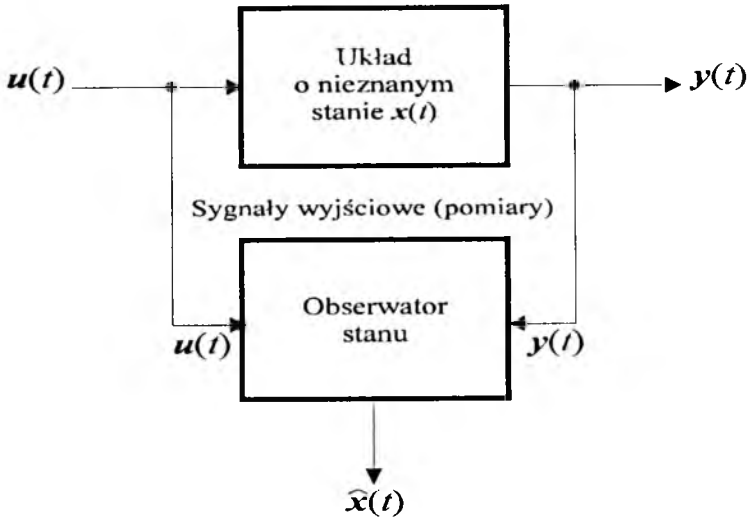
W procesie eksploatacji problemem kluczowym są zagadnienia detekcji i lokalizacji uszkodzeń składowych w/w zbioru. Niesprawności są przyczyną zmian stanu obiektu, dlatego śledząc zmiany stanu obiektu można identyfikować uszkodzenia.

W artykule podjęta zostanie próba oceny stanu i detekcji uszkodzeń z wykorzystaniem obserwatora stanu skonstruowanego dla "sprawnego" obiektu. Symptomy niezdatności wyznaczane będą na podstawie różnicy sygnału pomiarowego i wyjścia obserwatora.

2. Obserwatory stanu

Wprowadźmy pojęcie filtru-obszawatora stanu. Niech będzie dany układ, którego wektor stanu $\mathbf{x}(t)$ ma nie wszystkie składowe bezpośrednio dostępne (mieralne). W wielu przypadkach pojawia się problem odtworzenia, na podstawie sygnałów sterujących $\mathbf{u}(t)$ i sygnałów od powieździ $\mathbf{y}(t)$, niedostępnych zmiennych stanu (składowych wektora stanu $\mathbf{x}(t)$).

Układ, który na bazie sygnałów wejściowych i sygnałów wyjściowych, pozwala odtworzyć niedostępne zmienne stanu (rys.1) nazywamy *obszawatorem stanu* lub *obszawatorem Luenbergera*.



Rys. 1. Zasada działania obszawatora stanu

Obszawator jest układem dynamicznym, którego charakterystyki są dość swobodnie określane przez konstruktora i jego dynamika nie wpływa na dynamikę poddanego obserwacji układu, jeśli estymowany wektor $\hat{x}(t)$ nie jest wykorzystywany dla potrzeb sterowania.

Rozważmy ciągły liniowy stacjonarny układ dynamiczny, złożony np. z elementów elektrycznych, mechanicznych, pneumatycznych itp., lub ich kombinacji. Obiekt tego typu można opisać równaniami o postaci:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

gdzie:

- \mathbf{x} – $n \times 1$ wymiarowy wektor stanu,
- \mathbf{u} – $r \times 1$ wymiarowy wektor wymuszenia (sterowania),
- \mathbf{y} – $p \times 1$ wymiarowy wektor odpowiedzi (pomiarów),
- \mathbf{A} – $n \times n$ wymiarowa macierz charakteryzująca dynamikę układu,
- \mathbf{B} – $n \times r$ wymiarowa macierz sterowania,
- \mathbf{C} – $p \times n$ wymiarowa macierz odpowiedzi (wyjścia).

Dla takiego układu zbudujemy obserwator pełnego rzędu odtwarzający wszystkie zmienne wektora $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C} \quad (2.3)$$

Ostatecznie tak uzyskany obiekt – układ wraz z obserwatorem – opisany jest następująco:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.4)$$

3. Błąd obserwatora

Zdefiniujmy błąd obserwatora jako różnicę między sygnałem wyjściowym układu i estymowanym sygnałem wyjściowym obiektu:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t) \quad (3.1)$$

lub w postaci operatorowej:

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{y}(s) - \tilde{\mathbf{y}}(s) \quad (3.2)$$

gdzie:

$\mathbf{y}(t)$ – sygnał wyjściowy, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$,

$\tilde{\mathbf{y}}(t)$ – estymata odpowiedzi obiektu:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = [\mathbf{0} \ \mathbf{C}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Transformata odpowiedzi układu bez obserwatora jest następująca:

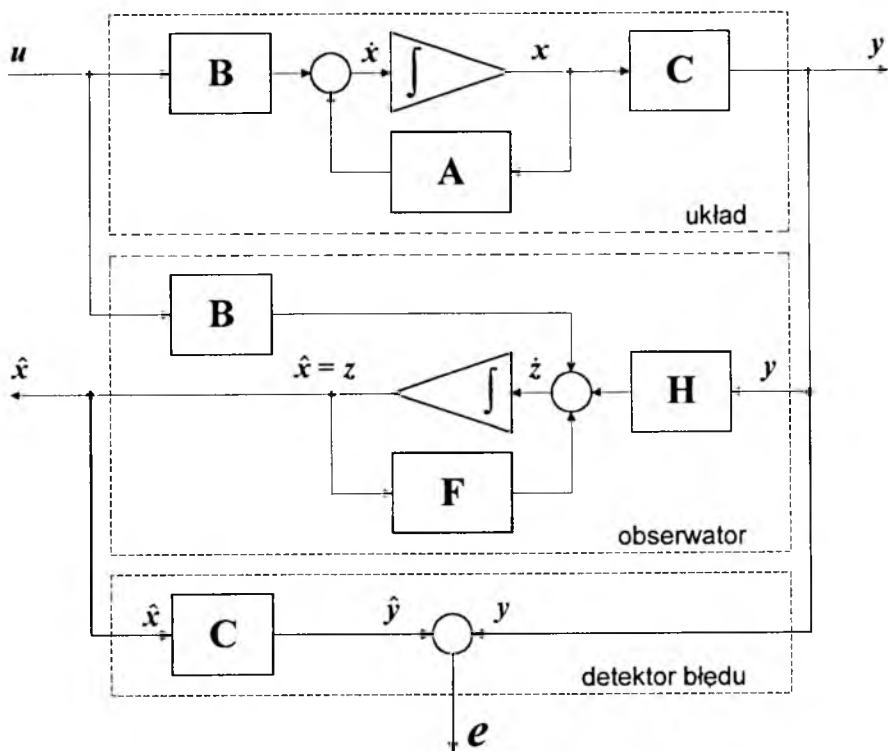
$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)] \quad (3.4)$$

Wyjście z obserwatora jest estymatą stanu obiektu $\tilde{x}(t)$. Po zastosowaniu przekształcenia (3.3) otrzymujemy estymatę wyjścia układu $\tilde{y}(t)$. Transformata tej estymaty jest odpowiedzią układu z obserwatorem na sygnał wejściowy $u(s)$:

$$y(s) = [0 \ C] \left[sI - \begin{pmatrix} A & 0 \\ HC & F \end{pmatrix} \right]^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u(s) \right) \quad (3.5)$$

gdzie: $x_0 = x(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$ – warunki początkowe układu i obserwatora.

Schemat blokowy układu z obserwatorem i detektorem błęd przedstawia rys.2.



Rys. 2. Schemat blokowy detekcji błęd obserwatora

Dokonując przekształceń zależności (3.5), otrzymujemy:

$$\tilde{y}(s) = [0 \ C] \begin{bmatrix} sI - A & 0 \\ -HC & sI - F \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u(s) \right) \quad (3.6)$$

Odwracając macierz blokową [3] i wymnażając macierze otrzymamy:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(s) &= [0 \quad \mathbf{C}] \cdot \\ & \cdot \left[\begin{array}{c} (\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)] \\ (\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{HC}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)] + (\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{z}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)] \end{array} \right] = \\ & = \mathbf{C} \left\{ (\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{HC}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)] + (\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{z}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)] \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Macierz $(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}$ wyłączmy lewostronnie przed nawias i uporządkujmy równanie względem wektorów wejść:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(s) &= \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1} \left\{ \mathbf{HC}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{HC}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \mathbf{z}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \right\} = \\ & = \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1} \left\{ [\mathbf{HC}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{I}]\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + [\mathbf{HC}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_0] \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Następnie macierz $(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}$ wyłączmy prawostronnie za nawias:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(s) &= \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{HC} + \mathbf{s}I - \mathbf{A}](\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \\ & + \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{HC}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Korzystając z (2.3) oraz dodając i odejmując w równaniu (3.9) macierz $\mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(s) &= \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \\ & + \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{HC} + \mathbf{s}I - \mathbf{A}](\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Po uporządkowaniu ostatecznie estymata odpowiedzi ma postać:

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)) + \mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0) \quad (3.11)$$

Odejmując od (3.4) estymatę odpowiedzi (3.11) otrzymamy błąd obserwatora:

$$\mathbf{e}(s) = -\mathbf{C}(\mathbf{s}I - \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0) \quad (3.12)$$

Z powyższego równania można wyciągnąć następujące wnioski:

1. jeśli warunki początkowe są takie same, czyli $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$, to błąd obserwacji $\mathbf{e}(t) = 0$ dla każdego t ;

2. ponieważ macierz \mathbf{F} ma wartości własne o ujemnych częściach rzeczywistych, to błąd obserwatora (3.12) będzie dążył do zera dla $t \rightarrow \infty$ bez względu na warunki początkowe. Stąd wynika, że w stanie ustalonym błąd obserwatora jest równy zeru.

W dalszych naszych rozważaniach będziemy korzystali z wniosku drugiego, gdyż trudno jest uzyskać początkowy stan obserwatora $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$.

4. Zaburzenia macierzy stanu

Macierz stanu zbudowana jest z elementów, których wartości zależą od parametrów układu (np. stałe czasowe, współczynniki wzmocnienia, itd.). Zmiany tych parametrów można więc wyrazić poprzez zmiany elementów macierzy \mathbf{A} .

Przyjmijmy, że: \mathbf{A} jest macierzą stanu układu sprawnego (jest to wzorzec względem, którego będą badane zmiany wywołane w układzie, np. przez niesprawności), $\tilde{\mathbf{A}}$ jest macierzą stanu układu zaburzonego, przy czym:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} \quad (4.1)$$

gdzie $\Delta\mathbf{A}$ jest macierzą zaburzeń – odchyleniem macierzy stanu od stanu wzorcowego.

Przy zerowych warunkach początkowych transformata odpowiedzi ma postać:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (4.2)$$

a transformata estymaty jest następująca:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(s) &= [\mathbf{0} \ \mathbf{C}] \left[s\mathbf{I} - \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{F} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(s) = \\ &= \mathbf{C}[(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1} + (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}]\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C}) - \Delta\mathbf{A}](s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) - \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\Delta\mathbf{A}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

stąd:

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{y}(s) - \tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\Delta\mathbf{A}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (4.4)$$

Tak obliczony błąd obserwatora jest błędem dokładnym, jednak z zależności:

$$(sI - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(s)(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^i \quad (4.5)$$

wynika, że jest błędem nieliniowym ze względu na macierz $\Delta\mathbf{A}$.

Jeśli założymy, że macierz $\tilde{\mathbf{A}}$ jest dobrze uwarunkowana, tzn. jej wyznacznik:

$$\det \tilde{\mathbf{A}} \neq 0$$

dla pewnego zbioru macierzy $\Delta\mathbf{A}$ takich, że $\|\Delta\mathbf{A}\| \ll \|\mathbf{A}\|$. Wówczas możemy przyjąć, że:

$$(sI - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})^{-1} \approx (sI - \mathbf{A})^{-1} \quad (4.6)$$

Założenie to później osłabimy. Podstawiając (4.6) do (4.4) otrzymamy:

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{y}(s) - \tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}(sI - \mathbf{F})^{-1}\Delta\mathbf{A}(sI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (4.7)$$

a więc błąd obserwatora jest liniową zależnością elementów $\Delta\mathbf{A}$.

5. Model regresji liniowej macierzy zaburzeń $\Delta\mathbf{A}$

Niech $\mathbf{u}(s)$ będzie znanym sygnałem wejściowym np. wymuszeniem skokowym o transformacie:

$$\mathbf{u}(s) = \frac{1}{s}\mathbf{u}_{st} \quad (5.1)$$

Błąd obserwatora w stanie ustalonym wyznaczymy korzystając z twierdzenia o wartości końcowej:

$$\mathbf{e}_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{e}(s) \quad (5.2)$$

Uwzględniając (5.1) i (5.2) w równaniu (4.4) otrzymamy błąd obserwatora w stanie ustalonym:

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\mathbf{u}_{st} \quad (5.3)$$

lub po zlinearyzowaniu z zależności (4.7):

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}\Delta\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{u}_{st} \quad (5.4)$$

Ostatni związek sprowadzimy do następującego równania macierzowego:

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{C}_F\Delta\mathbf{A}\mathbf{u}_A \quad (5.5)$$

gdzie:

- \mathbf{C}_F – macierz o wymiarze $p \times n$, $\mathbf{C}_F = \mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}$,
 $\Delta\mathbf{A}$ – macierz o wymiarze $n \times n$,
 \mathbf{u}_A – wektor o wymiarze $n \times 1$, $\mathbf{u}_A = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{u}_{st}$.

Równanie powyższe można zapisać w postaci:

$$e_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ki} a_{ij} u_j \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (5.6)$$

gdzie:

- c_{ki}, a_{ij} – elementy macierzy odpowiednio $\mathbf{C}_F, \Delta\mathbf{A}$,
 e_k, u_i – elementy wektorów odpowiednio $\mathbf{e}_s, \mathbf{u}_A$.

Każde z powyższych równań jest równaniem pomiaru błędu obserwatora. Liczba równań p jest zwykle mniejsza od liczby poszukiwanych parametrów a_{ij} , których liczba odpowiada liczbie niezerowych elementów macierzy $\Delta\mathbf{A}$, czyli maksymalnie $S = n^2$.

Zgodnie z [5] liczba N pomiarów podanych równaniem (5.6) powinna spełniać warunek $N \geq S$, a tym samym liczba powtórzeń zestawu tych równań powinna wynosić co najmniej N/p zaokrąglone w górę. Pomiaru powtarzane są dla różnych wartości \mathbf{u}_{st} aby uniknąć liniowej zależności równań (5.5).

Równanie (5.5) sprowadzimy do postaci:

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k^T \mathbf{a} + \varepsilon_k \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (5.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k^T &= [c_{k1}u_1, c_{k1}u_2, \dots, c_{k1}u_n, c_{k2}u_1, c_{k2}u_2, \dots, c_{kn}u_n] \\ \mathbf{a}^T &= [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{nn}] \end{aligned}$$

oraz ε_k – rzeczywisty błąd k -tego pomiaru wyjścia detektora błędu obserwatora.

Załóżmy, że spełniony jest warunek (5.6). Wówczas liczba równań obserwacji stanowi wielokrotność liczby p i wynosi N . Zbiór tych równań zapiszmy w postaci macierzowej:

$$\mathbf{e} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.8)$$

gdzie:

$$\mathbf{e} = [e_k]_{N \times 1} \quad \mathbf{X} = [c_k]_{N \times S} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_k]_{N \times 1}$$

a wymiar wektora \mathbf{a} zbudowanego z poszukiwanych parametrów pozostaje bez zmian i wynosi S .

Niech α będzie oceną wektora \mathbf{a} , taką, że równanie modelu obiektu przyjmie postać:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{X}\alpha \quad (5.9)$$

Natomiast błąd oceny wynosi:

$$\chi = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \mathbf{X}\alpha \quad (5.10)$$

Minimalizując sumę kwadratów błędu:

$$S = \chi^T \chi = (\mathbf{e} - \mathbf{X}\alpha)^T (\mathbf{e} - \mathbf{X}\alpha) \quad (5.11)$$

otrzymamy estymatę szukanych parametrów [5]:

$$\alpha = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{e} \quad (5.12)$$

Ponieważ:

$$\alpha = [\hat{a}_{11}, \hat{a}_{12}, \dots, \hat{a}_{1n}, \hat{a}_{21}, \hat{a}_{22}, \dots, \hat{a}_{nn}] \quad (5.13)$$

to z elementów wektora α budujemy macierz $\Delta \hat{\mathbf{A}}$.

Wróćmy obecnie do nieliniowego równania (4.3) względem $\Delta \mathbf{A}$. Otrzymane oszacowanie $\Delta \hat{\mathbf{A}}$ wprowadzimy do wzoru na wektor \mathbf{u}_A :

$$\mathbf{u}_A^{(1)} = (\mathbf{A} + \Delta \hat{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{b} \mathbf{u}_{st} \quad (5.14)$$

i powtarzamy cały cykl obliczeń otrzymując nowe oszacowanie:

$$\alpha^{(1)} = [\hat{a}_{11}^{(1)}, \hat{a}_{12}^{(1)}, \dots, \hat{a}_{1n}^{(1)}, \hat{a}_{21}^{(1)}, \hat{a}_{22}^{(1)}, \dots, \hat{a}_{nn}^{(1)}] \quad (5.15)$$

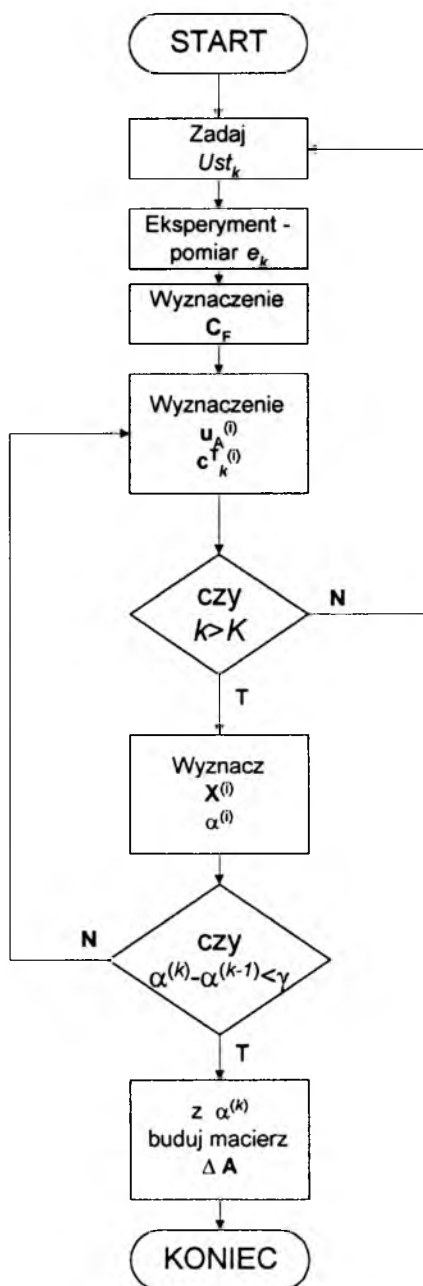
Jeśli różnica:

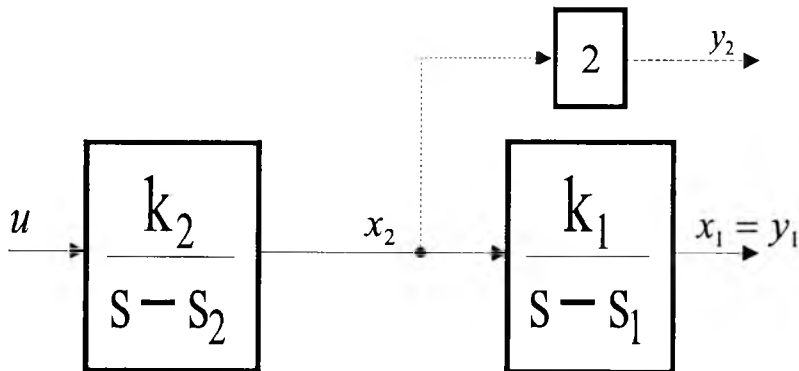
$$\alpha^{(1)} - \alpha < \gamma \quad (5.16)$$

gdzie γ jest dopuszczalną wartością błędu, to obliczenia kończymy. Jeśli nie, to powtarzamy, otrzymując $\alpha^{(k)}$ aż do spełnienia warunku:

$$\alpha^{(k)} - \alpha^{(k-1)} < \gamma \quad (5.17)$$

Ostatecznie algorytm obliczeń elementów macierzy zaburzeń $\Delta \mathbf{A}$ będzie taki jak na rys.3.

Rys. 3. Algorytm wyznaczania elementów macierzy ΔA



Rys. 4. Układ drugiego rzędu

6. Przykłady numeryczne

Dany jest układ drugiego rzędu przedstawiony na rys.4.

Parametry układu są następujące: $s_1 = -2$, $s_2 = -1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$. W przestrzeni stanów układ jest opisany równaniem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & k_1 \\ 0 & -s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} u$$

Ze struktury macierzy i danych wynika, że:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Analiza elementów macierzy \mathbf{X} ze wzoru (5.8) wskazuje, że liczba niezależnych liniowo kolumn lub wierszy będzie równa $\max[\text{liczba wejść, liczba wyjść}]$. Ponieważ dalej zamierzamy identyfikować stałe czasowe s_1 i/lub s_2 , przyjmując, że ewentualne niesprawności będą zmieniały ich wartości, to rozpatrzmy dwa przykłady.

W pierwszym przykładzie równanie pomiaru ma postać:

$$\mathbf{y} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

gdyż zakładamy, że pewna niesprawność powoduje zmiany tylko i wyłącznie stałej s_2 .

W drugim przykładzie równanie pomiaru ma postać:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

gdyż obecnie przyjmujemy, że inna niesprawność powoduje jednocześnie zmiany obu stałych czasowych s_1 i s_2 .

6.1. Przykład 1

Budujemy obserwator pełnego rzędu opisany równaniem (2.2). Macierz \mathbf{H} jest macierzą kolumnową dwuelementową, a macierz \mathbf{F} wynosi:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 - h_1 & 1 \\ -h_2 & -1 \end{bmatrix}$$

i jej równanie char akterystyczne jest następujące:

$$\det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}] = \lambda^2 + (3 + h_1)\lambda + 2 + h_1 + h_2 = 0$$

Zalóżmy, że projektowany obserwator ma mieć macierz \mathbf{F} o podwójnej wartości własnej równej -3 . To daje równanie charakterystyczne:

$$\det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}] = (\lambda + 3)^2 = 0$$

Z porównania współczynników przy tych samych potęgach λ w powyższych dwóch wielomianach otrzymamy: $h_1 = 3$, $h_2 = 4$. Tym samym macierz \mathbf{F} ma postać:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Aby przeprowadzić symulację algorytmu z rys.3 przyjmujemy, że macierz stanu w wyniku pewnej niesprawności zmienia się i wynosi:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}$$

a więc macierz zaburzeń jest równa:

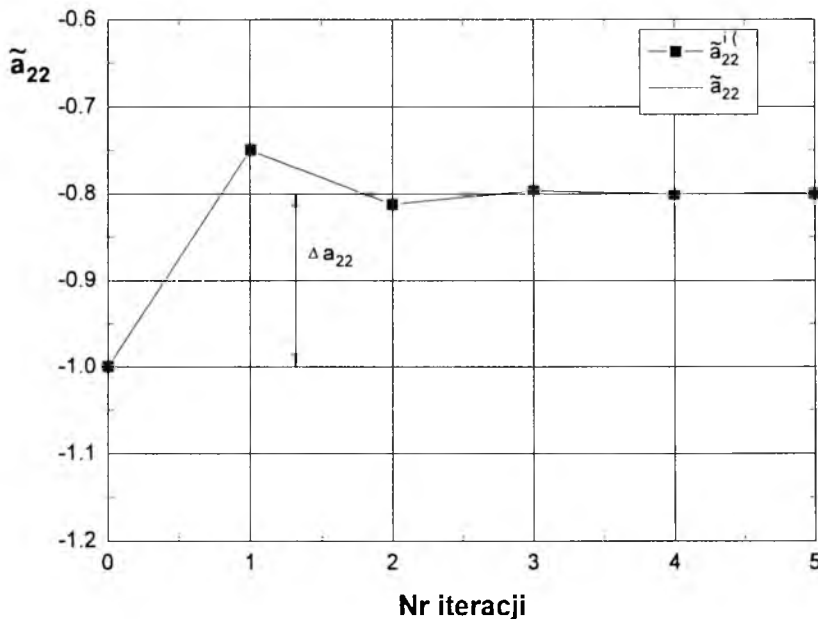
$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Dokonujemy pomiaru błędu obserwatora poprzez jego obliczenie ze wzoru: $e_i = C_F \Delta \mathbf{A} \mathbf{u}_A$, gdzie $\mathbf{u}_A = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{u}_{st}$ dla dwóch różnych wartości $u_{st1} = 0.5$, $u_{st2} = 1$. Tak obliczony błąd obserwatora obciążamy przypadkowymi błędami pomiarowymi nie przekraczającymi 2% jego wartości. Z zależności (5.8) wyznaczmy elementy macierzy $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2]$, gdzie tym razem, tak jak w algorytmie z rys.3, $\mathbf{u}_A = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{u}_{st}$. Estymatę szukanego parametru a_{22} otrzymamy z zależności (5.12). Wprowadzając pierwsze oszacowanie $\alpha^{(1)} = 0.2502$ do macierzy $\Delta \mathbf{A}$, czyli:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.2502 \end{bmatrix}$$

powtarzamy cały cykl obliczeń otrzymując nowe oszacowania $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \dots$

Wynik działania algorytmu z rys.3 zastosowanego do identyfikacji parametru s_2 przedstawiony jest na rys.5.



Rys. 5. Przebieg obliczeń parametru $s_2 = -\tilde{a}_{22}$ po jego skokowej zmianie

Z rys.5 wynika, że już po czterech krokach błąd oszacowania przyrostu parametru s_2 jest mniejszy niż 0.15%.

6.2. Przykład 2

Obecnie macierz \mathbf{C} ma postać wynikającą ze wzoru (6.2). Niech macierz \mathbf{F} ma postać: $\mathbf{F} = \text{diag}[-3, -3]$. Otrzymamy ją w tej postaci po przyjęciu we wzorze (2.3):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy, że dla pewnej niesprawności macierz stanu wynosi:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}$$

a więc macierz zaburzeń ma postać:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

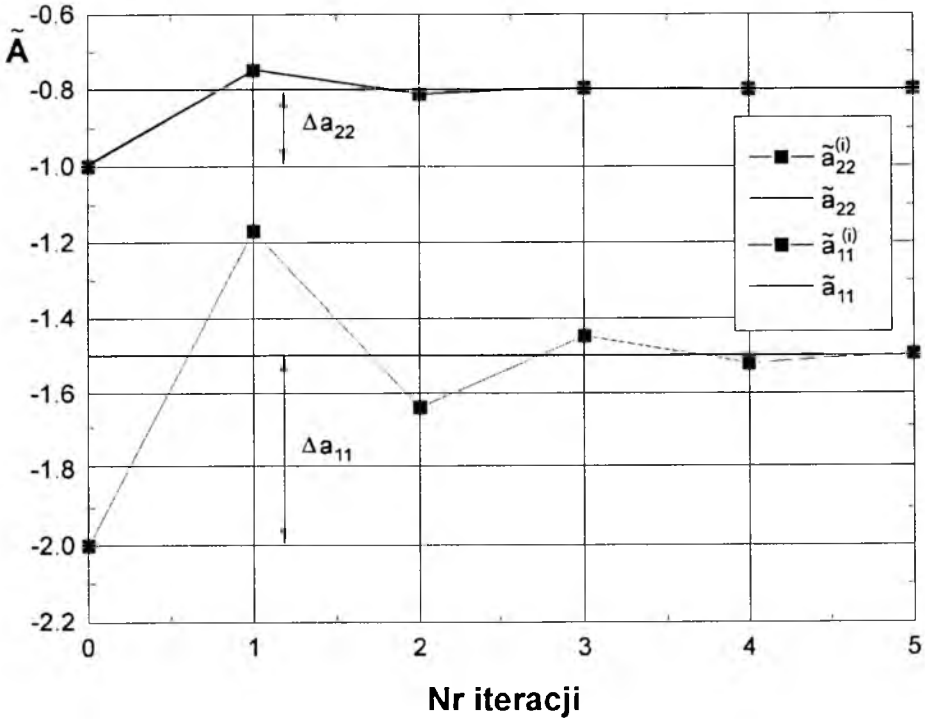
Działając w sposób podobny jak w przykładzie 1 otrzymamy oszacowanie obu stałych czasowych s_1 i s_2 . Wynik działania algorytmu z rys.3 zastosowanego do identyfikacji parametru s_1 i s_2 przedstawiony jest na rys.6. Ponownie, już w czwartym kroku iteracji osiągnięto wysoką dokładność obu parametrów (z błędem nie przekraczającym 1%).

7. Wnioski

W artykule zaproponowano zastosowanie obserwatorów stanu do oceny stanu technicznego tych podzespołów wyposażenia pokładowego, które posiadają sygnały wejścia-wyjścia. Przyjęto, że niesprawności układu uzewnętrzniają się w postaci odpowiednich zmian wartości elementów macierzy stanu \mathbf{A} . Tym samym identyfikacja on-line tych elementów jest podstawą oceny stanu technicznego.

Dla sprawnego układu zbudowano obserwator pełnego rzędu. Identyfikację parametrów prowadzono wykorzystując różnicę sygnałów wyjściowych z układu i z obserwatora. Takie podejście ma następujące cechy (zalety):

- można zastosować model liniowej regresji, a poprawki na nieliniowości modelu względem parametrów można obliczyć w procesie iteracyjnym;



Rys. 6. Obliczenia parametrów $s_1 = -\tilde{a}_{11}$ oraz $s_2 = -\tilde{a}_{22}$

- liczba estymowanych parametrów wzrasta wraz z liczbą sygnałów wejściowych lub wyjściowych;
- dokładność estymacji jest ograniczona jedynie dokładnością pomiarów.

Literatura

1. GOSIEWSKI Z., *Aktywne sterowanie drganiami wirnika*, Monografia, Wydawnictwa Uczelniane WSI Koszalin, 1989
2. KACZOREK T., *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, Warszawa, 1974
3. KACZOREK T., *Macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa, 1984
4. LUENBERGER D.G., *Introduction to Observers*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-16, 6, 1971, 596-602

5. MAŃCZAK K., NAHORSKI Z., *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1983
6. PATTON R.J., CHEN J., *A Survey of Robustness Problems in Quantitative Model-Based Fault Diagnosis*, Applied Mathematics and Computer Science, **3**, 3, 1993, 399-416
7. TAKAHASHI Y., RABINS M.J., AUSLANDER D.A., *Sterowanie i systemy dynamiczne*, WNT, Warszawa, 1976

Adoption of State Observers for Diagnostics of the Aircraft Board Equipment

Summary

It is assumed that the diagnosed device is described by linear coordinates in the state space and its unfitness manifests in the changes in entries of the state matrix. The identification algorithm of these value changes is presented. Outputs of the observer, built for a "good" device, are used as reference signals. The method allows estimation of the on-line device condition.

SYMULACJA NUMERYCZNA LOTU STEROWANEGO SAMOLOTU Z ODKSZTAŁCALNYM UKŁADEM STEROWANIA STEREM WYSOKOŚCI

JACEK A. GOSZCZYŃSKI

Institut Lotnictwa, Warszawa

JERZY MARYNIAK

ITLiMS, Politechnika Warszawska

W pracy przedstawiono model fizyczny sterowanego samolotu z odkształcalnym układem sterowania sterem wysokości (z masowym urządzeniem wspomagającym – tzw. bob-weight'em), uwzględniając geometrię i rozkład mas układu sterowania sterem wysokości (rys.1÷3). Model matematyczny wyprowadzono korzystając z równań Boltzmann-Hamela dla układów holonomicznych, wyrażając energię kinetyczną badanego systemu w quasiprędkościach.

W trakcie badań prototypów samolotu I-22 "Iryda" wystąpiły problemy związane z funkcjonowaniem "bob-weight'a". Ponieważ chciano określić ich przyczynę to powyższy model zastosowano do badań symulacyjnych samolotu z wykorzystaniem zapisu parametrów (po przeprowadzeniu ich identyfikacji) wybranego lotu doświadczalnego samolotu testowego, [3÷7].

Model matematyczny i symulacyjny został zweryfikowany w oparciu o dane lotu 270 (zad.6) prototypu PZL I-22 "Iryda" [4,5]. Chcąc określić wpływ dynamiki masowego urządzenia wspomagającego na lot samolotu przebadano jego różne konfiguracje na drodze symulacji numerycznej.

Obliczenia wykonano m.in. przy następujących założeniach:

- różne masy M_2 masowego urządzenia wspomagającego [3,4],
- różne warunki początkowe symulacji ("stały" przebieg siły pilota lub stały przebieg kąta wychylenia steru wysokości) [4,6],
- występowanie wiskotycznego tłumienia K_{t3} w zespole H_{c3} [4,7],
- różne charakterystyki masowe i aerodynamiczne samolotu [7].

Niektóre wyniki przedstawiono na rys.4÷19.

Wykaz oznaczeń

$J_{H\eta}$ [kgm²] – moment bezwładności steru wysokości względem jego osi obrotu,

$J_{M\eta}$ [kgm ²]	– moment bezwładności masy M_2 masowego urządzenia wspomagającego względem jej osi obrotu,
$J_{j\eta}$ [kgm ²]	– moment bezwładności j -tej dźwigni względem jej osi obrotu,
$J_{M1\eta}$ [kgm ²]	– moment bezwładności masy M_1 względem jej osi obrotu,
m [kg]	– masa samolotu,
K_{C1} [N/m]	– współczynnik zastępczej sztywności układu sterowania,
K_{C2} [N/m]	– współczynnik zastępczej sztywności pilota,
K_{C3} [N/m]	– sztywność amortyzatora masy M_2 ,
K_{C4} [N/m]	– sztywność zawieszenia masy M_2 ,
K_{T1} [Ns/m]	– współczynnik tłumienia wiskotycznego układu sterowania,
K_{T2} [Ns/m]	– współczynnik tłumienia wiskotycznego pilota,
K_{T3} [Ns/m]	– współczynnik tłumienia wiskotycznego amortyzatora masy M_2 ,
K_{KOR} [-]	– współczynnik korekcji,
$M_{\dot{W}}$	– pochodna aerodynamiczna momentu pochylającego względem zmian prędkości wznoszenia,
$M_{\dot{Q}}^{ZH}, M_{\dot{Q}}^{ZH}$	– pochodne aerodynamiczne momentu zawiasowego steru wysokości,
M_{ZH}^G, M_{DR}^G	– składowe momentu zawiasowego od sił grawitacyjnych,
M_{DR}^{K1}, M_{DR}^{K2}	– pochodne momentu sił potencjalnych działających na układ sterowania,
M_{ZH}^{K1}, M_{ZH}^{K2}	– pochodne momentu sił potencjalnych działających na ster wysokości,
M_{BW}^{K1}, M_{BW}^{K2}	– pochodne momentu sił potencjalnych działających na "bob-weight",
M_{DR}^{T3}, M_{BW}^{T3}	– pochodne momentu sił tłumienia tłumika K_{T3} ,
M_{ZH}^{T1}, M_{ZH}^{T2}	– pochodne momentu zawiasowego od sił tłumienia,
M_{DR}^{T1}, M_{DR}^{T2}	– pochodne momentu sił tłumienia działających na układ sterowania,
M_{ZH} [Nm]	– moment zawiasowy steru wysokości,
M_{PILOT} [Nm]	– moment siły pilota,

n_Z [-]	- współczynnik obciążenia,
P_{DH} [N]	- siła na drążku,
Q [rd/s]	- prędkość kątowna pochylenia,
Q_H [rd/s]	- prędkość kątowna steru wysokości,
Q_M [rd/s]	- prędkość kątowna masy M_2 ,
Q_D [rd/s]	- prędkość kątowna drążka sterowego,
S_η [kgm]	- moment statyczny steru wysokości względem jego osi obrotu,
$S_{M\eta}$ [kgm]	- moment statyczny masy M_2 , masowego urządzenia wspomagającego względem jej osi obrotu,
$S_{D\eta}$ [kgm]	- moment statyczny drążka sterowego względem jego osi obrotu,
$S_{j\eta}$ [kgm]	- moment statyczny j -tej dźwigni względem jej osi obrotu,
X_G, Z_G, M_G	- składowe sił i momentów sił grawitacyjnych,
X_A, Z_A, M_A	- składowe sił i momentów sił aerodynamicznych,
X_T, Z_T, M_T	- składowe sił i momentów sił ciągu,
X_Q, Z_Q, M_Q	- pochodne aerodynamiczne od prędkości kątownej przechylenia,
X_{q1}, Z_{q1}, M_{q1}	- pochodne aerodynamiczne od wychyleń steru wysokości,
$X_{\alpha ZH}, Z_{\alpha ZH}, M_{\alpha ZH}$	- pochodne aerodynamiczne od kąta zaklinowania steru wysokości,
X_{QH}, Z_{QH}, M_{QH}	- pochodne aerodynamiczne od prędkości kątownej steru wysokości,
x_i, y_i, z_i [m]	- współrzędne i -tego węzła względem układu $0xyz$,
α_{ZH} [deg]	- kąt zaklinowania steru wysokości,
δ_H^P [deg]	- konstrukcyjny kąt zaklinowania masy M_2 ,
δ_{dj} [deg]	- kąt wychylenia j -tej dźwigni układu sterowania,
$q_1 = \delta_H$ [deg]	- kąt wychylenia steru wysokości,
$q_2 = \delta_2$ [deg]	- kąt wychylenia masy M_2 ,

- $q_3 = \delta_{dH}$ [deg] – kąt wychylenia drążka,
 κ_i [-] – współczynnik przyłożenia geometrycznego i -tej dźwigni.

1. Wprowadzenie

Badania doświadczalne prototypów samolotów mają za zadanie sprawdzenie zaproponowanych przez konstruktora rozwiązań technicznych i wyeliminowanie popełnianych błędów. Badania takie z samej swojej istoty są bardzo pracochłonne i kosztowne. Obserwowany w dzisiejszych czasach gwałtowny rozwój nauk ścisłych i technik symulacyjnych pozwala na przeprowadzanie badań symulacyjnych przynajmniej części proponowanych rozwiązań konstrukcyjnych, ograniczając niezbędne badania prototypów i zmniejszając ostatecznie koszt opracowania nowego samolotu.

W trakcie prac nad samolotem PZL I-22 "Iryda" powstała konieczność zmniejszenia obciążeń na drążku pilota w trakcie wykonywania dynamicznych manewrów. Celem spełnienia przepisów budowy statków powietrznych i wymagań technicznych narzuconych przez odbiorcę samolotu postanowiono zastosować w systemie sterowania sterem wysokości – bob-weight tj. masowe urządzenie wspomagające, załączane w trakcie manewrów przekraczających $n_z = +1.7$.

Masowe urządzenie wspomagające w systemie sterowania sterem wysokości samolotu może być stosowane tak do dociążania, jak i odciążania układu w trakcie dynamicznych manewrów (pętle, wyrwania etc.).

Jednakże, w trakcie badań doświadczalnych prototypu, pojawiły się problemy z funkcjonowaniem tego urządzenia. Wystąpiła konieczność wykonania lotów doświadczalnych celem między innymi doboru właściwych charakterystyk sztywnościowych i masowych tego elementu systemu sterowania.

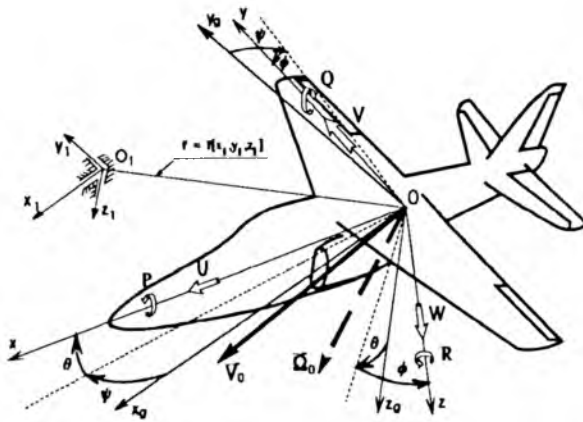
Celem uniknięcia w przyszłości bardzo wysokich kosztów badań empirycznych, postanowiono w Instytucie Lotnictwa stworzyć narzędzie umożliwiające przeprowadzanie doboru charakterystyk systemu sterowania na drodze symulacji numerycznej, tak obecnie dla I-22, jak i w przyszłości dla innego samolotu (po odpowiedniej identyfikacji parametrycznej).

Spotykane w literaturze [1,2,8,11,12] istniejące modele matematyczne systemów sterowania samolotem nie umożliwiały zrealizowania założonych celów, bowiem uwzględniają one wyłącznie sztywność i tłumienie układu sterowania. Natomiast, aby było możliwe przeprowadzanie doboru elementów systemu sterowania sterem wysokości samolotu w symulowanych warunkach lotu, należy

uwzględnić nie tylko odkształcalność układu sterowania, ale i jego geometrię oraz rozkład mas.

2. Model fizyczny i matematyczny

Klasyyczny model fizyczny sterowanego samolotu ma sześć stopni swobody [2,4,9,11] i jest przedstawiony na rys.1 i 3.

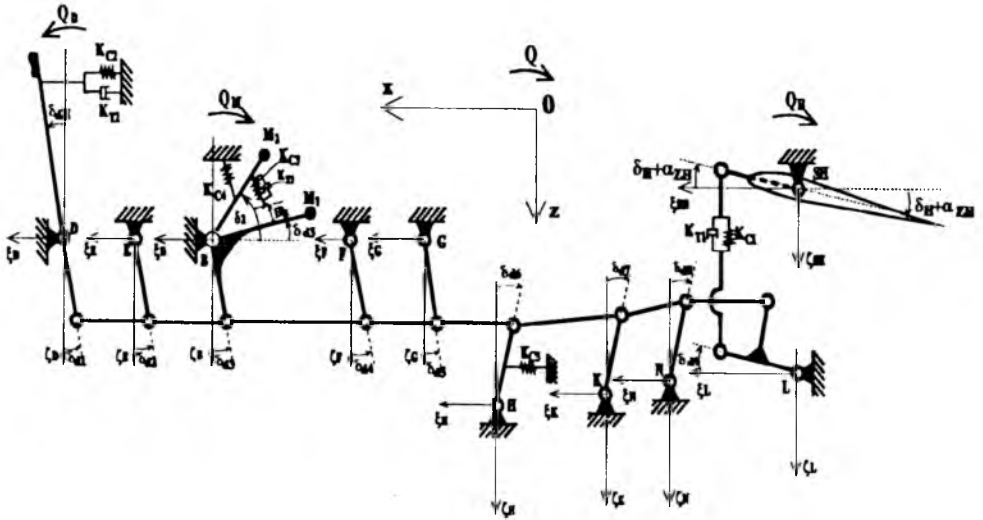


Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia

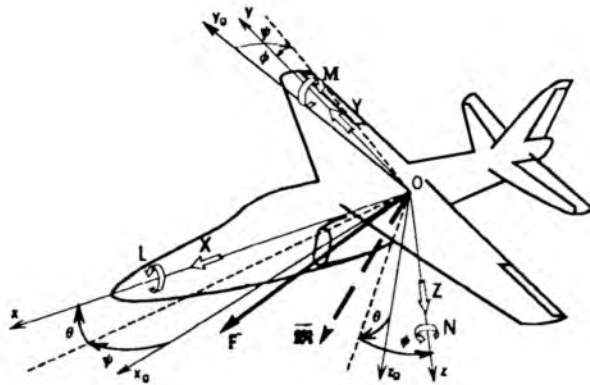
Przyjęto dodatkowe założenia rozszerzające model podstawowy [3,4]:

- układ sterowania sterem wysokości z masowym urządzeniem wspomagającym (bob-weight) jest układem odkształcalnym o trzech stopniach swobody (rys.2),
- na obiekt działają również siły sprężystości i tłumienia układu sterowania.

Ogólne równania ruchu sterowanego samolotu z odkształcalnym układem sterowania sterem wysokości z masowym urządzeniem wspomagającym w locie przestrzennym wyprowadzono, w quasi-współrzędnych, w układzie sztywno związanym z samolotem $Oxyz$ (rys.1), stosując równania Boltzmanna-Hamela dla układów holonomicznych [3,4]. Masowe urządzenie wspomagające zastosowano w kanale podłużnym sterowania, a za tym zasadnym jest przyjęcie do analizy numerycznej zagadnienia zawężonego tylko do ruchu podłużnego samolotu, jakim są wyrwania czy pętle w płaszczyźnie pionowej.



Rys. 2. Schemat kinematyczny odkształcalnego układu sterowania sterem wysokości samolotu PZL 1-22 z masowym urządzeniem wspomagającym



Rys. 3. Siły i momenty sił działających na samolot w locie (oraz ich składowe) w układzie samolotowym $Oxyz$

Po wprowadzeniu uproszczeń równania ruchu przyjmują następującą formę w zapisie macierzowym [4]:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{Q}^* \quad (2.1)$$

gdzie:

— wektor przyspieszeń:

$$\dot{\mathbf{V}} = \text{col}[\dot{U}, \dot{W}, \dot{Q}, \dot{Q}_H, \dot{Q}_M, \dot{Q}_D] \quad (2.2)$$

— wektor prędkości:

$$\mathbf{V} = \text{col}[U, W, Q, Q_H, Q_M, Q_D] \quad (2.3)$$

— macierz sił zewnętrznych [4]:

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \text{col}[X, Z, M, Q_{q1}^*, Q_{q2}^*, Q_{q3}^*] \quad (2.4)$$

jest postaci:

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} X_G + X_T + X_A + X_Q Q + X_{q1} q_1 + X_{\alpha ZH} \alpha_{ZH} + X_{QH} Q_H \\ Z_G + Z_T + Z_A + Z_Q Q + Z_{q1} q_1 + Z_{\alpha ZH} \alpha_{ZH} + Z_{QH} Q_H \\ M_G + M_T + M_A + M_Q Q + M_{q1} q_1 + M_{\alpha ZH} \alpha_{ZH} + M_{QH} Q_H \\ M_{ZH} + M_{ZH}^G + M_Q^{ZH} Q + M_{QH}^{ZH} Q_H + Q_D M_{ZH}^{T1} + \\ - Q_H M_{ZH}^{T2} + M_{ZH}^{K1} q_3 - M_{ZH}^{K2} q_1 \\ M_{BW}^{K1} q_3 - M_{BW}^{K3} (q_2 - \delta_M^P) + M_{BW}^{T3} (Q_M + \kappa_2 Q_D) \\ - M_{PILOT} - M_{DR}^G + M_{DR}^{K2} q_1 - M_{DR}^{K1} q_3 - M_{DR}^{K3} (q_2 - \delta_M^P) + \\ + Q_H M_{DR}^{T2} - Q_D M_{DR}^{T1} + M_{DR}^{T3} (Q_M + \kappa_2 Q_D) \end{bmatrix}$$

gdzie:

— zmodyfikowana macierz bezwładności:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m & 0 & B_Q & B_1 & B_2 & -B_D \\ 0 & m & C_Q & C_1 & C_2 & -C_D \\ 0 & C_Q - M_{\dot{W}} & J_y + 2H_Q & E_1 & E_2 & -E_D \\ B_1 & C_1 & E_1 & J_{H\eta} & 0 & 0 \\ B_2 & C_2 & E_2 & 0 & J_{M\eta} & 0 \\ -B_D & -C_D & -E_D & 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

— macierz sprzężeń dynamicznych:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & mQ & A_Q & A_1 & A_2 & -A_D \\ mQ & 0 & -D_Q & -D_1 & -D_2 & D_D \\ -A_Q & D_Q & 0 & F_1 + G_1 & F_2 + G_2 & F_D - G_D \\ -C_1Q & B_1Q & -AS_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2Q & B_2Q & -AS_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_DQ & -B_DQ & AS_D & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$J_1 = J_{1\eta} + \kappa_2^2 J_{M1\eta} + \kappa_8^2 J_{D10\eta} + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=2}^8 \kappa_i^2 J_{j\eta}$$

$$A_Q = \sum_{i=1}^{11} A_i - A_{12} \qquad B_Q = \sum_{i=1}^8 B_i - \sum_{i=9}^{12} B_i$$

$$C_Q = \sum_{i=1}^{11} C_i - C_{12} \qquad D_Q = \sum_{i=1}^8 D_i - \sum_{i=9}^{12} D_i$$

$$H_Q = \sum_{i=3}^8 H_i - \sum_{i=9}^{12} H_i$$

$$A_D = A_3 + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=4}^8 \kappa_i A_j - \sum_{i=5}^7 \sum_{j=9}^{11} \kappa_i A_j + \kappa_8 A_{12}$$

$$B_D = B_3 + \sum_{i=1}^8 \sum_{j=4}^{12} \kappa_i B_j$$

$$C_D = C_3 + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=4}^8 \kappa_i C_j - \sum_{i=5}^7 \sum_{j=9}^{11} \kappa_i C_j + \kappa_8 C_{12}$$

$$D_D = D_3 + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=4}^8 \kappa_i A_j - \sum_{i=5}^7 \sum_{j=9}^{11} \kappa_i A_j + \kappa_8 A_{12}$$

$$E_D = \sum_{i=3}^8 E_i - \sum_{i=9}^{12} E_i \qquad F_D = \sum_{i=3}^{11} F_i - F_{12}$$

$$G_D = \sum_{i=3}^8 G_i - \sum_{i=9}^{11} G_i + G_{12}$$

$$AS_D = \sum_{i=3}^8 AS_i - \sum_{i=9}^{11} AS_i + AS_{12}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= [Q + Q_H]C_1 & B_1 &= S_{H\eta} \sin(\alpha_{ZH} + q_1) \\
D_1 &= [Q + Q_H]B_1 & C_1 &= S_{H\eta} \cos(\alpha_{ZH} + q_1) \\
E_1 &= J_{H\eta} + H_1 \\
F_1 &= Q_H S_{H\eta} [z_{OH} \cos(\alpha_{ZH} + q_1) + x_{OH} \sin(\alpha_{ZH} + q_1)] \\
H_1 &= S_{H\eta} [z_{OH} \sin(\alpha_{ZH} + q_1) - x_{OH} \cos(\alpha_{ZH} + q_1)] \\
G_1 &= S_{H\eta} [(2Q z_{OH} + U) \cos(\alpha_{ZH} + q_1) + (2Q x_{OH} - W) \sin(\alpha_{ZH} + q_1)] \\
AS_1 &= Q S_{H\eta} [z_{OH} \cos(\alpha_{ZH} + q_1) + x_{OH} \sin(\alpha_{ZH} + q_1)] \\
A_2 &= [Q + Q_M]C_2 & B_2 &= S_{M\eta} \sin q_2 \\
D_2 &= [Q + Q_M]B_2 & C_2 &= S_{M\eta} \cos q_2 \\
E_2 &= J_{M\eta} + H_2 \\
F_2 &= Q_M S_{M\eta} (z_{BO} \cos q_2 + x_{BO} \sin q_2) \\
H_2 &= S_{M\eta} (z_{BO} \sin q_2 - x_{BO} \cos q_2) \\
G_2 &= S_{M\eta} (2Q z_{BO} + U) \cos q_2 + (2Q x_{BO} - W) \sin q_2 \\
AS_2 &= Q S_{M\eta} (z_{BO} \cos q_2 + x_{BO} \sin q_2)
\end{aligned}$$

Przykładowo podano zastosowane oznaczenia dla węzła E układu sterowania (rys.2):

$$\begin{aligned}
A_4 &= [Q - \kappa_1 Q_D]C_4 & B_4 &= S_{2\eta} \cos(\kappa_1 q_3) \\
D_4 &= [Q - \kappa_1 Q_D]B_4 & C_4 &= S_{2\eta} \sin(\kappa_1 q_3) \\
E_4 &= \kappa_1 [J_{2\eta} + H_4] \\
F_4 &= \kappa_1^2 Q_D S_{2\eta} [z_{EO} \sin(\kappa_1 q_3) + x_{EO} \cos(\kappa_1 q_3)] \\
G_4 &= \kappa_1 S_{2\eta} [(2Q z_{EO} + U) \sin(\kappa_1 q_3) + (2Q x_{EO} - W) \cos(\kappa_1 q_3)] \\
H_4 &= S_{2\eta} [z_{EO} \cos(\kappa_1 q_3) - x_{EO} \sin(\kappa_1 q_3)]
\end{aligned}$$

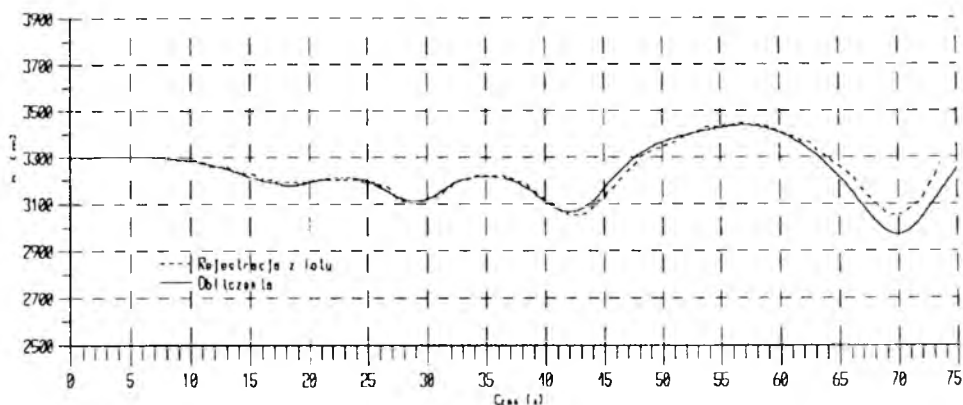
Użyte oznaczenia dla pozostałych węzłów (rys.2) układu sterowania podano w pracach [3,4].

Otrzymanych 6 dynamicznych równań ruchu uzupełnionych związkami kinematycznymi tworzy układ równań ruchu samolotu z odkształcalnym układem sterowania sterem wysokości, z masowym urządzeniem wspomagającym w kanale pochylania [3÷7].

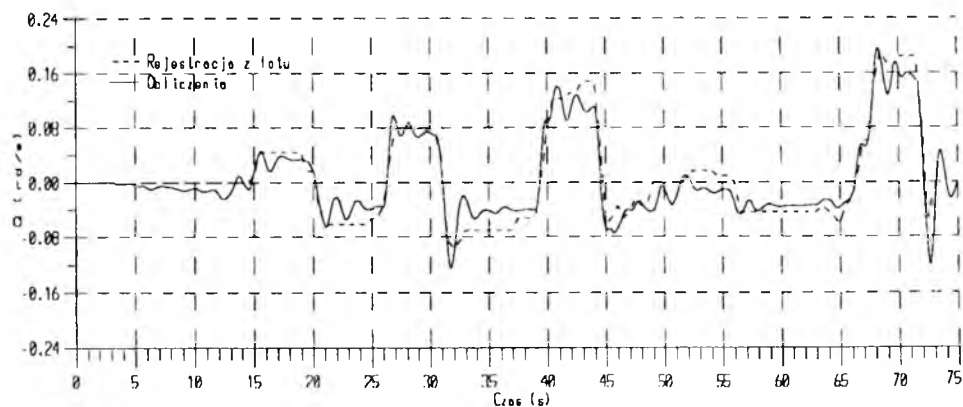
3. Symulacja numeryczna i wnioski

Po odpowiedniej identyfikacji parametrycznej: masowej, geometrycznej, aerodynamicznej, sztywnościowej, układ równań (2.1) scałkowano numerycznie

dla warunków początkowych odpowiadających zadaniu 6 lotu 270 prototypu I-22 1ANP01-04 metodą Rungego-Kutty IV stopnia [4].



Rys. 4. Przebieg wysokości lotu nr 270 (zad.6) prototypu I-22 z dn. 4.10.1991r

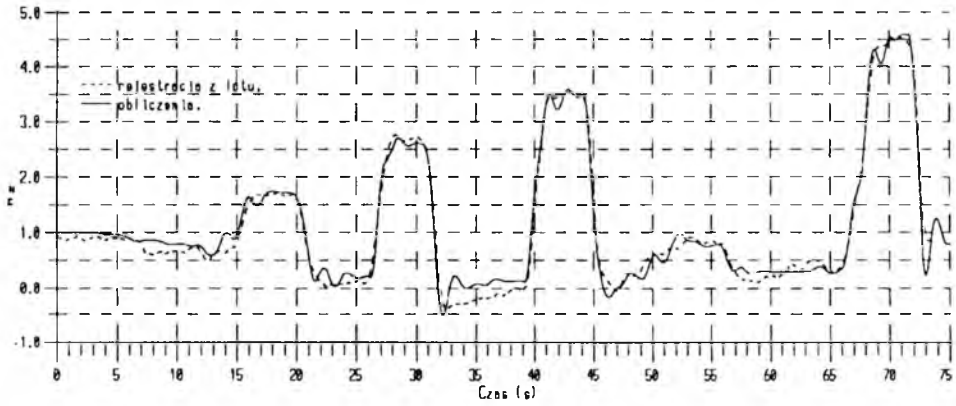


Rys. 5. Przebieg prędkości kątowej pochylania $Q = f(t)$

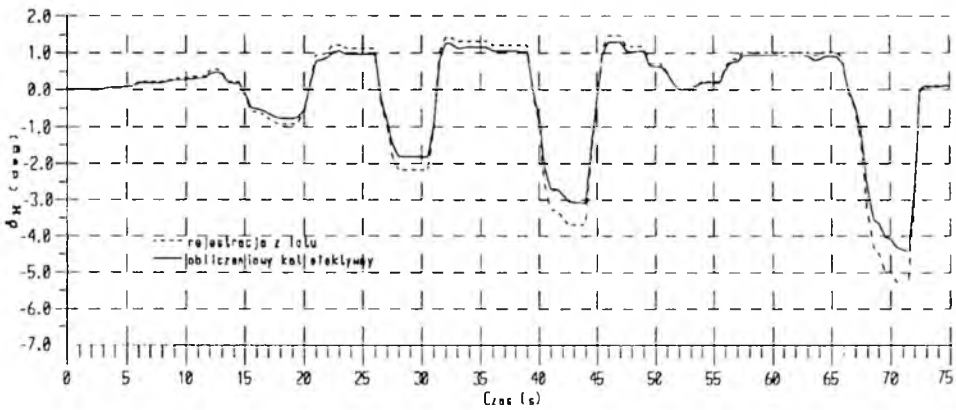
Po przeprowadzeniu weryfikacji porównawczej modelu matematycznego metodą rekonstrukcji trajektorii lotu [5] – rys.4 ÷ rys.10, przeprowadzono cykl symulacji numerycznych dla różnych wartości parametrów masowego urządzenia wspomagającego w układzie sterowania sterem wysokości [3,4].

Obliczenia wykonano przy różnych założeniach początkowych – tj. przy stałej trajektorii lotu i stałym przebiegu niezbędnej siły pilota. Na rys.11 ÷ rys.14 przedstawiono wyniki dla różnych mas M_2 masowego urządzenia wspomagającego w trakcie analizowanego fragmentu lotu samolotu I-22 [3÷6].

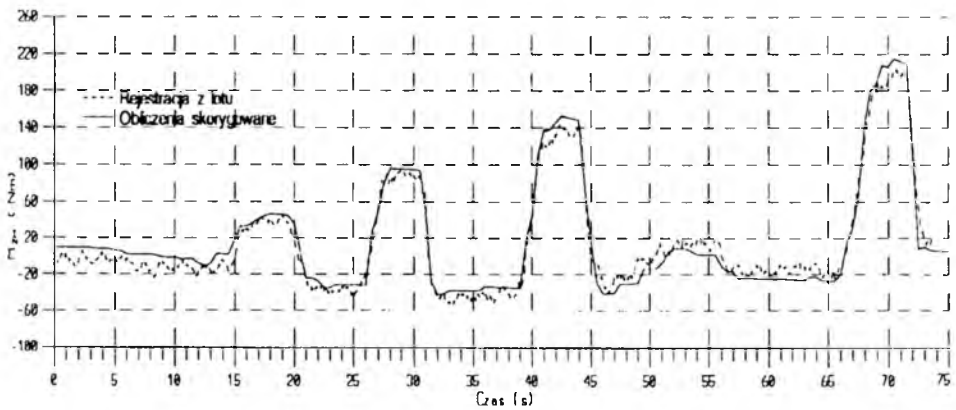
Na rys.15 ÷ rys.19 przedstawiono uzyskane rezultaty dla różnych mas sa-



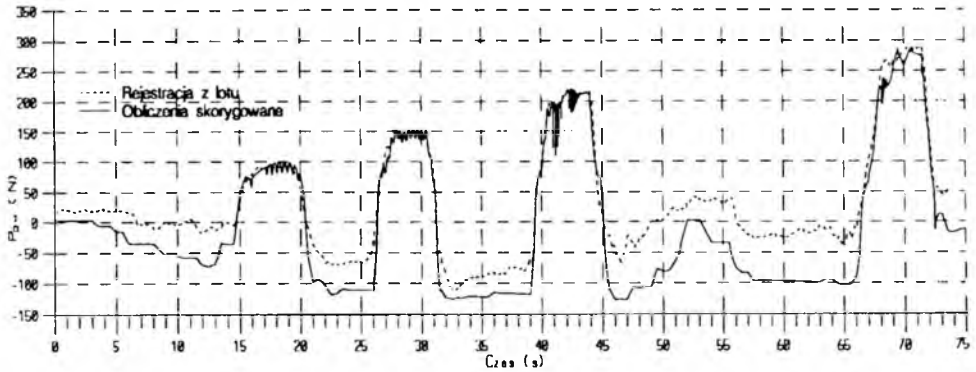
Rys. 6. Przebieg współczynnika obciążenia $n_z = f(t)$



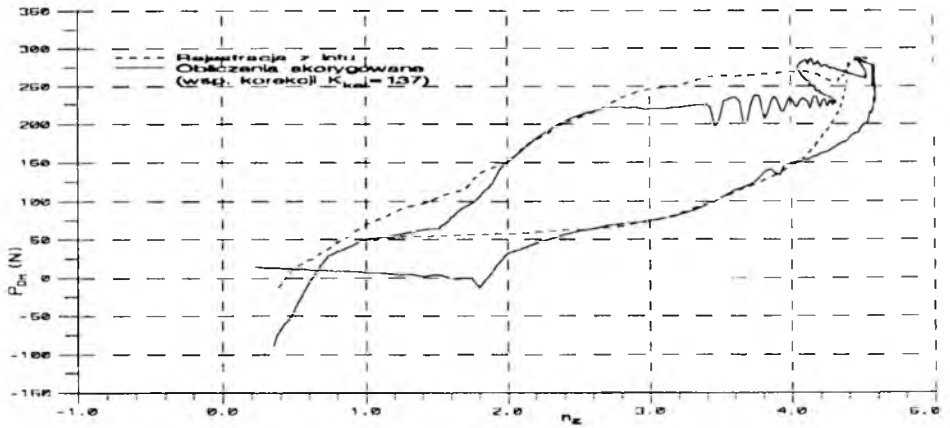
Rys. 7. Przebieg kąta wychylenia steru $\delta_H = f(t)$



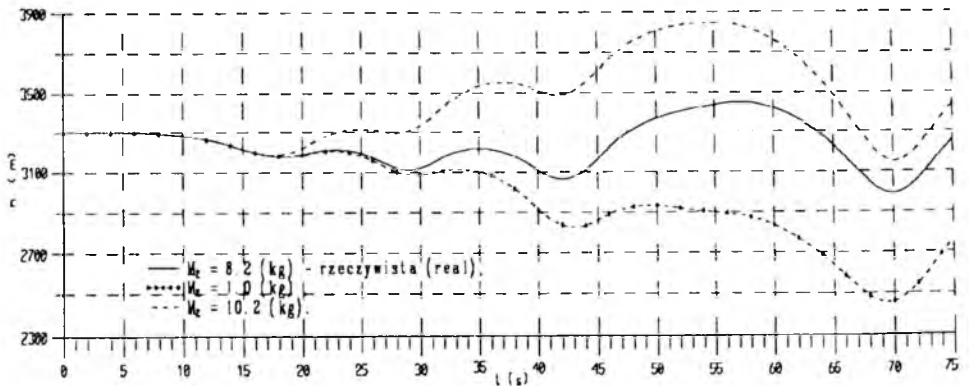
Rys. 8. Przebieg momentu zawiasowego $M_{ZH} = f(t)$ – współczynnik korekcji $K_{kor} = 1.3$



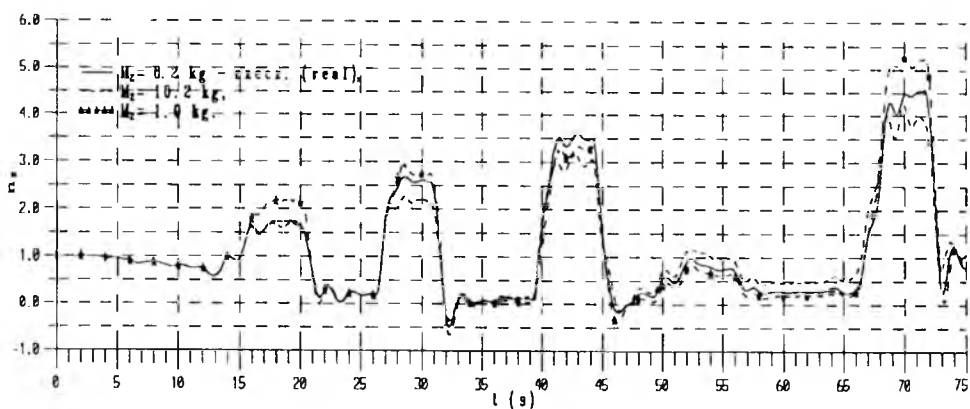
Rys. 9. Przebieg niezbędnej siły pilota $P_{DH} = f(t)$ – współczynnik korekcji $K_{kor} = 1.37$



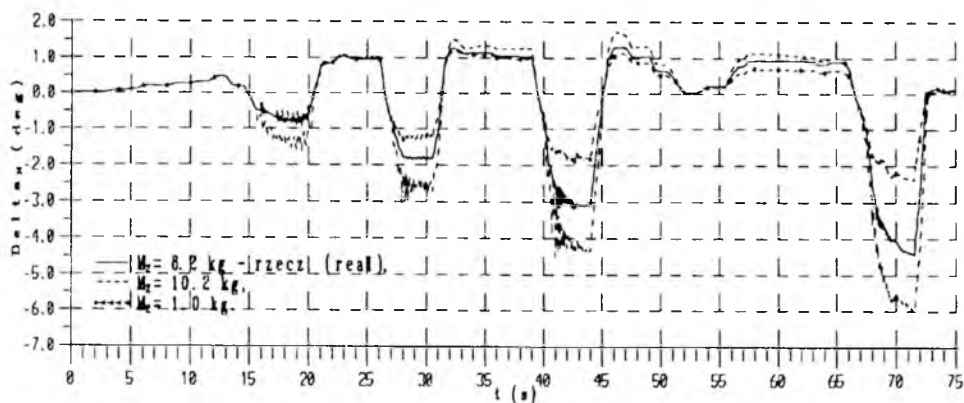
Rys. 10. Przebieg niezbędnej siły pilota $P_{DH} = f(n_z)$ – w 4 wyrwaniu – od 66s do 73s lotu



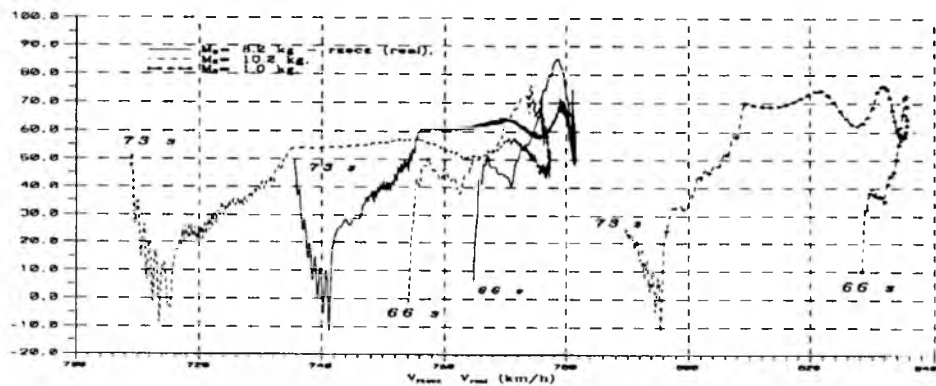
Rys. 11. Przebieg wysokości lotu. Obliczenia dla 3 wariantów masy M_2 przy ustalonej sile pilota



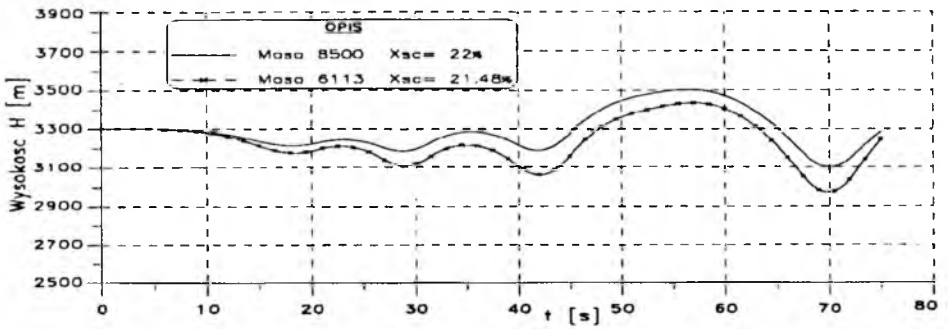
Rys. 12. Przebieg współczynnika obciążenia $n_z = f(t)$



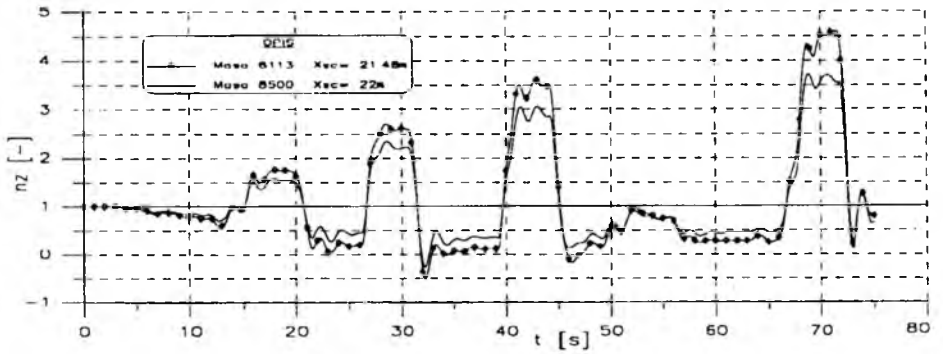
Rys. 13. Przebieg kąta wychylenia steru $\delta_H = f(t)$



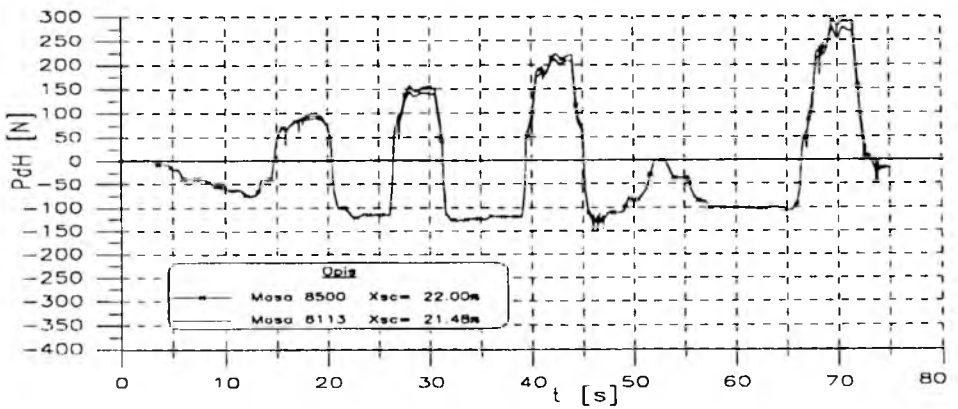
Rys. 14. Przebieg $Pd/n_z = f(V_{rzecz})$ w trakcie 4 wyrwania (do $n_z = 4.5$) - od 66s do 73s lotu



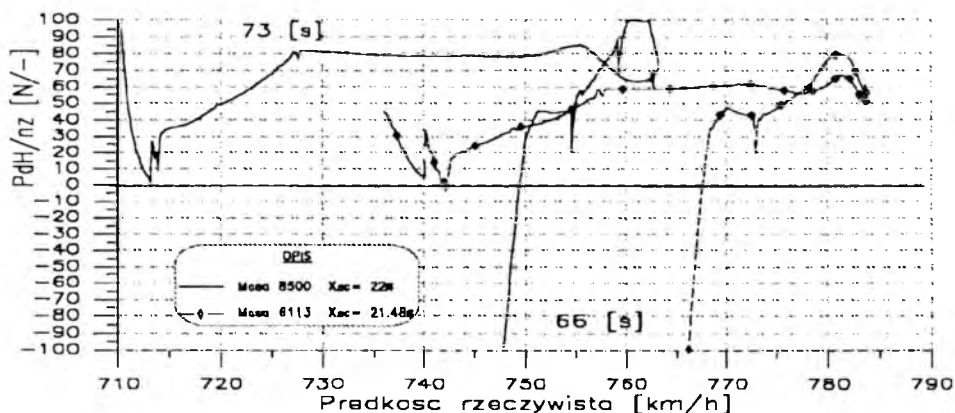
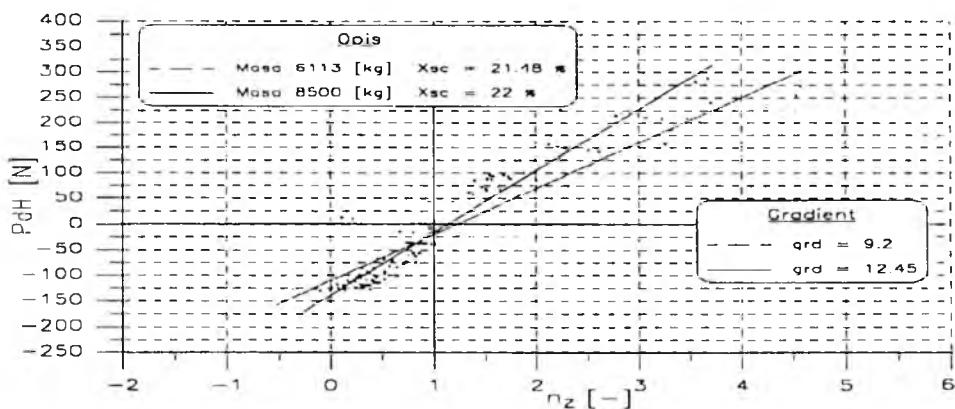
Rys. 15. Przebieg wysokości lotu. Obliczenia dla różnych mas samolotu z tłumieniem T_{C3}



Rys. 16. Przebieg współczynnika obciążenia n_z



Rys. 17. Przebieg niezbędnej siły pilota

Rys. 18. Przebieg $P_d/n_z = f(V_{rzecz})$ 

Rys. 19. Gradient siły pilota

molotu przy wprowadzeniu do układu masowego urządzenia wspomagającego tłumika K_{T3} w zespole K_{C3} [4,7].

Można zaobserwować znaczący wpływ tłumienia K_{T3} na przebieg siły pilota – stłumienie gwałtownych oscylacji tej siły – rys.14 i rys.18. Rys.19 umożliwia bezpośrednie odniesienie się do przepisów budowy statków powietrznych. Analiza gradientu siły pilota jest jednym z celów przeprowadzania badań w locie prototypów samolotów.

Model matematyczny sterowanego samolotu z odkształcalnym układem sterowania z masowym urządzeniem wspomagającym, umożliwia przeprowadzenie doboru charakterystyk masowych, geometrycznych, sztywnościowych

czy geometrycznych układu sterowania sterem wysokości samolotu PZL I-22 w różnych konfiguracjach masowych i aerodynamicznych.

Przedstawiony model matematyczny pozwala na przeprowadzanie weryfikacji przyjętych rozwiązań układu sterowania sterem wysokości już na etapie wstępnych prac projektowych. Po przeprowadzeniu identyfikacji układu sterowania – możliwe jest również zastosowanie opracowanego modelu do analizy własności dynamicznych innego samolotu.

Literatura

1. DŻYGADŁO Z., KRZYŻANOWSKI A., *Dynamika przestrzennego lotu samolotu z odkształcalnymi układami sterowania*, Biuletyn WAT Nr 5, Warszawa 1983
2. ETKIN B., *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972
3. GOSZCZYŃSKI J., *Wpływ zmian w konstrukcji masowego urządzenia wspomagającego na dynamikę sterowanego samolotu*, Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa 34/BW-W4/93, Warszawa 1993, (niepublikowane)
4. GOSZCZYŃSKI J., *Analiza wpływu dynamiki układu sterowania sterem wysokości na lot samolotu*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1993
5. GOSZCZYŃSKI J., MARYNIAK J., RAHMAN M., *Matematyczne modelowanie lotu samolotów – metodologia weryfikacji symulacji numerycznej z rejestracją parametrów lotu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 1198, Z.113, Gliwice 1993
6. GOSZCZYŃSKI J., MARYNIAK J., *Modelowanie wpływu własności dynamicznych układu sterowania sterem wysokości na dynamikę lotu sterowanego samolotu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 1231, Z.116, Gliwice 1994
7. GOSZCZYŃSKI J., *Samolot I-22 (silniki K-15) z podwieszzeniami F1EEF1 – wersja przeciążona – symulacja numeryczna lotu*, Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa 237/SZ-OA/94, Warszawa 1994, (niepublikowane)
8. GORAJ Z., MARYNIAK J., *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 13, 2, PWN, Warszawa 1975
9. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr.35, Warszawa 1975
10. MARYNIAK J., *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, Referat plenarny, Zbiór referatów XXVI Sympozjon "Modelowanie w Mechanice" Gliwice-Kudowa, 1987
11. MACLEAN D., *Automatic Flight Control Systems*, Prentice Hall, New York 1990
12. PATURSKI Z., *Badania metod symulacji cyfrowej dynamiki sprężystego samolotu odrzutowego z uwzględnieniem zmian charakterystyk aerodynamicznych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1981

Problem of the Dynamic Effect of Bob-Weight in the Aircraft Deformable Elevator Control System on Flight

Summary

Physical and mathematical modelling of the subsonic jet trainer – attack aircraft with deformable elevator control system is presented in the paper. Model construction based on mathematical modelling of controlled aircraft with deformable elevator control system and "bob-weight", together with the flight data from a test flight (equipped with on-board recorders) for developing a data base to be used for parameter identification [4] has been presented.

To analyze the effects of "bob-weight" appearing in deformable elevator control system and dynamics of the aircraft it was assumed that the mechanical system representing the aircraft is the classical six degree-of-freedom rigid body. Elevator control system with "bob-weight" and pilot is considered to be deformable and modelled by the equivalent stiffness and viscous damper of the control system, and the equivalent stiffness and viscous damper of the pilot (Fig.2).

Simulations were carried out after reducing the complete set of equations of motion [4] to longitudinal form only, Eqs (2.1) ÷ (2.6), on the IBM-PC computer system with the aid of the Runge-Kutta differential equation solving procedure [3,4,5,6,7].

The program has been verified for a fragment of the test flight no. 270 (task 6) of prototype PZL I-22 "IRYDA" [4,5]. After that, several numerical simulations for the flight were carried out, for the following cases:

- mechanical control system of the elevator has different "bob-weight" masses M_2 [3,4],
- different initial conditions for simulation (steady pilot stick force run or steady elevator angle run) [4,6],
- equivalent viscous damper appears run in K_{C3} assembly [4,7],
- aircraft has different aerodynamic and weight configuration [7].

Some sample results are presented in Fig.4 ÷ Fig.19.

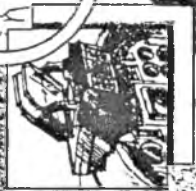
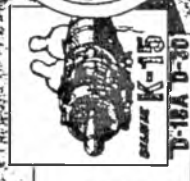
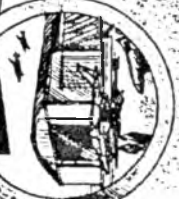
WOSŁ DEBLIN. PIĘKI LOTNICE



IRYDA M-93

INDUSTRIE AERONAUTIQUE
SAGEM

INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1995



KRYTERIA STATECZNOŚCI SAMOLOTU NA ETAPIE PROJEKTU KONCEPCYJNEGO

ZBIGNIEW KLEPACKI

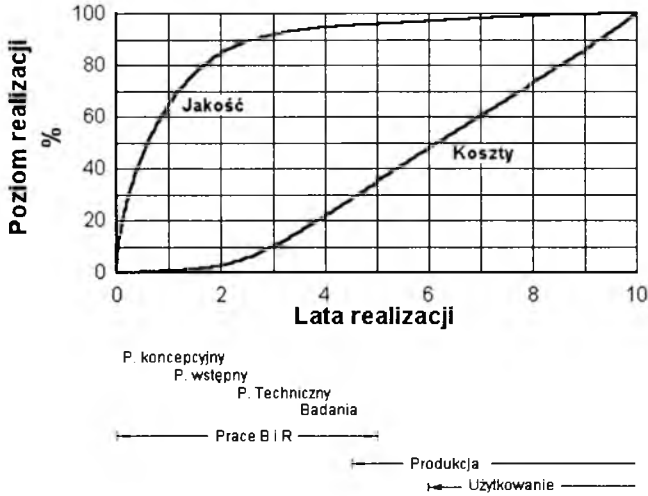
*Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa
Politechnika Rzeszowska*

W procesie projektowania samolotu, ważną grupą ograniczeń są wymagania dynamiczne (stateczność i sterowność). W pracy pokazano wpływ poziomu tych wymagań na cenę i średnie bezpośrednie koszty operacyjne (na przykładzie samolotu rolniczego).

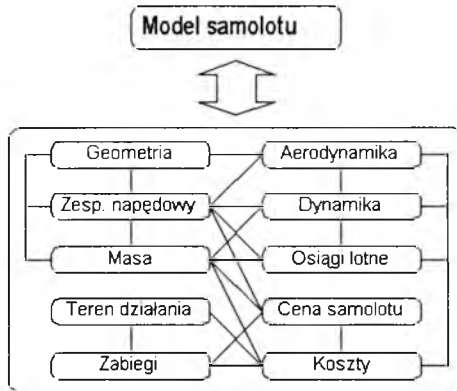
Postać konstrukcyjna samolotu, jego własności lotne i użytkowe, determinowane są w najwcześniejszych fazach projektowania: projekcie koncepcyjnym i wstępnym (rys.1). Według danych literaturowych w poprawnie prowadzonym cyklu projektowania i realizacji samolotu etapy te (5 ÷ 10% kosztów programu) określają ostateczną postać konstrukcji (w 70 ÷ 85%) oraz wpływają zasadniczo na koszty realizacji całego programu [2,10,13,14].

Doprowadzenie rozwiązania nietrafionego lub odległego od optimum do dostatecznej zgodności z założeniami wiąże się z dodatkowymi znaczącymi nakładami finansowymi oraz stratą czasu. Uzyskuje się przy tym połowiczny efekt zmian z uwagi na ograniczenia wynikłe z wcześniej przyjętych rozwiązań (klinicznym przykładem takiej sytuacji był M-15 Belfegor). Jest zatem niezmiernie istotne, by główne parametry techniczne samolotu wyznaczać z dostateczną dokładnością przede wszystkim w fazie opracowywania i dopracowywania koncepcji nowego samolotu.

Projektowanie jest procesem intelektualnym, zmierzającym do celowego kreowania rzeczywistości. Proces ten jest równoznaczny z tworzeniem modelu fragmentu rzeczywistości, badaniem go a następnie przekształcaniem w materię (lub proces). Skuteczne projektowanie możliwe jest w oparciu o poprawny model (matematyczny) samolotu i jego otoczenia, przy czym przez poprawność należy rozumieć zarówno zgodność wielkości jak i tendencji zmian własności modelowanego samolotu wywołanych zmianami jego parametrów. W praktyce model taki składa się z szeregu powiązanych ze sobą podmodeli (modeli niższego rzędu), opisujących wybrane własności i sfery działania samolotu (rys.2).



Rys. 1.



Rys. 2.

Model odzwierciedlać powinien wszystkie istotne cechy i własności użytkowe samolotu w zależności od pewnej liczby wielkości charakteryzujących samolot, uznanych za zmienne procesu projektowania. Celowy wybór tych zmiennych, umożliwiający w możliwie dużym zakresie spełnienie wymagań i ograniczeń nakładanych na konstrukcję i własności samolotu przy równoczesnym minimalizowaniu (maksymalizowaniu) kryteriów oceny, sprowadza projektowanie do typowego zadania optymalizacji formalnie dającego zapisać się

w następującej postaci:

$$F_c \xrightarrow{x_i \in \mathcal{D}} \min(f_c(x_i))$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} x_i^d \leq x_i \leq x_i^g & i = 1, \dots, n \\ G_j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, m \\ H_k(x) = 0 & k = 1, \dots, l \end{cases}$$

gdzie:

- F_c, f_c – funkcje kryterialne,
- x_i – zmienne optymalizowane,
- x_i^d, x_i^g – dolna i górna granica zmiennych,
- $G_j(x)$ – ograniczenia funkcyjne, nierównościowe,
- $H_k(x)$ – ograniczenia funkcyjne, równościowe,
- n – liczba zmiennych,
- m – liczba ograniczeń nierównościowych,
- l – liczba ograniczeń równościowych.

Optymalny dobór głównych parametrów samolotu jest zadaniem trudnym. Duża liczba istotnych parametrów samolotu, mnogość przeciwstawnych wymagań i ograniczeń, przy skromnym zasobie informacji (wymagających dodatkowych założeń o "poprawności rozwiązań szczegółowych", "zasadzie syntezy" itp) w wstępnych fazach projektowania wymaga szczególnie starannego postępowania. Wśród różnego rodzaju uwarunkowań i ograniczeń kształtujących postać samolotu, jedną z istotniejszych grup, z reguły traktowanych zgrubnie, są wymagania dotyczące stateczności i sterowności. Słabo widoczne związki tych wymagań z podstawowymi cechami osiągowymi traktowane są jako wystarczające uzasadnienie takiego postępowania.

Ocena własności dynamicznych samolotu, szczególnie na wczesnych etapach projektowania opierać się musi na dwu zasadniczych założeniach:

- wymagania muszą uwzględniać przyjęte dla samolotu przepisy budowy samolotów;
- uformowana w oparciu o przyjęte wymagania postać konstrukcji musi "potencjalnie" gwarantować osiągnięcie zadowalających charakterystyk dynamicznych.

Pamiętać warto, że samo spełnienie wymagań przepisów stanowi podstawę uzyskania certyfikatu, nie gwarantuje jednak dobrych własności dynamicznych samolotu. Potwierdzeniem tego faktu jest istnienie znacznej liczby pozaprzepisowych kryteriów oceny dynamiki samolotu [1] i znane problemy z doprowa-

dzeniem samolotu do poziomu własności akceptowanych przez pilotów. Kryteria formułowane w przepisach i wykorzystywane w projektowaniu samolotów można podzielić na:

- ideowe – określające pożądane cechy w formie opisowej;
- liczbowe – określające zakresy liczbowe lub wartości graniczne charakterystycznych wyróżników ruchu;
- psychofizyczne – określające obszary parametrów odbieranych poprawnie przez pilota.

Cywilne przepisy brytyjskie (BCAR), amerykańskie (FAR) i za nimi europejskie (JAR) precyzują wymagania w sensie minimów bezpieczeństwa a nie jakości zachowania się samolotu. Nieco inaczej (szerzej i bardziej szczegółowo) przedstawiane są te zagadnienia w wojskowych przepisach amerykańskich (MIL). Przydatność kryteriów wynikających bezpośrednio z przepisów do prac projektowych we wczesnych fazach jest ograniczona z powodu:

- braku dostatecznej informacji o samolocie;
- zbyt dużych nakładów pracy na uzyskanie wyniku;
- binarnego charakteru kryteriów nie pozwalających na wartościowanie własności.

Formowanie dynamiki samolotu powinno odbywać się w związku z tym w oparciu o takie kryteria, które przy skromnym zasobie informacji i niewielkich nakładach pracy pozwolą uzyskać potencjalnie poprawne rozwiązanie. Sformułowanie "potencjalnie poprawne rozwiązanie" należy rozumieć jako takie, dla którego możliwie małe będzie ryzyko:

- niespełnienia wymagań przepisów;
- uzyskania niepoprawnych własności z punktu widzenia pilota;
- istotnej ingerencji w konstrukcję samolotu na etapie dowodzenia poprawności własności.

Z tych względów szczególnie interesującą formę kryteriów uzyskać można analizując związki liczbowych wielkości charakteryzujących wybrana formę ruchu, opisaną zazwyczaj uproszczonymi równaniami ruchu (izolowanymi) i ocenami pilota (PR – Pilot Rating) wyrażonymi w skali Coopera-Harpera lub podobnej [4,9,12,15]. Cechą charakterystyczną tego rodzaju kryteriów jest

powiązanie cech technicznych samolotu z oceną wyrażoną w formie liczbowej, w skali odczuć pilota.

W pracach [7] i [8] przedstawiono metodykę i założenia systemu optymalizacji parametrów samolotu rolniczego. Postać konstrukcyjna samolotu formowana jest w nim przez założony schemat kompozycji samolotu, ograniczenia nałożone na konstrukcję, własności użytkowe (w tym dynamiczne), prawne i inne. Obszar rozwiązań porządkowany jest względem kryterium ekonomicznego (średniego bezpośredniego kosztu obróbki pola). Samolot rolniczy, wbrew powszechnemu mniemaniu, jest złożonym systemem technicznym mocno uwarunkowanym rodzajem wykonywanych zadań i warunkami bezpieczeństwa lotu. Samolot taki z natury rzeczy lata "nisko, powoli" i bardzo dynamicznie. Profil użytkowania narzuca ostre wymagania zarówno w odniesieniu do stateczności jak i sterowności samolotu. Interesująca wydaje się być odpowiedź na pytanie, na ile ostrość wymagań dotyczących dynamiki samolotu wpłynie na postać konstrukcji, jego cenę i wartość kryterium.

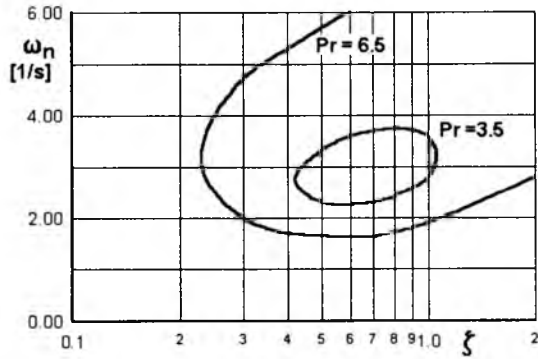
W przykładowych obliczeniach przyjęto dwa poziomy wymagań określone ocenami wg. Coopera-Harpera $PR < 3.5$ i $PR < 6.5$, co odpowiada odpowiednio dobrym i dostatecznym własnościom dynamicznym. Wariantowane wymagania dynamiczne zestawiono w tabeli 1. zaś postać niektórych kryteriów pokazano na rys.3 do rys.6.

Tabela 1

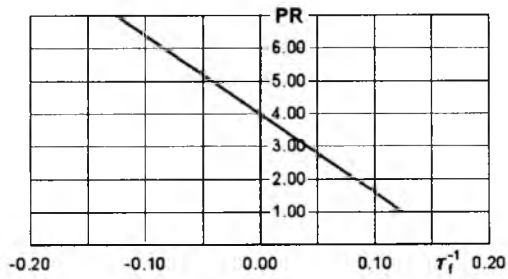
Oceniana cecha	Poziom oceny pilota	
	3.5	6.5
Zapas statecz. statycz. z trzymanym drażkiem	0.2	0.1
Oscylacje krótkookresowe	3.5 rys.3	6.5 rys.3
Oscylacje długookresowe	3.5 rys.4	6.5 rys.4
Wzgl. prędk. obrotu ustalonego (wzgl.osi x)	0.15	0.075
Holendrowanie	3.5 rys.5	6.5 rys.5
Ruch spiralny	3.5 rys.6	6.5 rys.6

Pozostałe wymagania (konstrukcyjne i osiągowie) oraz warunki wykonywania zadań w każdym wariantcie były identyczne.

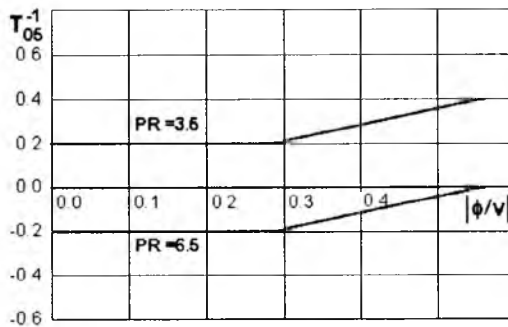
Przeprowadzone obliczenia wykazują, że uwzględnienie fizycznych kryteriów oceny dynamiki samolotu ma istotny wpływ na ukształtowanie postaci samolotu. Wymierne i znaczące są koszty uzyskania dobrych własności dynamicznych. Względne rezultaty obliczeń dla wybranych, ważniejszych parametrów technicznych i ekonomicznych samolotu formowanego przy różnych poziomach wymagań zawarto w tabeli 2. Rezultaty odniesiono do rozwiązania uzyskanego dla wymagań na poziomie oceny $PR = 3.5$.



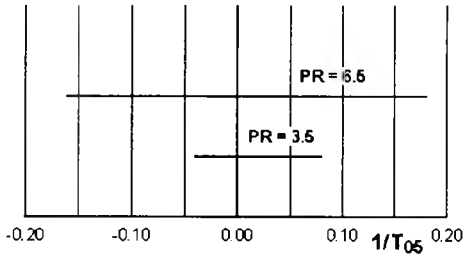
Rys. 3. Oscylacje krótkookresowe [9]



Rys. 4. Oscylacje długookresowe [4]



Rys. 5. Holendrowanie [9]



Rys. 6. Ruch spiralny [3]

Tabela 2

Wielkość	6.5/3.5
Masa Startowa	0.98
Moc maksymalna	0.98
Powierzchnia nośna	1.1
Długość kadłuba	0.97
Wzgl. powierzchnia usterzenia poziomego	1.05
Wzgl. powierzchnia usterzenia pionowego	1.04
Cena samolotu	0.96
Wzgl. średni bezpośr. koszt obróbki pola	0.94

Literatura

1. *Analiza i dobór parametrów automatyki sterowania*, Sprawozdanie niepublikowane, Rzeszów 1979
2. ARENDTS F.J., *Aktuelle Entwicklungen in der Strukturtechnik*, Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung, **16**, 4, 1992
3. BISGOOD P.L., *A Review of Recent Research on Handling Qualities and its Application to the Handling Problems of Large Aircraft*, Part I, II, A.R.C. R&M No. 3458, London 1967
4. BISGOOD P.L., *A Review of Recent Research on Handling Qualities and its Application to the Handling Problems of Large Aircraft*, Part III, A.R.C. R&M No. 3606, London 1970
5. BOROWSKI A. KLEPACKI Z. I INNI, *Analizy i studia do projektu samolotu MK1*, Sprawozdanie niepublikowane, Rzeszów 1989
6. BOROWSKI A. KLEPACKI Z. KRET K., *Analiza optymalizacyjna podstawowych parametrów samolotu rolniczego*, Sprawozdanie niepublikowane, Rzeszów 1985

7. KLEPACKI Z., *Metoda optymalizacji podstawowych parametrów samolotów rolniczych*, Praca doktorska, Politechnika Rzeszowska 1983
8. KLEPACKI Z., *Samolot rolniczy jako obiekt optymalizacji*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Czerwiec 1994
9. LEYMAN C., NUTTALL E.R., *A Survey of Aircraft Handling Criteria*, A.R.C. C.P. No. 833, London 1966
10. ROSKAM J., *Airplane Design, Part VIII, Airplane Cost Estimation: Design, Development, Manufacturing and Operating*, 1990
11. BJUŠGENS G.S., STUDNEV R.V., *Aerodinamika samoleta*, Dynamika prodolnogo i bokovogo dwižexnija, Moskwa, Mašynostroenie 1984
12. DOBROLENSKIJ Q.P. (RED.), *Metody inżynernogo-psihologičeskich issledowanij v aviacii*, Moskwa, Mašynostroenie 1975
13. EGER S.M. (RXD.), *Proektirovanie samoletov*, Moskwa, Mašynostroenie 1983
14. OSIN M.N., *Metody avtomatizirovannogo proektirovanija letatelnyh apparatov*, Moskwa, Mašynostroenie 1984
15. SILVESTROV M.M., KIZIOROV L.M., PONOMARENKO W.A., *Avtomatizacija upravljenja letatelnyimi apparatami s učetom čelovečeskogo faktora*, Moskwa, Mašynostroenie 1986

Stability Criteria in Conceptual Aircraft Design

Summary

In the aircraft design process, the important group of constraints are dynamics requirements (stability and control). This work shows influence of those requirements level on price and mean direct operating costs (on the example of agricultural aircraft).

MODEL MATEMATYCZNY ASTATYCZNEGO AUTOPILOTA ŚMIGŁOWCA NA BAZIE METODY ROZDZIELENIA RUCHÓW

GRZEGORZ KOWALECZKO

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

W pracy przedstawiono model matematyczny astatycznego autopilota śmigłowca uwzględniający jego dynamikę. Przy formułowaniu praw sterowania wykorzystano metodę rozdzielania ruchów. Osobno rozpatrzono sterowanie w ruchu podłużnym i w ruchu bocznym. Przedstawiono przykład obliczeniowy dla jednej prędkości lotu i przebiegi współczynników wzmocnienia w całym zakresie prędkości oraz wniośki.

1. Wstęp

Niestateczność śmigłowców jednowirnikowych na większości zakresów lotu powoduje konieczność zastosowania środków poprawiających ich własności dynamiczne. Są to najczęściej systemy automatycznej stabilizacji. Jedną z ich funkcji jest zapewnienie tłumienia wszystkich ruchów własnych układu śmigłowca-autopilot co ułatwia sterowanie śmigłowcem. W pracach [1,2] pokazano sposób określenia praw sterowania na bazie metody rozdzielania ruchów, której podstawy przedstawione są w [3]. W [1,2] metoda ta została rozwinięta poprzez rezygnację z niektórych założeń upraszczających. Rozpatrzono tam modelowanie praw sterowania dla autopilota statycznego, w oparciu o rozdzielone na ruch podłużny i ruch boczny równania ruchu śmigłowca. Obecnie zagadnienie to zostanie rozszerzone poprzez uwzględnienie dynamiki samego autopilota. Nadal bazować się będzie na rozdzielonych równaniach ruchu.

2. Fizyczny i matematyczny model śmigłowca

Za podstawę do rozwiązania sformułowanego powyżej problemu przyjęto "samolotowy" model śmigłowca, w którym kadłub potraktowano jako bryłę

sztynną. Uwzględniono ruch sztywnych łopat względem przegubu poziomego i osiowego, zaś śmigło ogonowe jest bezprzegubowym i bezmasowym źródłem siły ciągu równoważącym moment oporowy i zapewniającym sterowność kierunkową. Model ten, opisany szerzej w pracach [1,4] daje uproszczony zlinearyzowany układ równań przestrzennego ruchu śmigłowca:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

gdzie:

$\mathbf{x} = [u, v, w, p, q, r, \vartheta, \varphi, \psi]$ – wektor przyrostów parametrów lotu:

U, V, W – prędkości liniowych środka masy kadłuba w układzie związanym z kadłubem $0x_k y_k z_k$,

P, Q, R – prędkości kątowych kadłuba w układzie $0x_k y_k z_k$,

Θ, Φ, Ψ – kątów pochylenia, przechylenia i odchylenia kadłuba,

$\mathbf{s} = [\Delta\theta_o, \Delta\kappa_s, \Delta\eta_s, \Delta\phi_{so}]$ – wektor przyrostów parametrów sterowania:

θ_o – kąta skoku ogólnego wirnika nośnego,

κ_s – kąta sterowania w ruchu podłużnym,

η_s – kąta sterowania w ruchu bocznym.

ϕ_{so} – kąta skoku ogólnego śmigła ogonowego.

Do dalszych obliczeń równania ruchu przestrzennego (2.1) rozdzielono na równania ruchu podłużnego i równania ruchu bocznego poprzez pominięcie wszystkich elementów macierzy \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} sprzęgających oba ruchy (tak przekształcone macierze oznaczono indeksem górnym *). Następnie przekształcono otrzymane równania do postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{C}^{*-1}\mathbf{D}^*\mathbf{x} - \mathbf{C}^{*-1}\mathbf{E}^*\mathbf{s} \quad (2.2)$$

3. Model matematyczny autopilota

Założono, że system automatycznej stabilizacji reaguje na zmianę prędkości liniowych (u, v, w), prędkości kątowych (p, q, r), oraz kątów (ϑ, φ, ψ). Wykorzystano zlinearyzowane równania ruchu śmigłowca (2.2). Dodatkowo, zgodnie z metodą rozdzielania ruchów przyjęto, że kąty: pochylenia Θ , przechylenia Φ i odchylenia Ψ są niewielkie i że:

$$p = \dot{\varphi} \quad q = \dot{\vartheta} \quad r = \dot{\psi} \quad (3.1)$$

3.1. Stabilizacja w ruchu podłużnym

Na podstawie (2.2) i (3.1) ruch podłużny śmigłowca opisano równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= X^u u + X^w w + X^q q + X^\vartheta \vartheta + X^{\theta_o} \Delta\theta_o + X^{\kappa_s} \Delta\kappa_s \\ \dot{w} &= Z^u u + Z^w w + Z^q q + Z^\vartheta \vartheta + Z^{\theta_o} \Delta\theta_o + Z^{\kappa_s} \Delta\kappa_s \\ \dot{q} &= M^u u + M^w w + M^q q + M^\vartheta \vartheta + M^{\theta_o} \Delta\theta_o + M^{\kappa_s} \Delta\kappa_s \\ \dot{\vartheta} &= q \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie pochodne $X^u, \dots, X^{\kappa_s}, Z^u, \dots, Z^{\kappa_s}, M^u, \dots, M^{\kappa_s}$ są elementami macierzy $-\mathbf{C}^{*-1}\mathbf{D}^*$ i $-\mathbf{C}^{*-1}\mathbf{E}^*$.

Z równań (3.2) widać, że w ruchu podłużnym śmigłowca ma trzy stopnie swobody, odpowiadające przyśpieszeniom $\dot{u}, \dot{w}, \dot{q}$. Natomiast sterowanie w tym ruchu może odbywać się za pomocą zmiany jedynie dwóch parametrów sterowania: θ_o i κ_s . Oznacza to, że rozdzielić można jedynie dwa ruchy, zaś trzeci jest od nich zależny. Zakładając, że niezależny jest ruch pionowy i pochylenie śmigłowca zmiany kątów sterowania przedstawić można w postaci:

$$\Delta\theta_o = \Delta\theta_{oA} + \Delta\theta_{oK} \tag{3.3}$$

$$\Delta\kappa_s = \Delta\kappa_{sA} + \Delta\kappa_{sK} \tag{3.4}$$

Zgodnie z metodą rozdzielania ruchów $\Delta\theta_{oA}$ i $\Delta\kappa_{oA}$ zapewniają stabilizację, zaś $\Delta\theta_{oK}$ jest częścią kompensującą wpływ u, w, q, ϑ i $\Delta\kappa_s$ na przyśpieszenie \dot{w} , a $\Delta\kappa_{sK}$ uniezależnia przyśpieszenie \dot{q} od w i od $\Delta\theta_o$. Zapisać je można następująco:

$$\Delta\theta_{oK} = \tau_{2u}^k u + \tau_{2w}^k w + \tau_{2q}^k q + \tau_{2\vartheta}^k \vartheta + \tau_{2\kappa}^k \Delta\kappa_s \tag{3.5}$$

$$\Delta\kappa_{sK} = \tau_{1w}^k w + \tau_{1\theta}^k \Delta\theta_o \tag{3.6}$$

Warunki kompensacji są następujące:

$$Z^u u + Z^w w + Z^q q + Z^\vartheta \vartheta + Z^{\kappa_s} \Delta\kappa_s + Z^{\theta_o} \Delta\theta_{oK} = 0 \tag{3.7}$$

$$M^w w + M^{\theta_o} \Delta\theta_o + M^{\kappa_s} \Delta\kappa_{sK} = 0$$

Wstawiając wyrażenia (3.3) ÷ (3.6) do równań (3.2) przy wykorzystaniu (3.7) otrzymano współczynniki τ_1^k i τ_2^k :

$$\begin{aligned} \tau_{2u}^k &= -\frac{Z^u}{Z^{\theta_o}} & \tau_{2w}^k &= -\frac{Z^w}{Z^{\theta_o}} & \tau_{2q}^k &= -\frac{Z^q}{Z^{\theta_o}} & \tau_{2\vartheta}^k &= -\frac{Z^{\vartheta}}{Z^{\theta_o}} \\ \tau_{2\kappa}^k &= -\frac{Z^{\kappa_s}}{Z^{\theta_o}} & \tau_{1w}^k &= -\frac{M^w}{M^{\kappa_s}} & \tau_{1\vartheta_o}^k &= -\frac{M^{\vartheta_o}}{M^{\kappa_s}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Układ (3.2) przekształcono do postaci:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= X^u u + X^w w + X^q q + X^{\vartheta} \vartheta + X^{\theta_o} \Delta\theta_o + X^{\kappa_s} \Delta\kappa_s \\ \dot{w} &= Z^{\theta_o} \Delta\theta_{oA} \\ \dot{q} &= M^u u + M^q q + M^{\vartheta} \vartheta + M^{\kappa_s} \Delta\kappa_{sA} \\ \dot{\vartheta} &= q \end{aligned} \quad (3.9)$$

Wyrażenia opisujące $\Delta\theta_o$ i $\Delta\kappa_s$ na podstawie (3.3) ÷ (3.6) przedstawiono w formie:

$$\Delta\theta_o = c_p(f_{\theta_o} + \tau_{2\kappa}^k f_{\kappa}) \quad (3.10)$$

$$\Delta\kappa_s = c_p(f_{\kappa} + \tau_{1\theta_o}^k f_{\theta_o}) \quad (3.11)$$

gdzie:

$$f_{\theta_o} = \Delta\theta_{oA} + \tau_{2u}^k u + \tau_{2q}^k q + \tau_{2\vartheta}^k \vartheta \quad (3.12)$$

$$f_{\kappa} = \Delta\kappa_{sA} + \tau_{1w}^k w \quad (3.13)$$

$$c_p = \frac{1}{1 - \tau_{1\theta_o}^k \tau_{2\kappa}^k} \quad (3.14)$$

Wstawiając (3.10) i (3.11) do pierwszego z równań (3.9) otrzymano:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \bar{X}^u u + \bar{X}^w w + \bar{X}^q q + \bar{X}^{\vartheta} \vartheta + \bar{X}^{\theta_o} \Delta\theta_{oA} + \bar{X}^{\kappa_s} \Delta\kappa_{sA} \\ \dot{w} &= Z^{\theta_o} \Delta\theta_{oA} \\ \dot{q} &= M^u u + M^q q + M^{\vartheta} \vartheta + M^{\kappa_s} \Delta\kappa_{sA} \\ \dot{\vartheta} &= q \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \bar{X}^{\theta_o} &= c_p (X^{\theta_o} + X^{\kappa_s} \tau_{1\theta_o}^k) & \bar{X}^w &= X^w + \bar{X}^{\kappa_s} \tau_{1w}^k \\
 \bar{X}^{\kappa_s} &= c_p (X^{\kappa_s} + X^{\theta_o} \tau_{2\kappa}^k) & \bar{X}^q &= X^q + \bar{X}^{\theta_o} \tau_{2q}^k \\
 \bar{X}^u &= X^u + \bar{X}^{\theta_o} \tau_{2u}^k & \bar{X}^\vartheta &= X^\vartheta + \bar{X}^{\theta_o} \tau_{2\vartheta}^k
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Układ równań (3.15) uzupełniony zostanie prawami sterowania, uwzględniającymi dynamikę układu stabilizacji:

$$T_{\theta_o} \Delta \dot{\theta}_{oA} + \Delta \theta_{oA} = \tau_w w \tag{3.17}$$

$$T_\kappa \Delta \dot{\kappa}_{sA} + \Delta \kappa_{sA} = \tau_u u + \tau_q q + \tau_\vartheta \vartheta$$

Równanie charakterystyczne układu równań (3.15) i (3.17) ma następującą postać:

$$\begin{vmatrix}
 \lambda - \bar{X}^u & -\bar{X}^w & -\bar{X}^q & -\bar{X}^\vartheta & -\bar{X}^{\theta_o} & -\bar{X}^{\kappa_s} \\
 0 & \lambda & 0 & 0 & -Z^{\theta_o} & 0 \\
 -M^u & 0 & \lambda - M^q & -M^\vartheta & 0 & -M^{\kappa_s} \\
 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{\tau_w}{T_{\theta_o}} & 0 & 0 & \lambda + \frac{1}{T_{\theta_o}} & 0 \\
 -\frac{\tau_u}{T_\kappa} & 0 & -\frac{\tau_q}{T_\kappa} & -\frac{\tau_\vartheta}{T_\kappa} & 0 & \lambda + \frac{1}{T_\kappa}
 \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

Stanowi ono podstawę do obliczenia występujących w (3.17) stałych czasowych T_{θ_o} i T_κ oraz współczynników wzmocnienia $\tau_w, \tau_u, \tau_q, \tau_\vartheta$.

Równanie (3.18) przedstawić można w ogólnej postaci:

$$\lambda^6 + A_5 \lambda^5 + A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0 \tag{3.19}$$

Zakładając dalej, że ruch podłużny jest superpozycją dwóch ruchów aperiodycznych o stałych czasowych T_{I1}^p i T_{I2}^p oraz dwóch ruchów periodycznych tłumionych o stałych czasowych T_{II1}^p i T_{II2}^p oraz współczynnikach tłumienia ξ_{II1}^p i ξ_{II2}^p równanie charakterystyczne (3.19) przedstawić można jako iloczyn wielomianów charakterystycznych układów pierwszego i drugiego rzędu:

$$\begin{aligned}
 &\lambda^6 + A_5 \lambda^5 + A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = \\
 &= (\lambda + P_1)(\lambda^2 + P_2 \lambda + P_3)(\lambda + P_4)(\lambda^2 + P_5 \lambda + P_6)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{T_{I1}^p} & P_2 &= \frac{2\xi_{II1}^p}{T_{II1}^p} & P_3 &= \frac{1}{(T_{II1}^p)^2} \\ P_4 &= \frac{1}{T_{I2}^p} & P_5 &= \frac{2\xi_{II2}^p}{T_{II2}^p} & P_6 &= \frac{1}{(T_{II2}^p)^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Z (3.20) i (3.21) wynika, że zakładając stałe czasowe oraz współczynniki tłumienia otrzymać można następujące ruchy własne:

$$\begin{aligned} \lambda_{I1}^p &= -\frac{1}{T_{I1}^p} & \lambda_{II1,2}^p &= -\frac{\xi_{II1}^p}{T_{II1}^p} \pm \frac{\sqrt{1 - (\xi_{II1}^p)^2}}{T_{II1}^p} i \\ \lambda_{I2}^p &= -\frac{1}{T_{I2}^p} & \lambda_{II3,4}^p &= -\frac{\xi_{II2}^p}{T_{II2}^p} \pm \frac{\sqrt{1 - (\xi_{II2}^p)^2}}{T_{II2}^p} i \end{aligned} \quad (3.22)$$

Jednocześnie otrzymuje się następujące związki między współczynnikami A_i i P_j :

$$\begin{aligned} A_0 &= (P_1 P_3)(P_4 P_6) \\ A_1 &= (P_3 + P_1 P_2)(P_4 P_6) + (P_1 P_3)(P_6 + P_4 P_5) \\ A_2 &= (P_1 + P_2)(P_4 P_6) + (P_3 + P_1 P_2)(P_6 + P_4 P_5) + (P_1 P_3)(P_4 + P_5) \\ A_3 &= P_4 P_6 + (P_1 + P_2)(P_6 + P_4 P_5) + (P_3 + P_1 P_2)(P_4 + P_5) + P_1 P_3 \\ A_4 &= (P_6 + P_4 P_5) + (P_1 + P_2)(P_4 + P_5) + P_3 + P_1 P_2 \\ A_5 &= P_4 + P_5 + P_1 + P_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Z (3.18) wynika, że współczynniki A_i ($i = 0, \dots, 5$) są funkcjami poszukiwanych wielkości T_{θ_0} , T_κ , τ_w , τ_u , τ_q , τ_ϑ określających postać praw sterowania (3.17).

W rezultacie otrzymuje się układ sześciu równań algebraicznych nieliniowych, które zapisać można w ogólnej postaci:

$$A_j = A_j(T_{\theta_0}, T_\kappa, \tau_u, \tau_q, \tau_\vartheta, \tau_w) \quad j = 0, \dots, 5 \quad (3.24)$$

Jego rozwiązanie pozwala na określenie stałych czasowych oraz współczynników wzmocnienia charakteryzujących, wraz ze współczynnikami kompensacji (3.8), układ automatycznej stabilizacji w ruchu podłużnym.

3.2. Stabilizacja w ruchu bocznym

Układ równań opisujących ruch boczny śmigłowca jest na podstawie (2.2) i (3.1) następujący:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Y^v v + Y^p p + Y^r r + Y^\varphi \varphi + Y^{\eta_s} \Delta \eta_s + Y^{\phi_{so}} \Delta \phi_{so} \\ \dot{p} &= L^v v + L^p p + L^r r + L^\varphi \varphi + L^{\eta_s} \Delta \eta_s + L^{\phi_{so}} \Delta \phi_{so} \\ \dot{r} &= N^v v + N^p p + N^r r + N^\varphi \varphi + N^{\eta_s} \Delta \eta_s + N^{\phi_{so}} \Delta \phi_{so} \\ \dot{\varphi} &= p & \dot{\psi} &= r\end{aligned}\tag{3.25}$$

gdzie pochodne $Y^v, \dots, Y^{\phi_{so}}, L^v, \dots, L^{\phi_{so}}, N^v, \dots, N^{\phi_{so}}$ są elementami macierzy $-C^{*-1}D^*$ i $-C^{*-1}E^*$.

W równaniach (3.25) pominięto pochodne względem kąta odchylenia Y^ψ, L^ψ, N^ψ ponieważ są one równe zero. Podobnie jak w przypadku ruchu podłużnego i w ruchu bocznym śmigłowca ma trzy stopnie swobody, odpowiadające przyspieszeniom $\dot{v}, \dot{p}, \dot{r}$ i tylko dwa parametry sterowania η_s i ϕ_{so} , które przedstawione zostaną w postaci sumy członów odpowiedzialnych za stabilizację $\Delta \eta_{sA}$ i $\Delta \phi_{sA}$ oraz członów kompensacyjnych $\Delta \eta_{sK}$ i $\Delta \phi_{sK}$:

$$\Delta \eta_s = \Delta \eta_{sA} + \Delta \eta_{sK}\tag{3.26}$$

$$\Delta \phi_{so} = \Delta \phi_{sA} + \Delta \phi_{sK}\tag{3.27}$$

$\Delta \phi_{sK}$ jest częścią kompensującą wpływ v, p, φ i $\Delta \eta_s$ na przyspieszenie \dot{r} , zaś $\Delta \eta_{sK}$ uniezależnia przyspieszenie \dot{p} od r i $\Delta \phi_{so}$. Zapisać je można następująco:

$$\Delta \eta_{sK} = \tau_{1r}^k r + \tau_{1\phi_{so}}^k \Delta \phi_{so}\tag{3.28}$$

$$\Delta \phi_{sK} = \tau_{2v}^k v + \tau_{2p}^k p + \tau_{2\varphi}^k \varphi + \tau_{2\eta}^k \Delta \eta_s\tag{3.29}$$

Warunki kompensacji są następujące:

$$L^r r + L^{\eta_s} \Delta \eta_{sK} + L^{\phi_{so}} \Delta \phi_{so} = 0\tag{3.30}$$

$$N^v v + N^p p + N^\varphi \varphi + N^{\eta_s} \Delta \eta_s + N^{\phi_{so}} \Delta \phi_{sK} = 0$$

Wstawiając wyrażenia (3.26) ÷ (3.29) do (3.25), przy wykorzystaniu (3.30) otrzymuje się zależności określające współczynniki τ_1^k i τ_2^k występujące w (3.28) i (3.29):

$$\begin{aligned} \tau_{2v}^k &= -\frac{N^v}{N\phi_{so}} & \tau_{2p}^k &= -\frac{N^p}{N\phi_{so}} & \tau_{2\varphi}^k &= -\frac{N^\varphi}{N\phi_{so}} \\ \tau_{2\eta}^k &= -\frac{N^{\eta_s}}{N\phi_{so}} & \tau_{1r}^k &= -\frac{L^r}{L\eta_s} & \tau_{1\phi_{so}}^k &= -\frac{L^{\phi_{so}}}{L\eta_s} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Z układu (3.25) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Y^v v + Y^p p + Y^r r + Y^\varphi \varphi + Y^{\eta_s} \Delta\eta_s + Y^{\phi_{so}} \Delta\phi_{so} \\ \dot{p} &= L^v v + L^p p + L^\varphi \varphi + L^{\eta_s} \Delta\eta_{sA} \\ \dot{r} &= N^r r + N^{\phi_{so}} \Delta\phi_{sA} \\ \dot{\varphi} &= p & \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (3.32)$$

Wyrażenia określające $\Delta\eta_s$ i $\Delta\phi_{so}$ na podstawie (3.26) i (3.29) przedstawić można w formie:

$$\Delta\eta_s = c_b(f_\eta + \tau_{1\phi_{so}}^k f_T) \quad (3.33)$$

$$\Delta\phi_{so} = c_b(f_T + \tau_{2\eta}^k f_\eta) \quad (3.34)$$

gdzie:

$$f_\eta = \Delta\eta_{sA} + \tau_{1r}^k r \quad (3.35)$$

$$f_T = \Delta\phi_{sA} + \tau_{2v}^k v + \tau_{2p}^k p \quad (3.36)$$

$$c_b = \frac{1}{1 - \tau_{1\phi_{so}}^k \tau_{2\eta}^k} \quad (3.37)$$

Wstawiając (3.33) i (3.34) do pierwszego z równań układu (3.32) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \bar{Y}^v v + \bar{Y}^p p + \bar{Y}^r r + \bar{Y}^\varphi \varphi + \bar{Y}^{\eta_s} \Delta\eta_{sA} + \bar{Y}^{\phi_{so}} \Delta\phi_{sA} \\ \dot{p} &= L^v v + L^p p + L^\varphi \varphi + L^{\eta_s} \Delta\eta_{sA} \\ \dot{r} &= N^r r + N^{\phi_{so}} \Delta\phi_{sA} \\ \dot{\varphi} &= p & \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (3.38)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}^{\eta s} &= c_b \left(Y^{\eta s} + Y^{\phi_{so}} \tau_{2\eta}^k \right) & \bar{Y}^p &= Y^p + \bar{Y}^{\phi_{so}} \tau_{2p}^k \\
 \bar{Y}^{\phi_{so}} &= c_b \left(Y^{\phi_{so}} + Y^{\eta s} \tau_{1\phi_{so}}^k \right) & \bar{Y}^r &= Y^r + \bar{Y}^{\eta s} \tau_{1r}^k \\
 \bar{Y}^v &= Y^v + \bar{Y}^{\phi_{so}} \tau_{2v}^k & \bar{Y}^\varphi &= Y^\varphi
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Układ równań (3.38) uzupełniony zostanie prawami sterowania w ruchu bocznym uwzględniającymi dynamikę układu stabilizacji w ruchu bocznym:

$$T_\eta \Delta \dot{\eta}_{sA} + \Delta \eta_{sA} = \tau_v v + \tau_p p + \tau_\varphi \varphi \tag{3.40}$$

$$T_\phi \Delta \dot{\phi}_{sA} + \Delta \phi_{sA} = \tau_r r + \tau_\psi \psi$$

Równanie charakterystyczne układu równań (3.38) i (3.40) przedstawić można w postaci:

$$\begin{vmatrix}
 \lambda - \bar{Y}^v & -\bar{Y}^p & -\bar{Y}^r & -\bar{Y}^\varphi & 0 & -\bar{Y}^{\eta s} & -\bar{Y}^{\phi_{so}} \\
 -L^v & \lambda - L^p & 0 & -L^\varphi & 0 & -L^{\eta s} & 0 \\
 0 & 0 & \lambda - N^r & 0 & 0 & 0 & -N^{\phi_{so}} \\
 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
 -\frac{\tau_v}{T_\eta} & -\frac{\tau_p}{T_\eta} & 0 & -\frac{\tau_\varphi}{T_\eta} & 0 & \lambda + \frac{1}{T_\eta} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{\tau_r}{T_\phi} & 0 & -\frac{\tau_\psi}{T_\phi} & 0 & \lambda + \frac{1}{T_\phi}
 \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

Na podstawie (3.41), podobnie jak w przypadku ruchu podłużnego, można określić stałe czasowe T_η i T_ϕ oraz współczynniki wzmocnienia $\tau_v, \tau_p, \tau_\varphi, \tau_r, \tau_\psi, \tau_\phi$. W tym celu równanie to przedstawia się w ogólnej postaci:

$$\lambda^7 + A_6 \lambda^6 + A_5 \lambda^5 + A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0 \tag{3.42}$$

Zakładając, że ruch boczny jest superpozycją trzech ruchów aperiodycznych o stałych czasowych T_{I0}^b, T_{I1}^b i T_{I2}^b oraz dwóch ruchów periodycznych tłumionych o stałych czasowych T_{II1}^b i T_{II2}^b oraz współczynnikach tłumienia ξ_{II1}^b i ξ_{II2}^b równanie charakterystyczne (3.42) przedstawić można jako iloczyn wielomianów charakterystycznych układów pierwszego i drugiego rzędu:

$$\begin{aligned}
 &\lambda^7 + A_6 \lambda^6 + A_5 \lambda^5 + A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = \\
 &= (\lambda + P_0)(\lambda + P_1)(\lambda^2 + P_2 \lambda + P_3)(\lambda + P_4)(\lambda^2 + P_5 \lambda + P_6)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1}{T_{I0}^b} & P_1 &= \frac{1}{T_{I1}^b} & P_2 &= \frac{2\xi_{II1}^b}{T_{II1}^b} & P_3 &= \frac{1}{(T_{II1}^b)^2} \\
 P_4 &= \frac{1}{T_{I2}^b} & P_5 &= \frac{2\xi_{II2}^b}{T_{II2}^b} & P_6 &= \frac{1}{(T_{II2}^b)^2}
 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Z (3.43) i (3.44) wynika, że zakładając stałe czasowe oraz współczynniki tłumienia otrzymać można następujące ruchy własne:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{I0}^b &= -\frac{1}{T_{I0}^b} \\
 \lambda_{I1}^b &= -\frac{1}{T_{I1}^b} & \lambda_{II1,2}^b &= -\frac{\xi_{II1}^b}{T_{II1}^b} \pm \frac{\sqrt{1 - (\xi_{II1}^b)^2}}{T_{II1}^b} i \\
 \lambda_{I2}^b &= -\frac{1}{T_{I2}^b} & \lambda_{II3,4}^b &= -\frac{\xi_{II2}^b}{T_{II2}^b} \pm \frac{\sqrt{1 - (\xi_{II2}^b)^2}}{T_{II2}^b} i
 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Jednocześnie otrzymano następujące związki między współczynnikami A_i i P_j :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= P_0 R_0 C_0 \\
 A_1 &= P_0 (R_1 C_0 + R_0 C_1) + R_0 C_0 \\
 A_2 &= P_0 (R_2 C_0 + R_1 C_1 + R_0 C_2) + (R_1 C_0 + R_0 C_1) \\
 A_3 &= P_0 (C_0 + R_2 C_1 + R_1 C_2 + R_0) + (R_2 C_0 + R_1 C_1 + R_0 C_2) \\
 A_4 &= P_0 (C_1 + R_2 C_2 + R_1) + (C_0 + R_2 C_1 + R_1 C_2 + R_0) \\
 A_5 &= P_0 (C_2 + R_2) + (C_1 + R_2 C_2 + R_1) \\
 A_6 &= P_0 + C_2 + R_2
 \end{aligned} \quad (3.46)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= P_1 P_3 & R_1 &= P_3 + P_1 P_2 & R_2 &= P_1 + P_2 \\
 C_0 &= P_4 P_6 & C_1 &= P_6 + P_4 P_5 & C_2 &= P_4 + P_5
 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Z (3.41) wynika, że współczynniki A_i ($i = 0, \dots, 6$) są funkcjami poszukiwanych wielkości $T_\eta, T_\phi, \tau_v, \tau_p, \tau_\varphi, \tau_r, \tau_\psi, \tau_\varphi$ określających postać praw sterowania (3.40).

W rezultacie otrzymuje się układ siedmiu równań algebraicznych nieliniowych, które zapisać można w ogólnej postaci:

$$A_j = A_j(T_\eta, T_\phi, \tau_v, \tau_p, \tau_\phi, \tau_r, \tau_\psi) \quad j = 0, \dots, 6 \quad (3.48)$$

Jego rozwiązanie pozwala na określenie stałych czasowych oraz współczynników wzmocnienia charakteryzujących, wraz ze współczynnikami kompensacji (3.31), układ automatycznej stabilizacji w ruchu bocznym.

4. Przykład obliczeniowy

W celu sprawdzenia poprawności przedstawionego powyżej algorytmu przeprowadzono obliczenia szczegółowe dla śmigłowca klasy W-3 Sokół w zakresie prędkości lotu $0 \div 250$ km/h.

Poniżej pokazane zostaną dane wejściowe oraz postać praw sterowania dla prędkości lotu 100 km/h, a także przebieg współczynników wzmocnienia autopilota w całym zakresie prędkości lotu.

W obliczeniach założono, że rozkład prędkości indukowanej w płaszczyźnie wirnika nośnego jest stały. Przyjęto, że śmigłowiec realizuje ustalony lot poziomy, którego parametry pokazano w [1] oraz w [5].

4.1. Ruch podłużny śmigłowca

W ruchu podłużnym dla prędkości lotu 100 km/h występujące w równaniach (3.2) wielkości mają następujące wartości:

	u	w	q	ϑ	θ_o	κ_s
X	-0.029281	0.00185	1.5096	-9.80629	-3.1258978	-10.856883
Z	-0.067603	-0.47314	27.775	0.26977	-51.980201	-21.691597
M	0.007604	0.00245	-0.4442	0.0	1.5764250	5.4088934

W obliczeniach założono, że w tym ruchu stałe czasowe oraz współczynniki tłumienia są odpowiednio równe:

$$T_{I1}^p = 1.2 \quad T_{II1}^p = 2.0 \quad T_{I2}^p = 1.6 \quad T_{II2}^p = 0.8$$

$$\xi_{II1}^p = 0.9 \quad \xi_{II2}^p = 0.7$$

co odpowiada następującym ruchom własnym:

$$\lambda_{I1}^p = -0.833 \quad \lambda_{II1,2}^p = -0.45 \pm 0.2179445i$$

$$\lambda_{I2}^p = -0.625 \quad \lambda_{II3,4}^p = -0.875 \pm 0.892691i$$

Obliczone na podstawie (3.8) współczynniki wzmocnienia określające części kompensujące kątów sterowania $\Delta\theta_{oK}$ i $\Delta\kappa_{sK}$ mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} \tau_{2u}^k &= -0.0013 & \tau_{2w}^k &= -0.0091023 & \tau_{2q}^k &= 0.5313548 \\ \tau_{2\vartheta}^k &= 0.00519 & \tau_{2\kappa}^k &= -0.4173 & & \\ \tau_{1w}^k &= -0.000462 & \tau_{1\theta_o}^k &= -0.29145 & & \end{aligned}$$

Natomiast współczynniki zapewniające stabilizację w ruchu podłużnym są odpowiednio równe:

$$\begin{aligned} \tau_w &= 0.0068707 & \tau_u &= 0.00176535 \\ \tau_q &= -0.196540 & \tau_\vartheta &= -0.148396 \end{aligned}$$

zaś stałe czasowe układu sterowania mają następujące wartości:

$$T_{\theta_o} = 0.68571429 \quad T_{\kappa} = 0.459454$$

Wykorzystując określone powyżej wartości współczynników wzmocnienia oraz stałe czasowe obliczone zostały wartości i wektory własne w oparciu o metodę Fadiejewa [6,7]. Wektory własne zostały ubezwymiarowane i unormowane zgodnie z algorytmem pokazanym w [1] i [4]. Wyniki przedstawiono w tabelach.

	$\lambda_{I1}^p = -0.83333$	$\lambda_{II1,2}^p = -0.45 \pm 0.2179i$
u^*	0.003338	$-0.0426475 \pm 0.0917235i$
w^*	0.283705	0.0
q^*	-0.002660	$0.0178881 \pm 0.0049933i$
ϑ^*	0.085396	$-0.744869 \pm 0.657581i$
θ_o^*	0.955083	0.0
κ_s^*	0.004135	$0.00669103 \pm 0.0462128i$

	$\lambda_{I2}^p = -0.625$	$\lambda_{II3,4}^p = -0.875 \pm 0.8927i$
u^*	0.0176964	$-0.0120657 \pm 0.0390081i$
w^*	0.356070	0.0
q^*	-0.00593959	$-0.0369885 \pm 0.0262782i$
ϑ^*	0.254215	$0.152487 \pm 0.95893i$
θ_o^*	0.899022	0.0
κ_s^*	0.0000880947	$0.198386 \pm 0.11882i$

Podobne obliczenia sprawdzające przeprowadzono w całym zakresie prędkości lotu otrzymując założone ruchy własne.

4.2. Ruch boczny śmigłowca

W ruchu bocznym dla prędkości lotu 100 km/h występujące w równaniach (3.25) wielkości mają następujące wartości:

	v	p	r	φ	η_s	ϕ_{so}
Y	-0.09586	-1.4731	-27.304	9.8041	-9.146443	12.29230
L	-0.03032	-0.8984	0.0869	0.0	-12.71722	2.741855
N	0.05557	0.0301	-0.7544	0.0	-0.4474	-19.1856

Założono, że w tym ruchu stałe czasowe oraz współczynniki tłumienia są odpowiednio równe:

$$T_{I0}^b = 0.5 \quad T_{I1}^b = 0.4 \quad T_{I2}^b = 1.0 \quad T_{II1}^b = 1.4$$

$$T_{II2}^b = 1.8 \quad \xi_{II1}^b = 0.9 \quad \xi_{II2}^b = 0.9$$

co odpowiada następującym ruchom własnym:

$$\lambda_{I0}^b = -2.0 \quad \lambda_{I1}^b = -2.5 \quad \lambda_{I2}^b = -1.0$$

$$\lambda_{II1,2}^b = -0.64285714 \pm 0.31135i \quad \lambda_{II3,4}^b = -0.50 \pm 0.24216105i$$

Obliczone na podstawie (3.31) współczynniki wzmocnienia określające części kompensujące kątów sterowania $\Delta\phi_{sK}$ i $\Delta\eta_{sK}$ mają następujące wartości:

$$\tau_{2v}^k = 0.002896 \quad \tau_{2p}^k = 0.001568 \quad \tau_{2\varphi} = 0.0$$

$$\tau_{2\eta}^k = -0.02332 \quad \tau_{1r}^k = 0.006834 \quad \tau_{1\phi_{so}}^k = 0.215602$$

Natomiast współczynniki zapewniające stabilizację w ruchu bocznym są odpowiednio równe:

$$\tau_v = -0.0001179 \quad \tau_p = 0.0784769 \quad \tau_\varphi = 0.0920512$$

$$\tau_r = 0.01426365 \quad \tau_\psi = 0.0143279$$

zaś stałe czasowe układu sterowania mają następujące wartości:

$$T_\eta = 0.261699 \quad T_\phi = 0.445322$$

Podobnie jak w przypadku ruchu podłużnego w oparciu o powyższe wartości współczynników wzmocnienia oraz stałe czasowe obliczone zostały wartości i wektory własne.

	$\lambda_{I0}^p = -2.0$	$\lambda_{I1}^b = -2.5$	$\lambda_{I2}^b = -1.0$
v^*	0.0764468	-0.0303324	0.0563137
p^*	0.0692008	-0.0891451	0.0372901
r^*	0.0253784	-0.0	0.0
φ^*	-0.925561	0.953852	-0.997511
ψ^*	-0.339436	0.0	0.0
η_s^*	0.122070	-0.285129	-0.0202283
ϕ_{so}^*	0.0440739	0.0	0.0

	$\lambda_{II1,2}^b = -0.64286 \pm 0.3113i$	$\lambda_{II3,4}^b = -0.50 \pm 0.2422i$
v^*	$0.0732438 \pm 0.0114310i$	$0.0925514 \pm 0.0121581i$
p^*	$0.0199052 \pm 0.0176022i$	$0.0161344 \pm 0.0127710i$
r^*	0.0	$-0.000601689 \pm 0.00130337i$
φ^*	$-0.958244 \pm 0.268348i$	$-0.967225 \pm 0.214802i$
ψ^*	0.0	$-0.00128116 \pm 0.06911i$
η_s^*	$-0.0589014 \pm 0.00929764i$	$-0.0663675 \pm 0.00360347i$
ϕ_{so}^*	0.0	$-0.000226622 \pm 0.000665525i$

Tak jak dla ruchu podłużnego, również w przypadku ruchu bocznego, obliczenia sprawdzające przeprowadzone w całym zakresie prędkości lotu dały założone ruchy własne.

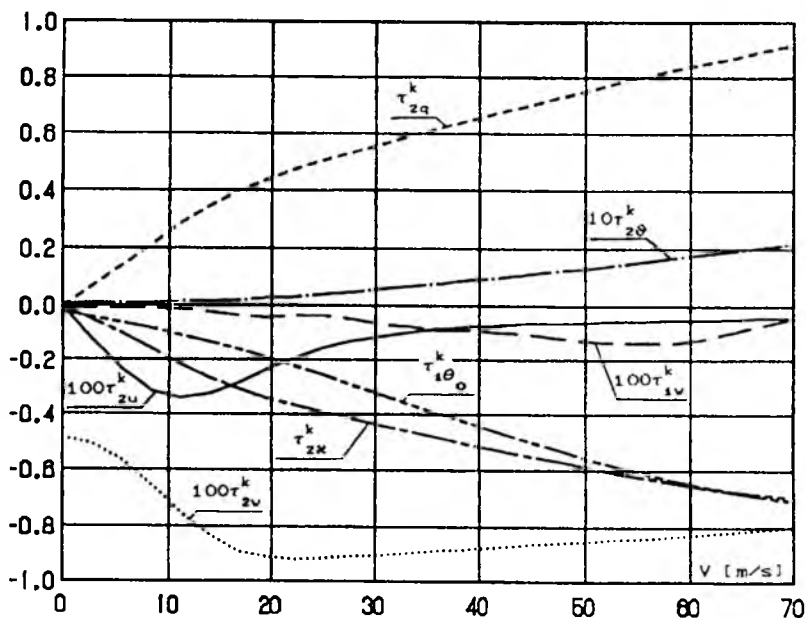
5. Wnioski

Na rys.1 ÷ rys.4 pokazano współczynniki wzmocnienia autopilota, a na rys.5 jego stałe czasowe w funkcji prędkości lotu śmigłowca.

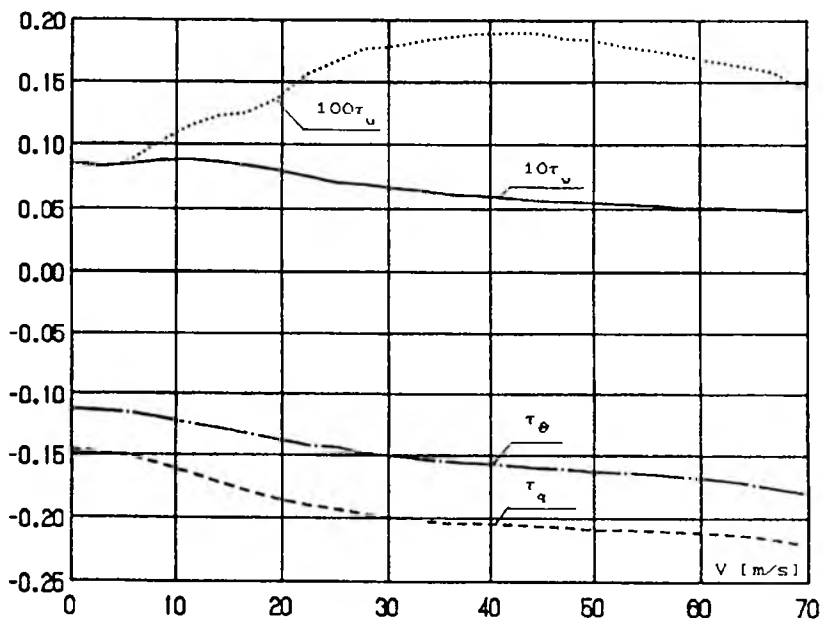
Rys.1 i rys.2 odnoszą się do ruchu podłużnego. Na rys.1 pokazano współczynniki zapewniające kompensację określone wyrażeniami (3.8). Rys.2 przedstawia przebieg współczynników zapewniających stabilizację ruchów podłużnych śmigłowca, które otrzymano z rozwiązania układu (3.24).

Rysunki 3 i 4 pokazują przebiegi współczynników wzmocnienia w kanałach sterujących ruchem bocznym. Na rys.3 przedstawiono współczynniki kompensacji obliczone w oparciu o (3.31), zaś na rys.4 współczynniki zapewniające stabilizację ruchów bocznych, które wyznaczono rozwiązując układ (3.48).

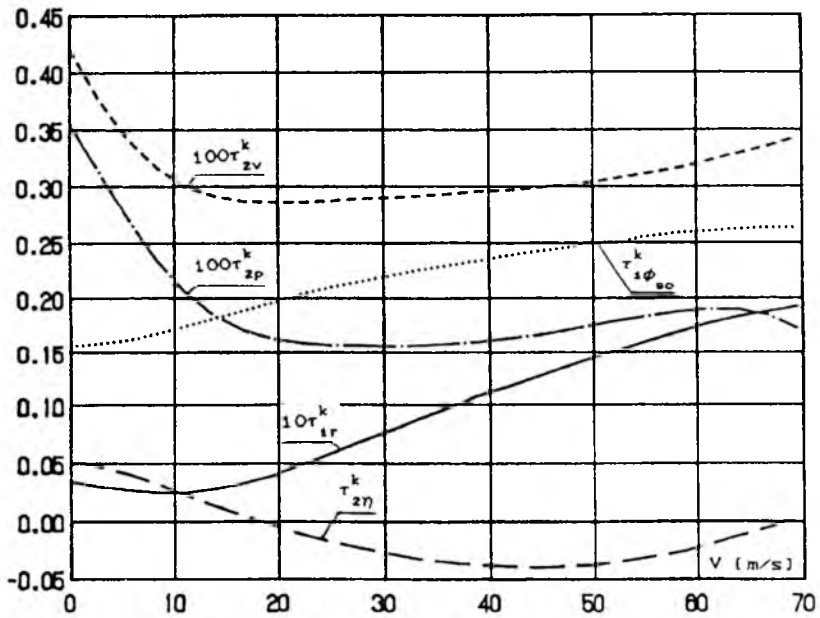
Stale czasowe autopilota w ruchu podłużnym i bocznym pokazano na rys.5. Otrzymano je rozwiązując układy nieliniowych równań algebraicznych (3.24) i (3.48).



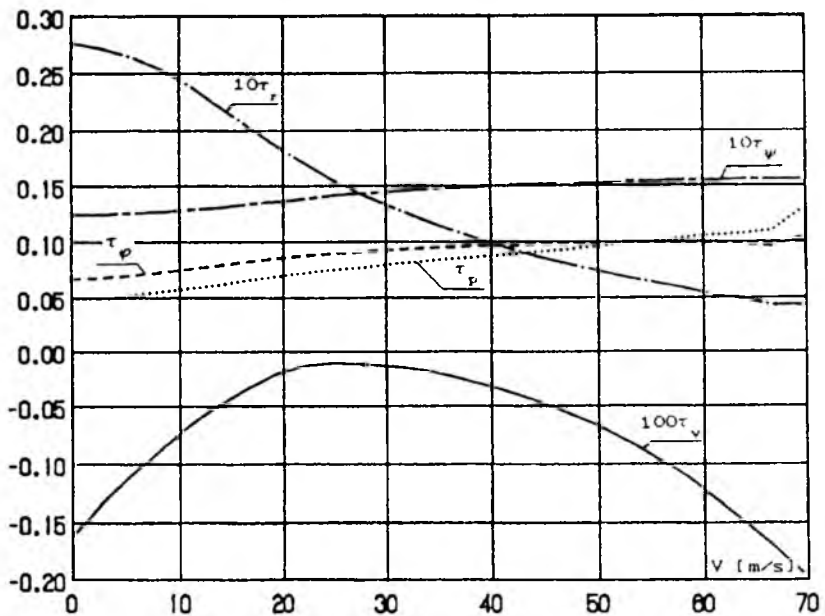
Rys. 1. Współczynniki kompensacji w ruchu podłużnym



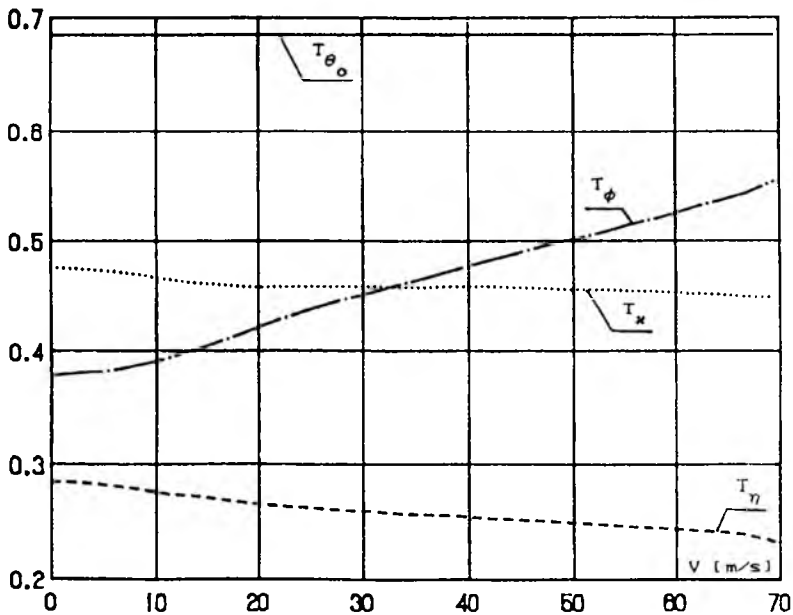
Rys. 2. Współczynniki stabilizacji w ruchu podłużnym



Rys. 3. Współczynniki kompensacji w ruchu bocznym



Rys. 4. Współczynniki stabilizacji w ruchu bocznym



Rys. 5. Stałe czasowe autopilota w ruchu podłużnym i w ruchu bocznym

Analiza rysunków 1 ÷ 5 pozwala sformułować następujący wniosek:

- Ze względu na dużą zmienność, ze zmianą prędkości lotu, niektórych spośród współczynników wzmocnienia oraz stałych czasowych występujących w prawach sterowania nie można zaprojektować autopilota astatycznego o stałych współczynnikach wzmocnienia, który zapewniłby w szerokim zakresie prędkości lotu, realizację przez śmigłowiec założonych ruchów, nawet gdyby nie występowały wzajemne sprzężenia między ruchami podłużnym i bocznym.

Literatura

1. KOWALECZKO G., *Analiza dynamiki przestrzennego ruchu śmigłowca z uwzględnieniem wpływu autopilota*, Rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny, WAT, Warszawa, 1992
2. DŻYGADŁO Z. KOWALECZKO G., *Dynamics Analysis of a Helicopter-Autopilot System*, Journal of Technical Physics, XXXIV, 4, 1993
3. KOŻEVNIKOV V., *Automatičeskaja stabilizacija vertoletov*, Mašinostroenie, Moskwa, 1977

4. DŻYGADŁO Z., KOWALECZKO G., *Analysis of Spatial Motion Dynamics of Helicopter for Various Models of Induced Velocity Field*, Journal of Technical Physics, XXXIV, 2, 1993
5. DŻYGADŁO Z., KOWALECZKO G., *Wpływ modelu pola prędkości indukowanej na parametry ustalonego lotu poziomego śmigłowca jednowirnikowego*, Biuletyn WAT, XL, 9 (469), Warszawa, 1991
6. FADEEVA D.K., *Vyčislitelnye metody linejnoj algebry*, GIF-ML, Moskva, 1960
7. GÓRECKI H., *Algorytmy i programy sterowania*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 1980

Mathematical Model of Astatic Autopilot Helicopter on the Basis of Method of Separation of Motions

Summary

A mathematical model of a astatic autopilot has been presented. Autopilot dynamics has been included into the model. The control laws of the autopilot have been formulated on the basis of the method of separation of motions. The control laws of longitudinal and lateral motions have been considered separately. The numerical example for one flying speed and the variations of compensation and amplification coefficients and time constants for whole range of flying speeds have been presented.

WPLYW ODKSZTAŁCALNOŚCI SKRZYDŁA NA SYMERYCZNE OBCIĄŻENIA MANEWROWE SAMOŁOTU

KRZYSZTOF KRĘT

*Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa
Politechnika Rzeszowska*

W pracy przedstawiono metodę analizy symetrycznych obciążeń manewrowych samolotu odkształcalnego. Przykład obliczeniowy ilustruje zastosowanie metody pod kątem identyfikacji wpływu odkształcalności skrzydła na stan obciążenia szybowca w manewrze o zadanym w czasie przebiegu wychylenia steru wysokości. Zaproponowane podejście może być zastosowane do badania szerokiej klasy zagadnień z zakresu dynamiki ruchu odkształcalnych obiektów latających.

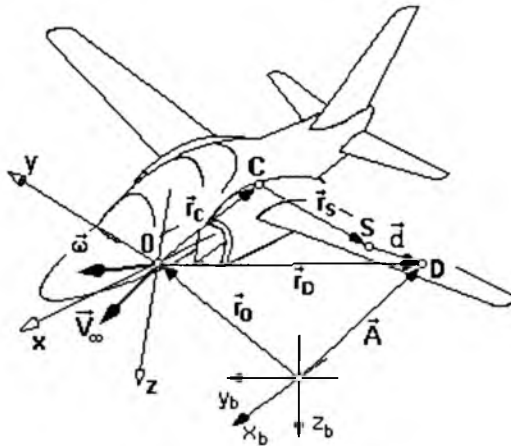
1. Wstęp

W ramach wymagań wytrzymałościowych formułowanych przez przepisy zdadności sprzętu lotniczego [11,12,13] żąda się, aby struktura podstawowa samolotu zdolna była do przejścia wszystkich obciążeń dopuszczalnych z uwzględnieniem zmian w ich rozkładzie i wielkości wynikających na skutek skończonej sztywności konstrukcji oraz działania obciążeń dynamicznych. Dla wielu samolotów krytycznymi okazują się obciążenia powstające w locie, podczas ewolucji wywołanych akcją pilota. Manewry te podzielić można na dwie grupy.

- Manewry, w których zmiany sił czynnych są stosunkowo powolne, a wynikające w następstwie zmiany przyśpieszeń małe. Odształcenia konstrukcji w tego typu quasiustalonym manewrze można traktować jako statyczne i przy zdefiniowanych obciążeniach ogólnych ich wpływ uwzględnić tylko w sensie zmiany rozkładu sił na elementach samolotu. Zagadnienie to, zwane zagadnieniem rozkładu, jest problemem stosunkowo prostym i szczegółowo analizowanym w literaturze [3,4,5,6,7,10].

- Manewry definiowane poprzez zadany w czasie przebieg sterowania, charakteryzujące się dużymi i szybkimi zmianami parametrów ruchu. Dla manewrów takich, gdy charakterystyki osiąagowe i/lub sztywnościowe samolotu nie pozwalają na zaniedbanie jego deformacji, niepewne i zwykle zawodne jest wszelkiego rodzaju wnioskowanie przybliżone, a konieczna staje się pełna analiza dynamiczna przebiegu manewru samolotu odkształcalnego. Tego typu problem rozpatrywać należy jako jeden z aspektów zagadnienia odpowiedzi dynamicznej [1,2,3,6].

2. Ogólny opis metody i model obliczeniowy samolotu



Rys. 1. Układy współrzędnych

Syntetyczne podejście do analizy obciążeń w manewrach drugiego rodzaju zaproponowano w [8]. Pojęcie ruchu samolotu jako bryły utożsamiane jest tam z ruchem układu związanego z samolotem $Oxyz$, rys.1. Początek tego układu lokalizuje się w dowolnym punkcie struktury pomyślanym jako punkt utwierdzenia zupełnego i względem niego określa przemieszczenia pozostałych punktów. Ruch układu związanego definiuje jednoznacznie wektor prędkości jego początku:

$$\vec{V}_{\infty} = \mathbf{i}_x u + \mathbf{i}_y v + \mathbf{i}_z w$$

oraz wektor prędkości kątowej:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}_x p + \mathbf{i}_y q + \mathbf{i}_z r$$

a miarą przemieszczenia dowolnego punktu struktury w stanie niezdeformowanym S , którego położenie względem chwilowego środka masy C określa wektor:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z$$

jest wektor:

$$\mathbf{d} = \mathbf{i}_x d_x + \mathbf{i}_y d_y + \mathbf{i}_z d_z$$

Funkcyjną zależność deformacji od rozkładu sił czynnych i masowych (przy pominięciu tłumienia konstrukcyjnego i założeniu, że są one sprężyste i proporcjonalne do obciążenia) opisano z pomocą liniowego operatora całkowego, a pole przemieszczeń struktury aproksymowano szeregiem o skończonej liczbie wyrazów, z których każdy stanowi iloczyn niezależnych funkcji czasu i współrzędnych struktury niezdeformowanej. Położenie samolotu względem Ziemi określa się w układzie $0_b x_b y_b z_b$, zwanym układem bazowym.

W niniejszej pracy pokażemy zastosowanie zaproponowanej w [8] metody, do analizy obciążeń samolotu w manewrze symetrycznym zakładając dodatkowo, że:

- samolot jest symetryczny w sensie geometrii, rozkładu mas i sztywności,
- czynne obciążenie stanowią wyłącznie siły aerodynamiczne,
- deformacje konstrukcji są na tyle małe, że pomijalna jest zmiana wyważenia samolotu ($\mathbf{r}_c = \text{const}(t)$, $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s^*$) oraz jego momentów bezwładności ($I_{yy} = \text{const}(t) = \tilde{I}_{yy}$),
- początek układu pokrywa się ze środkiem masy samolotu ($\mathbf{r}_c = \mathbf{0}$),
- deformacje zachodzą tylko w kierunku osi z i wywoływane są wyłącznie przez obciążenie działające w tym kierunku.

W konsekwencji ostatniego z powyższych założeń, zależność deformacji konstrukcji od rozkładu obciążeń będzie miała postać:

$$d_z(x^*, y^*, z^*, t) = \oint C_{zz} dF_z + \oint C_{zz} dF_z^G - \int_m C_{zz} \left(\frac{d^2 A_z}{dt^2} \right) dm \quad (2.1)$$

zaś szereg aproksymujący pole przemieszczeń:

$$d_z(x^*, y^*, z^*, t) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \eta_{z\gamma}(t) \Psi_{\gamma}(x^*, y^*, z^*) \quad (2.2)$$

gdzie:

- (*) – niezależne od czasu współrzędne struktury niezdeformowanej,
 $C_{zz}(x^*, y^*, z^*)$ – tensorowa funkcja podatności,
 $\Psi_\gamma(x^*, y^*, z^*)$ – liniowo niezależne, dostatecznie regularne i całkowne funkcje współrzędnych struktury niezdeformowanej zwane funkcjami postaci,
 $\eta_{z\gamma}(t)$ – nieznanne funkcje czasu,
 dF_z, dF_z^G – odpowiednio składowe elementarnej siły czynnej i grawitacji.

Podstawowy układ równań opisujących symetryczny ruch samolotu odkształcalnego tworzą trzy skalarne równania ruchu układu związanego z samolotem:

$$m\dot{u} = \frac{1}{2}\rho V^2 \widehat{\mathbf{F}}_x^{At} \mathbf{q}_t - mg \sin \Theta - mqw - 2E_{\gamma q} \dot{\eta}_{z\gamma} \quad (2.3)$$

$$m\dot{w} + E_{\gamma} \ddot{\eta}_{z\gamma} = \frac{1}{2}\rho V^2 (\widehat{\mathbf{F}}_z^{Au} \mathbf{q}_u + \widehat{\mathbf{F}}_z^{A\delta} \mathbf{q}_\delta + \widehat{\mathbf{F}}_z^{Ad} \mathbf{q}_d) + mg \cos \Theta + mqu \quad (2.4)$$

$$I_{yy} \dot{q} - E_{x\gamma} \ddot{\eta}_{z\gamma} = \frac{1}{2}\rho V^2 (\widehat{\mathbf{M}}_z^{Au} \mathbf{q}_u + \widehat{\mathbf{M}}_z^{A\delta} \mathbf{q}_\delta + \widehat{\mathbf{M}}_z^{Ad} \mathbf{q}_d) + \quad (2.5)$$

$$-2q \left(E_{z\gamma} + \sum_{\zeta=1}^{\Gamma} \eta_{z\zeta} E_{\gamma\zeta}^E \right) \dot{\eta}_{z\gamma}$$

oraz $N = \Gamma$ równań przemieszczeniowych postaci:

$$D_{zz}^n \dot{w} - D_{zzx}^n \dot{q} + D_{zz\gamma}^{En} \ddot{\eta}_{z\gamma} = \frac{1}{2}\rho V^2 (\widehat{\mathbf{D}}_z^{un} \mathbf{q}_u + \widehat{\mathbf{D}}_z^{\delta n} \mathbf{q}_\delta + \widehat{\mathbf{D}}_z^{dn} \mathbf{q}_d) + \quad (2.6)$$

$$+ D_{zz}^n g \cos \Theta + qu D_{zz}^n - 2q^2 \left(\widehat{\mathbf{D}}_{zzz}^n + \sum_{\zeta=1}^{\Gamma} \eta_{z\zeta} D_{zz\zeta}^{En} \right) - \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \eta_{z\gamma} \Psi_\gamma^n$$

których spełnienia żąda się w (przyporządkowanych poprzez funkcję podatności) tzw. punktach kontrolnych przemieszczeń n stanowiących węzły kolokacji.

Powyższy układ równań uzupełniają klasyczne związki kinematyczne pozwalające na wyznaczenie kąta pochylenia i trajektorii środka masy samolotu w układzie bazowym związanym z Ziemią:

$$\dot{\Theta} = q \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_b = u \cos \Theta + w \sin \Theta \quad \dot{z}_b = -u \sin \Theta + w \cos \Theta \quad (2.8)$$

Całkowe wyrażenia E i D figurujące w równaniach (2.3)÷(2.6) zdefiniowane są następująco:

$$E_\gamma = \int_m \Psi_\gamma dm \qquad E_{\gamma\zeta}^E = \int_m \Psi_\gamma \Psi_\zeta dm \qquad (2.9)$$

$$E_{x\gamma} = \int_m x^* \Psi_\gamma dm \qquad E_{z\gamma} = \int_m z^* \Psi_\gamma dm \qquad (2.10)$$

$$D_{zz}^n = \int_m C_{zz}^n dm \qquad D_{zz\gamma}^{En} = \int_m C_{zz}^n \Psi_\gamma dm \qquad (2.11)$$

$$D_{zzx}^n = \int_m C_{zz}^n x^* dm \qquad D_{zzz}^n = \int_m C_{zz}^n z^* dm \qquad (2.12)$$

Globalne oddziaływania aerodynamiczne przedstawiono w równaniach ruchu w postaci iloczynów wierszowych macierzy pochodnych aerodynamicznych i kolumnowych macierzy parametrów determinujących wielkość lokalnych prędkości zaburzenia przepływu, a wynikających na skutek ruchu układu związanego \mathbf{q}_u , "sztywnych" przemieszczeń organów sterowania \mathbf{q}_δ oraz deformacji konstrukcji (ściślej powierzchni szkieletowych) \mathbf{q}_d . Taki sam zapis formalny zastosowano dla oddziaływań stycznych, lecz należy zaznaczyć, iż nie jest to podejście wiążące, jako że pomija się wpływ stycznych oddziaływań aerodynamicznych na deformacje konstrukcji. W przypadku manewru symetrycznego, przy założeniu, że sterowanie realizowane będzie wyłącznie przez wychylenie steru wysokości, można macierze te zapisać w postaci:

$$\mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^u \\ q \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_\delta = \begin{bmatrix} \delta_H \\ \delta_H \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \eta_{z\gamma}^s \\ \dot{\eta}_{z\gamma}^s \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

gdzie α^u oznacza kąt natarcia mierzony do osi x układu związanego z samolotem.

Elementami macierzy $\hat{\mathbf{D}}_z^{un}$, $\hat{\mathbf{D}}_z^{\delta n}$, $\hat{\mathbf{D}}_z^{dn}$ w równaniu (2.6) są, niezależne od czasu, współczynniki mające sens deformacji w punkcie n wywołanych rozkładami sił aerodynamicznych przy jednostkowych wartościach parametrów tworzących macierze (2.13).

Obciążenia ogólne samolotu definiuje jednoznacznie zespół następujących parametrów:

$$\dot{u}, \dot{w}, \dot{q}, u, w, q, \Theta \qquad (2.14)$$

$$\eta_{z\gamma}, \dot{\eta}_{z\gamma}, \ddot{\eta}_{z\gamma} \qquad \gamma = 1, I \qquad (2.15)$$

przy czym pierwsza grupa charakteryzuje ruch układu związanego, a druga deformację struktury. Wyznaczenie tych wielkości wymaga jednoczesnego całkowania równań ruchu (2.3)÷(2.5), równań przemieszczeniowych (2.6), których liczba wynika z przyjętej liczby wyrazów szeregu (2.2), oraz związków kinematycznych (2.7) i (2.8). Z uwagi na nieliniowość tego układu, przewidywaną, dowolną postać funkcji sterowania oraz duże rozmiary zadania należy wnioskować, iż w ogólnym przypadku konieczne będzie całkowanie numeryczne. Może ono być prowadzone dowolną metodą, np. Rungego-Kutty, dla potrzeb której podstawowy układ równań wygodnie jest zapisać w postaci macierzowej:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{B}^{-1} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \mathbf{P}^A \mathbf{Q} + \mathbf{P}^G \mathbf{G} + \mathbf{P}^B \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{P}^D \mathbf{R} \right) \quad (2.16)$$

gdzie wektor rozwiązania i jego pochodne zdefiniowano jako kolumnowe macierze:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_{z\gamma} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{z\gamma} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} x^b \\ z^b \\ \Theta \\ \vdots \\ \eta_{z\gamma} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

przy czym pamiętać należy, że \mathbf{R} jest nieliniową funkcją $\dot{\mathbf{R}}$ określoną w oparciu o związki kinematyczne. Macierz \mathbf{B} , w oczywisty sposób wynikająca z układu (2.3)÷(2.6):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & m & 0 & \dots & E_\gamma & \dots \\ 0 & 0 & J_{yy} & \dots & -E_{x\gamma} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & D_{zz}^n & -D_{zzx}^n & \dots & D_{zz\gamma}^{En} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

jest, przy założeniach dodatkowych przyjętych na wstępie, niezależna od czasu. Jej rozmiar, podobnie jak pozostałych, jest zmienny ($\gamma = 1, \dots, \Gamma, n = 1, \dots, N, N = \Gamma$).

Podkreślmy, że liniowość operatorów deformacji i aerodynamicznego oraz aproksymacja pola przemieszczeń struktury szeregiem (2.2) umożliwia analizę problemu na "poziomie globalnym", to znaczy bez konieczności jawnego wyznaczania obciążeń lokalnych i deformacji konstrukcji w każdej chwili czasu.

Fakt ten daje znaczne uproszczenie i skrócenie procedury obliczeń. Z wyznaczenia obciążeń lokalnych (rozkładów sił) w trakcie manewru całkowicie zrezygnować jednak nie można ze względu na konieczność identyfikacji krytycznej chwili manewru (ekstremum obciążeń). Dla tego celu pożądane jest określenie takich wielkości, które stanowiąc także miarę stanu obciążenia, pozwalałyby na szybkie i jednoznaczne wnioskowanie bez czasochłonnych i żmudnych analiz w trakcie numerycznego całkowania. Dla skrzydła wolnonośnego, jako wielkości takie wskazać można momenty zginające i skręcające liczone w wybranych jego przekrojach.

Z racji dużej zazwyczaj złożoności i nieregularności charakterystyk fizycznych samolotu, ilościowe sprecyzowanie danych zadania wymaga ich przybliżenia. Jednym z możliwych sposobów modelowania rzeczywistych charakterystyk jest ich dyskretyzacja. Nadrzędne znaczenie ma przy tym (jak we wszystkich problemach aeroelastyczności) sposób opisu charakterystyk sztywnościowych konstrukcji. Podejściem mającym walory ogólności i dogodnym z punktu widzenia obliczeń numerycznych jest dyskretyzacja funkcji podatności w formie macierzy współczynników wpływowych wykorzystana w [8]:

$$\mathbf{C}_{zz} = [C_{zz}^{nk}] = \{\mathbf{C}_{zz}^n\} \quad (2.19)$$

gdzie:

- $n = 1, N$ – oznacza kontrolny punkt przemieszczenia (węzeł kolokacji),
- $k = 1, K$ – jest tzw. punktem kontrolnym siły,
- $\mathbf{C}_{zz}^n = (C_{zz}^{nk})$ – wierszowa macierz K -elementowa, charakterystyczna dla danego punktu kontrolnego przemieszczenia.

C_{zz}^{nk} interpretuje się jako przemieszczenie punktu n w kierunku z wywołane siłą skupioną o wartości jednostkowej, przyłożoną w punkcie k , działającą w kierunku z .

Model masowy, w postaci zbioru punktów masowych

$$\mathbf{M} = \{\Delta m^k\} \quad (2.20)$$

zlokalizowanych w punktach kontrolnych sił, o współrzędnych opisanych macierzami:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^F &= [x_k^{*F} \delta_{kj}] & \mathbf{Y}^F &= [y_k^{*F} \delta_{kj}] \\ \mathbf{Z}^F &= [z_k^{*F} \delta_{kj}] & k, j &= 1, K \end{aligned} \quad (2.21)$$

(δ_{kj} – delta Kroneckera) oraz obciążenie aerodynamiczne wprowadzone w postaci układu sił skupionych, wynikającego z superpozycji tzw. układów jednostkowych (przy jednostkowych wartościach parametrów tworzących macierze (2.13)):

$$\bar{\mathbf{F}}_z^A = \left\{ \Delta \bar{\mathbf{F}}_z^{Ak} \right\} = \bar{\mathbf{F}}_z^{Au} \mathbf{q}_u + \bar{\mathbf{F}}_z^{A\delta} \mathbf{q}_\delta + \bar{\mathbf{F}}_z^{Ad} \mathbf{q}_d \quad (2.22)$$

można w zasadzie traktować jako pochodną przyjętego modelu sztywnościowego. Należy przy tym podkreślić, że ogólne i ściśle sprecyzowanie kryteriów, wg których dyskretne charakterystyki (2.20), (2.22) mogłyby być traktowane jako równoważne rzeczywistym napotyka na zasadnicze trudności, a zależy od przyjmowanego poziomu szczegółowości modelu oraz charakteru konkretnego zadania. Możliwy sposób podejścia omówiono w podanym niżej przykładzie obliczeniowym.

Opisując wartości funkcji postaci w punktach kontrolnych sił macierzami diagonalnymi:

$$\Psi_\gamma^F = \left[\psi_\gamma^k \delta_{kj} \right] \quad (2.23)$$

oraz oznaczając przez $\bar{\mathbf{1}} = (1^k)$ wektor K -elementowy, można całkowite wyrażenia (2.9)÷(2.12) przedstawić jako wynikające z liniowych operacji algebraicznych:

$$E_\gamma = \bar{\mathbf{1}} \Psi_\gamma^F \mathbf{M} \quad E_{\gamma\zeta}^E = \bar{\mathbf{1}} \Psi_\gamma^F \Psi_\zeta^F \mathbf{M} \quad (2.24)$$

$$D_{zz}^n = \mathbf{C}_{zz}^n \mathbf{M} \quad D_{zzx}^n = \mathbf{C}_{zz}^n \mathbf{X}^F \mathbf{M} \quad \text{itd.} \quad (2.25)$$

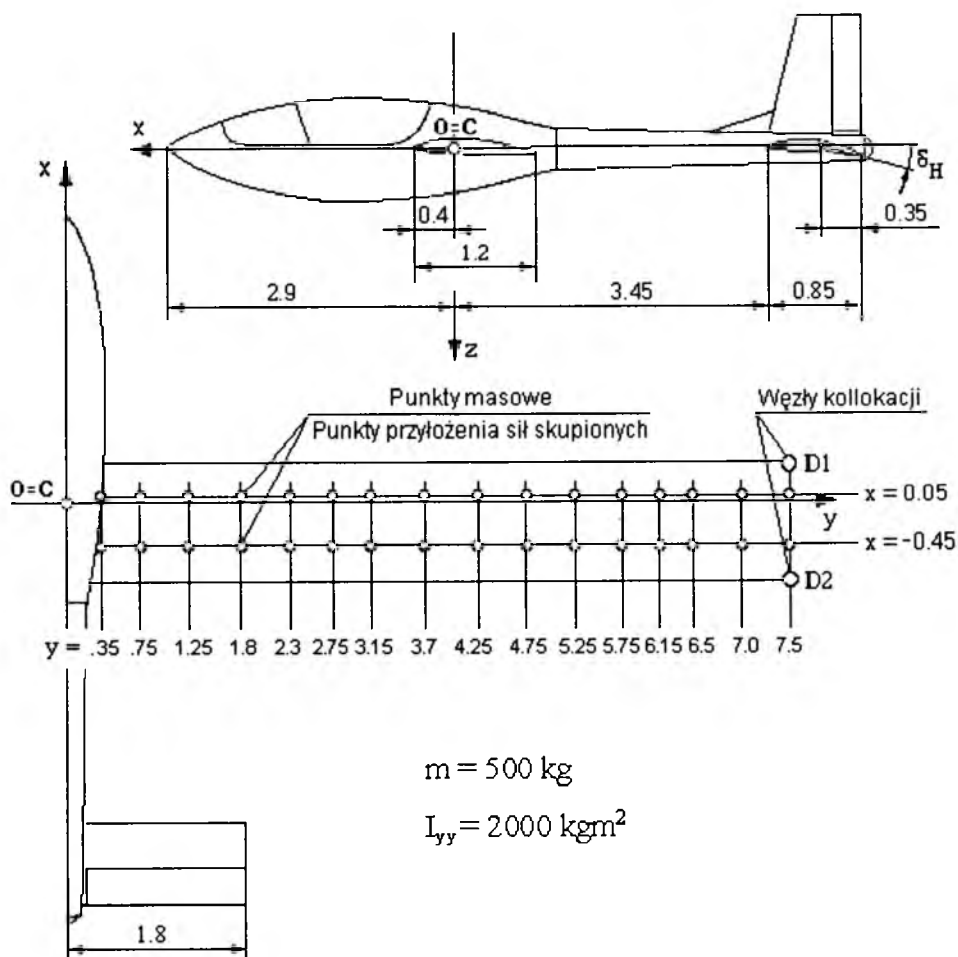
3. Praktyczna realizacja metody

Scharakteryzowaną wyżej metodę zastosowano do analizy symetrycznych obciążeń manewrowych metalowego szybowca KR-03 pokazanego na rysunku 2. Założono, że odkształcalnymi elementami konstrukcji są skrzydła mocowane do doskonale sztywnego kadłuba.

Opisu deformacji skrzydła dokonano przy założeniu, że jego profile są nieodkształcalne. Zmianę położenia dowolnego profilu przyjęto charakteryzować z pomocą przemieszczeń punktów leżących na krawędzi natarcia (KN) i krawędzi splywu (KS) płata.

Opisując deformacje każdej z tych linii w postaci:

$$d_z^{KN}(y, t) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \eta_{z\gamma}^{KN}(t) \Psi_\gamma(y) \quad d_z^{KS}(y, t) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \eta_{z\gamma}^{KS}(t) \Psi_\gamma(y) \quad (3.1)$$



Rys. 2. Geometria szybowca i schemat dyskretyzacji skrzydła

otrzymano formułę stanowiącą szczególny przypadek (2.2):

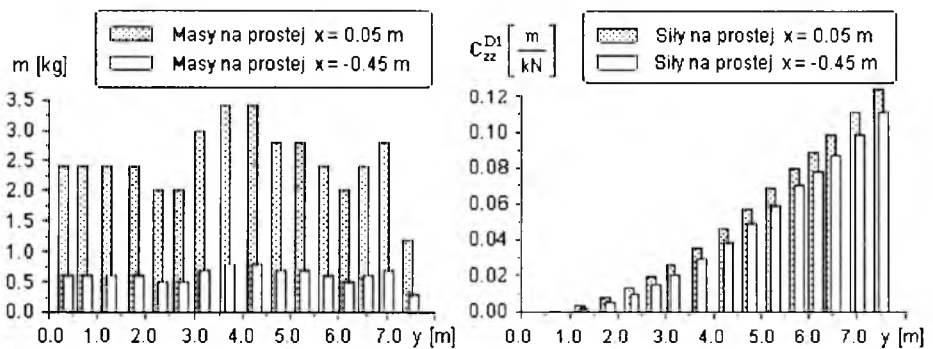
$$d_z(x, y, t) = \frac{1}{x^{KN} - x^{KS}} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \left[\eta_{z\gamma}^{KN}(t)(x - x^{KS}) - \eta_{z\gamma}^{KS}(t)(x - x^{KN}) \right] \psi_{\gamma}(y) \quad (3.2)$$

z dwoma nieznanymi funkcjami czasu $\eta_{z\gamma}^{KN}$, $\eta_{z\gamma}^{KS}$ na każdy wyraz rozwinięcia. Zakładając funkcję postaci w formie funkcji potęgowej spełniającej warunki brzegowe:

$$\psi_{\gamma} = \left(\frac{y - 0.35}{0.5b - 0.35} \right)^{\gamma+1} \quad y \geq 0.35 \quad (3.3)$$

ograniczono się do $I = 1$, a węzły kolokacji $D1$ i $D2$ przyjęto na krawędzi natarcia i krawędzi spływu w końcowym przekroju skrzydła.

Punkty kontrolne sił rozmieszczono na dwóch liniach wzdłuż rozpiętości płata. W punktach tych zlokalizowano masy tworzące model masowy skrzydła określone przy zachowaniu masy i momentu statycznego odpowiednich jego segmentów. Ich rozkład ilustruje rysunek 3. Rzeczywiste oddziaływania aerodynamiczne na płacie, wyznaczone metodą powierzchni wirowej, zastąpiono równoważnym układem sił skupionych. Jako kryterium równoważności przyjęto zgodność momentów zginających normalnych i momentów skręcających¹ wywoływanych w przekrojach kontrolnych sił przez obciążenie rzeczywiste i skupione. Wyznaczając rozkłady momentów gnących i skręcających dla każdego z jednostkowych rozkładów ciśnień, a następnie stosując w/w kryterium, otrzymano macierze jednostkowych rozkładów aerodynamicznych sił skupionych (2.22).

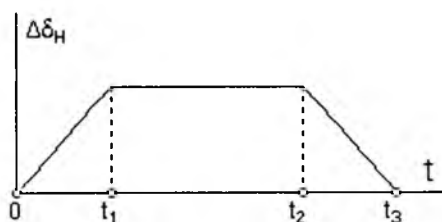


Rys. 3. Model masowy skrzydła i współczynniki wpływowe dla punktu $D1$

Obliczeniowe charakterystyki sztywnościowe skrzydła pokazano na rysunku 3. Dla jasności zaznaczmy, iż wysokość słupka w danym przekroju jest miarą przemieszczenia w punkcie $D1$ wywołanego jednostkową siłą skupioną przyłożoną w tym przekroju.

Przeprowadzono porównawcze obliczenia symetrycznego manewru pochylającego szybowca sztywnego i odkształcalnego przyjmując jako stan początkowy ustalony lot ślizgowy z prędkością $V = 70$ m/s, na wysokości $H = 1000$ m. Pozostałe wielkości definiujące stan początkowy wyznaczono z układu równań (2.17) jako rozwiązanie zadania statycznego.

¹Moment gnący normalny działa w płaszczyźnie równoległej do Oyz , zaś skręcający, liczony względem linii $x_E = -0.05$ m, w płaszczyźnie równoległej do Oxz .



Sterowanie zadano w postaci funkcji zmiany kąta wychylenia steru wysokości. Funkcja ta, pokazana na szkicu, odpowiada tzw. manewrowi niekontrolowanemu i została zaczerpnięta z [12]. Czas narastania wychylenia, równy czasowi wycofania, wynosi $t_1 = t_3 - t_2 = 0.2$ s zaś ekstremalną zmianę kąta wychylenia steru przyjęto $\Delta\delta_H^{Ext} = -0.1$ rd. Na wstępie przeprowadzono obliczenia manewru szybowca sztywnego (S), dobierając czas wytrzymania steru tak, by osiągnąć zadaną wartość maksymalną współczynnika obciążenia. Dla założonego $n_{z\max}^S = 4.4$ czas ten wyniósł $(t_2 - t_1)^S = 0.13$ s. Następnie przeprowadzono obliczenia dla szybowca z odkształcalnym skrzydłem (D), w dwu wariantach sterowania:

(S1) przy założeniu identycznego profilu sterowania:

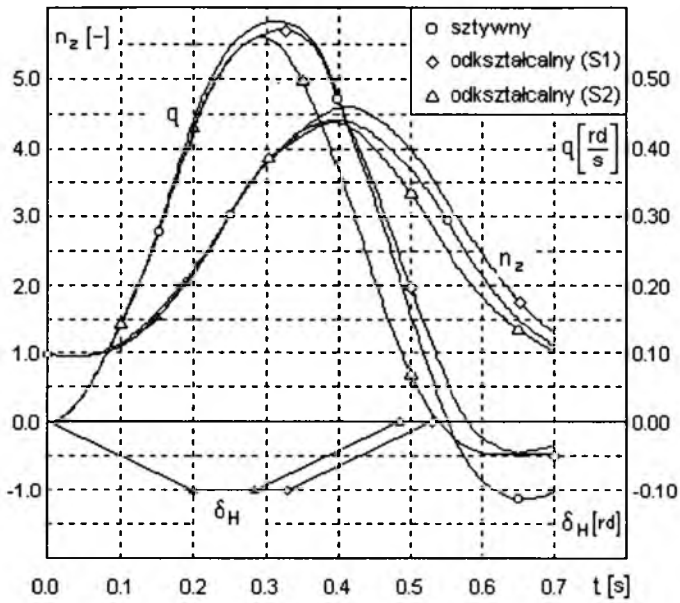
$$\Delta\delta_H^D(t) = \Delta\delta_H^S(t)$$

(S2) przy założeniu identycznego $n_{z\max}$ w manewrze:

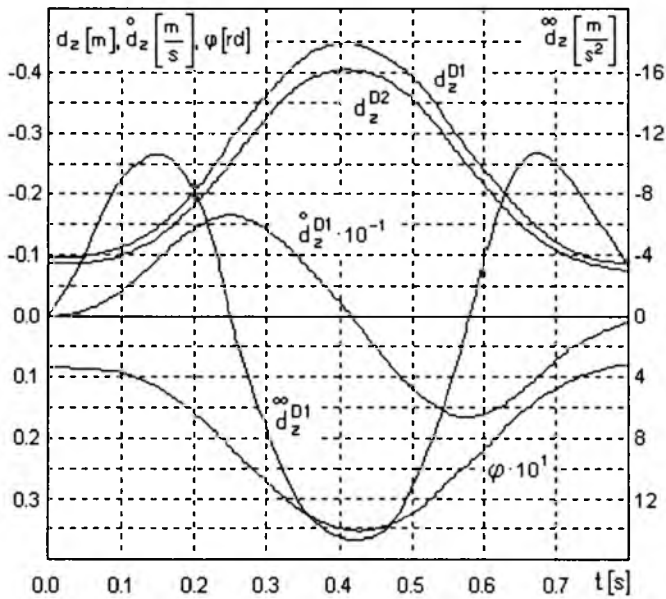
$$n_{z\max}^D = n_{z\max}^S$$

W celu spełnienia drugiego z warunków zmieniono czas wytrzymania steru w manewrze szybowca odkształcalnego i wymaganą zgodność uzyskano przy $(t_2 - t_1)^D = 0.085$ s.

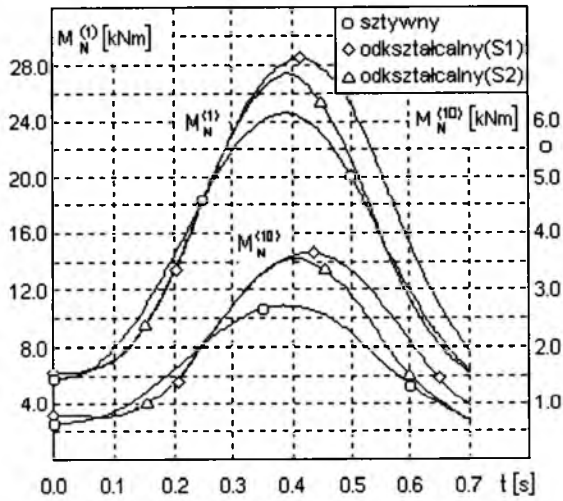
Otrzymane w rezultacie obliczeń numerycznych przebiegi współczynnika obciążenia szybowca oraz prędkości kątowej pochylania we wszystkich trzech omówionych wyżej wariantach pokazano na rysunku 4. Wyniki te wskazują na istotny wpływ skończonej sztywności skrzydła zarówno przebieg manewru jak i wielkość obciążeń ogólnych szybowca. Przy założeniu identycznego profilu sterowania w manewrze (wariant (S1)) otrzymujemy maksymalną wartość całkowitej siły czynnej większą o ok. 5% od siły uzyskanej dla szybowca sztywnego. Ekstremum to występuje nieco później, a towarzyszy mu praktycznie taka sama jak dla szybowca sztywnego prędkość kątowa q . Zwróćmy uwagę, że dla $t < 0.4$ s prędkość kątowa jest mniejsza dla konstrukcji odkształcalnej. Efekt ten wiązać należy głównie z wpływem prędkości deformacji na wielkość



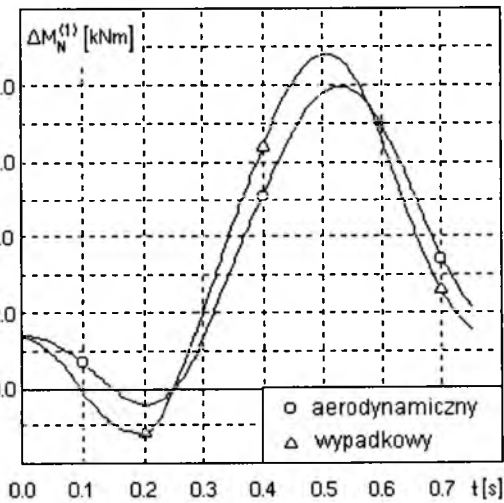
Rys. 4. Obciążenie ogólne samolotu



Rys. 5. Deformacje końcówki skrzydła



Rys. 6. Moment zginający w przekrojach 1 i 10



Rys. 7. Zmiana momentu zginającego

sił aerodynamicznych na skrzydle. Jak bowiem widać z rysunku 5 prędkość deformacji narasta w początkowej fazie manewru szybciej niż kąt skręcenia φ i co za tym idzie daje większe efekty tłumiące niż przyrosty sił aerodynamicznych wywołane skręceniem skrzydła. Później, zwłaszcza w okolicy ekstremum n_z , o wzroście sił aerodynamicznych na skrzydle odkształcalnym decyduje jego skręcenie i zachodzi to przy niemal zerowych wartościach prędkości deformacji i ekstremalnych przyśpieszeniach, a więc ekstremalnych wartościach sił masowych wywołanych deformacją.

Najistotniejszy wpływ wywiera odkształcalność skrzydła na stan obciążenia tego właśnie zespołu. Zmiany normalnego momentu zginającego skrzydło w trakcie manewru pokazano na rysunku 6. Dla zobrazowania jego rozkładu wzdłuż rozpiętości podano wartości momentu w przekrojach kontrolnych 1 ($y = 0.35$ m) i 10 ($y = 4.75$ m) – por. rys.2.

Jak widać moment gnący na skrzydle odkształcalnym jest większy w chwili $t = 0$ (efekt statycznego skręcenia), początkowo rośnie wolniej (wpływ prędkości ugięcia) a potem szybciej, by osiągnąć, w przypadku (S2), wartości ekstremalne większe niż na skrzydle sztywnym o ok. 11% w przekroju (1) i ok. 30% w przekroju (10). Interesujący rezultat obliczeń ilustruje rysunek 7. Pokazano na nim przebieg zmiany momentu gnącego w przekroju (1) wynikającej na skutek odkształcalności skrzydła dla wariantu (S1). Przez moment gnący aerodynamiczny rozumie się tę część momentu, która wywołana jest zmianami sił aerodynamicznych w następstwie skręcenia skrzydła i prędkości ugięcia. Moment wypadkowy uwzględnia łączny efekt dynamiczny odkształceń, a więc także siły masowe powstające na skutek przyśpieszeń deformującej się struktury. Otrzymane wyniki wskazują na niezbyt duży wpływ dynamicznego charakteru deformacji (rzędu 10% całkowitej zmiany momentu aerodynamicznego).

4. Wnioski końcowe

Wydaje się, że przedstawiona metoda analizy obciążeń samolotu stanowi dobrą podstawę do stworzenia użytecznego narzędzia projektowego. Ewentualne wdrożenie jej aktualnej wersji do praktyki projektowej poprzedzone być jednak musi:

- opracowaniem oprogramowania umożliwiającego automatyzację czasochłonnego procesu przygotowania danych,

- weryfikacją rezultatów w oparciu o badania w locie rzeczywistego samolotu lub modelu dynamicznie podobnego.

Należy sądzić, iż tylko eksperymentalna weryfikacja wyników obliczeń pozwoli określić niezbędną dokładność opisu deformacji konstrukcji oraz błąd wynikający z założenia o stacjonarności sił aerodynamicznych. W odniesieniu do tej pierwszej kwestii zauważmy, że zaproponowana metoda pozostawia otwartą kwestię wyboru funkcji postaci. W szczególności mogą nimi być funkcje stanowiące aproksymację, obliczeniowych lub eksperymentalnych, postaci drgań własnych konstrukcji. Powinno to przyczynić się do poprawy dokładności przy racjonalnym ograniczeniu liczby wyrazów szeregu (2.2). Jej wzrost powoduje rozbudowę podstawowego układu równań i konieczność zmniejszenia kroku całkowania, zaś poprawa dokładności opisu obciążeń może okazać się dyskusyjna, gdyż wzięte w ten sposób pod uwagę drgania o wysokich częstościach (z uwagi na ich małą amplitudę i silne tłumienie) mają drugorzędne znaczenie z punktu widzenia statycznej wytrzymałości konstrukcji. Jest to kwestia tym bardziej istotna, że w zakresie wysokich częstości drgań wykluczone jest stosowanie metod aerodynamiki quasistacjonarnej.

Literatura

1. BELOCERKOVSKIJ S.M., KOCETKOV JU.A. I INNI., *Vvedenie v aeroavtouluprugost'*, Moskwa, Nauka, 1980
2. BELOCERKOVSKIJ S.M. (red.), *Sozdanie i primenenie matematycznych modelej samoleto*v, Moskwa, Nauka, 1984
3. BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., HALFMAN R.L., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, 1955
4. EVSEEV D.D., *Raszczet nekotorych aerodinamiczeskich charakteristik uprugogo samoleta metodom koefficientov vlijanija*, Uczyenye zapiski CAGI, t.IX, Nr 6, 1978
5. EVSEEV D.D., JAREMCUK JU.F., *Metodika opredelenija stacionarnych aerodinamiczeskich charakteristik prodol'nogo dvizenija uprugogo svobodnogo samoleta*, Uczyenye zapiski CAGI, t.X, Nr 3, 1979
6. FORSCHING H.W., *Grundlagen der Aeroelastik*, Springer-Verlag, 1974
7. FUNG Y.C., *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, John Wiley and Sons, 1955
8. KRET K., *Wplyw sztywności konstrukcji na obciążenia manewrowe samolotu*, Praca doktorska, Politechnika Rzeszowska, 1986
9. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe, Mechanika, Nr 32, WPW, Warszawa, 1975

10. POTKAŃSKI W., *Obciążenia aerodynamiczne odkształcalnego dwupłata w przepływie potencjalnym*, Prace IPPT PAN, 1980
11. Brytyjskie przepisy zdolności cywilnego sprzętu lotniczego. Część D: Samoloty. Tłum. z angielskiego, Poznań, 1974
12. Military Specification. Airplane Strength and Rigidity – Flight Loads. MIL-A-8861A(USAF), 1971
13. Federal Aviation Regulation. Part 25. Airworthiness Standards: Transport Category Airplanes.

Effect of Wing Elastic Deformability on the Aircraft Symmetrical Manoeuvring Loads

Summary

The method of analysis of flight manoeuvring loads of a deformable aircraft is presented. Sample computations illustrate how to apply the method to estimation of the influence of wing elasticity upon glider loads in a flight manoeuvre defined by the elevator deflection with time. The method described seems to be useful in investigation of numerous problems of flight dynamics and loads of deformable objects.

WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI KRYTYCZNEJ FLATTERU SAMOŁOTU NA PODSTAWIE BADAŃ MODELU FLATTEROWEGO W TUNELU AERODYNAMICZNYM

WIESŁAW KRZYMIEN

Institut Lotnictwa, Warszawa

JERZY MARYNIAK

ITLiMS, Politechnika Warszawska

W pracy przedstawiono metodę wyznaczania krytycznej prędkości flatteru samolotu na drodze badań laboratoryjnych przeprowadzonych w tunelu aerodynamicznym na modelach dynamicznie podobnych. Przedstawiono kryteria podobieństwa jakie muszą być spełnione przy badaniach modelowych. Przykładowo podano wyznaczenie krytycznej prędkości flatteru dla modelu samolotu I-22 "Iryda" i równoważnej prędkości samolotu.

Konstruowanie i przygotowanie do produkcji samolotu lub szybowca wymaga analizy konstrukcji w zakresie aeroelastyczności statycznej oraz flatteru, a jej wyniki i wnioski powinny na bieżąco weryfikować sam projekt i realizowane prototypy. Obliczenia flatterowe ulegają uściśleniu w miarę postępu prac konstrukcyjnych, lecz zawierają znaczny stopień niepewności ze względu na przyjmowany model teoretyczny.

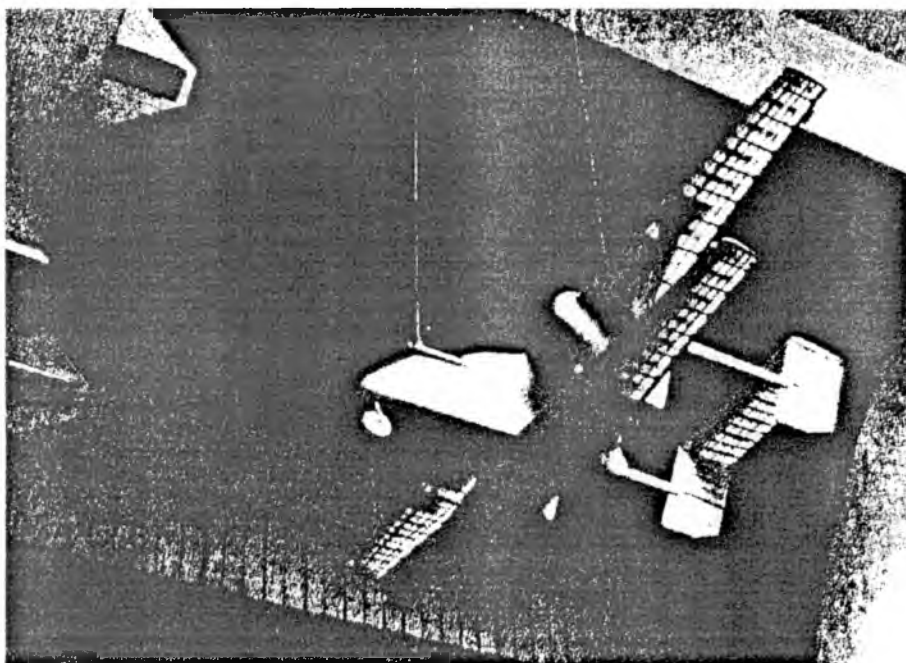
Jedynym praktycznym sposobem weryfikacji obliczeń flatterowych na etapie projektu są badania dynamicznie podobnych modeli płatowca (całego lub jego fragmentów).

Badania modeli mogą być także pomocne podczas badań flatterowych prototypu – są one bowiem tanie a przede wszystkim bezpieczne.

Dla zjawiska aero-elasto-dynamicznego, jakim jest flatter, zasadniczym kryterium podobieństwa jest zgodność dla obiektu i modelu bezwymiarowej liczby Strouhala:

$$St = \frac{l\omega}{v}$$

gdzie:



Rys. 1. Pierwszy badany w Instytucie Lotnictwa model flatterowy całego samolotu M-15

- l – charakterystyczny wymiar liniowy, [m],
 ω – prędkość kątowna drgań, [rad/s],
 v – prędkość liniowa, [m/s].

Zgodność tę zapewniają odpowiednio dobrane skale podobieństwa:

1. Skala liniowa K_l określa stosunek wymiarów liniowych na modelu do odpowiednich wymiarów na obiekcie naturalnym.
2. Skala prędkości K_v określa stosunek prędkości opływu modelu do prędkości lotu samolotu.
3. Skala gęstości powietrza K_ρ odpowiada przyjętemu stosunkowi gęstości czynnika roboczego tunelu aerodynamicznego i gęstości powietrza na wysokości, dla której ma być modelowany obiekt (wg. przyjętej w lotnictwie atmosfery standardowej).
4. Skala częstości K_f wynika z przyjętych skal K_l i K_v na podstawie

zachowania wielkości liczby St, tzn.:

$$K_f = \frac{K_v}{K_l}$$

5. Skala masowa K_m – wynika z przyjętych wielkości skal: skali gęstości K_ω i skali liniowej K_l :

$$K_m = K_\rho K_l^3$$

6. Skala sztywności K_s – jej wielkość otrzymuje się na podstawie skali masowej K_m i skali częstości K_f :

$$K_s = K_m K_f^2$$

Przy przewidywaniu własności flatterowych samolotu na podstawie wyników uzyskanych z badań modeli flatterowych istotny problem stanowi niezachowanie dwu innych kryteriów podobieństwa – liczb Macha i Reynoldsa.

Liczba Macha (Ma) ma znaczenie przy odwzorowywaniu ściśliwego opływu modelu. Uwzględnienie ściśliwości powietrza przy badaniu zjawisk aeroelastycznych może nastąpić jedynie podczas badań specjalnie zaprojektowanych i wykonanych modeli flatterowych w naddźwiękowym tunelu aerodynamicznym.

Liczba Reynoldsa (Re) jest istotna dla modeli zaprojektowanych na małe prędkości przepływu, gdyż określa charakter i podobieństwo opływu.

Ustalony turbulentny opływ klasycznych profili występuje przy $Re > 100000$ co np. dla badanego w Instytucie Lotnictwa modelu flatterowego I-22 "Iryda" odpowiadało prędkości $v > 9$ m/s (przyjętej jako minimalna prędkość pomiarowa).

Konsekwencją zachowania liczby Strouhala jest też większa względna podatność modelu flatterowego, co oznacza relatywnie większe jego ugięcia statyczne pod wpływem sił aerodynamicznych. W celu uniknięcia nadmiernego obciążenia elementów modelu przy dużych prędkościach przepływu, model projektuje się na ogół tak, by statyczne siły aerodynamiczne były minimalne, czyli kąt natarcia skrzydeł odpowiadał $c_z = 0$. Model flatterowy nie odwzorowuje wówczas wpływu sił statycznych na badane zjawiska.

Wynikami badań w tunelu aerodynamicznym modelu flatterowego w różnych wersjach są postacie flatteru i ich prędkości krytyczne.

Prędkość krytyczna flatteru jest to graniczna prędkość, powyżej której mogą wystąpić drgania samowzbudne (flutter), natomiast poniżej której drgania te są tłumione.

Pomiar prędkości krytycznej dla danej wersji modelu flatterowego przebiega w trzech etapach:

- zwiększając stopniowo prędkość przepływu powietrza w tunelu i obserwując zachowanie modelu doprowadza się do wystąpienia ustalonych drgań samowzbudnych. Prędkość, przy której drgania modelu nie są gasnące rejestruje się jako prędkość *wejścia* we flatter;
- utrzymując stałą prędkość można zarejestrować drgania w celu określenia częstości i postaci flatteru;
- wolno zmniejszając prędkość przepływu powietrza obserwuje się moment, w którym drgania flatterowe ustają. Prędkość tę określa się jako prędkość *wyjścia* z flatteru.

Prędkość krytyczną można określić jako:

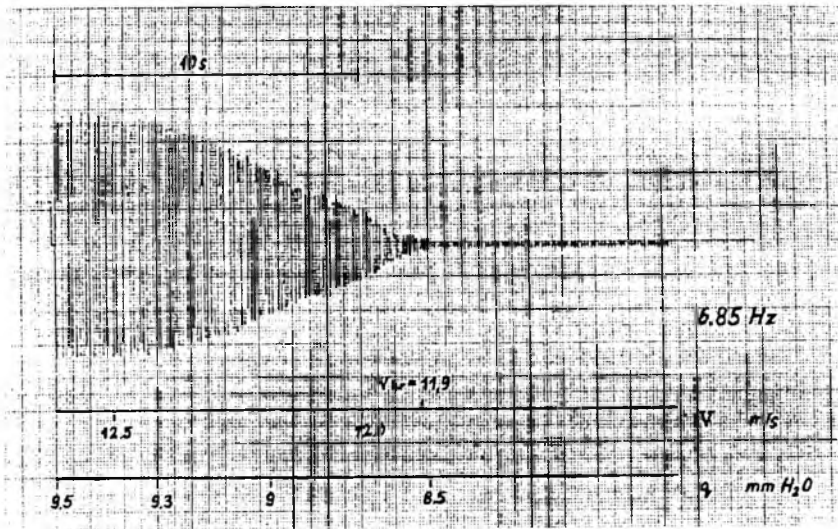
- średnią prędkość pomiędzy prędkością *wejścia* i *wyjścia* z flatteru;
- prędkość *wyjścia* z flatteru.

Tłumienie konstrukcyjne lub niewielkie nieliniowości postaci drgań powodują, że prędkość *wejścia* jest niższa niż prędkość *wyjścia* z flatteru (zwykle ok. $2 \div 5\%$) i dlatego bezpieczniejsze jest określenie prędkości krytycznej jako prędkości *wyjścia*.

Na podstawie licznych badań stwierdzono, że rozrzut wyników pomiaru prędkości krytycznej podaną metodą jest niewielki. Powtórzenie pomiaru dokonywano jedynie w przypadku, gdy zauważono nieprawidłowości w zachowaniu modelu lub jego konstrukcji np. poluzowanie się elementów modelu lub drobne uszkodzenia wynikłe na skutek drgań.

Określenie błędu pomiaru prędkości krytycznej modelu flatterowego zależy od przyjętej definicji prędkości krytycznej flatteru i związanej z nią metodyki pomiarów. Istotnymi elementami są: pomiar prędkości powietrza w przestrzeni pomiarowej tunelu oraz ustalenie prędkości *wyjścia* z flatteru. W przypadku nieustalanej prędkości przepływu rzeczywisty rozkład ciśnienia dynamicznego w przestrzeni pomiarowej tunelu może być niejednorodny. Wpływ ten starano się zminimalizować poprzez wolne zmiany prędkości przepływu (w zależności od prędkości obrotowej wentylatora uzyskiwano zmiany prędkości o $0.5 \div 2$ m/s w czasie 10 s). Na podstawie obserwacji i uproszczonych pomiarów stwierdzono, że wpływ ten jest niewielki.

Większym błędem obarczone jest określenie prędkości krytycznej, czyli momentu *wychodzenia* z flatteru. Na rys.2 przedstawiono przykładowy zapis drgań steru wysokości w funkcji czasu podczas zmniejszania prędkości



Rys. 2. Zapis zanikania drgań flutterowych modelu podczas zmniejszania prędkości przepływu powietrza w tunelu aerodynamicznym

przepływu. Zapis ten powstał przy użyciu magnetofonu pomiarowego oraz oscylografu. Na rysunku prędkość krytyczną określono jako prędkość, przy której drgania zanikły. Drgania zaczęły jednak zanikać już przy $v = 12.4 \text{ m/s}$, więc rzeczywista prędkość krytyczna powinna znajdować się pomiędzy tymi prędkościami. Próby zahamowania spadku prędkości w chwili zaobserwowania zmniejszania się amplitudy drgań flutterowych nie przyniosły dobrych rezultatów ze względu na dużą bezwładność powietrza i układu napędowego tunelu. Ponadto drobne turbulencje przepływu zakłócały drgania flutterowe powodując większe rozrzuty wartości wyznaczanych prędkości.

W związku z tym przyjmowano prędkość krytyczną jako prędkość *wyjścia* z flutteru, przy której amplituda drgań zmniejszyła się do połowy.

Dla przedstawionego przykładu przyjęto $v_{kr} = 12.2 \pm 0.1 \text{ m/s}$, co odpowiada w skali samolotu prędkości $440 \pm 7 \text{ km/h}$. Przedstawiony wynik odpowiada przypadkowi samolotu I-22 z 40% sterem wysokości o wyważeniu 0% i pokrytym warstwą lodu o grubości 0.1 mm (lub szronem o grubości ok. 1 mm).

Istnieje jeszcze trzecia definicja prędkości krytycznej wynikająca z metody badań flutterowych samolotów. Prędkość krytyczna jest określana z ekstrapolacji przebiegu tłumienia jako prędkość, przy której tłumienie postaci osiąga wartość zero.

Sposób ten eliminuje błąd wynikający z określenia zmieniającej się prędkości, gdyż pomiarów dokonuje się dla ustalonych wartości prędkości przepływu.

Otrzymane tą metodą wyniki charakteryzowały się lepszą powtarzalnością, lecz wymagają znacznie więcej czasu (ustalenie się prędkości przepływu, wzbudzenie drgań i pomiar współczynnika tłumienia na podstawie zarejestrowanych drgań swobodnych).

Porównując wyniki otrzymane przy pomocy wyżej wymienionych metod stwierdzono, że przyjęta metoda pomiaru prędkości krytycznej jako prędkości, przy której amplituda drgań zmniejsza się do połowy przy *wyjściu* z flatteru daje wystarczająco dobre wyniki, obarczone błędem poniżej 2% dla małych prędkości i *lagodnych* flatterów. Błąd ten maleje ze wzrostem prędkości przepływu ze względu na wzrost sił aerodynamicznych.

Literatura

1. BISPLINGHOFF R. I IN., *Aeroelasticity*, Cambridge, Addison-Wesley Publ., 1955
2. MARYNIAK J., *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, XXVI. Symp. "Modelowanie w mechanice", Kudowa, 1987
3. *Flutter Testing Technics*, NASA SP-415, materiały z konferencji, 1975

Determination of the Aircraft Critical Flutter Velocity by Means of Wind Tunnel Experiments Conducted with the Use of Flutter Models

Summary

A method for critical flutter velocity determination by means of experiments conducted in a wind tunnel with the use of dynamic models has been presented in the paper. The criteria of similarity to be satisfied have also been formulated. The critical flutter velocity for the I-22 IRYDA aircraft and the equivalent aircraft velocity have been computed.

OBLICZENIA STATYCZNEJ STATECZNOŚCI PODŁUŻNEJ SAMOLOTU PRZY WYKORZYSTANIU METOD PANELOWYCH NISKIEGO RZĘDU Z UWZGLĘDNIENIEM WPLYWU ŚMIGŁA

PIOTR KULICKI

MACIEJ LASEK

Instituł Lotnictwa, Warszawa

Przedstawiono koncepcję oraz wstępne wyniki obliczeń poprawek na oddziaływanie pracującego śmigła do obliczeń podłużnej stateczności statycznej metodą panelową. W metodzie zastosowano model opływu potencjalnego. Płaty modelowano jako przestrzenne, powierzchniowe rozkłady dipoli. Wpływ śmigła był uwzględniany poprzez wprowadzenie odpowiednio ukształtowanych płatów zastępczych.

Do porównań wykorzystano metody klasyczne najczęściej stosowane na etapie projektu wstępnego, bazujące na modelu strumieniowym śmigła lub na uogólnieniu danych eksperymentalnych.

Prezentowane metody przewidziano jako przeznaczone do wykorzystania w fazie projektu wstępnego.

Wykaz oznaczeń

- α – kąt natarcia,
- α_h – kąt natarcia usterzenia poziomego (mierzony między średnią cięciwą aerodynamiczną i kierunkiem lokalnej prędkości opływu),
- α_w – kąt natarcia skrzydła (mierzony między średnią cięciwą aerodynamiczną i kierunkiem lokalnej prędkości opływu),
- $\Delta_p C_{m\alpha}$ – przyrost pochodnej momentu pochylającego względem kąta natarcia od pracującego śmigła,
- ε_p – kąt odchylenia strug wywołany pracującym śmigłem (średni w strumieniu),

- η_0 – współczynnik zmiany ciśnienia dynamicznego w okolicy usterzenia poziomego bez wpływu śmigła,
 η_{hs} – współczynnik zmiany ciśnienia dynamicznego na usterzeniu poziomym (średni wzdłuż rozpiętości),
 η_t – całkowity współczynnik zmiany ciśnienia dynamicznego,
 η_{ws} – współczynnik zmiany ciśnienia dynamicznego na skrzydle (średni wzdłuż rozpiętości),
 κ_h – cecha objętościowa usterzenia poziomego,
 μ – natężenie dipola,
 ρ – gęstość powietrza,
 Φ – potencjał zaburzeń,
 c – średnia cięciwa aerodynamiczna skrzydła,
 c_h – średnia cięciwa aerodynamiczna usterzenia poziomego,
 C_m^A – współczynnik momentu pochylającego samolotu,
 C_m^h – współczynnik momentu pochylającego pochodzącego od usterzenia poziomego,
 C_m^w – współczynnik momentu pochylającego pochodzącego od skrzydła,
 C_{N_p} – współczynnik siły normalnej w płaszczyźnie śmigła,
 D – średnica śmigła,
 $d\beta/d\alpha$ – gradient odchylenia strug względem kąta natarcia w rejonie tarczy śmigła,
 h_p – odległość osi ciągu od środka ciężkości mierzona prostopadle do tej osi,
 J – posuw śmigła,
 L_h – ramię usterzenia poziomego,
 L_p – odległość od płaszczyzny śmigła do środka ciężkości samolotu,
 n_p – liczba łopat śmigła,
 R – promień śmigła,
 S – pole powierzchni płata (powierzchnia odniesienia),
 S_h – pole powierzchni usterzenia poziomego,
 S_{hs} – pole powierzchni usterzenia poziomego omywanej przez strumień zaśmigłowy,

- S_{ws} – pole powierzchni płata omywanej przez strumień zaśmigłowy,
- T – ciąg śmigła,
- T_c – współczynnik ciągu śmigła,
- V – prędkość niezaburzona,
- w – prędkość normalna do powierzchni nośnej,
- w_i – prędkość indukowana przez śmigło, normalna do jego tarczy.

1. Wstęp

W obliczeniach statycznej stateczności podłużnej istotny wpływ na wyniki ma uwzględnienie efektów wynikających z pracy śmigła. Na etapie projektu wstępnego są one często pomijane. Przyjmuje się jedynie zwiększenie wymaganego zapasu stateczności, tak aby pozostać po "bezpiecznej stronie". W przypadku uwzględnienia tych efektów, wykorzystuje się metody bazujące na uproszczonych teoriach śmigła (np. teoria strumieniowa) lub na danych doświadczalnych.

Przy wykorzystaniu metod panelowych do badania charakterystyk konfiguracji aerodynamicznych na etapie projektu koncepcyjnego, korzystnym jest wprowadzenie efektów pracującego śmigła do metody obliczeniowej. W przeciwnym razie, konieczne jest odrębne przeprowadzenie obliczeń odpowiednich poprawek dotyczących śmigła. Zwiększa to pracochłonność i komplikuje obliczenia.

Przedstawione obliczenia miały na celu wstępne sprawdzenie możliwości uwzględnienia wspomnianych efektów. Należy podkreślić, że nie chodziło tu o dokładne modelowanie opływu wywołanego wirującym śmigłem (co jest zadaniem bardzo złożonym). Obliczenia takiego opływu są niezbędne przy szczegółowym obliczaniu obciążeń aerodynamicznych [7]. Tutaj, celem było uzyskanie metody dającej wyniki globalne równoważne wynikom uzyskiwanym dotychczas metodami klasycznymi.

Przedstawione metody dotyczą układów klasycznych płat-usterzenie, z napędem ciągnącym.

2. Metoda klasyczna

Wykorzystano metodę często występującą w literaturze dotyczącej wstępnego projektowania samolotów. Szczegółowo została ona omówiona w [1]. Uzyskane za jej pomocą wyniki posłużyły jako dane porównawcze do oceny wyników metody panelowej.

Wpływ pracującego śmigła rozłożony jest na trzy zasadnicze efekty:

- występowanie siły normalnej w płaszczyźnie śmigła,
- odchylenie strug w obszarze strumienia zaśmigłowego,
- zwiększenie ciśnienia dynamicznego w obszarze strumienia zaśmigłowego.

• Siła normalna

Oszacowanie wpływu tej siły oparto na uogólnieniu danych eksperymentalnych. Współczynnik siły normalnej obliczany jest ze wzoru:

$$C_{N_p} = \frac{dC_{N_p}}{d\alpha} \alpha \quad (2.1)$$

gdzie gradient jest wyznaczany w zależności od posuwu śmigła, współczynnika SFF (side-force-factor) charakteryzującego geometrię łopaty oraz współczynnika ciągu śmigła.

Przyrost momentu pochylającego wywołany siłą normalną można obliczyć z zależności:

$$\Delta_p C_{m_\alpha} = \frac{L_p}{C} \left(\frac{\pi D^2}{4S} \right) \frac{dC_{N_p}}{d\alpha} n_p \frac{d\beta}{d\alpha} \quad (2.2)$$

• Odchylenie strug w strumieniu zaśmigłowym

Oszacowanie odchylenia przeprowadzane jest na podstawie zależności:

$$\varepsilon_p = \frac{d\varepsilon_p}{d\alpha} \alpha = \left(A + B' \frac{dC_{N_{p0}}}{d\alpha} \frac{d\beta}{d\alpha} \right) \alpha \quad (2.3)$$

gdzie współczynniki A i B' są zależne od współczynnika ciągu śmigła i pochodzą z uogólnienia danych eksperymentalnych. Gradient $dC_{N_{p0}}/d\alpha$ odczytywany jest jak poprzednio dla zerowego współczynnika ciągu, natomiast gradient $d\beta/d\alpha$, dotyczący odchylenia strug przed płatem w rejonie śmigła, obliczany jest jedną z metod często prezentowanych w literaturze (np. [3]).

• *Zwiększenie ciśnienia dynamicznego w strumieniu zaśmigłowym*

Wartość współczynnika zwiększenia ciśnienia dynamicznego jest wyliczana ze wzoru:

$$\eta_t = \eta_0 \left(1 + \frac{8}{\pi} T_c \right) \quad (2.4)$$

Zależność ta wynika z zasady zachowania pędu zastosowanej w strumieniowej teorii śmigła.

Ostateczna zależność na wartość współczynnika momentu pochylającego dla układu klasycznego ze śmigłem ciągnącym jest następująca:

$$\begin{aligned} C_m^A = & C_m^w(\alpha_w)\eta_{ws}(T_c) + \frac{C_h S_h}{C S} C_m^h(\alpha_h)\eta_{hs}(T_c) - \kappa_h C_z^h(\alpha_h)\eta_{hs}(T_c) + \\ & + \Delta_p C_{m_\alpha}(J, T_c)\alpha - \frac{T_c(\alpha)\pi R^2 h_p}{S C} \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \eta_{ws} = & \left[\left(1 - \frac{S_{ws}}{S} \right) + \eta_t(T_c) \frac{S_{ws}}{S} \right] \\ \kappa_h = & \frac{L_h S_h}{C S} \quad T_c = \frac{T}{q\pi R^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Zmiana kąta natarcia na części rozpiętości płata i usterzenia na skutek odchylenia strug jest uwzględniona w funkcjach $C_m^w(\alpha)$, $C_m^h(\alpha)$ i $C_z^h(\alpha)$, a ich argumenty (α_w i α_h) są odpowiednimi kątami średnimi.

W obliczeniach porównawczych, charakterystyki układu bez śmigła zostały przyjęte na podstawie obliczeń panelowych, tak aby wykluczyć wpływ różnic w obliczeniach tych charakterystyk otrzymanych metodą panelową i klasyczną. Pozwoliło to zaobserwować różnice pomiędzy wynikami dotyczącymi samych poprawek na wpływ pracującego śmigła.

3. Wykorzystana metoda panelowa

Do obliczeń wykorzystano metodę panelową bazującą na rozwiązaniu równania Laplace'a:

$$\Delta\Phi = 0 \quad (3.1)$$

dla potencjału prędkości, z warunkiem brzegowym Neumanna

$$nV = 0 \quad (3.2)$$

(styczność przepływu do powierzchni nośnej).

W modelu fizycznym przyjmuje się następujące założenia:

- przepływ jest nielepki,
- nieściśliwy,
- stacjonarny,
- bez oderwań,
- potencjalny z wyjątkiem śladu wirowego.

Płaty modelowano jako powierzchnie szkieletowe. Dzielono je na płaskie panele, na których umieszczano stałe, ciągłe rozkłady dipoli. Algorytmy numeryczne opracowano na podstawie [5] i [6].

Ślad wirowy został zamodelowany jako płaska powierzchnia połączona z krawędzią splywu płata i skierowana równolegle do osi OX układu związanego z samolotem. Na powierzchni śladu zastosowano ten sam rodzaj osobliwości co na powierzchniach nośnych.

Rozwiązaniem równania (3.1) jest równanie całkowe:

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu n \nabla_Q \left(\frac{1}{r} \right) dS_Q + \Phi_\infty \quad (3.3)$$

będące, w reprezentacji numerycznej, układem liniowych równań algebraicznych postaci:

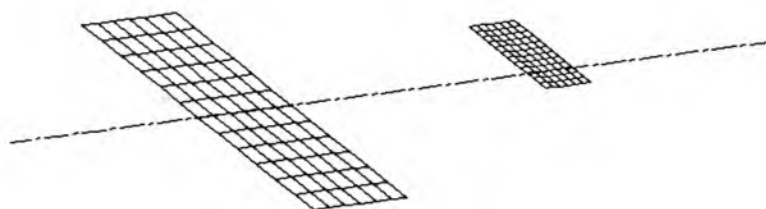
$$[A] [\mu] = [w(V)] \quad (3.4)$$

Rozwiązanie otrzymywane jest w postaci rozkładu natężeń osobliwości (dipoli) na powierzchniach nośnych. Pozwala to, w dalszej kolejności, na wyznaczenie rozkładu ciśnień, a z tego, globalnych sił działających na układ aerodynamiczny.

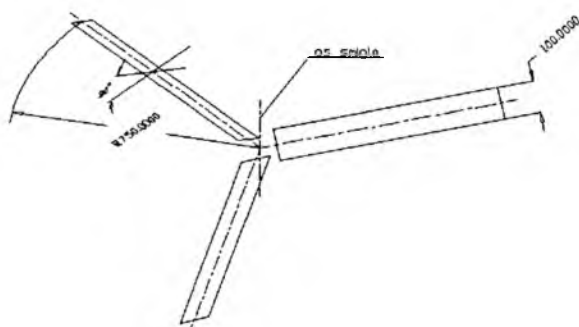
4. Modele układu płatów i śmigła

Model układu płatów przedstawiony jest na rys.1. Składa się on z prostokątnego płata głównego o wydłużeniu = 6 z płaską powierzchnią szkieletową i podobnego usterzenia poziomego o wydłużeniu = 4, położonego z niewielkim przewyższeniem względem płata głównego.

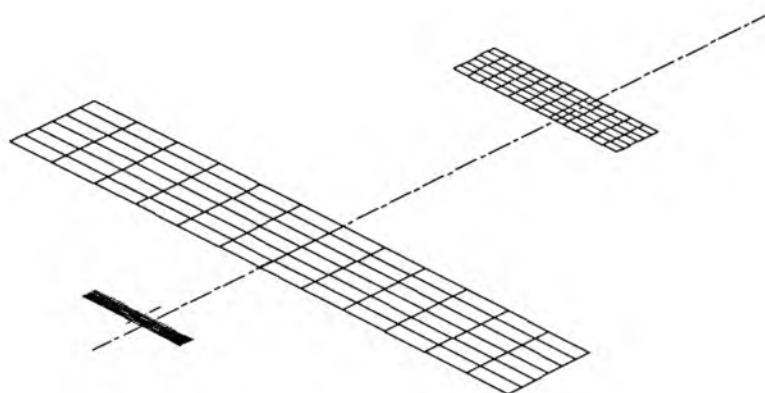
Modelowane śmigło przedstawia rys.2.



Rys. 1. Układ płyt wykorzystany w obliczeniach



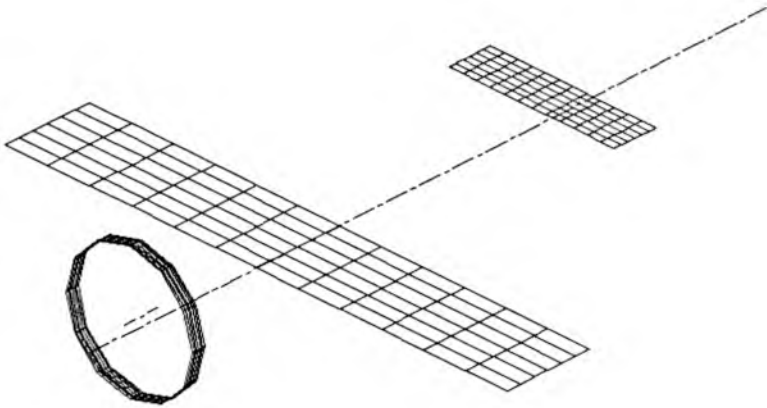
Rys. 2. Parametry geometryczne śmigła obliczeniowego



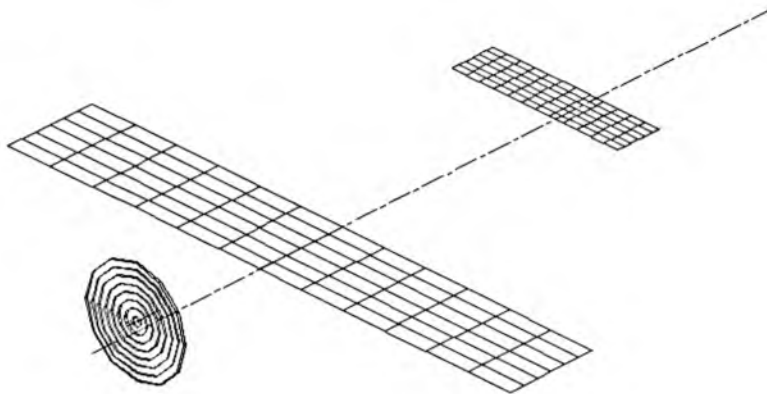
Rys. 3. Model 1 – płat zastępczy

Wpływ śmigła uwzględniono na trzy różne sposoby. Przyjęto model, w którym śmigło jest reprezentowane przez płaski płat zastępczy (rys.3), [2]. Taki model powinien wprowadzać wpływ siły normalnej oraz odchylenie strug w strumieniu. W jednej z wersji obliczeń, dodatkowo wprowadzono zwiększenie prędkości w strumieniu zaśmigłowym poprzez arbitralną modyfikację lokalnej prędkości niezaburzonej w zadanym obszarze.

Drugim modelem była obręcz o odpowiednio dobranej cięciwie i średnicy równej rozpiętości płata zastępczego (rys.4).



Rys. 4. Model 2 – obręcz zastępcza

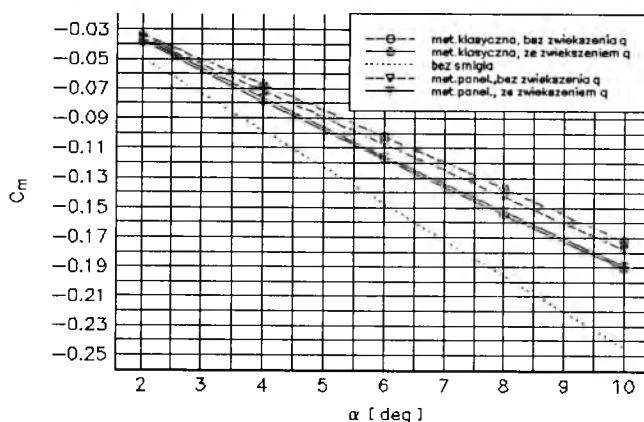


Rys. 5. Model 3 – zestaw obręczy zastępczych

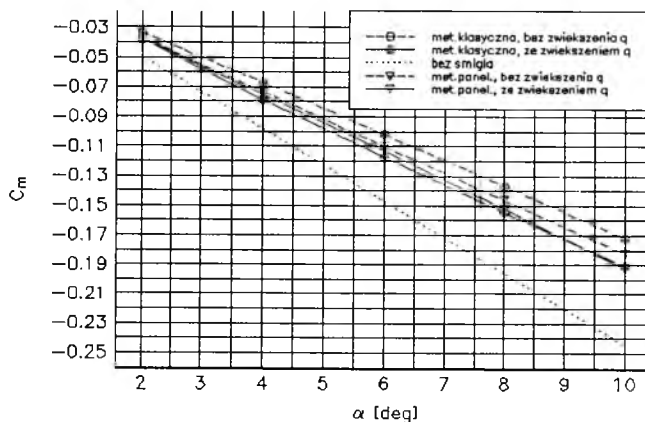
Ostatni model składał się z kilku współśrodkowych obręczy o odpowiednio dobranej cięciwie (rys.5). Największa z nich miała średnicę jak poprzednio.

5. Wyniki obliczeń

Nie dysponowano danymi eksperymentalnymi, które można by wykorzystać do weryfikacji metody obliczeniowej. Dane takie powinny pochodzić z badań w locie. Wiarygodność wyników z badań tunelowych, w przypadku efektów pracującego śmigła, jest zbliżona do wiarygodności wyników uzyskiwanych uproszczonymi metodami obliczeniowymi.



Rys. 6. Wyniki obliczeń dla modelu 1 – płat zastępczy

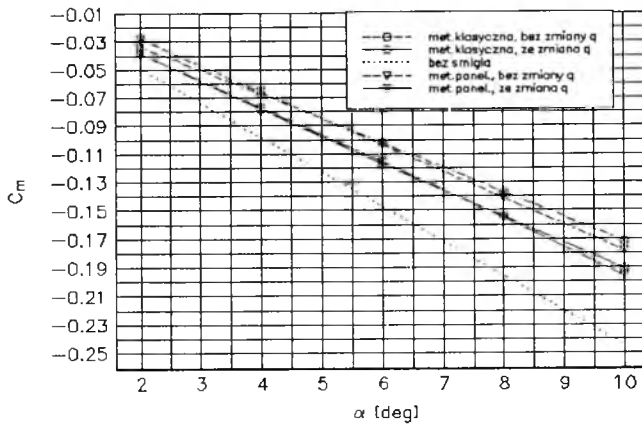


Rys. 7. Wyniki obliczeń dla modelu 2 – obręcz zastępcza

W obecnej fazie prac przyjęto, że będzie się dążyć do uzyskania metody modelowania efektów śmigła w kodzie panelowym, ekwiwalentnej metodom

klasycznym. Uzasadnia to przyjęcie wyników z metody klasycznej jako materiału porównawczego do weryfikacji wyników obliczeń panelowych.

Na poniższych wykresach przedstawiono porównanie wyników obliczeń metodą klasyczną oraz wyników uzyskanych z obliczeń panelowych.



Rys. 8. Wyniki obliczeń dla modelu 3 – zestaw obręczy zastępczych

Jak widać, uzyskano dość dobrą zgodność wyników jeśli chodzi o gradienty momentu pochylającego względem kąta natarcia. Różnice w gradientach z obliczeń metodą klasyczną i metodą panelową nie przekraczają 2% dla płaskiego płata zastępczego, 5% dla obręczy zastępczej i 9% dla zestawu obręczy zastępczych.

6. Podsumowanie

Stwierdzono, że można w sposób prosty i efektywny wprowadzić efekty pracującego śmigła do panelowych obliczeń układu aerodynamicznego. Można tu dodać, że zwiększając stopień złożoności modelu można dojść do modeli lepiej odzwierciedlających rzeczywisty opływ wywołany pracującym śmigłem. Powoduje to jednak gwałtowny wzrost kosztu obliczeniowego metody. Na etapie projektu koncepcyjnego, na którym nie zależy nam na wyznaczeniu obciążeń powierzchni nośnych, a jedynie na globalnych charakterystykach układu wydaje się niecelowe stosowanie modeli o znacznej złożoności.

Literatura

1. SECKEL E., *Stability and Control of Airplanes and Helicopters*, Academic Press, New York and London 1964
2. MCCORMICK B.W., *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, Toronto 1976
3. ROSKAM J., *Airplane Design, Roskam Aviation and Engineering Corp.*, Ottawa, Kansas, 1987
4. PERKINS C.D., HAGE R.E., *Airplane Performance Stability and Control*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1949
5. HESS J.L., SMITH A.M.O., *Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies*, Progress in Aeronautical Sciences, 6/1968
6. KATZ J., PLOTKIN A., *Low-Speed Aerodynamics*, McGraw-Hill, Inc., New York 1991
7. LÖTSTEDT P., *A Propeller Slipstream Model in Subsonic Linearized Potential Flow*, ICAS Proceedings, ICAS-90-5.4.4, Stockholm, September 1990

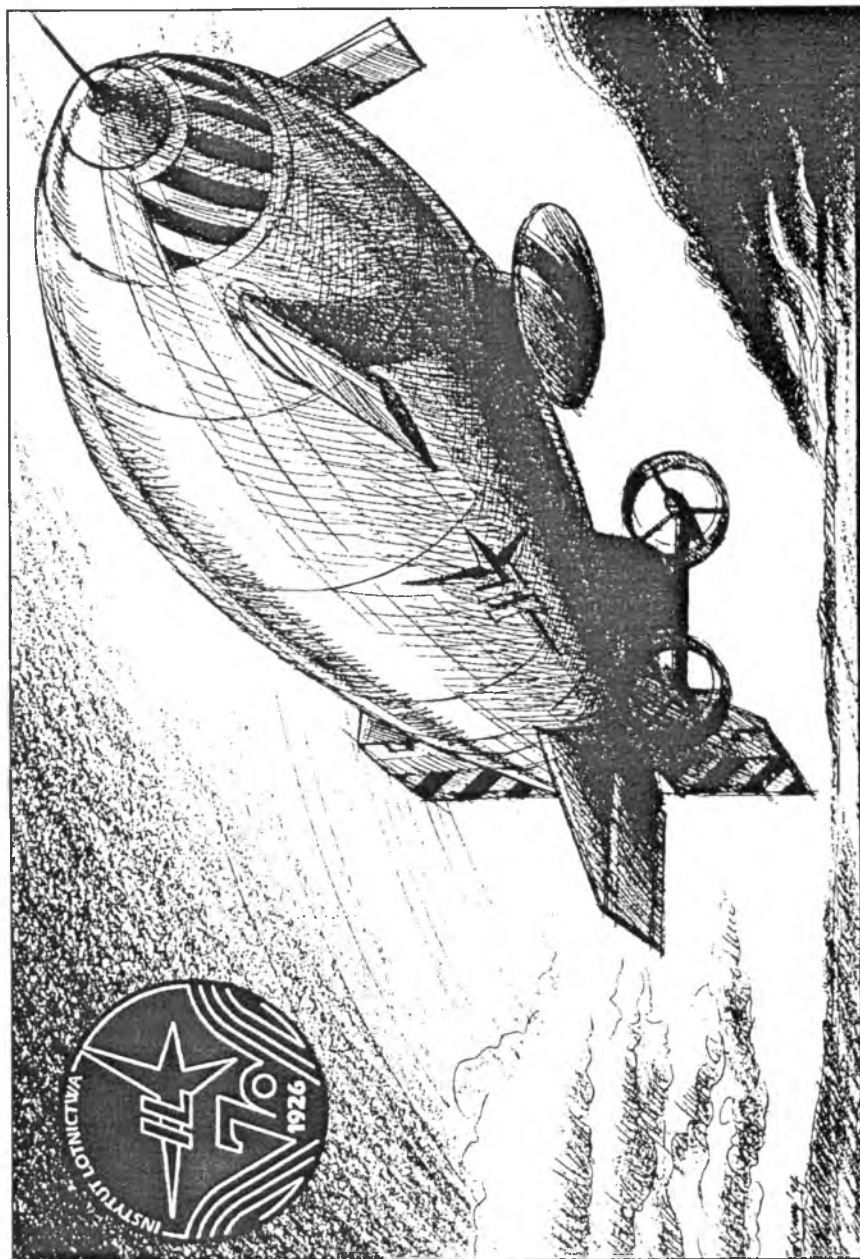
Low Order Panel Method Calculations of Longitudinal Static Stability for an Airplane with the Propeller Effect Included

Summary

The concept of introduction of correction factors for propeller influence is presented. Potential flow model is used. Wings are modeled as three dimensional surface doublet distribution. The correction factors are introduced by additional lifting surfaces.

The results of the panel method calculations are compared to some results obtained in typical preliminary design calculations (based on the experiment or the propeller stream theory).

Presented methods are intended to be used at the preliminary design stage.



STEROWIEC BEZPILOTOWY

INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1905

WYZNACZANIE GRADIENTU SIŁY NOŚNEJ UKŁADU SKRZYDŁO-KADŁUB ZA POMOCĄ METOD PANELOWYCH NISKIEGO RZĘDU

PIOTR KULICKI

MACIEJ LASEK

Institut Lotnictwa, Warszawa

Przedstawiono metodę wyznaczania rozkładu ciśnień i współczynników aerodynamicznych układów skrzydło-kadłub znajdujących się w opływie nieściśliwym ustalonym. Omówiono model fizyczny i matematyczny oraz wyniki przeprowadzonych obliczeń. Uzyskano zadowalającą zgodność rozkładów ciśnień z wynikami eksperymentalnymi.

Spis oznaczeń

- α – kąt natarcia,
- ΔF_i – siła normalna do panelu,
- μ – natężenie dipola,
- σ – natężenie źródła,
- ϕ – potencjał zaburzenia,
- b – rozpiętość płata,
- C_k^*, B_k^* – współczynniki wpływu od dipoli i źródeł,
- c_l – współczynnik siły nośnej w bieżącym przekroju skrzydła,
- C_Z – współczynnik siły nośnej układu S-K,
- c_p – współczynnik ciśnienia,
- N – liczba paneli obiektu,
- N_W – liczba paneli śladu,
- \mathbf{n}_i – wektor normalny do powierzchni panelu,
- q – ciśnienie dynamiczne $q = 0.5\rho V_\infty^2$,
- r – odległość punktu kontrolnego od osi obrotu,

- S_B – pole powierzchni bryły,
 S_i – pole panelu,
 S_W – powierzchnia śladu,
 TE – oznaczenie krawędzi splywu,
 V_i – wektor całkowitej prędkości na panelu,
 V_{ind} – wektor prędkości indukowanej na panelu,
 V_∞ – wektor prędkości niezaburzonej.

1. Wstęp

W analizie stateczności i sterowności samolotu często zachodzi potrzeba oszacowania wpływu kadłuba na charakterystyki aerodynamiczne układu. Wykorzystywane dotychczas do tego celu półempiryczne zależności [8], bazujące na mocno uproszczonym modelu fizycznym, są słuszne jedynie dla układów klasycznych ze smukłym kadłubem.

Znacznie szersze możliwości obliczeniowe daje natomiast wykorzystanie metod panelowych, [2,5], opartych na teorii przepływu potencjalnego. Pierwsze prace dotyczące wykorzystania metod panelowych do obliczenia rozkładu ciśnień na trójwymiarowej bryle traktowanej jako obiekt nienośny prowadzone były w latach 1956-62 przez Hessa [2]. W latach późniejszych były konsekwentnie rozwijane i udoskonalane m.in. przez Hessa [3], Johnsona [4] i Krausa [6].

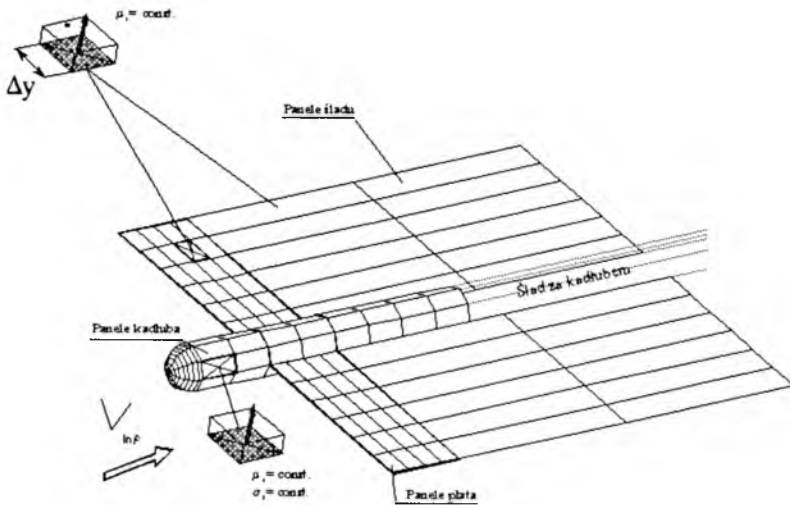
Pomimo wielu uproszczeń w porównaniu z modelem płynu lepkiego, wyniki obliczeń dla wielu zagadnień, nie różnią się znacząco od wyników uzyskanych metodami uwzględniającymi lepkość płynu przy niewielkim koszcie obliczeniowym.

2. Model fizyczny

Przyjęto następujący model fizyczny układu:

- płat nośny jest cienką powierzchnią złożoną ze szkieletowych profili (z zachowaniem pierwotnego obrysu oraz kątów zaklinowania i wzniosu), podzieloną na czworokątne, płaskie panele z powierzchniowym, stałym rozkładem dipoli,

- kadłub jest bryłą trójwymiarową podzieloną na czworokątne, płaskie panele z powierzchniowym, stałym rozkładem dipoli i źródeł. Przedstawienie płata nośnego jako nieskończenie cienkiej powierzchni podyktowane było niższym kosztem obliczeniowym niż gdyby uwzględniono wpływ grubości (jak w przypadku kadłuba). Przykładowa parkietyzacja modelu fizycznego przedstawiona jest na rys.1.



Rys. 1. Parkietyzacja modelu fizycznego

Przyjęto następujące założenia odnośnie opływu:

- płyn jest nielepki i nieściśliwy,
- opływ jest bezwirowy (z wyjątkiem śladu za płatem) i bez oderwań,
- zanedbane są siły masowe,
- na krawędzi spływu śladu wirowego spełniony jest warunek Kutty-Żukowskiego,
- ślad wirowy leży w płaszczyźnie skrzydła,
- zaburzenia przepływu spowodowane obecnością układu skrzydło-kadłub są małe.

3. Model matematyczny

Z przyjętych założeń fizycznych wynika, że istnieje potencjał zaburzenia prędkości spełniający równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

z warunkiem brzegowym Neumanna na powierzchni płata:

$$\mathbf{V}_i \mathbf{n}_i = 0$$

oraz Dirichleta na powierzchni kadłuba:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \frac{1}{r} dS = 0$$

Dodatkowo stawiane są następujące warunki brzegowe:

— na krawędzi spływu

$$\Delta p(x, y)_{TE} = 0$$

— na śladzie wirowym

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = 0$$

— w nieskończoności

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = 0$$

Wyznaczenie opływu wokół układu skrzydło-kadłub można sprowadzić [5] do znalezienia rozwiązania równania całkowego:

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \frac{1}{r} - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \phi_\infty(P)$$

które (przy założeniu $\phi_i = \phi_\infty$) można aproksymować układem liniowych równań algebraicznych (dla zagadnienia Dirichleta):

$$\sum_{k=1}^N C_k \mu_k + \sum_{t=1}^{N_W} C_t \mu_t + \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k = 0$$

lub (dla zagadnienia Neumanna):

$$\sum_{k=1}^N C_k^* \mu_k + \sum_{t=1}^{N_W} C_t^* \mu_t + \sum_{k=1}^N B_k^* \sigma_k = -V_\infty \mathbf{n}_i$$

gdzie C_k, C_t i B_k są aerodynamicznymi współczynnikami wpływu:

$$C_{k,t} = \frac{1}{4\pi} \int_{1234} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{k,t}} \right) dS_{k,t} \quad B_k = -\frac{1}{4\pi} \int_{1234} \frac{1}{r_k} dS_k$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy rozkład natężeń osobliwości na powierzchni obiektu co pozwala na wyznaczenie rozkładu prędkości a następnie ciśnień oraz sił aerodynamicznych.

Całkowita prędkość na panelu kadłuba wyznaczana jest jako suma wektora prędkości niezaburzonej oraz prędkości indukowanej liczonej w kierunku stycznym do panelu jako:

$$V_{ind_l} = \frac{\partial \mu}{\partial l} \quad V_{ind_m} = \frac{\partial \mu}{\partial m}$$

oraz w kierunku normalnym do panelu:

$$V_{ind_n} = 0 \\ V_i = (V_{\infty_l}, V_{\infty_m}, V_{\infty_n})_i + (V_{ind_l}, V_{ind_m}, V_{ind_n})_i$$

gdzie l, m, n są kierunkami związanymi z lokalnym układem współrzędnych. Współczynnik ciśnienia na panelu kadłuba obliczany jest jako:

$$C_{p_i} = 1 - \frac{V_i^2}{V_\infty^2}$$

a siła normalna do panelu kadłuba:

$$\Delta F_i = -c_{p_i} q S_i$$

Całkowita prędkość na panelu płata obliczana jest jako suma wektora prędkości niezaburzonej i prędkości stycznnej:

$$V_i = \sum_{j=1}^N C_{i,j}^* \mu_j + \sum_{j=1}^N B_{i,j}^* \sigma_j + V_\infty$$

Siła normalna na i -tym panelu płata wynosi:

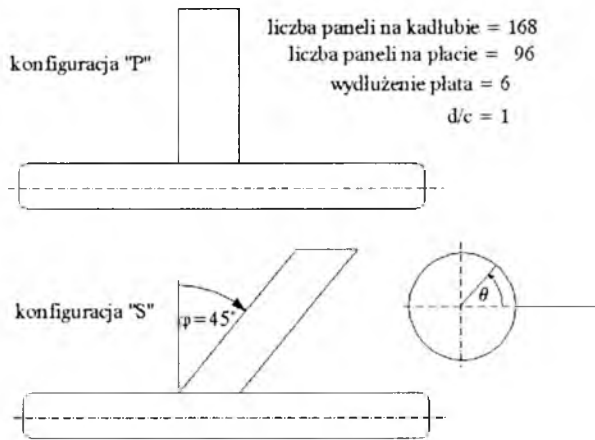
$$\Delta L_i = \rho V_i (\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j}) \Delta y_{i,j}$$

a współczynnik ciśnienia:

$$c_{p_i} = \frac{\Delta L_i}{q S_i}$$

4. Wyniki obliczeń i wnioski

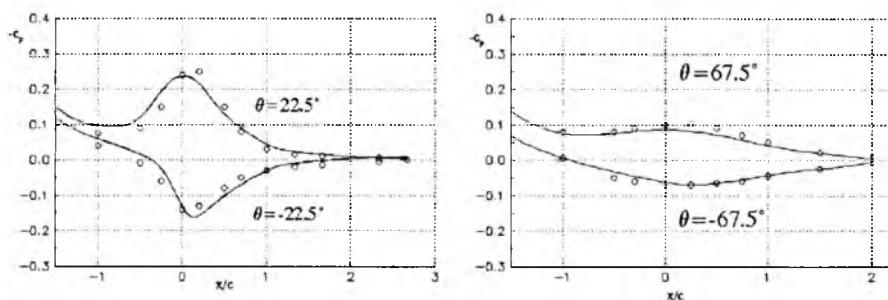
Wyniki obliczeń przeprowadzone dla konfiguracji testowych układu skrzydło-kadłub rys.2 porównane z danymi eksperymentalnymi (Körner [6]) przedstawiają wykresy na rys.3 i 4. Widoczna jest zadowalająca zgodność wyników obliczeń numerycznych z doświadczeniem. Wykresy na rys.5 i 6 przedstawiają rozkład współczynnika siły nośnej wzdłuż rozpiętości płata dla dwóch konfiguracji układu skrzydło-kadłub: średniopłata i wysokiego górnopłata. Wyniki dla średniopłata porównane są z danymi zaczerpniętymi z [7]. Na rys.7 porównano zmianę współczynnika siły nośnej w funkcji kąta natarcia dla izolowanego płata i układu skrzydło-kadłub dla dwóch konfiguracji jak wyżej.



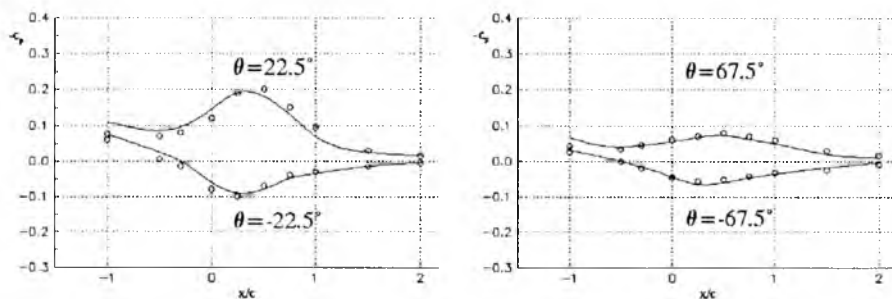
Rys. 2. Konfiguracje testowe i przyjęty sposób oznaczeń

Chociaż istnieje wiele modeli i gotowych pakietów obliczeniowych do wyznaczania rozkładów ciśnień na złożonych konfiguracjach aerodynamicznych, ciągle aktualne jest zadanie znalezienia modelu "prostego" o niskim koszcie obliczeniowym. Wykonane obliczenia sugerują poprawność przyjętego modelu fizycznego i matematycznego. Prostota algorytmu i niewielkie wymagania co do pamięci operacyjnej komputera, pozwalają na wykorzystanie ww. metody jako skutecznego narzędzia na etapie projektowania wstępnego.

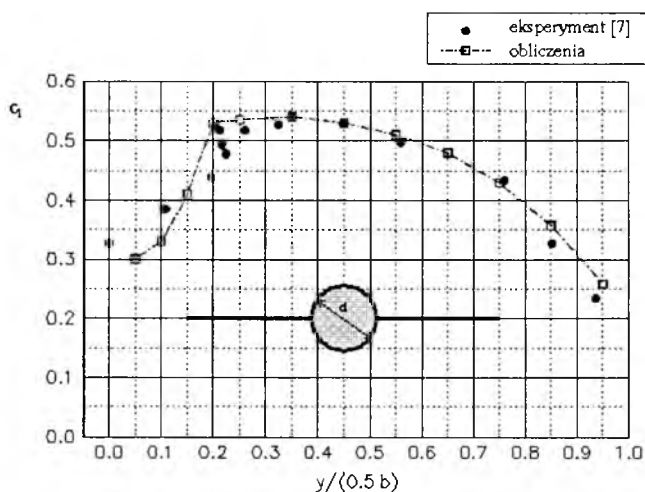
Po przeprowadzeniu pełnego kompletu obliczeń dla bardziej skomplikowanych kształtów kadłuba, model obliczeniowy zostanie rozszerzony na pełne konfiguracje aerodynamiczne tj. skrzydło-kadłub-usterzenia-gondole.



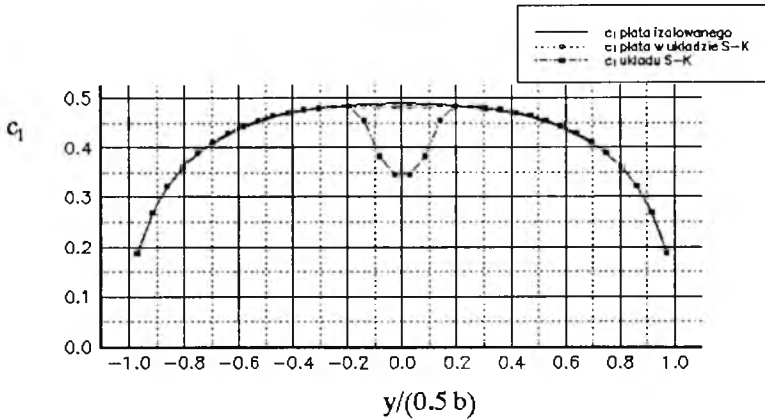
Rys. 3. Rozkłady ciśnień na kadłubie dla konfiguracji P , kąt natarcia $\alpha = 6^\circ$; linia ciągła – obliczenia, o – dane eksperymentalne [6]



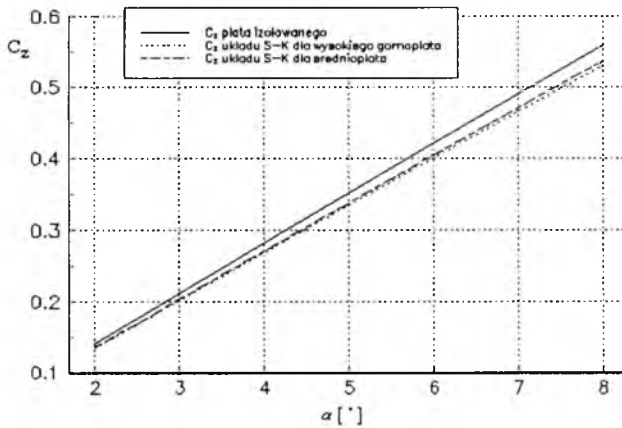
Rys. 4. Rozkłady ciśnień na kadłubie dla konfiguracji S , kąt natarcia $\alpha = 6^\circ$; linia ciągła – obliczenia, o – dane eksperymentalne [6]



Rys. 5. Porównanie obliczeniowego rozkładu współczynnika siły nośnej wzdłuż rozpiętości płata z danymi doświadczalnymi [7]. Układ średniopłata, kąt natarcia $\alpha = 6^\circ$, wydłużenie płata $A = 6$, skos płata $\Lambda = 0^\circ$, zbieżność płata $\lambda = 1$, stosunek średnicy kadłuba do cięwy płata $d/c = 1$



Rys. 6. Rozkład współczynnika siły nośnej wzdłuż rozpętości płata dla konfiguracji wysokiego górnopłata. Geometria modelu jak dla rys.5, wysokość płata nad kadłubem $h = 0.5d$



Rys. 7. Zmiana współczynnika siły nośnej w funkcji kąta natarcia dla izolowanego płata, układu wysokiego górnopłata i średniopłata

Literatura

1. BERTIN J., SMITH M., *Aerodynamics for Engineers*, Prentice-Hall, London 1989
2. HESS J.L., SMITH A.M.O., *Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies*, Vol.8, Progress in Aeronautical Sciences, (ed. D.Kuchemann), Pergamon Press, Oxford, 1967
3. HESS J.L., *Calculation of Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Lifting Bodies. Final Technical Report*, McDonnell Douglas Report No. MOC

J5679-01 October 1971

4. JOHNSON F.T., *A General Panel Method for the Analysis and Design of Arbitrary Configurations in Incompressible Flows*, NASA Contractor Report 3079 Contract NAS2-7729, May 1980
5. KATZ J., PLOTKIN A., *Low-Speed Aerodynamics, From Wing Theory to Panel Methods*, McGraw-Hill, Inc., New York 1991
6. KRAUS W., *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, von Karman Institute Book, 1981
7. THOMAS J.L., *Subsonic Finite Elements for Wing-Body Combinations*, Vortex-Lattice Utilization, Scientific and Technical Information Office, 1976
8. TORENBEEK E., *Synthesis of Subsonic Airplane Design*, Kluwer Academic Publishers, 1982

Praca została sfinansowana przez Komitet Badań Naukowych (Nr PB 0044/S6/93/04)

Determination of a Lift Curve Slope for Wing-Body Configuration by Means of Low Order Panel Methods

Summary

The method for determination of pressure distribution and aerodynamic coefficients of wing-body configuration is presented. Incompressible steady flow is assumed. Physical and mathematical models and numerical results are discussed. Satisfactory consistence of pressure distribution between numerical results and experimental data was achieved.

WYBRANE PROBLEMY IDENTYFIKACJI WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH OBIEKTÓW NIELINIOWYCH

FRANCISZEK LENORT

Institut Lotnictwa, Warszawa

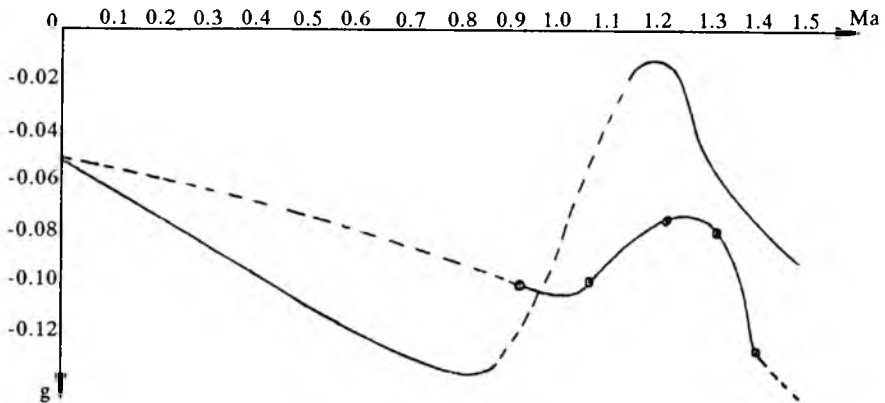
Podstawowymi wielkościami określanymi w czasie badań flutterowych samolotu w locie są częstości drgań i współczynniki tłumienia występujących postaci drgań. W referacie zwrócono uwagę na zależność tych wielkości od nieliniowości badanego obiektu. Wpływ tych nieliniowości został potwierdzony przykładowymi wynikami obliczeń numerycznych.

1. Wstęp

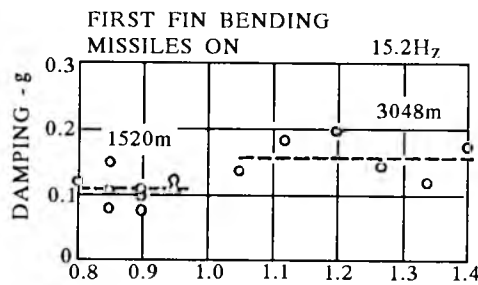
W literaturze dotyczącej badań w locie tendencji do flutteru [1,2] spotyka się bardzo zróżnicowane jakościowo wyniki. Obok wykresów, na których częstości własne drgań są praktycznie stałe, niezależne od prędkości lotu, spotyka się także wykresy, na których istnieje wyraźna zależność od prędkości lotu i dodatkowo jeszcze punkty pomiarowe mają pewien rozrzut. Podobnie współczynniki tłumienia zmierzone w locie leżą na zdeterminowanych krzywych (rys.1) lub są bardzo chaotycznie rozrzucone w funkcji prędkości lotu (rys.2).

Na przykładzie wyników sprawdzenia w locie tendencji do flutteru skrzydła Ogara można stwierdzić wyraźny wpływ nieliniowości obiektu na rozrzut punktów pomiarowych.

Chaos deterministyczny w rozwiązaniach równań różniczkowych nie-nieliniowych [3,4] wyraża się w tym przypadku "chaosem" rozrzutu współczynnika tłumienia drgań. Ponieważ jest to w znacznej mierze chaos deterministyczny, można zatem go częściowo uporządkować poprzez uwzględnienie nieliniowości obiektu.



Rys. 1. Zależność współczynnika tłumienia g ($g = 2\zeta$) drugiej asymetrycznej postaci drgań samolotu F-102A w funkcji liczby Macha wg [1]; — z obliczeń teoretycznych, -o- dane pomiarowe w locie na wysokości 10000 m



Rys. 2. Współczynnik tłumienia g w funkcji liczby Macha dla samolotu YF-16 wg [2]

2. Wpływ nieliniowości sił tłumiących na wyniki analizy własności dynamicznych

Najprostszy liniowy układ drgający o jednym stopniu swobody opisuje równanie:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2.1)$$

gdzie:

- ζ – względny współczynnik tłumienia,
- ω_0 – częstość drgań (pulsacja) tego układu bez tłumienia.

Rozwiązaniem równania (2.1) jest zależność:

$$y = A \exp(-\zeta\omega_0 t) \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \quad (2.2)$$

Stałe A i ϕ są określone przez warunki początkowe.

Badania w locie tendencji do flatteru polegają głównie na ocenie współczynnika tłumienia ζ dla poszczególnych składowych drgań i częstości własnych:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.3)$$

Z reguły zakłada się, że obiekt badany jest liniowy.

Stąd w stosunku do sił tłumiących zakłada się, że są proporcjonalne do prędkości ruchu drgającego \dot{y} .

Wiadomo jednak, że siły aerodynamiczne, a więc i siły tłumiące, siły oporu, zależą od kwadratu prędkości \dot{y}^2 .

W uproszczeniu możemy więc zapisać, że:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y}^2\text{sign}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2.4)$$

Otrzymaliśmy równanie nieliniowe, które przepisujemy w innej postaci, aby ujawnić analogie z równaniem liniowym (2.1):

$$\ddot{y} + 2(\zeta\dot{y}\text{sign}\dot{y})\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2.5)$$

Można przypuszczać, że rolę współczynnika tłumienia ζ układu liniowego, w równaniu nieliniowym (2.5) spełnia wyrażenie w nawiasach:

$$\zeta_n = \zeta\dot{y}\text{sign}\dot{y} \quad (2.6)$$

Zmiana prędkości ruchu \dot{y} , która zależy od amplitudy drgań A , wpływa na wielkość tłumienia ζ_n w układzie nieliniowym. A więc drgania układu nieliniowego (2.4) będą miały różne współczynniki tłumienia w zależności od amplitudy drgań. Na przykładzie wyników oceny współczynnika tłumienia symetrycznego zginania skrzydeł motoszybowca SZD-45 Ogar w locie, przy różnych wielkościach wymuszeń impulsowych (rys.3), można potwierdzić powyższe przypuszczenia co do zmienności współczynnika tłumienia.

Przyjmując funkcję regresji w postaci:

$$\hat{\zeta}_n = a_0 + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 A \quad (2.7)$$

gdzie:

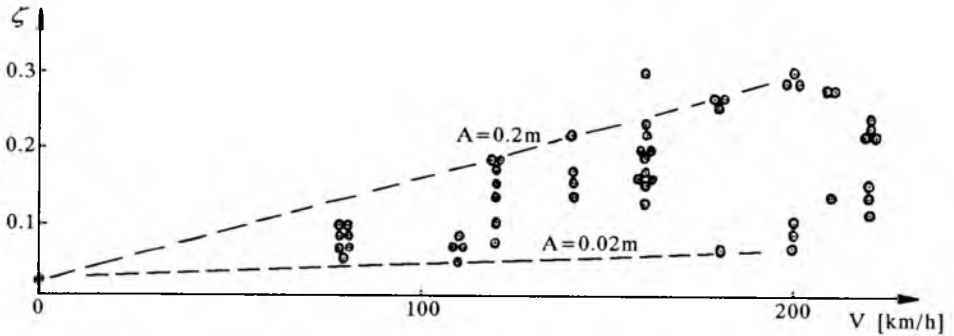
V – prędkość lotu,

A – amplituda drgań skrzydła,

można metodami statystycznymi stwierdzić istotność powyższej funkcji i współczynnika a_3 .

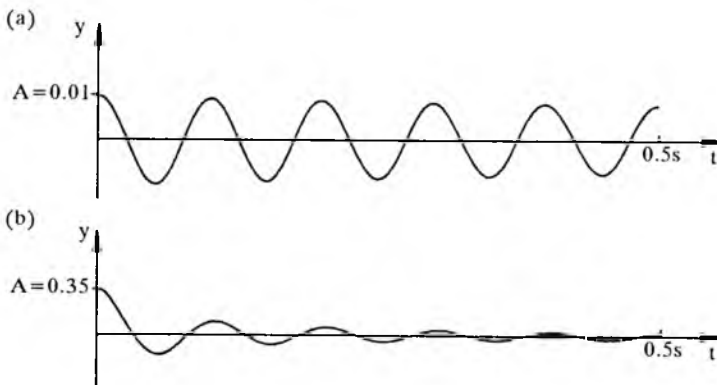
Współczynnik korelacji:

$$R_{\zeta_n \dot{\zeta}} = 0.75$$



Rys. 3. Zależność współczynnika tłumienia ζ symetrycznego zginania skrzydeł motoszybowca Ogar dla różnych wielkości amplitudy A w funkcji prędkości lotu V

Uzależnienie współczynnika tłumienia ζ_n od prędkości lotu i od amplitudy drgań obejmuje 75% zmienności ogólnej tej wielkości. A więc rozrzut punktów na rys.3 w znacznej mierze wynika z nieliniowości danego obiektu. Aby przykładowo wykazać zależność współczynnika tłumienia swobodnie zanikających drgań od amplitudy początkowej A drgań rozwiązano numerycznie równanie nieliniowe (2.4) dla różnych wartości amplitudy (rys.4). Na rysunku 4b widać wyraźnie szybki spadek amplitudy (kilkukrotny po jednym okresie) na początku przebiegu sygnału – przy dużej amplitudzie duże tłumienie – następnie już znacznie wolniejszy spadek amplitudy w dalszej części przebiegu sygnału – przy małej amplitudzie małe tłumienie drgań.



Rys. 4. Wpływ amplitudy wymuszenia A na wielkość tłumienia układu nieliniowego (2.4) przy założonych wartościach: u góry – $A = 0.01$ m, $f = 10$ Hz; u dołu – $A = 0.35$ m, $f = 10$ Hz

3. Wpływ nieliniowości sił sprężystych na własności dynamiczne obiektu

Aby wykazać zmienność częstości drgań własnych układu (2.1) w przypadku nieliniowości sił sprężystych założymy dla uproszczenia, że siły tłumiące są małe i możemy je pominąć, natomiast przyjmiemy, że siły sprężyste zależą od trzeciej potęgi przemieszczenia y .

Otrzymamy równanie nieliniowe o postaci:

$$\ddot{y} + y^3 = 0 \quad (3.1)$$

Podobnie jak poprzednio, dla wskazania pewnego podobieństwa do równania liniowego:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (3.2)$$

możemy przepisać równanie (3.1) do postaci:

$$\ddot{y} + y^2 y = 0 \quad (3.3)$$

Można przypuszczać, że czynnik y^2 w równaniu (3.3) określa w pewnym sensie częstość własną układu nieliniowego, podobnie jak czynnik ω_0 jest kwadratem częstości własnej układu liniowego.

W literaturze [5], posługując się metodami energetycznymi, obliczono częstość drgań własnych układu (3.1) i otrzymano zależność:

$$\omega_{0n} = \frac{A}{1.18} \quad (3.4)$$

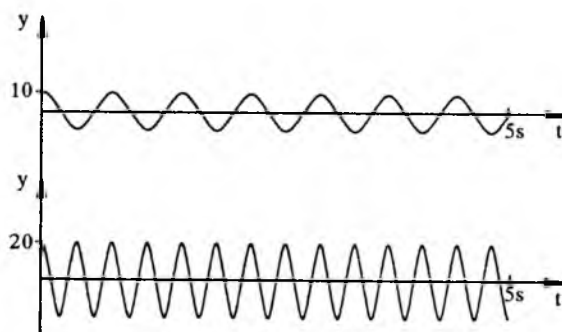
Dla przykładu rozwiązano numerycznie równanie nieliniowe (3.1) dla różnych wartości amplitudy A i otrzymano wyniki przytoczone na rys.5.

Wyniki numerycznego rozwiązania równania nieliniowego (3.1) są zgodne z analitycznymi wynikami oceny częstości własnej podanymi w literaturze.

Częstość drgań nieliniowego układu zależy od amplitudy drgań (3.4). Jeżeli badany obiekt jest nieliniowy, to w zależności od wielkości wymuszenia impulsowego, otrzymamy różne wielkości częstości drgań własnych. Drgania układu (3.1) są okresowe, kształt krzywych na rys.5 jest podobny do sinusoidalnego ale nie jest z nim identyczny.

4. Zakończenie

Wykonane proste analizy wskazują, że jeżeli badamy własności obiektu nieliniowego, to otrzymujemy bardzo zróżnicowane wyniki pomiaru wielkości



Rys. 5. Zależność częstości drgań własnych układu nieliniowego (3.1) od amplitudy A ; u góry – dla założonego $A = 10$ wynikowa częstość $f = 1.35$ Hz; u dołu – dla założonego $A = 20$ wynikowa częstość $f = 2.7$ Hz

tłumienia i częstości własnych układu swobodnego w zależności od wielkości wymuszenia impulsowego. Chaos deterministyczny w mechanice nieliniowej wyraża się chaosem wartości tłumienia i częstości własnych badanego obiektu. Na ogólny rozrzut wartości pomiarowych składają się błędy pomiarowe i błędy metody przetwarzania, błędy spowodowane działaniem zakłóceń przypadkowych i chaos deterministyczny zależny od nieliniowości układu badanego.

Aby poprawnie ocenić własności obiektu nieliniowego, należy przeprowadzić analizy jego własności dla różnych wielkości wymuszeń, spotykanych w normalnej eksploatacji.

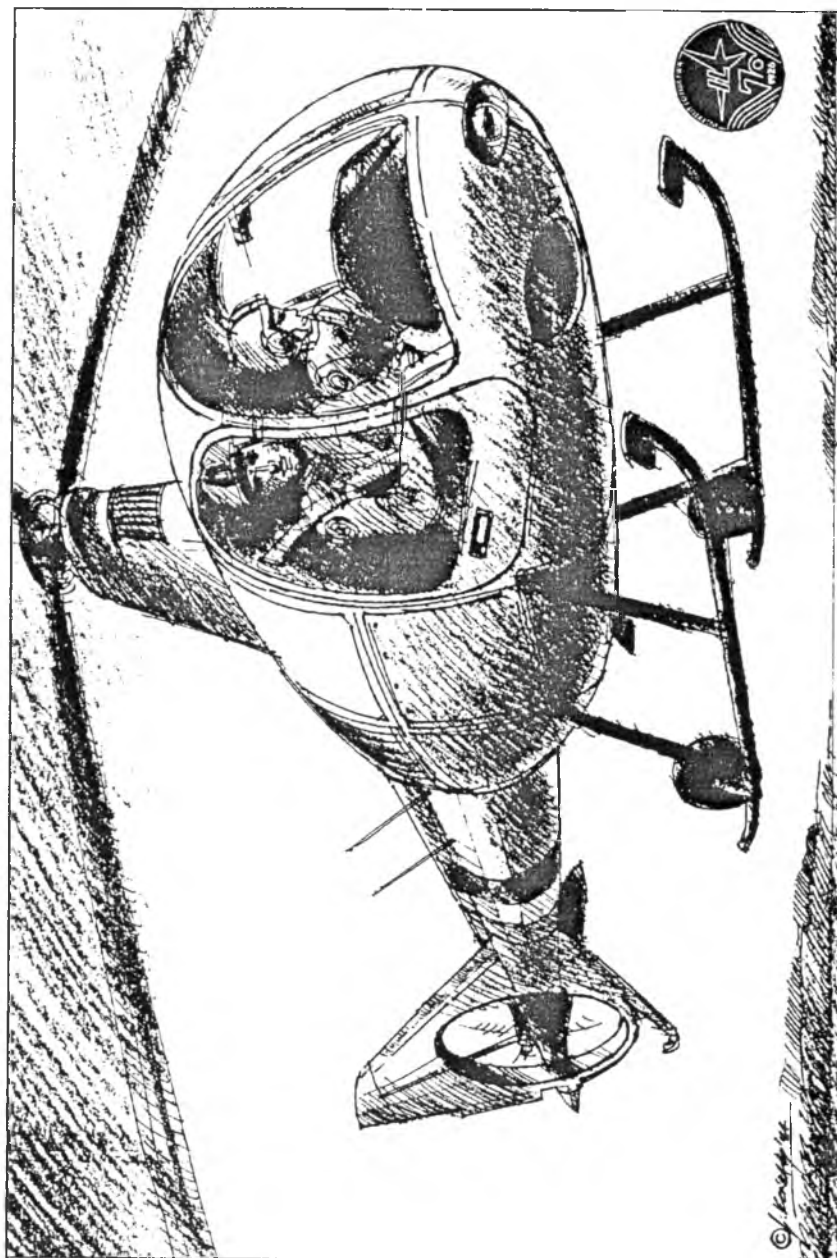
W odniesieniu do badania własności flatterowych samolotu, zakres wymuszanych amplitud drgań wyznaczają wzbudzenia m.in. od turbulencji powietrza oraz wzbudzenia buffingowe.

Literatura

1. *Flight Flutter Testing Symposium*, National Aeronautics and Space Administration, NASA SP-385, Washington 1975
2. *Flutter Testing Techniques*, National Aeronautics and Space Administration, NASA SP-415, Washington 1976
3. HOLMES P.J., MOON F.C., *Strange Attractors and Chaos in Nonlinear Mechanics*, Journal of Applied Mechanics, 105, 1983
4. RUDOWSKI J. I INNI, *Chaos w nieliniowej mechanice*, Prace IPPT PAN, 1985
5. ZIEMBA S., *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1957

Determination of Dynamic Properties of Non-Linear Objects**Summary**

Evaluation of subcritical damping and frequency for each mode shapes is a subject of the flight flutter testing. Dynamic characteristics are functions of non-linearity of aircraft. The influence of non-linearity on damping and frequency is described and numerical calculation results are presented.



**ŚMIGŁOWIEC
DWUMIEJSKOWY IS-2**

INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1995

© Kowalski

INSTALACJA ODBIORNIKÓW CIŚNIEŃ POWIETRZNYCH I JEJ BADANIA

ZOFIA LESZCZYŃSKA

Instituł Lotnictwa, Warszawa

W referacie omówiono budowę, parametry oceny dokładności oraz przedstawiono przykłady instalacji odbiorników ciśnień powietrznych. Przedstawiono metodyki badań instalacji OCP na ziemi, opisano wyznaczenie poprawek aerodynamicznych w locie oraz przedstawiono wyniki tych badań dla prototypu samolotu IRYDA. Omówiono również dodatkowe badania w locie wynikające z wprowadzenia na samolot centrali danych aerodynamicznych.

1. Wstęp

Instalacja odbiorników ciśnień powietrznych, zwana w skrócie instalacją OCP, jest jedną z instalacji samolotu i jest przeznaczona do zasilania ciśnieniem statycznym i całkowitym puszek membranowych przyrządów pilotażowych, nadajników prędkości i wysokości oraz innych urządzeń samolotu, które wymagają takiego ciśnienia.

Zasadniczym elementem instalacji jest odbiornik ciśnień powietrznych (rurka Pitote'a), skąd ciśnienia przekazywane są przewodami sztywnymi i giętkimi przewodami gumowymi do poszczególnych urządzeń. Zasadniczy odbiornik powinien być umieszczony w miejscu, gdzie opływające strugi powietrza są jak najmniej zaburzone. Zwykle są to: wysięgnik w części nosowej, końce skrzydeł, czy statecznik. W celu zapewnienia większej niezawodności projektuje się instalację zdwojoną, z dwoma rurkami Pitote'a umieszczonymi symetrycznie z dwu stron samolotu, lub stosuje się drugi awaryjny odbiornik ciśnień powietrznych umieszczony zwykle na kadłubie samolotu. Pilot ma możliwość, po stwierdzeniu awarii w instalacji zasadniczej, przełączenia na instalację awaryjną. Woda, powstająca ze skondensowania pary wodnej z powietrza zbiera się w specjalnych zbiornikach – odstojnikach wilgoci, które są okresowo opróżniane.

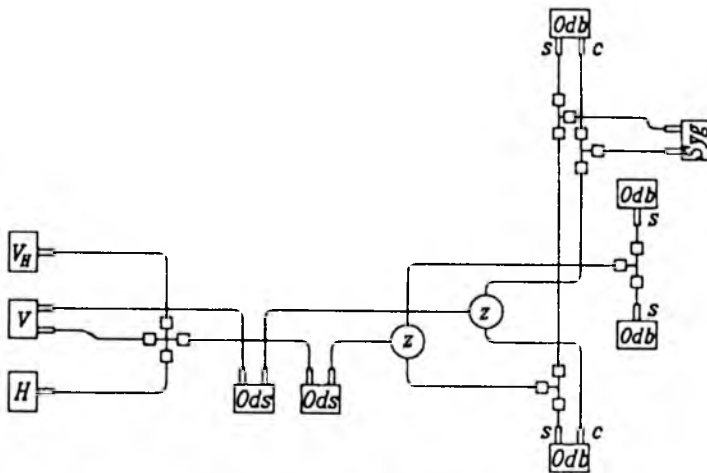
Głównym parametrem oceny dokładności instalacji jest opóźnienie przekazywania zmiany ciśnienia od odbiornika ciśnień do przyrządów wyrażone wzorem

$$\lambda = \frac{128\mu L}{p_s \pi D^4} \left(V_c + \frac{V_t}{2} \right)$$

gdzie:

- μ – lepkość dynamiczna powietrza [Ns/m²],
- L – długość przewodów pneumatycznych [m],
- V_c – pojemność komory przyrządu [m³],
- V_t – pojemność przewodów pneumatycznych [m³],
- p_s – ciśnienie statyczne ośrodka [N/m³],
- D – średnica przewodu [m].

Przy projektowaniu instalacji OCP dla nowego samolotu należy dokonać optymalizacji dobierając przekroje przewodów, długość przewodów (zmieniając przebieg instalacji w samolocie), oraz podłączenia różnych grup przyrządów do oddzielnych linii instalacji OCP, tak aby współczynnik opóźnienia był jak najmniejszy.

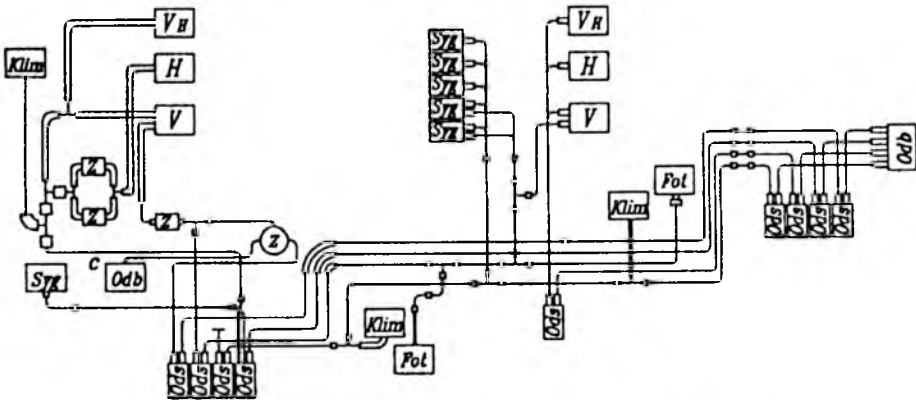


Rys. 1. Schemat instalacji OCP samolotu M-15

Na rys.1 pokazano przykładowo instalację OCP samolotu M-15, na rys.2 z samolotu IRYDA. Oznaczenia na rysunkach:

Odb – odbiornik ciśnień powietrznych (rurka Pitote'a),

- Ods* - odstojnik wilgoci,
- Syg* - sygnalizatory (nadajniki) prędkości lub wysokości,
- Z* - zawory przełączające,
- Klim* - urządzenia i wskaźniki klimatyzacji kabiny,
- Fot* - fotel pilota.



Rys. 2. Schemat instalacji OCP samolotu IRYDA

2. Rodzaje badań i obsługa samolotu

Parametry instalacji OCP sprawdzane są podczas badań i obsługi samolotu. Badania prototypów samolotu to badania wstępne (zakładowe), kwalifikacyjne (państwowe) i niepełne, a samolotów wytwarzanych seryjnie to badania niepełne i pełne. Sprawdzenie szczelności instalacji OCP odbywa się w każdym z etapów badań, sprawdzenie współczynnika opóźnienia tylko przy badaniu prototypów podczas badań wstępnych i potwierdzane przy badaniach kwalifikacyjnych.

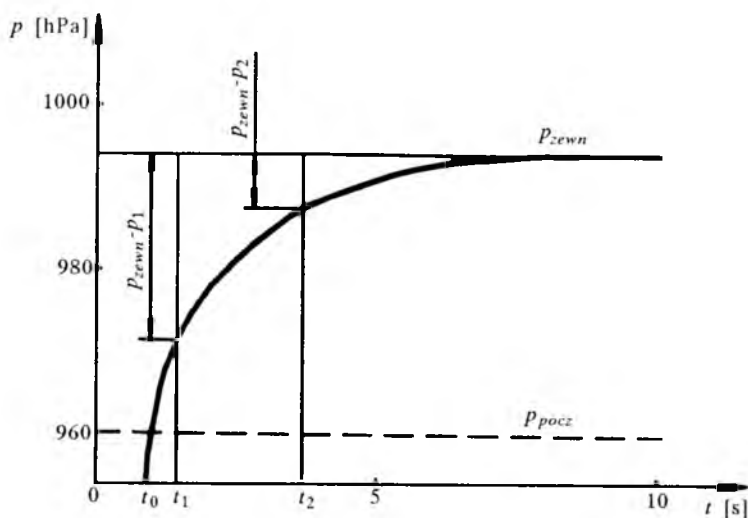
Obsługi eksploatacyjne samolotu IRYDA to obsługi bieżące (wstępne, przedlotowe, startowe, polotowe i przegląd okresowy), obsługi okresowe (co 100 i 200 godzin lotu) oraz obsługi wykonywane podczas przechowywania samolotu. Szczelność instalacji sprawdzana jest podczas obsługi przedlotowych, przy przeglądzie okresowym, przy obsługach okresowych oraz podczas przechowywania samolotu.

3. Badanie instalacji na ziemi

Dopuszczalna wartość współczynnika opóźnienia określona jest w normie branżowej 907AT "Systemy statycznego i pełnego ciśnienia zasilania przepowo – aneroidowych przyrządów. Wymagania techniczne." Współczynnik opóźnienia sprawdza się kolejno we wszystkich liniach instalacji ciśnienia statycznego (wytwarzając podciśnienie) i całkowitego (wytwarzając nadciśnienie) rejestrując wyrównywanie ciśnienia do wartości ciśnienia zewnętrznego w funkcji czasu. Przykładowy wykres podano na rys.3. Współczynnik opóźnienia oblicza się ze wzoru:

$$\lambda_0 = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{p_1 - p_{zewn}}{p_2 - p_{zewn}}}$$

Na samolocie IRYDA założony współczynnik, nie większy niż 1 s, został potwierdzony badaniami.



Rys. 3. Wykres zapisu przy wyznaczaniu współczynnika opóźnienia

Szczelność instalacji OCP określona jest w normie branżowej BN-73/9362-13 "Dopuszczalne nieszczelności lotniczych układów ciśnienia statycznego i całkowitego oraz przyłączonych do nich przyrządów". Sprawdzenie polega na wytwarzaniu w kolejnych liniach instalacji podciśnienia odpowiadającego wartości 700 km/h i obserwacji wskazań prędkościomierza w ciągu 1 minuty. Dla samolotu IRYDA założone i potwierdzone badaniami wartości wynoszą 1 km/h dla S1, S3 i C, oraz 3 km/h dla S2.

4. Badania w locie

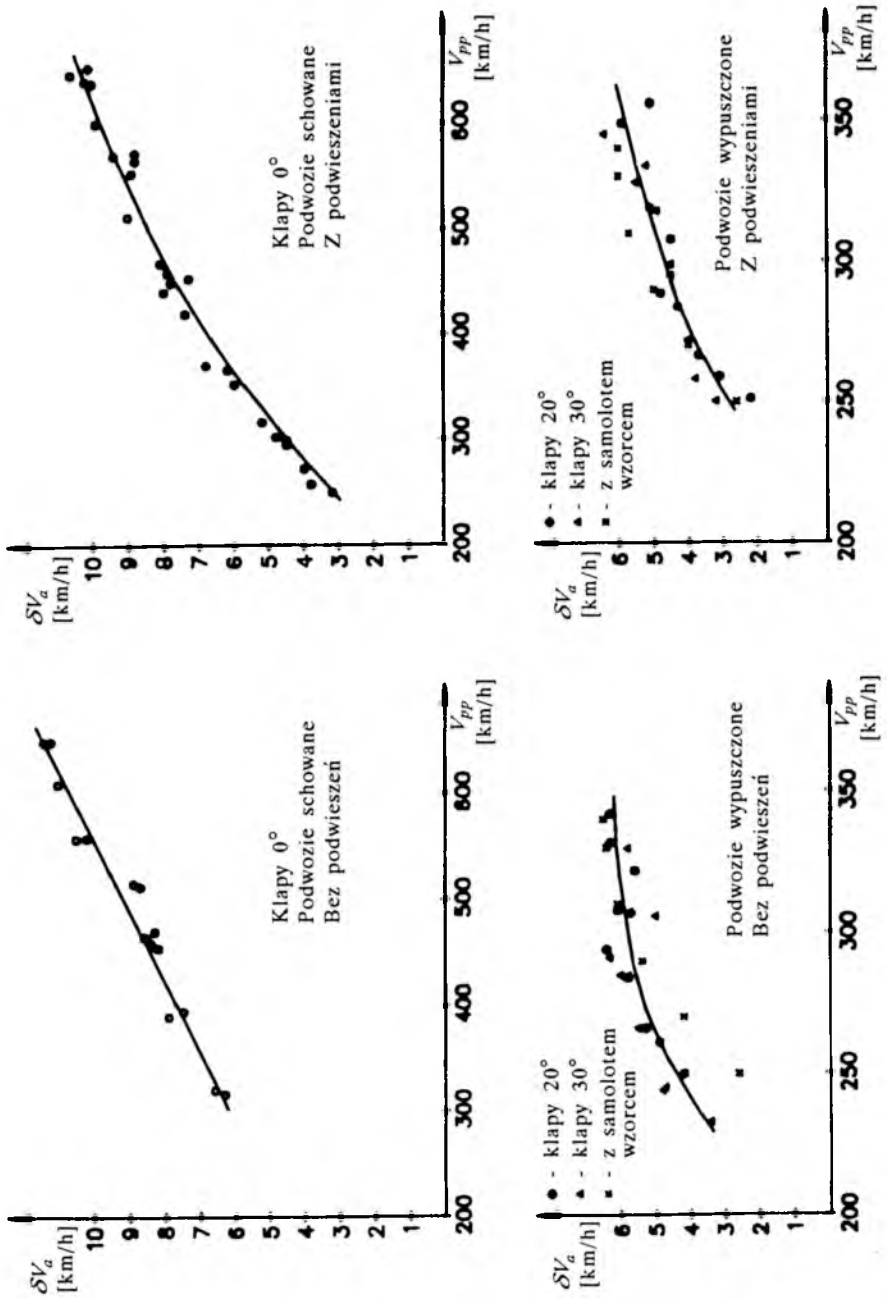
W locie wyznacza się poprawki aerodynamiczne, które są zależne od kątów natarcia, ślizgu i liczby Macha oraz miejsca zamontowania zasadniczego odbiornika na samolocie. Metody wzorcowania instalacji OCP tzn. wyznaczania zależności poprawek aerodynamicznych (δp_a – dla komory statycznej, δp_{ac} – dla komory całkowitej) od liczby Macha lub, dla małych prędkości lotu, od prędkości przyrządowej poprawionej V_{pp} dzieli się na:

- wzorcowanie według prędkości (porównanie rzeczywistej prędkości lotu samolotu względem powietrza z prędkością mierzoną na samolocie wzorcowym);
- wzorcowanie metodą barometryczną (bezpośrednie określanie poprawki aerodynamicznej przez dokładną rejestrację prędkości V_{pp} i jej kierunku φ oraz wysokości H_{pp} samolotu przy pomocy stacji radiolokacyjnej, kinoteodolitów lub namierników fazowych jak też temperatury otaczającego powietrza T_H , prędkości wiatru U i jego kierunku φ_u przy pomocy balonu-sondy czy wzorcowego samolotu);
- wzorcowanie na bazie pomiarowej (pomiar czasu przelotu z różnymi prędkościami w locie poziomym na wysokości $50 \div 150$ m wg bazy wyznaczonej przez znaki orientacyjne na ziemi).

W tabeli 1 przedstawiono średnie błędy kwadratowe wyznaczania poprawek aerodynamicznych różnymi metodami.

Tabela 1. Średni błąd kwadratowy dla różnych metod wzorcowania

Prędkość przyrządowa V_p [km/h]	Metoda wzorcowania				
	wg prędk. [km/h]	barometryczna		na b.pomiar.	
		$\delta(\delta V_{a\Sigma})$	$\delta(\delta P_a)$	$\delta(\delta V_a)$	$\delta(\delta V_{a\Sigma})$
		[hPa]	[mm Hg]		[km/h]
100	1.4	0.62	0.47	7.0	1.7
200	1.7	0.62	0.47	3.0	1.9
300	2.1	0.62	0.47	2.1	2.2
400	2.6	0.62	0.47	1.6	3.2
600	3.6	0.62	0.47	1.0	6.2
800	4.5	0.62	0.47	0.67	10.6
1000	5.7	0.62	0.47	0.47	17.0
1200	6.8	0.62	0.47	0.33	–
1400	7.8	0.62	0.47	0.27	–
1600	9.0	0.62	0.47	0.24	–



Rys. 4. Poprawki aerodynamiczne prędkości $\Delta V_a = f(V_{pp})$

Z tabeli wynika, że przy dużych prędkościach lotu dokładność wzorcowania OCP metodą barometryczną jest większa niż metodą wg prędkości, zaś przy małych prędkościach dokładności wzorcowania na bazie pomiarowej i według prędkości są w przybliżeniu równe.

Na rys.4 przedstawiono wyniki badań poprawek aerodynamicznych samolotu IRYDA przeprowadzonych w 1991r. w WSK Mielec metodą wzorcowania według prędkości (podczas lotu w szyku z samolotem wzorcem) oraz metodą wzorcowania na bazie pomiarowej (lot na wysokości około 70 m z wykorzystaniem radiowysokościomierza wzdłuż bazy – pasa startowego).

5. Centrala danych aerodynamicznych

Zastąpienie analogowych przetworników ciśnienia, zastosowanych we wcześniej przedstawionych instalacjach OCP, przez jedną cyfrową centralę danych aerodynamicznych zwiększa dokładność sygnałów ciśnieniowych. Jednocześnie zmniejsza się ciężar wyposażenia, czas obsługi samolotu, upraszcza instalacja OCP oraz zmniejsza się wpływ współczynnika opóźnienia (gdyż centrala zabudowana jest zwykle w pobliżu zaworów awaryjnego przełączania).

Tabela 2. Sygnały wyjściowe z centrali wg normy ARINC 706-3 "We-rsja 5. Poddźwiękowe systemy danych aerodynamicznych.", 5 maja 1982r.

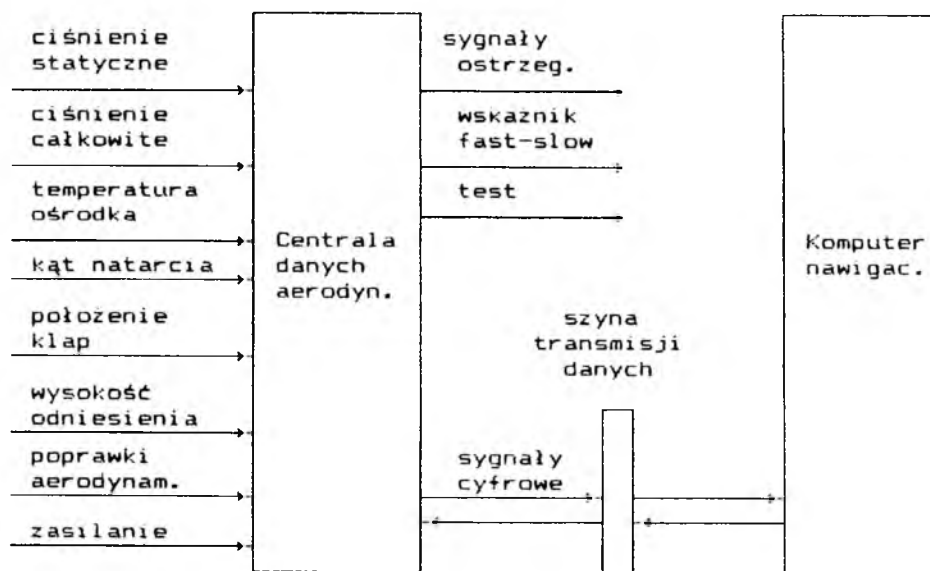
Parametr	Nr etyk. (bnr)	Nr etyk. (bcd)	Zakres (wg normy)	Zakres (w jedn. SI)	Maks. odst. sygn. ms (bnr)	Maks. odst. sygn. ms (bcd)
Wysokość	203		-1000 ÷ +50000ft	-0.3 ÷ 25.2 km	62.5	
WBS #1	204		-1000 ÷ +50000ft	-0.3 ÷ 15.2km	62.5	
WBS #2	220		-1000 ÷ +50000ft	-0.3 ÷ 15.2km	62.5	
Prędk.pion.	212		0 ÷ ±20000ft/min	0 ÷ ±100m/s	62.5	
Prędk.przyrząd.	206		30 ÷ 450knots	55.6 ÷ 834km/h	125	
Prędk.maks.dop.	207		150 ÷ 450knots	278.0 ÷ 834km/h	125	
L.Macha	205		0.10 ÷ 1.0Mach	0.1 ÷ 1.0M	125	
Prędk.rzeczyw.	210	230	100 ÷ 599knots	185.3 ÷ 1110.1km/h	125	
Temp.pow.calk.	213	233	-99°C ÷ ±60°C	-99°C ÷ ±60°C	500	500
Temp.pow.stat.	211	231	-60°C ÷ ±99°C	-60°C ÷ ±99°C	500	500
Ciśn.spiętrz.	215		0 ÷ 372.5mb	0 ÷ 372.5hPa	125	
Ciśn.calk.	242		135.5 ÷ 1354.5mb	135.5 ÷ 1354.5hPa	125	
PB [mb],#1		234	745 ÷ 1050mb	745 ÷ 1050hPa		125
PB [inHg],#2		235	22.0 ÷ 31.0inHg	74.4 ÷ 104.9hPa		125
PB [mb],#2		236	745 ÷ 1050mb	745 ÷ 1050hPa		125
PB [inHg]		237	2200 ÷ 3100inHg	74.4 ÷ 104.9hPa		125
Lokal.kąt natar.	221		-60°C ÷ +60°C	-60°C ÷ +60°C	62.5	
RKN	241		-60°C ÷ +60°C	-60°C ÷ +60°C		

WBS – wysokość barometryczna skorygowana,

PB – poprawka barometryczna,
 RKN – rzeczywisty kąt natarcia,
 (bnr) – kod dwójkowy,
 (bcd) – kod dziesiętny.

W tabeli 2 przedstawiono spis sygnałów wyjściowych z centrali wg normy ARINC 706-3 "Wersja 5. Poddźwiękowe systemy danych aerodynamicznych.", 5 maja 1982r. W w/w normie, w dodatku 3 określone są punkty charakterystyczne zależności poprawek aerodynamicznych w funkcji liczby Macha oraz kąta natarcia w funkcji liczby Macha. Przy wprowadzeniu centrali danych na samolot IRYDA należy dotychczas wyznaczone poprawki przeliczyć w funkcji liczby Macha oraz, w celu zwiększenia dokładności sygnału z centrali, wykonać badania uzupełniające kąta natarcia w funkcji liczby Macha.

Na rys.5 przedstawiono schemat centrali danych aerodynamicznych.



Rys. 5. Schemat centrali danych aerodynamicznych

6. Podsumowanie

Badanie szczelności instalacji jest badaniem rutynowym wykonywanym przy budowie i eksploatacji samolotu, niezbędnym do prawidłowej pracy instalacji.

Badanie współczynnika opóźnienia instalacji OCP służy do sprawdzenia prawidłowości wykonanej konstrukcji oraz optymalizacji dokładności wskazań przyrządów i ciężaru instalacji podczas budowy prototypu samolotu.

Badanie poprawek aerodynamicznych, przy zastosowaniu na samolocie tradycyjnych wskaźników mechanicznych, służy do opracowania karty poprawek wskazań wysokościomierza i prędkościomierza dla pilota, lub, przy zastosowaniu nowoczesnych systemów awionicznych, do ustalenia danych wejściowych do centrali danych aerodynamicznych. Sygnały cyfrowe z central skorygowane poprawkami aerodynamicznymi służą do sterowania systemami awionicznymi oraz do indykacji parametrów ciśnieniowych na wskaźnikach pilota.

Literatura

1. Metodyka prób samolotów w locie, MON, DWL, Poznań 1978
2. KAYTON M., FRIED W.R., *Elektroniczne układy nawigacji lotniczej*, WKŁ, Warszawa 1976
3. LESZCZYŃSKA Z., Nowe centrale danych aerodynamicznych dla samolotów bojowych (na seminarium "Problemy modernizacji aktualnie eksploatowanych samolotów i śmigłowców bojowych"), ITWL, 03.02.1994

The System of Air Pressure Receivers, Experiments

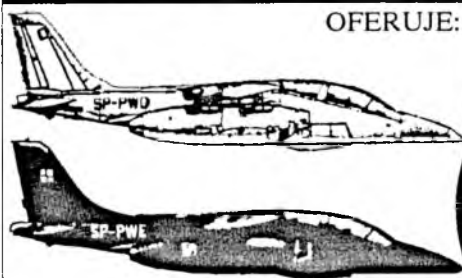
Summary

In the article the structure, accuracy parameters and examples of air pressure receivers system have been described. The research methods on the ground have been presented. The aerodynamic corrections determining the in-flight tests are given with the results for the prototype aircraft IRYDA. Also the additional flight tests, when the computer processing air data has been introduced into on-board equipment are presented.

KOMBINAT PZL-HYDRAL S.A.
PL 51-317 WROCŁAW
ul. BIERUTOWSKA 57-59

PZL-HYDRAL S.A.

OFERUJE:



UKŁADY PALIWOWO-REGULACYJNE LOTNICZYCH SILNIKÓW

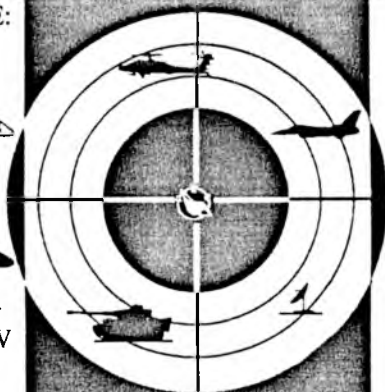
- TURBOŚMIGŁOWYCH
- TURBOODRZUTOWYCH
- TŁOKOWYCH

UKŁADY HYDRAULICZNE STEROWANIA LOTEM I MECHANIZACJI PŁATOWCA DO

- I-22 IRYDA • TS-11 ISKRA
- AN-28 • AN-2
- W-3 W-3A SOKÓŁ • MI-2

UKŁADY ELEKTRONICZNE STEROWANIA

PARAMETRAMI PRACY SYSTEMÓW HYDRAULICZNYCH



NAPĘDY HYDRAULICZNE STEROWANIA
DZIAŁ PRZECIWLOTNICZYCH
ARMAT CZOŁGOWYCH
I ANTEN RADAROWYCH
DO OBIEKTÓW

- Wróbel
- Turkus
- Jaguar
- Nida Bożena



FAX 071 252565 TLX 071 2216

TEL 071 251834

WPLYW WIATRU NA OPTYMALNĄ TRAJEKTORIĘ PRZELOTU

JANUSZ LEŚNIAK

*Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa
Politechnika Rzeszowska*

W pracy przedstawiono wpływ podmuchu poziomego na optymalną trajektorię przelotu samolotu transportowego. Przyjęto zmienny z wysokością i odległością lotu profil podmuchu. Do rozwiązania problemu wykorzystano zasadę optymalności Bellmana, a jako wskaźnik jakości przyjęto bezpośrednie koszty operacyjne. Przykładowe obliczenia wykonano dla samolotu klasy A320 w przypadku wiatru czołowego i wiatru z tyłu dla tych samych warunków brzegowych.

1. Wstęp

Wpływ wiatru na optymalną trajektorię przelotu był przedmiotem prac między innymi Barmana i Erzbergera [1] oraz Chakravarty'ego [2]. Autorzy obu prac wykorzystali energetyczny model samolotu, który można opisać równaniami:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= V \frac{P_s - P_x}{Q} \\ \frac{dx}{dt} &= V \\ E &= h + \frac{1}{2g} V^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

gdzie:

- E – całkowita energia przypadająca na jednostkę ciężaru,
- V – prędkość lotu,
- P_s – ciąg zespołu napędowego,
- P_x – opór aerodynamiczny,
- Q – ciężar samolotu,

- x – odległość pozioma,
 h – wysokość lotu.

Barman i Erzberger arbitralnie założyli podział optymalnej trajektorii na trzy fazy: wznoszenie, przelot i schodzenie, ponadto pominęli zmianę masy samolotu na skutek zużycia paliwa. Profil wiatru przyjęli zależny tylko od wysokości, a rozwiązanie problemu optymalizacji dynamicznej sprowadzili do zagadnienia optymalizacji statycznej.

Chakravarty, uwzględniając zmianę masy samolotu, rozpatrywał jedynie końcowy odcinek przelotu przy analogicznym profilu wiatru jak poprzednicy. Do wyznaczenia optymalnej trajektorii wykorzystał zasadę maksimum Pontriagina.

W niniejszej pracy rozbudowano energetyczny model samolotu (1.1) o równanie wiążące zmianę wysokości z kątem toru lotu i wprowadzono profil wiatru zmienny z wysokością lotu i odległością, a do rozwiązania problemu wykorzystano zasadę optymalności Bellmana. Zastosowanie wspomnianej zasady do wyznaczania optymalnej trajektorii samolotu przedstawiono w [3].

Poszukuje się trajektorii samolotu minimalizującej bezpośrednio koszty operacyjne przedstawione funkcjonalem:

$$J = \int_{t_p}^{t_k} (c_s + c_p P_s b_j) dt \quad (1.2)$$

spełniającej równania ruchu samolotu, ograniczenia na zmienne sterujące i narzucone warunki brzegowe przy nieznanym czasie końca przelotu.

W równaniu (1.2) oznaczono:

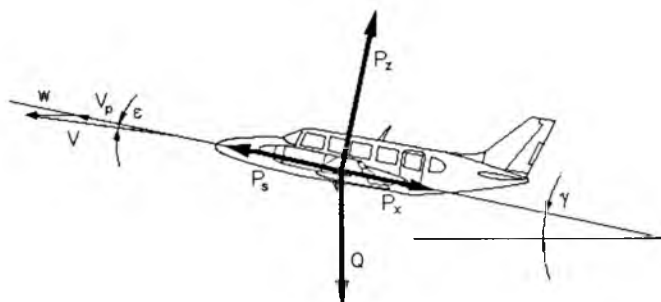
- t_p – czas początku przelotu,
 t_k – czas końca przelotu,
 c_s – koszt sekundy lotu,
 c_p – cena kilograma paliwa,
 b_j – jednostkowe zużycie paliwa.

Charakterystyki aerodynamiczne i zespołu napędowego mogą być zadane w dowolny sposób (np. w postaci tabelarycznej).

2. Równania ruchu

Równania ruchu samolotu wprowadzono korzystając z następujących założeń:

1. układ inercjalny jest związany z Ziemią,
2. samolot traktuje się jako punkt materialny (zachowana równowaga podłużna),
3. kąt toru lotu jest mały,
4. zachowana jest równowaga sił na kierunku prostopadłym do toru lotu,
5. ruch samolotu odbywa się w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym,
6. kierunek ciągu jest równoległy do kierunku prędkości,
7. prędkość wiatru jest mała w porównaniu z prędkością lotu.



Rys. 1. Siły działające na samolot

Równanie ruchu na kierunku prędkości ma postać (rys.1):

$$m \frac{dV}{dt} = P_s - P_x(V_p, \dots) - Q\gamma \quad (2.1)$$

a związki kinematyczne:

$$\frac{dx}{dt} = V \quad \frac{dh}{dt} = V\gamma \quad (2.2)$$

Równanie zmiany masy jest postaci:

$$\frac{dm}{dt} = -P_s b_j(V_p, \dots) \quad (2.3)$$

Ponadto spełnione są, z uwzględnieniem założeń 3, 4 i 7, następujące zależności:

$$P_z(V_p, \dots) = Q \quad V_p = V - w \quad (2.4)$$

W równaniach (2.1) ÷ (2.4) oznaczono:

- m – masa samolotu,
- V – prędkość samolotu w inercyjnym układzie odniesienia,
- V_p – prędkość samolotu względem powietrza,
- γ – kąt toru lotu,
- P_z – siła nośna,
- w – prędkość wiatru.

Zmiennymi sterującymi w tak przyjętym modelu samolotu są:

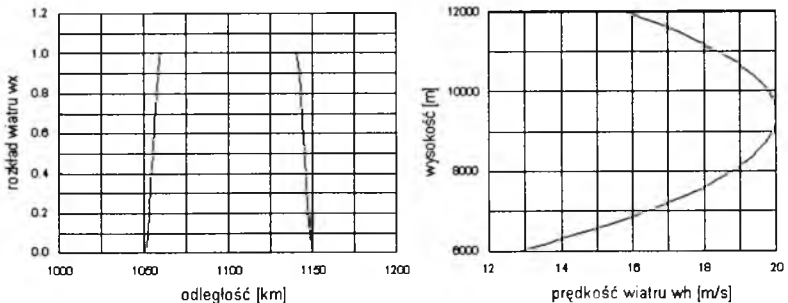
- ciąg zespołu napędowego $P_{s\min}(h, V_p) \leq P_s \leq P_{s\max}(h, V_p)$,
- kąt toru lotu $\gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_{\max}$.

Skutki pojawienia się podmuchu są dwojakiego rodzaju:

- zmiana prędkości samolotu względem powietrza,
- zmiana kierunku działania sił aerodynamicznych.

Biorąc pod uwagę założenia 3 i 7 odchylenie wektorów sił aerodynamicznych o kąt ε (rys.1) od pierwotnego kierunku można pominąć.

3. Wyniki obliczeń



Rys. 2. Profil wiatru

Obliczenia przeprowadzono dla samolotu klasy A320. Warunki brzegowe zostały określone na podstawie fragmentu (200 km) optymalnej trajektorii

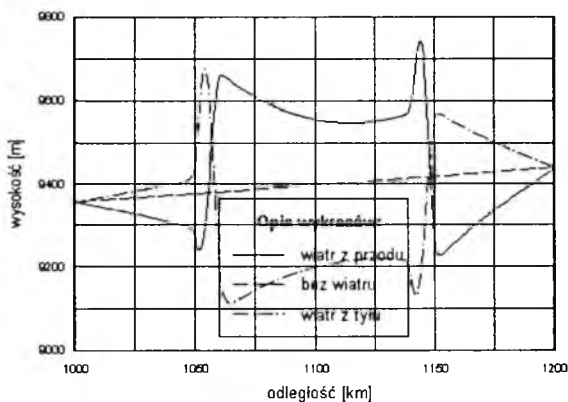
przelotu długodystansowego w bezwietrznej atmosferze:

$$\begin{aligned} x(t_p) &= x_p & x(t_k) &= x_k \\ V(t_p) &= V_p & V(t_k) &= V_k \\ h(t_p) &= h_p & h(t_k) &= h_k \\ & & m(t_k) &= m_k \end{aligned}$$

Masa końcowa samolotu wynosi 63198 kg i jest stała dla wszystkich rozpatrywanych przypadków.

Do obliczeń przyjęto profil podmuchu opisany funkcją (rys.2):

$$w = w_x(x)w_h(h) \quad (3.1)$$



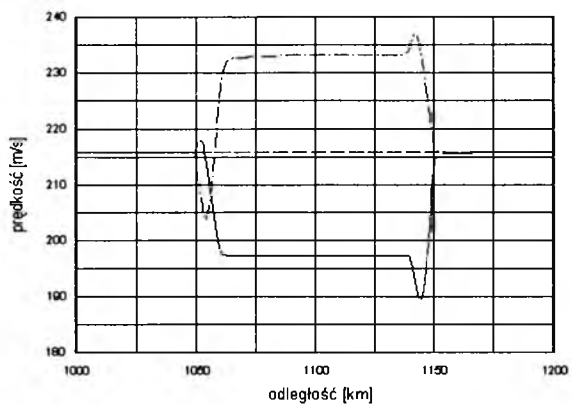
Rys. 3. Wysokość lotu

Rysunki 3 ÷ 6 przedstawiają przebieg wybranych zmiennych stanu i sterowania dla trajektorii optymalnych w funkcji odległości poziomej dla następujących przypadków obliczeniowych:

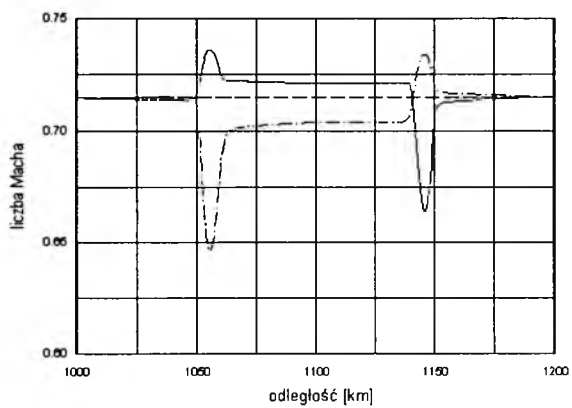
- wiatr z tyłu,
- brak wiatru,
- wiatr czołowy,

dla tych samych warunków brzegowych.

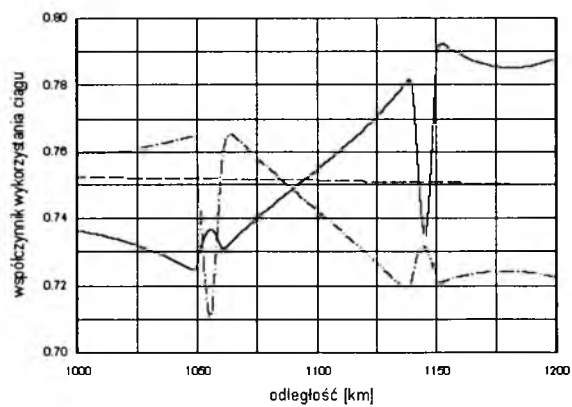
Rysunek 4 ilustruje zależność prędkości samolotu względem inercjalnego układu odniesienia. Prędkość samolotu względem powietrza reprezentuje liczba Macha, której przebieg przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 4. Prędkość lotu



Rys. 5. Liczba Macha



Rys. 6. Współczynnik wykorzystania ciągu

Na rysunku 6 przedstawiono przebieg współczynnika wykorzystania ciągu zdefiniowanego jako:

$$\bar{P}_s = \frac{P_s}{P_{s\max}(h, V_p)} \quad (3.2)$$

4. Wnioski

Analiza wyników obliczeń prowadzi do następujących wniosków:

- maksymalna wartość kąta toru lotu wynosi 6.4° co zadowalająco odpowiada założeniu 3,
- istotne zmiany kąta toru lotu występują na krótkich odcinkach, przy umiarkowanych wartościach współczynnika obciążenia (od 0.7 do 1.2), co mieści się w ramach założenia 4,
- współczynnik siły nośnej zmienia się w granicach od 0.45 do 0.65, a liczba Macha od 0.65 do 0.73 co w efekcie daje zmianę kąta natarcia rzędu 3° i nie zmusza do rewizji założenia 6,
- różnica kosztów pomiędzy trajektorią optymalną a trajektorią optymalną dla bezwietrznej atmosfery realizowaną w obecności podmuchu wynosi:
 - 6.2% dla wiatru czołowego,
 - 0.9% dla wiatru z tyłu,
- prędkość samolotu względem powietrza we wszystkich trzech przypadkach zmienia się nieznacznie i jest:
 - o 0.6% większa dla wiatru czołowego,
 - o 1.2% mniejsza dla wiatru z tyłu,w porównaniu do prędkości lotu w spokojnej atmosferze,
- zmiana prędkości lotu względem inercjalnego układu odniesienia realizowana jest poprzez zmianę energii potencjalnej przy niewielkiej (5%) korekcie ciągu zespołu napędowego.

Literatura

1. BARMAN J.F., ERZBERGER H., *Fixed-Range Optimum Trajectories for Short-Haul Aircraft*, Journal of Aircraft, **13**, 10, 1976
2. CHAKRAVARTY A., *Four-Dimensional Fuel-Optimal Guidance in the Presence of Winds*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, **8**, 1, 1985
3. LEŚNIAK J., *Optymalna trajektoria przelotu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 126, Mechanika, z.42, Rzeszów 1994 (w druku)

Deriving the Optimal Cruise Including Wind Effects

Summary

This paper presents the derivation of the flight trajectory in the fixed-range problem which includes the presence of the fixed shape gust profile. The shape of the gust changes with variations both in the distance and the altitude. The solution was derived by applying the Bellman's dynamic programming. As a performance index the direct operating cost has been chosen. The paper includes a numerical example which follows the technical data of an airplane of the family A320.

ANALIZA LOTU PRZESTRZENNEGO STEROWANEJ RAKIETY KLASY ZIEMIA-POWIETRZE NAPROWADZANEJ WIĄZKĄ NA MANEWRUJĄCY SAMOLOT-CEL

JERZY MARYNIAK

ZIAD AL-YOUSEF

*Institut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska, Warszawa*

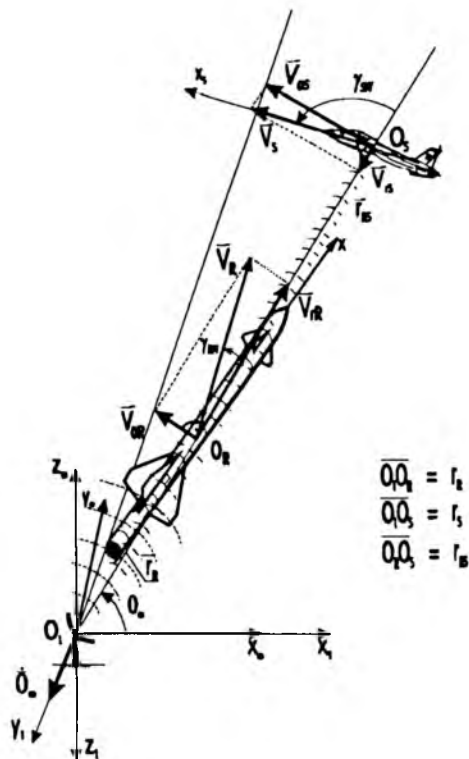
W pracy przedstawiono model matematyczny dynamiki rakiety sterowanej automatycznie, naprowadzanej wiązką na manewrujący samolot-cel. Dla rakiety testowej ziemia-powietrze klasy "Roland" przeprowadzono symulację numeryczną. Wyniki przedstawiono graficznie pokazując przebieg trajektorii lotu rakiety, trafienie celu oraz zmiany parametrów kinematycznych lotu rakiety.

1. Wstęp

W pracy przedstawiono model matematyczny dynamiki rakiety sterowanej automatycznie klasy ziemia-powietrze, naprowadzanej przy pomocy wiązki prowadzącej, na manewrujący przestrzennie samolot-cel [1,6,8,9,10,11].

Metoda naprowadzania rakiety wiązką prowadząca, polega na tym, że rakieta naprowadzana musi znajdować się na prostej łączącej ognisko radiolokatora z manewrującym celem. Często ten sposób naprowadzania nazywa się metodą trójpunktową. To jednocześnie nakłada pewne warunki na ruch rakiety podczas naprowadzania wiązki prowadzącej (rys.1).

Sterowanie automatyczne jest realizowane przez wprowadzenie praw sterowania [1,4,6,8,9,10] wiążących parametry kinematyczne rakiety realizowane w locie, z zadanymi parametrami lotu wynikającymi ze śledzenia celu wiązką prowadzącą. Różnica pomiędzy parametrami realizowanymi a zadanymi daje uchyby, które po uwzględnieniu współczynników wzmocnienia i stałych czasowych wyznaczają kąty wychyleń sterów wysokości i kierunku, zapewniając właściwe sterowanie rakieta w kanałach pochylania i odchylania.



Rys. 1. Naprowadzania rakiety na cel wiązką prowadzącą – zależności kinematyczne

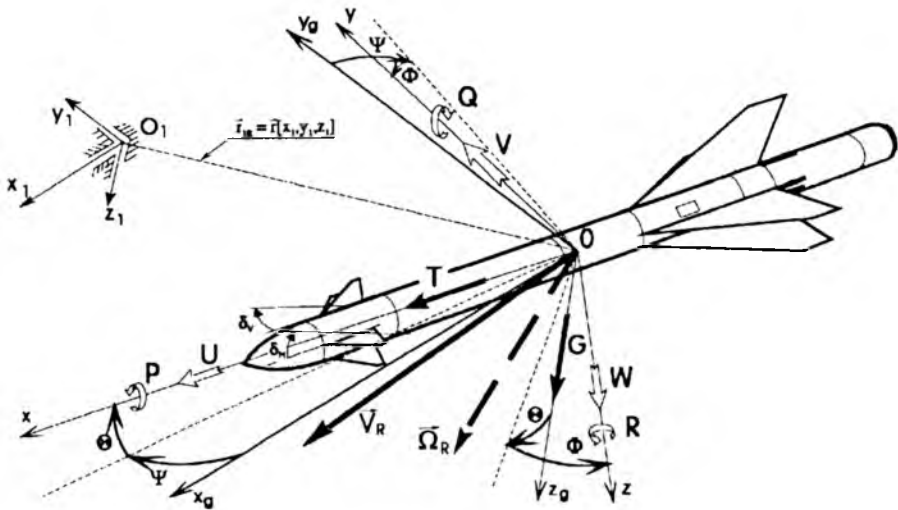
2. Model matematyczny

Przyjęto, że rakieta stanowi sztywny obiekt o sześciu stopniach swobody, poruszający się w przestrzeni. Rakieta napędzana jest silnikiem raketowym na paliwo stałe o ograniczonym czasie pracy i umieszczonym w osi symetrii pocisku. Rakieta porusza się w warunkach bezwietrznych.

Stosując równania Boltzmann-Hamela [2,3,5,7] dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych, wyprowadzono dynamiczne równania ruchu sterowanej rakiety, które w postaci ogólnej mają postać [8,9,10]:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{Q} + \mathbf{U}\delta \quad (2.1)$$

gdzie:



Rys. 2. Parametry kinematyczne i geometryczne w układach odniesienia związanych z rakieta

- M** – macierz bezwładności,
- K** – macierz parametrów kinematycznych,
- U** – macierz sił sterujących,
- Q** – macierz sił zewnętrznych (rys.3):

$$\mathbf{Q} = \text{col}[X, Y, Z, L, M, N] \quad (2.2)$$

przy czym:

— wektor przyspieszeń:

$$\dot{\mathbf{V}} = \text{col}[\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}] \quad (2.3)$$

— wektor prędkości (rys.2):

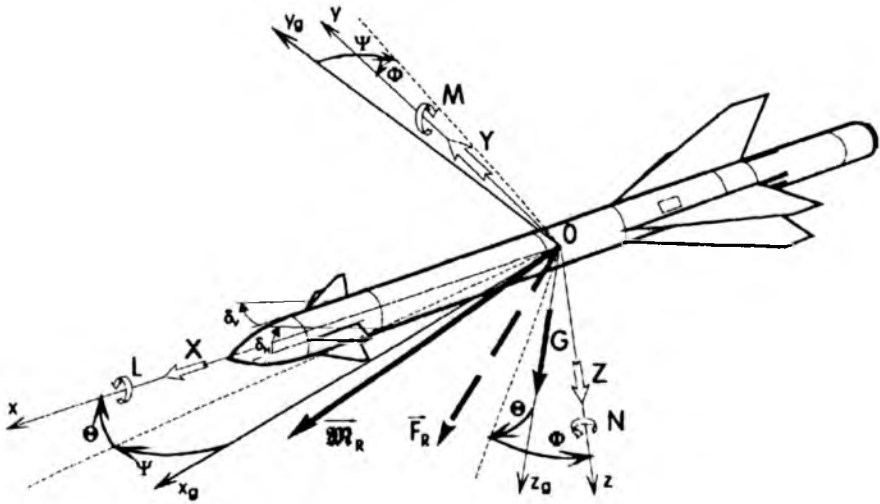
$$\mathbf{V} = \text{col}[U, V, W, P, Q, R] \quad (2.4)$$

— wektor sterowania (rys.2):

$$\delta = \text{col}[\delta_H, \delta_V] \quad (2.5)$$

Związki kinematyczne (rys.2):

$$\dot{\mathbf{r}} = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = \mathbf{F}[U, V, W, P, Q, R, \phi, \theta, \psi] \quad (2.6)$$



Rys. 3. Siły i momenty sił działające na raketę w układzie odniesienia związanym z raketą

Dynamiczne równania ruchu rakiety sterowanej wiązką prowadzącą, po uproszczeniach i przystosowaniu do postaci wygodnej w symulacji numerycznej mają postać [1]:

— równanie ruchów podłużnych:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{U} + WQ - VR) - S_x(Q^2 + R^2) &= -mg \sin \theta + T + \\
 -\frac{1}{2}\rho S_R V_R^2(C_x \cos \beta \cos \alpha + C_y \sin \beta \cos \alpha - C_z \sin \alpha) + & \quad (2.7) \\
 +X_Q Q + X_R R + X_{\delta_H} \delta_H + X_{\alpha_H} \alpha_H + X_{\delta_V} \delta_V
 \end{aligned}$$

— równanie ruchów bocznych:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{V} + UR - WP) + S_x(\dot{R} + PQ) &= mg \cos \theta \sin \Phi + \\
 +\frac{1}{2}\rho S_R V_R^2(-C_x \sin \beta + C_y \cos \beta) + Y_R R + Y_{\delta_V} \delta_V & \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

— równanie ruchów wznoszących:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{W} - UQ + VP) - S_x(\dot{Q} - PR) &= mg \cos \Theta \cos \Phi + \\
 -\frac{1}{2}\rho S_R V_R^2(C_x \cos \beta \sin \alpha + C_y \sin \beta \sin \alpha + C_z \cos \alpha) &+ \quad (2.9) \\
 + Z_Q Q + Z_{\delta_H} \delta_H + Z_{\alpha_H} \alpha_H
 \end{aligned}$$

— równanie ruchów przechylających:

$$\begin{aligned}
 J_x \dot{P} &= -\frac{1}{2}\rho S_R V_R^2 I(C_{m_x} \cos \beta \cos \alpha + C_{m_y} \sin \beta \cos \alpha - C_{m_z} \sin \alpha) + \\
 & \quad (2.10) \\
 + L_P P + L_{\delta_V} \delta_V
 \end{aligned}$$

— równanie ruchów pochyłających:

$$\begin{aligned}
 J_y \dot{Q} + (J_x - J_z)PR - S_x(\dot{W} - UQ + VP) &= -mg x_c \cos \Theta \cos \Phi + \\
 +\frac{1}{2}\rho S_R V_R^2 [x_A(C_x \cos \beta \sin \alpha + C_y \sin \beta \sin \alpha + C_z \cos \alpha) &+ \quad (2.11) \\
 + I(-C_{m_x} \sin \beta + C_{m_y} \cos \beta)] + M_Q Q + M_{\dot{W}} \dot{W} + M_{\alpha_H} \alpha_H + M_{\delta_H} \delta_H
 \end{aligned}$$

— równanie ruchów odchyłających:

$$\begin{aligned}
 J_z \dot{R} + (J_y - J_x)PQ + S_x(\dot{V} + UR - WP) &= mg x_c \cos \Theta \sin \Phi + \\
 +\frac{1}{2}\rho S_R V_R^2 [x_A(-C_x \sin \beta + C_y \cos \beta + & \quad (2.12) \\
 -I(C_{m_x} \cos \beta \sin \alpha + C_{m_y} \sin \beta \sin \alpha + C_{m_z} \cos \alpha)] + N_R R + N_{\delta_V} \delta_V
 \end{aligned}$$

Związki kinematyczne dla rakiety w locie otrzymano w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_{1R}}{dt} &= U \cos \Theta \cos \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\
 & \quad + W(\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi \\
 \frac{dy_{1R}}{dt} &= U \cos \Theta \sin \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\
 & \quad + W(\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi \\
 \frac{dz_{1R}}{dt} &= -U \sin \Theta + V \sin \Phi \cos \Theta + W \cos \Phi \cos \Theta
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = P + Q \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta + R \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = Q \sin \Phi \sec \Theta + R \cos \Phi \sec \Theta$$

Kąty aerodynamiczne są zdefiniowane następująco:

— kąt natarcia:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{W}{U} \quad (2.14)$$

— kąt ślizgu:

$$\beta = \operatorname{arcsin} \frac{V}{V_R} \quad (2.15)$$

przy czym prędkość liniowa rakiety można przedstawić:

$$V_R^2 = U^2 + V^2 + W^2 \quad (2.16)$$

— wysokość lotu rakiety:

$$H = -z_{1R} \quad (2.17)$$

— gęstość powietrza dla $0 < H < 11000$ m:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{z_{1R}}{44300} \right)^{4.256} \quad (2.18)$$

Prawa sterowania

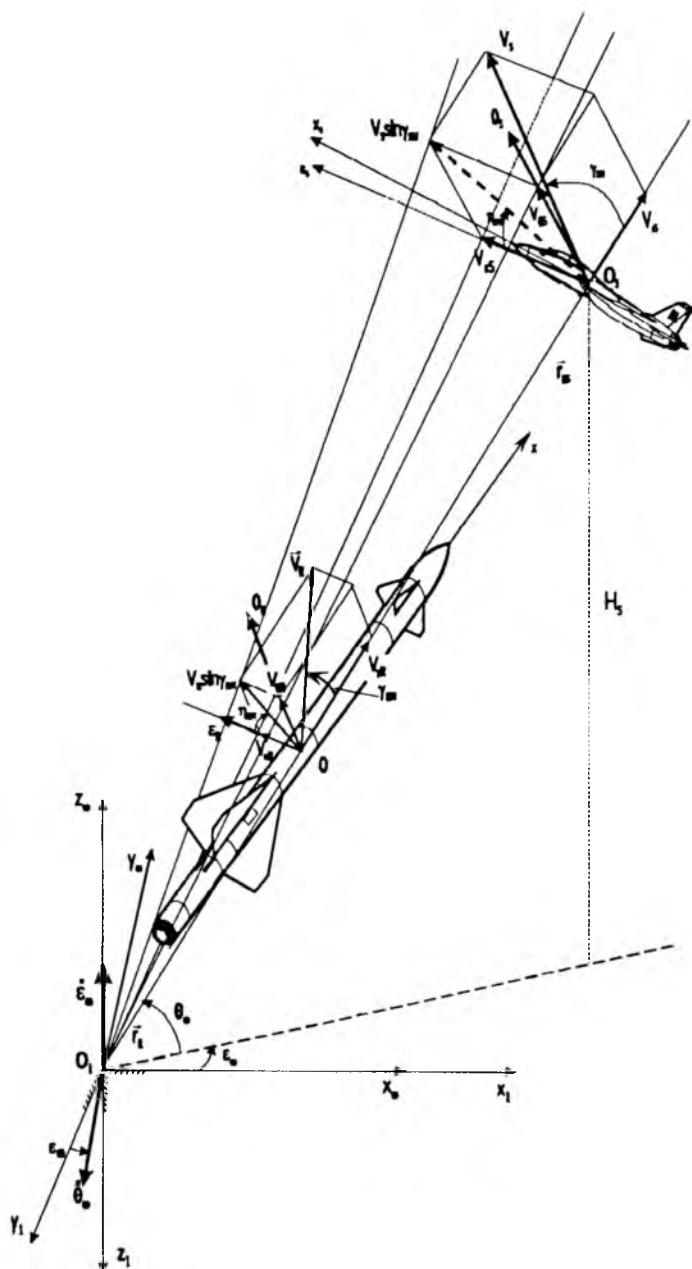
Uwzględniono jedynie najbardziej znaczące czynniki w równaniach praw sterowania [1,8,9,10] oraz przyjęto, że początkowe wychylenia sterów wysokości δ_{H_0} i kierunku δ_{V_0} są równe zeru. Zostały również pominięte prędkości kątowe wychyleń sterów wysokości i kierunku gdyż założono natychmiastowe wychylenia sterów, czyli nie ma opóźnienia w wykonawczym układzie sterowania (rys.4 i rys.5):

— w kanale pochylenia:

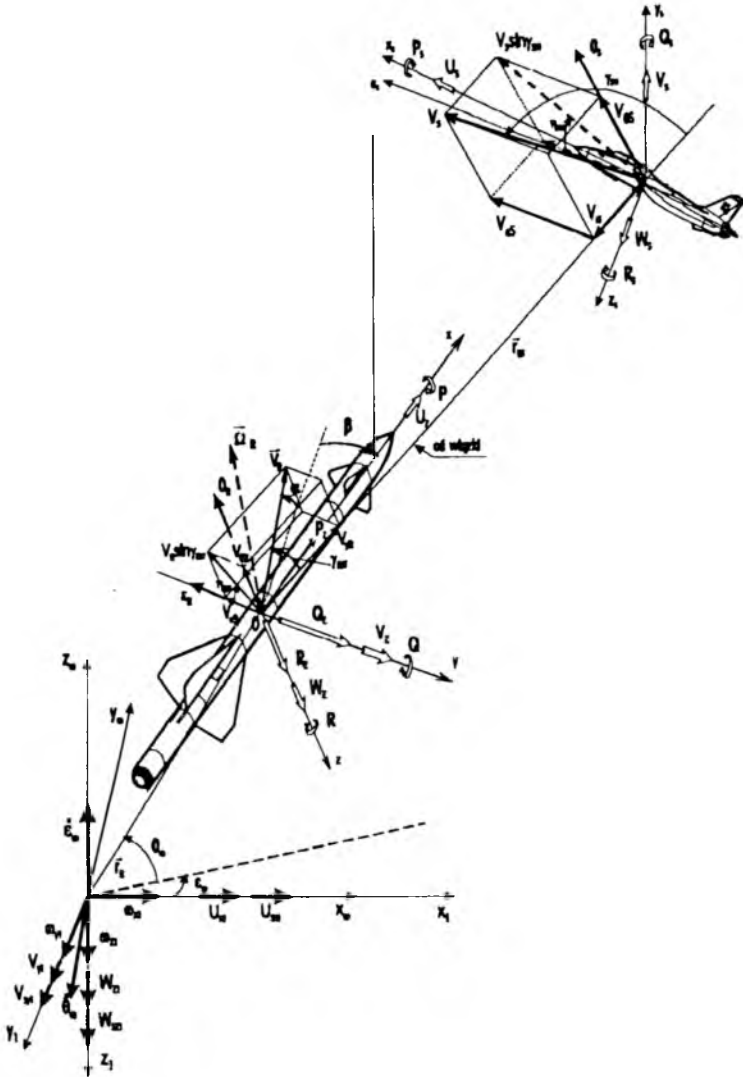
$$\begin{aligned} T_1^H \delta_H &= K_{\Theta}^H (\Theta - \Theta_Z) + H_Q^H (Q - Q_Z) + K_U^H (U - U_Z) + \\ &+ K_W^H (W - W_Z) + K_{z_{1R}}^H (z_{1R} - z_{1R_Z}) + K_{\dot{z}_{1R}}^H (\dot{z}_{1R} - \dot{z}_{1R_Z}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

— w kanale odchylenia:

$$\begin{aligned} T_1^V \delta_V &= K_{\Phi}^V (\Phi - \Phi_Z) + H_P^V (P - P_Z) + K_{y_{1R}}^V (y_{1R} - y_{1R_Z}) + \\ &+ K_{\dot{y}_{1R}}^V (\dot{y}_{1R} - \dot{y}_{1R_Z}) + K_{\Psi}^V (\Psi - \Psi_Z) + K_{R}^V (R - R_Z) \end{aligned} \quad (2.20)$$



Rys. 4. Geometryczne zależności między rakieta a samolotem-celem w czasie naprowadzania wiązką prowadzącą



Rys. 5. Przyjęte układy odniesienia, składowe zadanych prędkości liniowych i kątowych wiązki, rakiety i samolotu-celu

Związki kinematyczne naprowadzania

Równania położenia wiązki śledzącej poruszający się samolot-cel (rys.4 i rys.5):

$$\dot{\Theta}_W = \frac{V_S}{r_S} \sin \gamma_{SW} \sin \eta_{SW} \quad (2.21)$$

$$\dot{\varepsilon}_W = \frac{V_S \sin \gamma_{SW} \cos \eta_{SW}}{r_S \cos \Theta_W}$$

Równania kinematyczne związków zachodzących między rakieta a celem w czasie naprowadzania (rys.4):

$$\sin \gamma_{RW} = \frac{r_R}{V_R} \sqrt{\dot{\varepsilon}_W^2 \cos^2 \Theta_W + \dot{\Theta}_W^2} \quad (2.22)$$

$$\operatorname{tg} \eta_{RW} = \frac{\dot{\Theta}_W}{\dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W}$$

— zbliżanie się rakiety do samolotu-celu (rys.4):

$$\dot{r}_{RS} = V_S \cos \gamma_{SW} - V_R \cos \gamma_{RW} \quad (2.23)$$

— położenie rakiety na wiązce względem układu nieruchomego związanego z Ziemią (rys.5):

$$\begin{aligned} x_{1Rz} &= r_R \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W \\ y_{1Rz} &= -r_R \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$z_{1Rz} = -r_R \sin \Theta_W$$

$$r_R^2 = x_{1Rz}^2 + y_{1Rz}^2 + z_{1Rz}^2 \quad (2.25)$$

— prędkość rakiety na wiązce mierzona w układzie ziemskim $0_1 x_1 y_1 z_1$ (rys.5):

$$\begin{aligned} V_R^2 &= (\dot{r}_R \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \cos \varepsilon_W)^2 + \\ &+ (-\dot{r}_R \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W + 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \sin \varepsilon_W)^2 + \\ &+ (-\dot{r}_R \sin \Theta_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \cos \Theta_W)^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

— współrzędne położenia samolotu względem układu ziemskiego w czasie naprowadzania (rys.5):

$$\begin{aligned} x_{1S} &= r_S \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W \\ y_{1S} &= -r_S \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W \\ z_{1S} &= -r_S \sin \Theta_W \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$r_S^2 = x_{1S}^2 + y_{1S}^2 + z_{1S}^2 \quad (2.28)$$

— prędkość samolotu na wiązce mierzona w układzie $0_1x_1y_1z_1$ (rys.5):

$$\begin{aligned} V_S^2 = & (\dot{r}_S \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_S \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W - 2r_S \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \cos \varepsilon_W)^2 + \\ & + (-\dot{r}_S \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W - 2r_S \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W + 2r_S \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \sin \varepsilon_W)^2 + \\ & + (-\dot{r}_S \sin \Theta_W - 2r_S \dot{\Theta}_W \cos \Theta_W)^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Parametry zadane

Związki kinematyczne sterowanej rakiety wiązką prowadzącą – parametry zadane (przy idealnym sterowaniu):

— składowe zadanych prędkości liniowych rakiety:

$$\begin{aligned} U_Z = & (\dot{r}_R \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W) \cdot \\ & \cdot \cos \Theta_Z \cos \Psi_Z + (-\dot{r}_R \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W + 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \sin \varepsilon_W + \\ & - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W) \cos \Theta_Z \sin \Psi_Z + \\ & + (-\dot{r}_R \sin \Theta_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \cos \Theta_W) \sin \Theta_Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_Z = & (\dot{r}_R \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W) \cdot \\ & \cdot (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z - \cos \Theta_Z \sin \Psi_Z) + (-\dot{r}_R \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W + \\ & + 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \sin \varepsilon_W - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W) \cdot \\ & \cdot (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z + \cos \Phi_Z \cos \Psi_Z) + \\ & + (-\dot{r}_R \sin \Theta_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \cos \Theta_W) \sin \Phi_Z \cos \Theta_Z \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} W_Z = & (\dot{r}_R \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \cos \varepsilon_W - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W) \cdot \\ & \cdot (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z + \sin \Phi_Z \sin \Psi_Z) + (-\dot{r}_R \cos \Theta_W \sin \varepsilon_W + \\ & + 2r_R \dot{\Theta}_W \sin \Theta_W \sin \varepsilon_W - 2r_R \dot{\varepsilon}_W \cos \Theta_W \cos \varepsilon_W) \cdot \\ & \cdot (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z - \sin \Phi_Z \cos \Psi_Z) + \\ & + (-\dot{r}_R \sin \Theta_W - 2r_R \dot{\Theta}_W \cos \Theta_W) \cos \Phi_Z \cos \Theta_Z \end{aligned}$$

— składowe zadanych prędkości kątowych rakiety:

$$P_Z = \dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W \cos \Theta_Z \cos \Psi_Z + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \sin \Psi_Z \cos \Theta_Z + \dot{\varepsilon}_W \sin \Theta_Z$$

$$\begin{aligned} Q_Z = & \dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z - \cos \Theta_Z \sin \Psi_Z) + \\ & + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z + \cos \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \sin \Phi_Z \cos \Theta_Z \end{aligned} \quad (2.31)$$

$R_Z = \dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z + \sin \Phi_Z \sin \Psi_Z) +$
 $+ \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z - \sin \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \cos \Phi_Z \cos \Theta_Z$
 — składowe zadanych prędkości uogólnionych Φ_Z, Θ_Z, Ψ_Z rakiety:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi_Z}{dt} = & \dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W \cos \Theta_Z \cos \Psi_Z + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \cos \Theta_Z \sin \Psi_Z + \dot{\varepsilon}_W \sin \Theta_Z + \\
 & + [\dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z - \cos \Theta_Z \sin \Psi_Z) + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \cdot \\
 & \cdot (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z + \cos \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \sin \Phi_Z \cos \Theta_Z] \sin \Phi_Z \operatorname{tg} \Theta_Z + \\
 & + [\dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z + \sin \Phi_Z \sin \Psi_Z) + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \cdot \\
 & \cdot (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z - \sin \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \cos \Phi_Z \cos \Theta_Z] \cos \Phi_Z \operatorname{tg} \Theta_Z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Theta_Z}{dt} = & [\dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z - \cos \Theta_Z \sin \Psi_Z) + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \cdot \\
 & \cdot (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z + \cos \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \sin \Phi_Z \cos \Theta_Z] \cos \Phi_Z + \quad (2.32) \\
 & - [\dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z + \sin \Phi_Z \sin \Psi_Z) + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \cdot \\
 & \cdot (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z - \sin \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \cos \Phi_Z \cos \Theta_Z] \sin \Phi_Z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Psi_Z}{dt} = & [\dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z - \cos \Theta_Z \sin \Psi_Z) + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \cdot \\
 & \cdot (\sin \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z + \cos \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \sin \Phi_Z \cos \Theta_Z] \sin \Phi_Z \sec \Theta_Z + \\
 & + [\dot{\Theta}_W \sin \varepsilon_W (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \cos \Psi_Z + \sin \Phi_Z \sin \Psi_Z) + \dot{\Theta}_W \cos \varepsilon_W \cdot \\
 & \cdot (\cos \Phi_Z \sin \Theta_Z \sin \Psi_Z - \sin \Phi_Z \cos \Psi_Z) - \dot{\varepsilon}_W \cos \Phi_Z \cos \Theta_Z] \cos \Phi_Z \sec \Theta_Z
 \end{aligned}$$

— zadane kąty położenia rakiety w zależności od parametrów ruchu wiązki:

$$\Phi_Z = \varepsilon_W \sin \Theta_W$$

$$\Theta_Z = \Theta_W + \arcsin \frac{r_R \dot{\Theta}_W}{V_R} + \alpha_Z \quad (2.33)$$

$$\Psi_Z = \varepsilon_W + \arcsin \frac{r_R \dot{\varepsilon}_W}{V_R} \cos \Theta_W$$

— zadany kąt natarcia równowagi:

$$\alpha_Z = \frac{mg \cos \left(\Theta_W + \arcsin \frac{r_R \dot{\Theta}_W}{V_R} \right)}{\frac{1}{2} \rho S V_R^2 \frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} + T} \quad (2.34)$$

Przedstawione równania (2.7) ÷ (2.34) stanowią model matematyczny pozwalający na symulację naprowadzania rakiety na manewrujący przestrzenie samolot-cel. Należy uwzględnić zmiany: masy rakiety $m(t)$, położenia środka masy $x_c(t)$, momentów: statycznego $S_x(t)$ i bezwładności $J_x(t)$, $J_y(t)$, $J_z(t)$ oraz ciągu silnika rakietowego T [1].

3. Symulacja numeryczna

Przeprowadzono symulację numeryczną, przyjmując raketę klasy ROLAND jako raketę testową. Przyjęto następujące warunki początkowe dla rakiety i samolotu-celu.

Strefa ataku celu z tylnej półsfery przy warunkach początkowych dla samolotu-celu:

$$\begin{array}{ll} V_{S_0} = 100 \text{ m/s} & x_{1S_0} = 3000 \text{ m} \\ \Theta_{S_0} = 180 \text{ deg} & y_{1S_0} = 200 \text{ m} \\ \Psi_{S_0} = 0 \text{ deg} & z_{1S_0} = -1000 \text{ m} \end{array}$$

założono lot samolotu-celu z $\eta_{SW} = 45 \text{ deg}$ oraz:

$$\begin{array}{ll} \text{dla } 0 < t < 3 \text{ s} & \Theta_s = 0.0 \text{ deg} \quad \text{ i } \quad \Psi_s = 0.0 \text{ deg} \\ \text{dla } t > 3 \text{ s} & \Theta_s = 10.0 \text{ deg} \quad \text{ i } \quad \Psi_s = 10.0 \text{ deg} \end{array}$$

przy określonych warunkach początkowych dla rakiety:

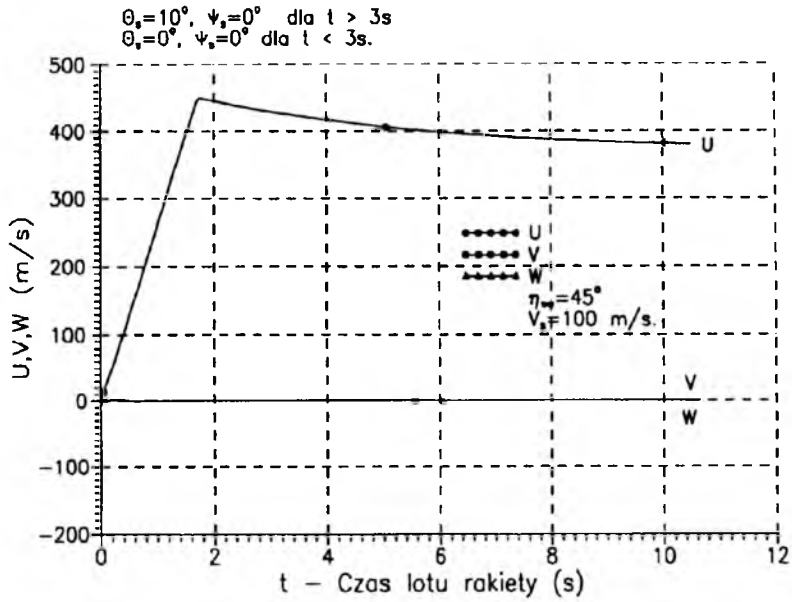
$$\begin{array}{llll} U_0 = 1.0 \text{ m/s} & P_0 = 0.0 \text{ deg/s} & \Phi_0 = 45 \text{ deg} & x_{1R_0} = 0 \text{ m} \\ V_0 = 0.0 \text{ m/s} & Q_0 = 0.0 \text{ deg/s} & \Theta_0 = 24 \text{ deg} & y_{1R_0} = 0 \text{ m} \\ W_0 = 0.2 \text{ m/s} & R_0 = 0.0 \text{ deg/s} & \Psi_0 = 0.0 \text{ deg} & z_{1R_0} = 0 \text{ m} \end{array}$$

W wyniku symulacji numerycznej tak postawionego zadania otrzymano następujące współczynniki wzmocnienia układu automatycznego sterowania raketą w poszczególnych kanałach:

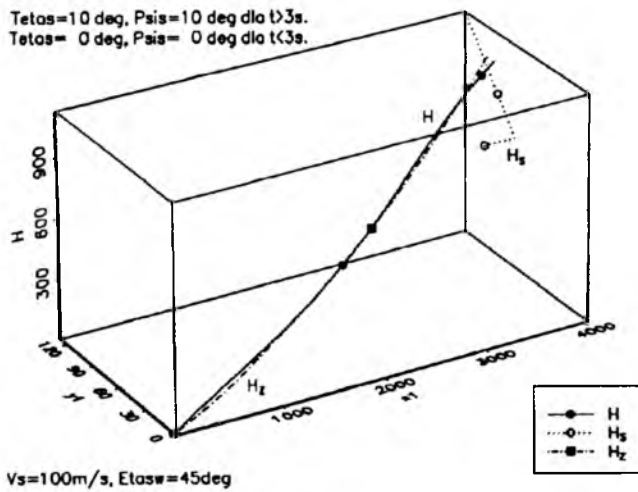
$$\begin{array}{lll} K_{z1}^H = 0.005 & K_{z1}^H = -0.00025 & K_{\Theta}^H = -2.5 \\ K_Q^H = -1.5 & K_U^H = 0.0 & K_W^H = -0.003 \\ K_{y1}^V = -0.0027 & K_{y1}^V = -0.001 & K_{\Phi}^V = -0.0015 \\ K_P^V = -0.007 & K_R^V = 0.15 & K_{\Psi}^V = 0.00005 \end{array}$$

Przeprowadzono pełną identyfikację parametryczną samolotu celu i rakiety naprowadzanej wyznaczając: masy, rozkłady mas, siły aerodynamiczne, ciąg silników oraz charakterystyki sterowania. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono graficznie na rys.6 ÷ rys.13.

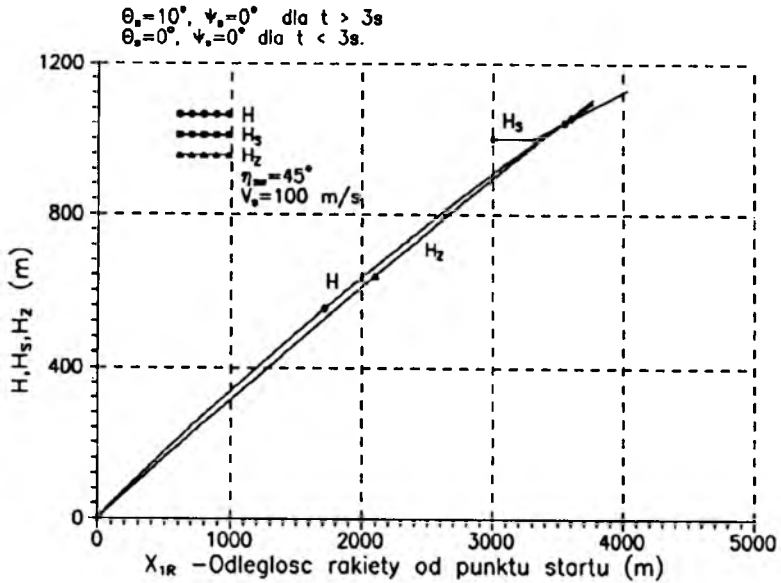
Zmiany składowych prędkości rakiety przedstawiono na rys.6 – widoczne jest rozpędzanie rakiety w czasie pracy silnika startowego, a następnie powolny spadek prędkości w zakresie naddźwiękowym.



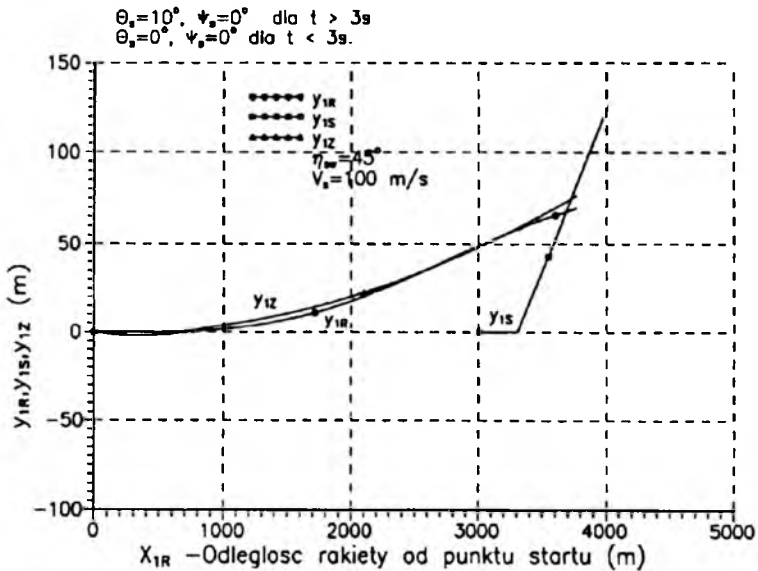
Rys. 6. Przebiegi zmian prędkości podłużnej, bocznej i pionowej w czasie



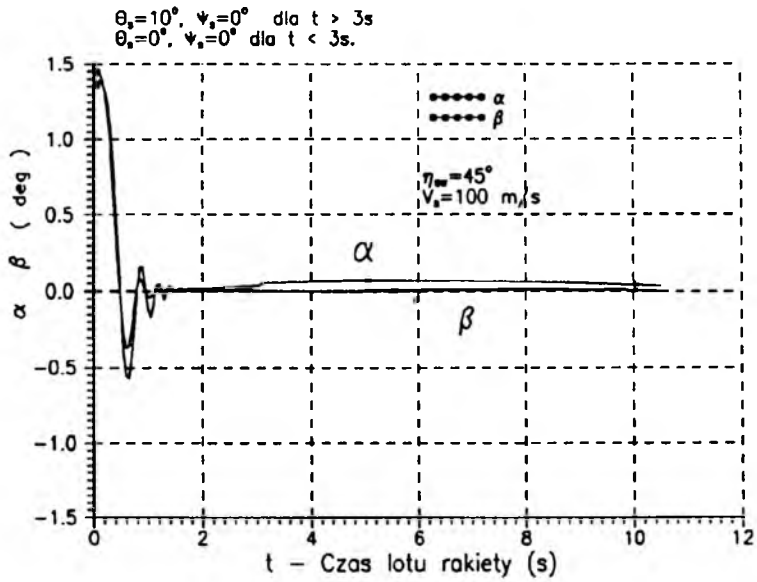
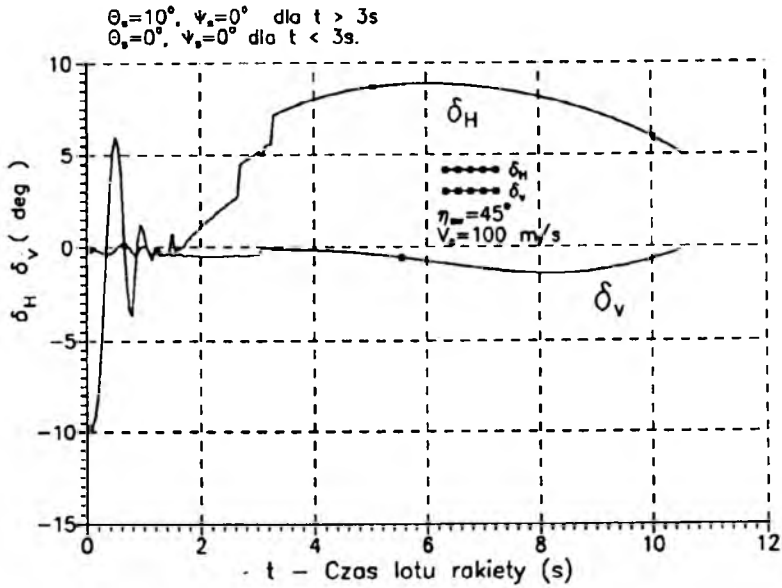
Rys. 7. Przestrzenny lot rakiety i samolotu-celu



Rys. 8. Wysokości lotu rakiety i samolotu w funkcji odległości od startu



Rys. 9. Przebiegi zmian odległości bocznej rakiety i samolotu w funkcji odległości od punktu startu

Rys. 10. Przebiegi zmian kątów: natarcia α i ślizgu β w czasieRys. 11. Kąty wychylenia sterów wysokości δ_H i kierunku δ_V w czasie

Trajektorie lotu rakiety sterowanej oraz tor lotu samolotu-celu i jego dośnięcie przedstawiają rys.7 ÷ rys.9. Na rys.7 przedstawiono przestrzenną trajektorię lotu rakiety $H = f(x_1, y_1)$ – realizowaną, oraz zadaną trajektorię lotu $H_Z = f_Z(x_1, y_1)$ wynikającą z idealnego naprowadzania, jak również tor samolotu-celu $H_S = f_S(x_1, y_1)$ manewrującego w przestrzeni.

Natomiast rys.8 i rys.9 przedstawiają rzuty trajektorii lotu na płaszczyznę pionową (rys.8) i płaszczyznę poziomą (rys.9). Wyraźnie widoczne są uchyby to znaczy różnice pomiędzy trajektorią realizowaną przez sterowaną raketę, a zadaną trajektorią idealnego sterowania.

Sterowanie raketą realizowane jest w kanale pochylania przez wychylenie steru wysokości δ_H i w kanale odchylenia przez wychylenie steru kierunku δ_V . Wychylenia sterów wyznaczają prawa sterowania uwzględniające różnice pomiędzy parametrami zadanymi wynikającymi z przyjętej metody naprowadzania (rys.10).

Na rys.11 przedstawiono zmiany kąta natarcia rakiety α oraz kąta ślizgu β , które zależą od zmian kątów wychyleń sterów (rys.10) oraz zmian prędkości kątowych rakiety: przechylenia P , pochylania Q , odchylenia R – przedstawionych na rys.12.

Parametry zadane rakiety, wynikające z naprowadzania wiązką prowadzącą na manewrujący samolot-cel: kąty pochylania Θ_Z i odchylenia Ψ_Z – możliwe są do spełnienia tylko przy idealnym sterowaniu. Występujące różnice pomiędzy parametrami zadanymi a realizowanymi w locie tj. kątami pochylania Θ i odchylenia Ψ – dają uchyb dynamiczny, wskazując jednak na to że raketa nadaża za wiązką (rys.7 ÷ rys.9 i rys.13).

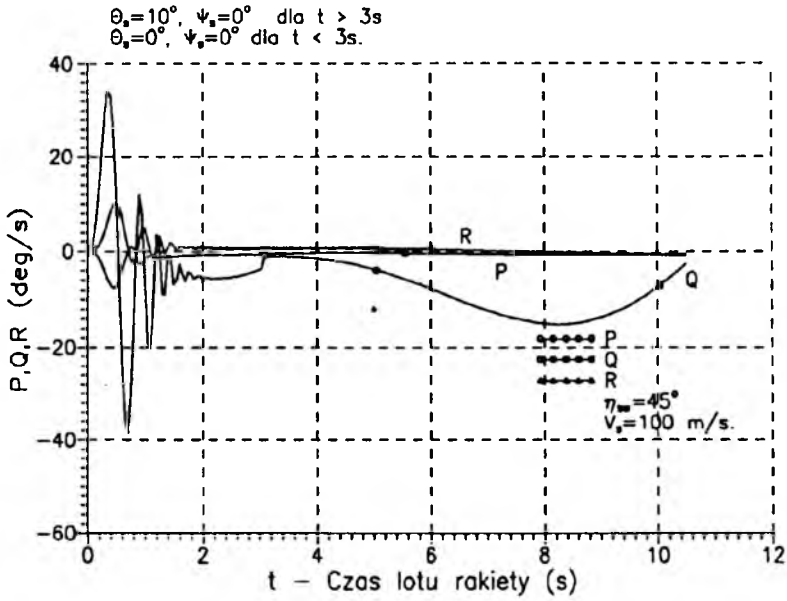
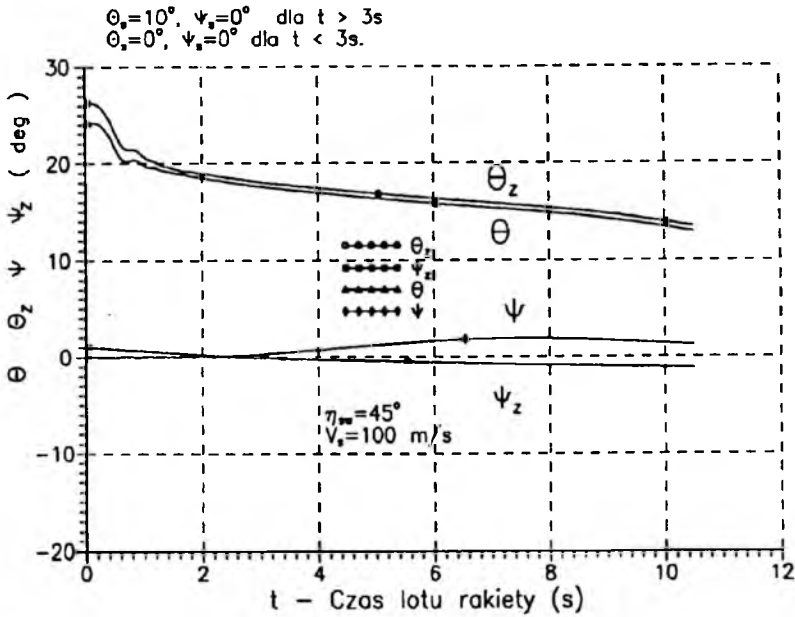
4. Wnioski

Przedstawiony model matematyczny, opracowane programy symulacyjne, symulacja numeryczna i uzyskane wyniki dowodzą że opracowany model matematyczny może być z powodzeniem stosowany do obliczeń, symulacji, porównywania własności raket oraz przy konstrukcji nowych obiektów.

Na rys.10 ÷ rys.12 widoczne są silne oscylacje zmian parametrów rakiety w fazie rozpędzania – potwierdza to wyniki otrzymane przez innych Autorów rozważających fazy przejściowe lotu rakiety.

Po nabraniu przez raketę prędkości maksymalnej, widoczne jest szybkie ustalenie lotu rakiety i bardzo skuteczne, płynne sterowanie.

Opracowana metoda może być stosowana do symulacji i analizy dynamicznych własności dowolnych raket naprowadzanych metodą trójpunktową tzn.

Rys. 12. Przebiegi zmian prędkości kątowej P, Q, R w czasieRys. 13. Przebiegi zmian kątów $\theta, \theta_z, \psi, \psi_z$ w czasie

wiązki prowadzącej. Przedstawiony model matematyczny może być zastosowany do obliczeń zarówno raket przeciwlotniczych klasy ziemia-powietrze, jak i przeciwpancernych sterowanych wiązką, z zastosowaniem przyjętych układów odniesienia i współrzędnych (rys.1 ÷ rys.5).

Literatura

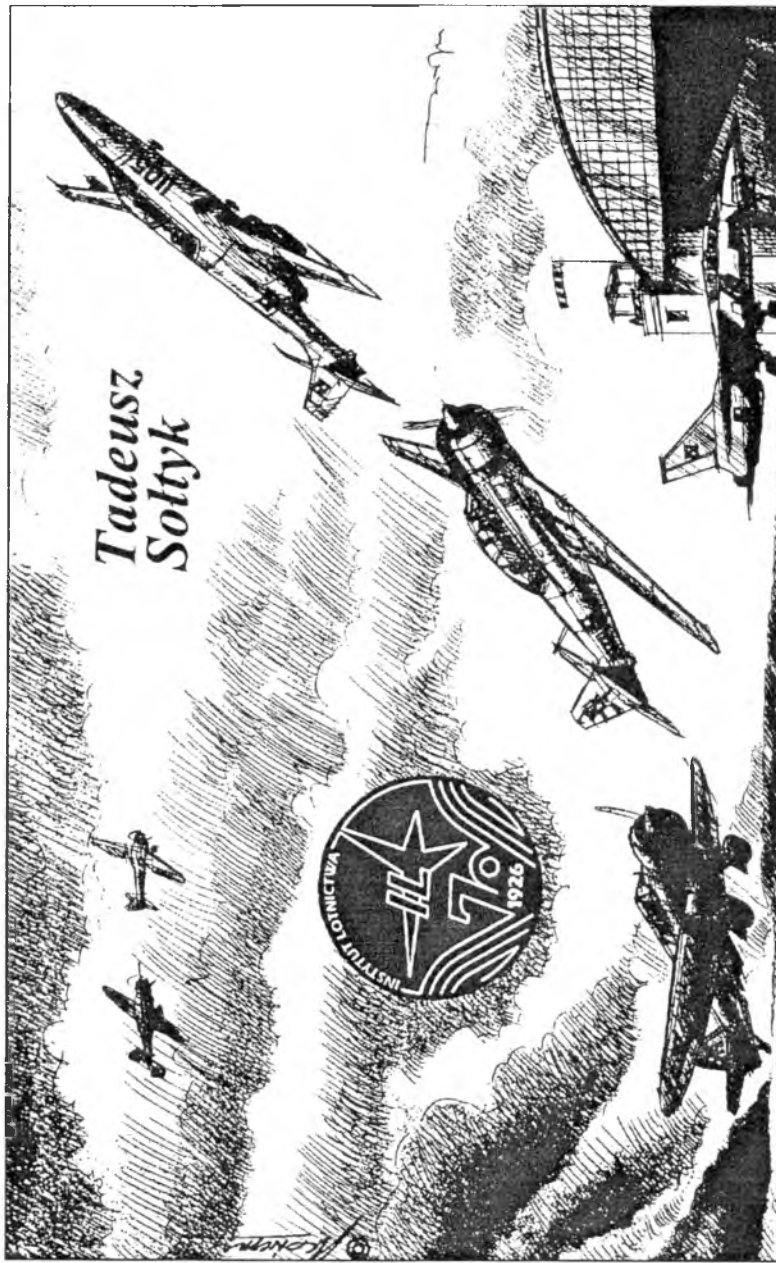
1. AL-YOUSEF Z., *Modelowanie i analiza lotu rakiety sterowanej klasy ziemia-powietrze naprowadzanej wiązką*, Rozprawa doktorska, ITLiMS PW, Warszawa 1994
2. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr.35, Warszawa 1975
3. MARYNIAK J., *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, Zbiór referatów XXVI Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice" Gliwice-Kudowa, 1987
4. MARYNIAK J., *Prawa sterowania jako więzy nieholonomiczne automatycznego sterowania śmigłowcem*, MTiS, 25, 1-2, PWN Warszawa 1987
5. MARYNIAK J., *Modelowanie i symulacja w nawigacji i sterowaniu obiektów ruchomych*, Referat plenarny II Krajowa Konferencja Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania, Gdynia 1989
6. MARYNIAK J., *Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanych obiektów ruchomych*, Materiały III Krajowej Konferencji Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania, Gdynia 1991
7. MARYNIAK J., *Modelowanie odpalania i lotu rakiety klasy powietrze-powietrze*, V Ogólnopolska Konferencja "Mechanika w Lotnictwie", Warszawa 1992
8. MARYNIAK J., *Prawa Sterowania i ich wykorzystanie w automatycznym sterowaniu i naprowadzaniu obiektów latających*, IV Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna "Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania", Gdynia 1993
9. MARYNIAK J., AL-YOUSEF Z., *Symulacja numeryczna dynamiki rakiety sterowanej automatycznie naprowadzanej wiązką na lecący samolot*, Materiały III Konferencji Problemy Rozwoju Produkcji i Eksploatacji Techniki Uzbrojenia, Warszawa 1993
10. MARYNIAK J., AL-YOUSEF Z., PEDRO J., *Modelowanie lotu przestrzennego rakiety sterowanej automatycznie naprowadzanej na cel ruchomy metodą trójpunktową*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Mechanika", Gliwice 1994
11. RAHMAN M., *Aerodynamika i sterowanie raket klasy Ziemia-Powietrze*, Praca Magisterska, Wyd. MEiL Politechnika Warszawska, Warszawa 1986 (niepublikowane)

Analysis of the 3D Flight of a Ground-to-Air Beam Guided Missile in Interception of the Manoeuvring Aircraft

Summary

The paper presents a mathematical model of a beam guided ground-to-air missile in an interception of the manoeuvring target. Guidance law combines the actual kinematical parameters of the missile with those commanded by the guiding beam. Numerical simulation has been carried out for a ROLAND-class missile. It has been shown that the analyzed guidance method is effective. Control surfaces deflections and errors between the commanded and achieved parameters (shown in Fig.6 ÷ Fig.13) are small and prove that the control effort is equally minimal.

Tadeusz
Sołtyk



INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1995

Technologiczne projektowanie
samolotów

WARSZAWA 1995

INSTYTUT LOTNICTWA

POLITECHNIKA WARSZAWSKA WYDZIAŁ MEL



STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA STEROWANEGO SZYBOWCA Z ODKSZTAŁCALNYMI, SPRĘŻYSTYMI SKRZYDŁAMI

JERZY MARYNIAK

SOUHEILA BARDAKJI

ITLiMS, Politechnika Warszawska

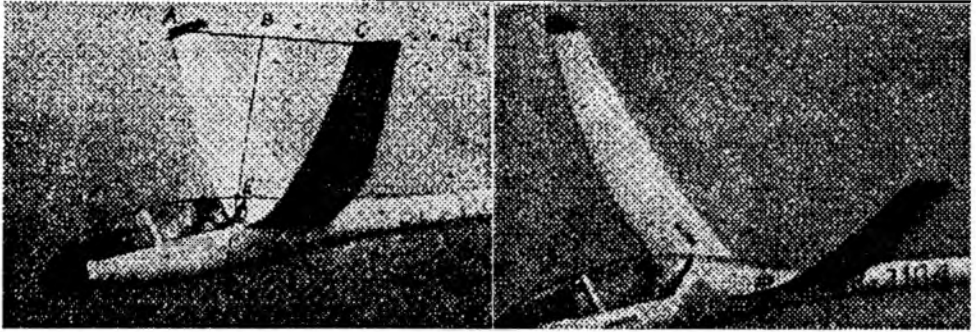
W pracy rozpatrzono dynamikę szybowca uwzględniając stopnie swobody bryły sztywnej z odkształconymi statycznie skrzydłami oraz nałożonymi drganiami sprężystymi skrzydeł. Sprężystość układu uwzględniono wprowadzając dyskretyzację poprzez postacie rezonansowe szybowca. Na przykładzie szybowca testowego SZD-42-2 "Jantar 2B" wyznaczono parametry dynamiczne lotu oraz zbadano stateczność dynamiczną przy różnorodności przyjętych modeli fizycznych: obiekt sztywny + odkształcony + drgający sprężystość.

1. Wstęp

Wiele wykonanych z kompozytów szybowców wyczynowych o dużym wydłużeniu skrzydeł, charakteryzuje się dużą odkształcalnością giętną skrzydeł. Ugięcia końca skrzydeł mogą dochodzić nawet do 2.5 metra (rys.1) [14].

Na rys.1 pokazano fotografie szybowca odkształconego, w locie z prędkością 250 km/h, wykonane w Szybowcowych Zakładach Doświadczalnych, kamerą umieszczoną na samolocie lecącym obok szybowca [14].

Drugą szczególną cechą tej klasy szybowców są niskie częstotliwości drgań giętnych skrzydeł [1÷4,9,11,14,15]. Pierwsza postać rezonansowa [11] drgań giętnych skrzydeł szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B" wynosi 1.78 Hz. Zarówno duże odkształcenia statyczne skrzydeł [2,9,13,14,16,17], jak i drgania giętne skrzydeł [11] mogą mieć znaczący wpływ na własności dynamiczne [2,6÷10] i parametry lotu szybowca [9,16,17], zwłaszcza przy większych obciążeniach.



Rys. 1. Szybowiec SZD-42-2 "Jantar 2B" w locie – widoczne znaczne ugięcie sprężyste skrzydeł [14]

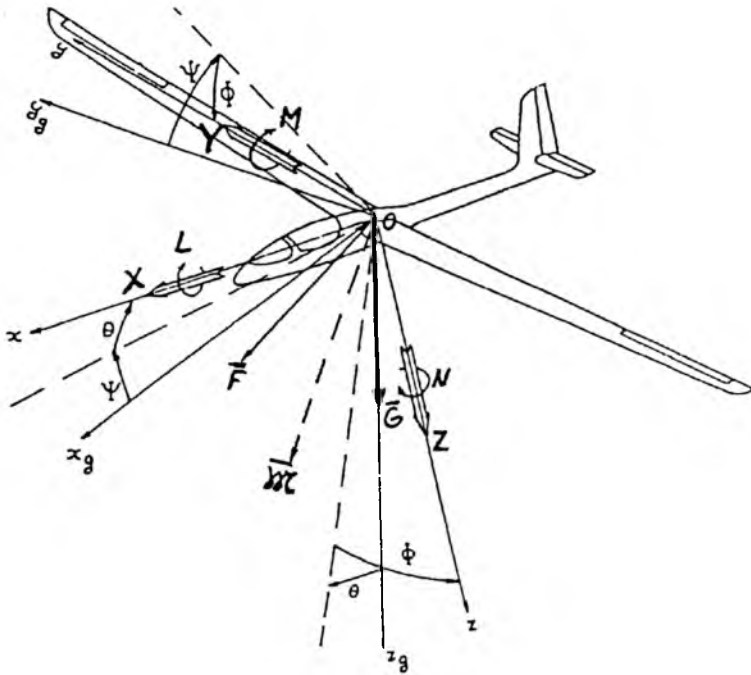
2. Model matematyczny

W przyjętym modelu fizycznym założono że:

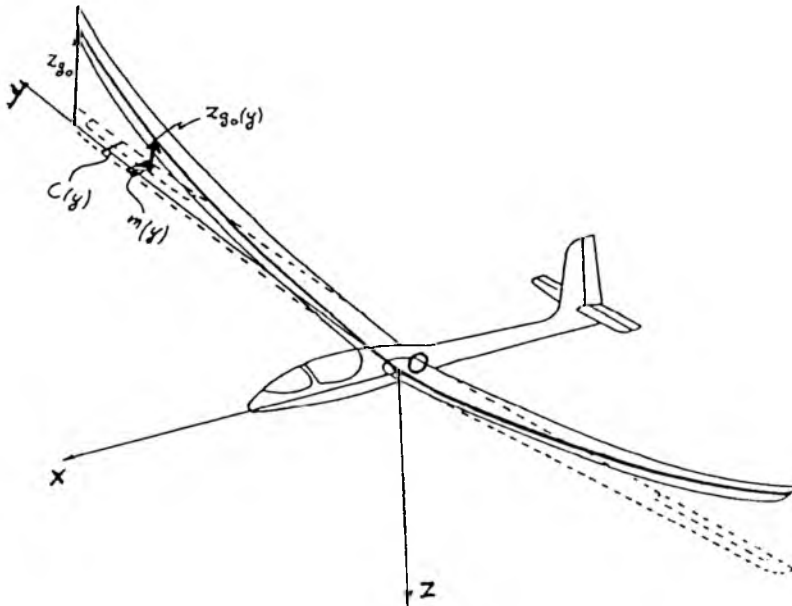
- szybowiec stanowi układ mechaniczny o stałej masie i niezmiennym rozkładzie mas;
- szybowiec posiada płaszczyznę symetrii: geometrycznej, masowej i aerodynamicznej Oxz (rys.2 i rys.3);
- na szybowiec działają siły i momenty sił: grawitacyjne – X_g, Y_g, Z_g i aerodynamiczne – X_a, Y_a, Z_a działające na szybowiec sztywny, odkształcony oraz oscylujący z niskimi częstościami giętnymi skrzydeł;
- szybowiec jest sterowany przez pilota;
- lot przy pogodzie bezwietrznej.

Do tak przyjętego modelu fizycznego, stosując dyskretyzację układu poprzez wyznaczone [11] postacie rezonansowe (rys.5 ÷ rys.7) [2,9], które nałożono na ugięte skrzydło (rys.3) [2,9,16], stosując równania Boltzmann-Hamela [2,5,6,9] wyprowadzono dynamiczne równania ruchu [2].

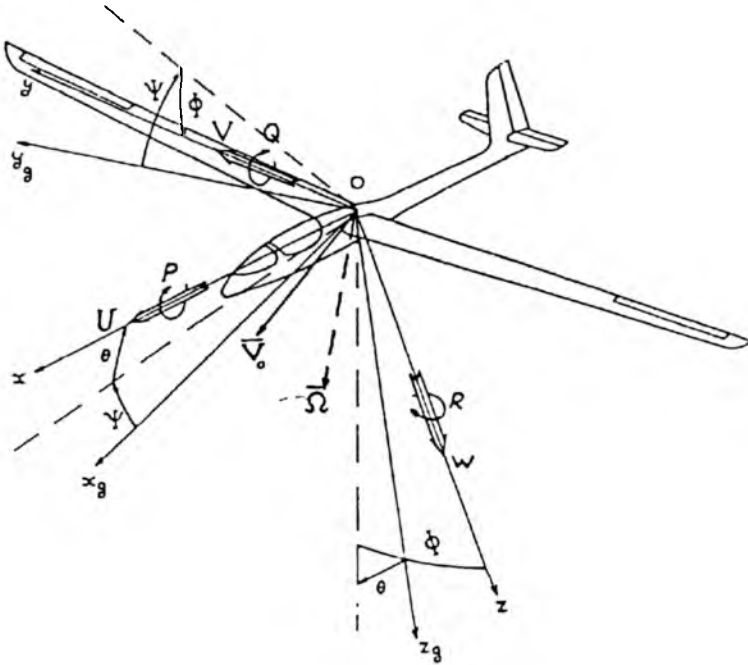
Równania ruchu wyprowadzono w układzie odniesienia $Oxyz$, sztywno związanym z szybowcem (rys.4), po uwzględnieniu związków kinematycznych [2,6] i funkcji odkształceń (rys.5 ÷ rys.7). Uzyskano model matematyczny pozwalający na numeryczne wyznaczenie parametrów lotu jak i badanie stateczności dynamicznej z uwzględnieniem różnorodności konfiguracji.



Rys. 2. Przyjęte układy odniesienia, składowe siły i momenty siły działające na szybowiec w locie



Rys. 3. Statyczne ugięcie skrzydeł $Z_{g0}(y)$ z zaznaczonym rozkładem mas $m(y)$ i zmianą cięciwy $c(y)$



Rys. 4. Przyjęte układy odniesienia, składowe prędkości liniowej V_0 i prędkości kątowej Ω

W celu badania stateczności dynamicznej integralnej (tzn. łącznej stateczności podłużnej i bocznej – bez rozprzęgania), przeprowadzono linearyzację równań metodą małych zaburzeń.

Po linearyzacji, równania mają poniżej przedstawioną postać:

– ruchy podłużne:

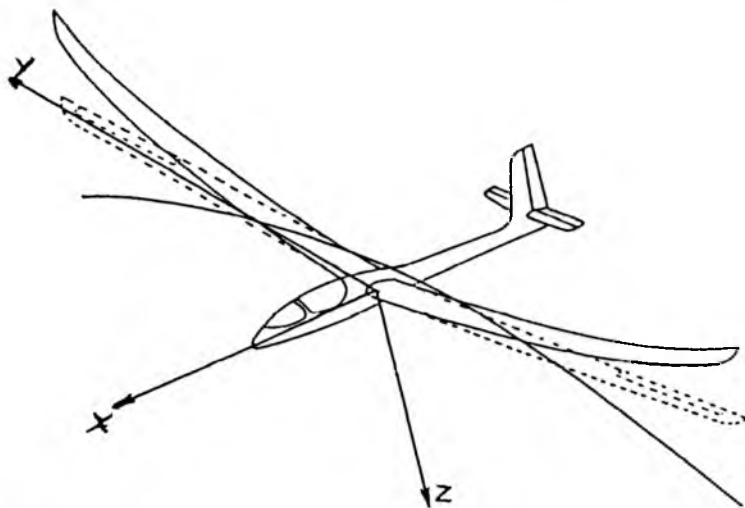
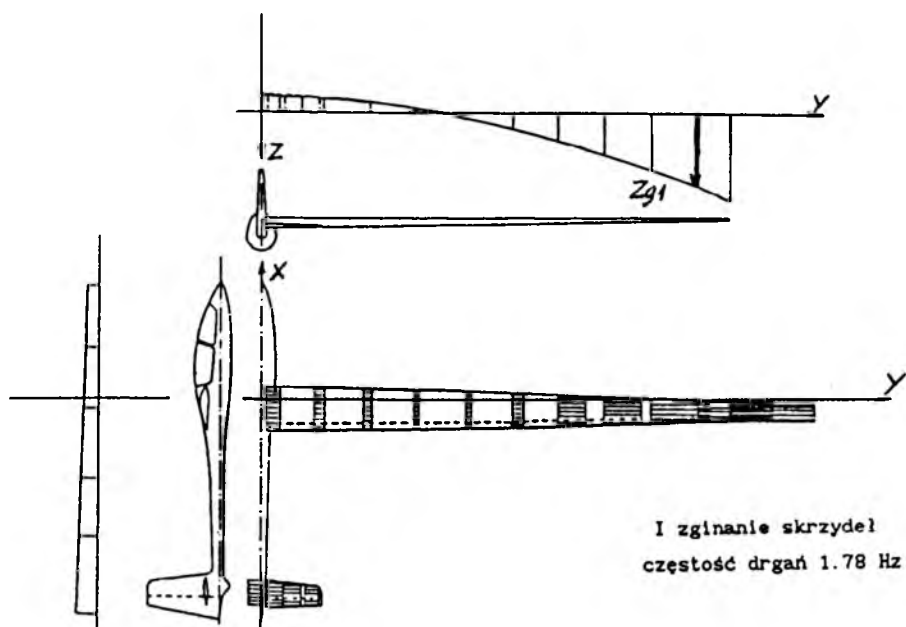
$$\begin{aligned}
 m\dot{u} + \dot{q}E_0 + mQ_1W_1 + mQ_1w + mqW_1 + Q_1\dot{\zeta}_1(2E_1 + F_1) + \\
 + Q_1\dot{\zeta}_2(2E_2 + F_2) + Q_1\dot{\zeta}_3(2E_3 + F_3) - X_0 - X_uu - X_w w - X_\vartheta\vartheta + \\
 - X_qq - X_{\delta_H}\delta_H - X_{\dot{\zeta}_1}\dot{\zeta}_1 - X_{\dot{\zeta}_2}\dot{\zeta}_2 - X_{\dot{\zeta}_3}\dot{\zeta}_3 - X_{\zeta_1}\zeta_1 - X_{\zeta_2}\zeta_2 - X_{\zeta_3}\zeta_3 = 0
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

– ruchy boczne:

$$m\dot{v} - \dot{p}E_0 + mU_1r + Q_1rE_0 - mpW_1 - Y_0 - Y_vv - Y_r r - Y_pp = 0 \quad (2.2)$$

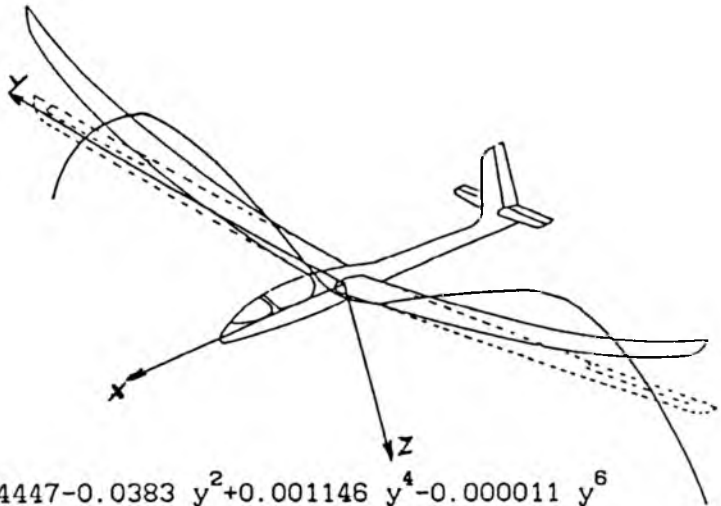
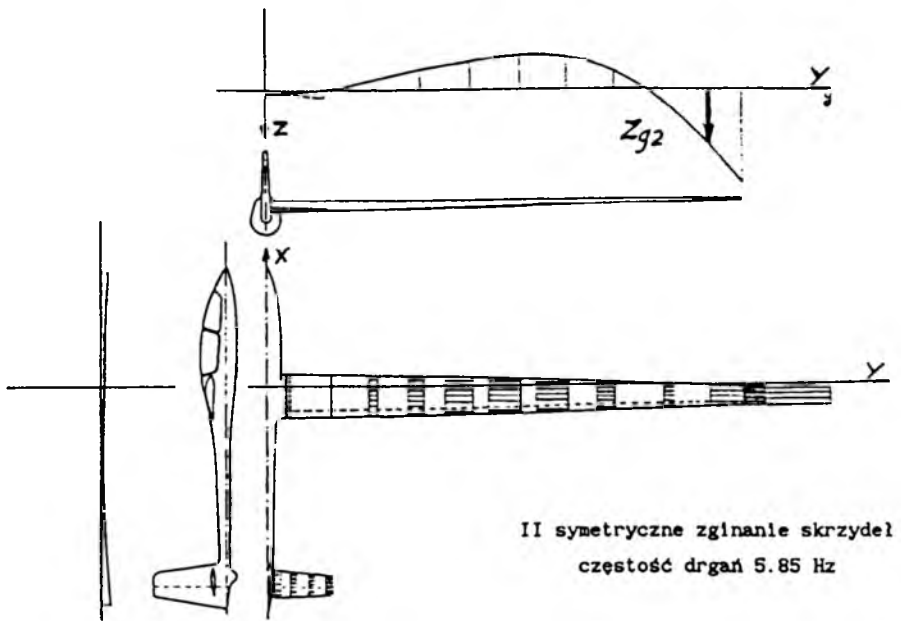
– ruchy wznoszące:

$$\begin{aligned}
 m\dot{w} + \zeta_1(E_1 + F_1) + \zeta_2(E_2 + F_2) + \zeta_3(E_3 + F_3) + \\
 - Z_0 - Z_uu - Z_w w - Z_\vartheta\vartheta - Z_qq - Z_{\delta_H}\delta_H - Z_{\dot{\zeta}_1}\dot{\zeta}_1 + \\
 - Z_{\dot{\zeta}_2}\dot{\zeta}_2 - Z_{\dot{\zeta}_3}\dot{\zeta}_3 - Z_{\zeta_1}\zeta_1 - Z_{\zeta_2}\zeta_2 - Z_{\zeta_3}\zeta_3 = 0
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

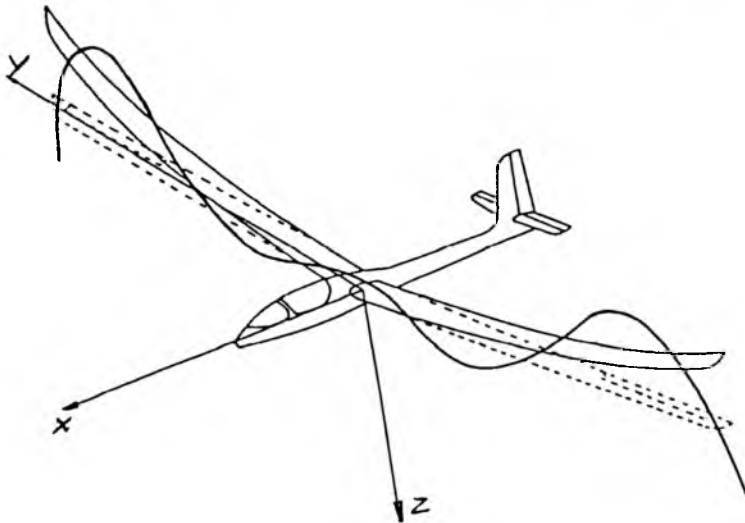
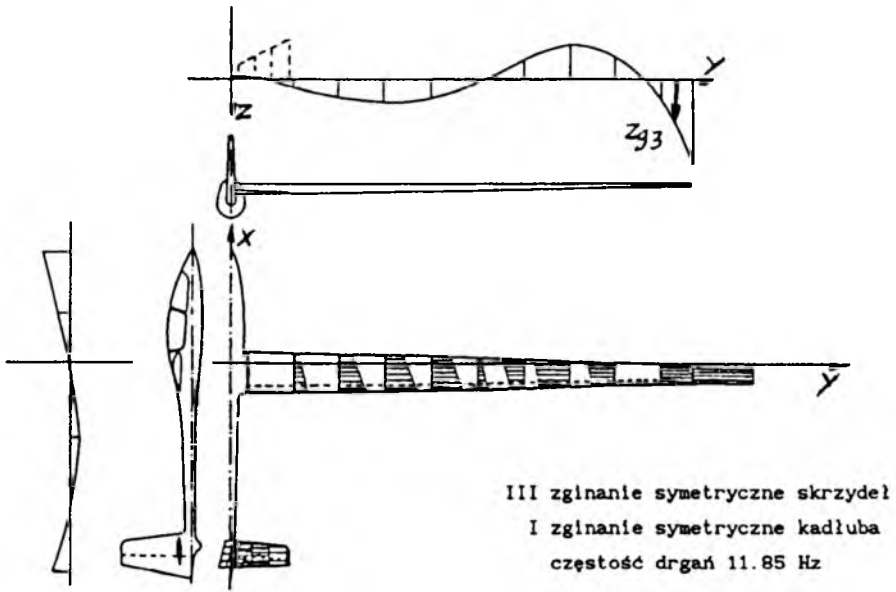


$$f_1(y) = -0.1629 + 0.01887 y^2 - 0.000272 y^4$$

Rys. 5. Pierwsza postać rezonansowa – giętne skrzydeł szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B"



Rys. 6. Druga postać rezonansowa – giętne skrzydeł szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B"



$$f_3(y) = 0.01819 + 0.02894 y^2 - 0.002246 y^4 + 0.5 \cdot 10^{-4} y^6$$

Rys. 7. Trzecia postać rezonansowa – giętne skrzydeł szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B"

– ruchy przechyłające:

$$(\dot{p} - \dot{q})E_0^4 - \dot{v}E_0 + \ddot{\zeta}_1 E_1^6 + \ddot{\zeta}_2 E_2^6 + \ddot{\zeta}_3 E_3^6 - Q_1^2(E_0^6 + E_1^6 + E_2^6 + E_3^6) + \quad (2.4)$$

$$- Q_1 p E_0^5 - Q_1 r E_0^4 - (U_1 r + W_1 p)E_0 - L_v v - L_p p - L_r r = 0$$

– ruchy pochylające:

$$\dot{u}E_0 + \dot{r}E_0^6 + \dot{q}E_0^4 + \dot{q}J_y + 2Q_1(\dot{\zeta}_1 E_{0,1} + \dot{\zeta}_2 E_{0,2} + \dot{\zeta}_3 E_{0,3}) - \ddot{\zeta}_1(E_1^5 + F_1^5) +$$

$$- \ddot{\zeta}_2(E_2^5 + F_2^5) - \ddot{\zeta}_3(E_3^5 + F_3^5) + Q_1 p E_0^6 + Q_1 W_1 E_0 + q W_1 E_0 + Q_1 w E_0 +$$

$$+ Q_1 W_1(\zeta_1 E_1 + \zeta_2 E_2 + \zeta_3 E_3) - U_1(\dot{\zeta}_1 F_1 + \dot{\zeta}_2 F_2 + \dot{\zeta}_3 F_3) - M_0 + \quad (2.5)$$

$$- M_u u - M_w w - M_q q - M_w \dot{w} - M_{\delta_H} \delta_H - M_{\dot{\zeta}_1} \dot{\zeta}_1 - M_{\dot{\zeta}_2} \dot{\zeta}_2 - M_{\dot{\zeta}_3} \dot{\zeta}_3 +$$

$$- M_{\zeta_1} \zeta_1 - M_{\zeta_2} \zeta_2 - M_{\zeta_3} \zeta_3 = 0$$

– ruchy odchylające:

$$-\dot{q}E_0^6 - \dot{p}E_0^5 - 2Q_1(\dot{\zeta}_1 E_1^6 + \dot{\zeta}_2 E_2^6 + \dot{\zeta}_3 E_3^6) + Q_1 r E_0^5 - N_v v - N_p p - N_r r = 0 \quad (2.6)$$

– sprężyste drgania odpowiadające I postaci rezonansowej:

$$\ddot{\zeta}_1(E_1^4 + F_1^4) + \ddot{\zeta}_2(E_{1,2} + F_{1,2}) + \ddot{\zeta}_3(E_{1,3} + F_{1,3}) + \dot{w}(E_1 + F_1) + \dot{p}E_1^6 +$$

$$- \dot{q}(E_1^5 + F_1) + E_1 U_1(Q_1 + q) + E_1 Q_1 u + Q_1^2(\zeta_1 E_1^4 + \zeta_2 E_{1,2} + \zeta_3 E_{1,3}) +$$

$$+ Q_1 E_{0,1} + 2Q_1 q E_{0,1} - Q r E_1^6 + \zeta_1 \omega_1^2 D_1 + E_{1\dot{\zeta}_1} \dot{\zeta}_1 + E_{1\dot{\zeta}_2} \dot{\zeta}_2 + \quad (2.7)$$

$$+ E_{1\dot{\zeta}_3} \dot{\zeta}_3 + E_{1\zeta_1}^H \zeta_1 + E_{1\zeta_2}^H \zeta_2 + E_{1\zeta_3}^H \zeta_3 = 0$$

– sprężyste drgania odpowiadające II postaci rezonansowej:

$$\ddot{\zeta}_2(E_2^4 + F_2^4) + \ddot{\zeta}_1(E_{1,2} + F_{1,2}) + \ddot{\zeta}_3(E_{2,3} + F_{2,3}) + \dot{w}(E_2 + F_2) + \dot{p}E_2^6 +$$

$$- \dot{q}(E_2^5 + F_2) + E_2 U_1(Q_1 + q) + E_2 Q_1 u + Q_1^2(\zeta_2 E_2^4 + \zeta_1 E_{1,2} + \zeta_3 E_{2,3}) +$$

$$+ Q_1 E_{0,2} + 2Q_1 q E_{0,2} - Q r E_2^6 + \zeta_2 \omega_2^2 D_2 + E_{2\dot{\zeta}_1} \dot{\zeta}_1 + E_{2\dot{\zeta}_2} \dot{\zeta}_2 + \quad (2.8)$$

$$+ E_{2\dot{\zeta}_3} \dot{\zeta}_3 + E_{2\zeta_1}^H \zeta_1 + E_{2\zeta_2}^H \zeta_2 + E_{2\zeta_3}^H \zeta_3 = 0$$

– sprężyste drgania odpowiadające III postaci rezonansowej:

$$\ddot{\zeta}_3(E_3^4 + F_3^4) + \ddot{\zeta}_1(E_{1,3} + F_{1,3}) + \ddot{\zeta}_2(E_{2,3} + F_{2,3}) + \dot{w}(E_3 + F_3) + \dot{p}E_3^6 +$$

$$- \dot{q}(E_3^5 + F_3) + E_3 U_1(Q_1 + q) + E_3 Q_1 u + Q_1^2(\zeta_3 E_3^4 + \zeta_1 E_{1,3} + \zeta_2 E_{2,3}) +$$

$$+ Q_1 E_{0,3} + 2Q_1 q E_{0,3} - Q r E_3^6 + \zeta_3 \omega_3^2 D_3 + E_{3\dot{\zeta}_1} \dot{\zeta}_1 + E_{3\dot{\zeta}_2} \dot{\zeta}_2 + \quad (2.9)$$

$$+ E_{3\dot{\zeta}_3} \dot{\zeta}_3 + E_{3\zeta_1}^H \zeta_1 + E_{3\zeta_2}^H \zeta_2 + E_{3\zeta_3}^H \zeta_3 = 0$$

Ponieważ układ równań wyprowadzono w układzie samolotowym, związanym ze środkiem masy szybowca, wszystkie pochodne aerodynamiczne muszą być policzone w tym samym układzie współrzędnych.

3. Pochodne aerodynamiczne dla szybowca odkształcalnego

Część pochodnych dla szybowca odkształcalnego policzona została wg. poprzednich opracowań [18,19]. Pochodne aerodynamiczne sił, które zmieniają się z powodu odkształcalności statycznej są następujące [2]:

– pochodna aerodynamiczna momentu przechylającego względem zmian prędkości liniowej V :

$$L_{v\vartheta_s} = -\frac{1}{2}\rho V_0^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (C_z + \Delta C_z + C_x \Delta \alpha) c(y) y dy \quad (3.1)$$

$$\Delta \alpha = \frac{\vartheta_z}{V_0} = \frac{\vartheta_{z0}}{V_0} + \frac{\vartheta_{z\zeta}(y)v}{V_0} \quad (3.2)$$

gdzie:

$$\vartheta_z = \vartheta_{z0} + \vartheta_{z\zeta}(y) \quad (3.3)$$

Po wstawieniu (3.2) do (3.1) otrzymano:

$$\begin{aligned} L_{v\vartheta_z} &= \frac{\partial L_{v\vartheta_s}}{\partial v} = -\frac{1}{2}\rho V_0 \vartheta_{z0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (a + C_x) c(y) y dy + \\ &- \frac{1}{2}\rho V_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (a + C_x) c(y) \vartheta_{z\zeta}(y) y dy \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pochodne wynikające z odkształcalności sprężystej szybowca mają postać [2], $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$:

$$X_{\zeta_i} = -\rho u \frac{\partial C_{x_s}}{\partial \alpha} \int_0^{\frac{b}{2}} c(y) f_i(y) dy - \frac{1}{2}\rho V_{HSH} \frac{\partial C_{x_H}}{\partial \alpha_H} f_{ki}(x_H) \quad (3.5)$$

$$X_{\zeta_i} = -\frac{1}{2}\rho V_{HSH} \frac{\partial C_{x_H}}{\partial \alpha_H} \frac{df_{ki}(x_H)}{dx_H} \quad (3.6)$$

$$Z_{\zeta_i} = -\rho u \frac{\partial C_{z_s}}{\partial \alpha} \int_0^{\frac{b}{2}} c(y) f_i(y) dy - \frac{1}{2}\rho V_{HSH} \frac{\partial C_{z_H}}{\partial \alpha_H} f_{ki}(x_H) \quad (3.7)$$

$$Z_{\zeta_i} = -\frac{1}{2}\rho V_{HSH} \frac{\partial C_{z_H}}{\partial \alpha_H} \frac{df_{ki}(x_H)}{dx_H} \quad (3.8)$$

$$M_{\zeta_i} = -\rho u \frac{\partial C_{m_{y_s}}}{\partial \alpha} \int_0^{\frac{b}{2}} c^2(y) f_i(y) dy - \frac{1}{2} \rho V_H s_H \frac{\partial C_{m_{y_H}}}{\partial \alpha_H} f_{ki}(x_H) \quad (3.9)$$

$$M_{\zeta_i} = -\frac{1}{2} \rho V_H s_H \frac{\partial C_{m_{y_H}}}{\partial \alpha_H} \frac{df_{ki}(x_H)}{dx_H} \quad (3.10)$$

$$E_{j\zeta_i} = -\rho u \frac{\partial C_{z_s}}{\partial \alpha} \int_0^{\frac{b}{2}} c_s(y) f_j(y) f_i(y) dy + \quad (3.11)$$

$$-\frac{1}{2} \rho V_H s_H \frac{\partial C_{z_{jH}}}{\partial \alpha_H} f_{kj}(x_H) f_{ki}(x_H)$$

$$E_{j\zeta_i}^H = \frac{1}{2} \rho V_H^2 s_H \frac{\partial C_{z_{jH}}}{\partial \alpha_H} \frac{df_{ki}(x_H)}{dx_H} f_{kj}(x_H) \quad (3.12)$$

gdzie $f_1(y)$ (rys.5), $f_2(y)$ (rys.6), $f_3(y)$ (rys.7) są to funkcje ugięcia skrzydeł wyznaczone na drodze badań.

Wyznaczone pochodne aerodynamiczne można wykorzystać przy obliczeniach stateczności i własności dynamicznych klasycznych obiektów latających.

4. Symulacja numeryczna – parametry lotu

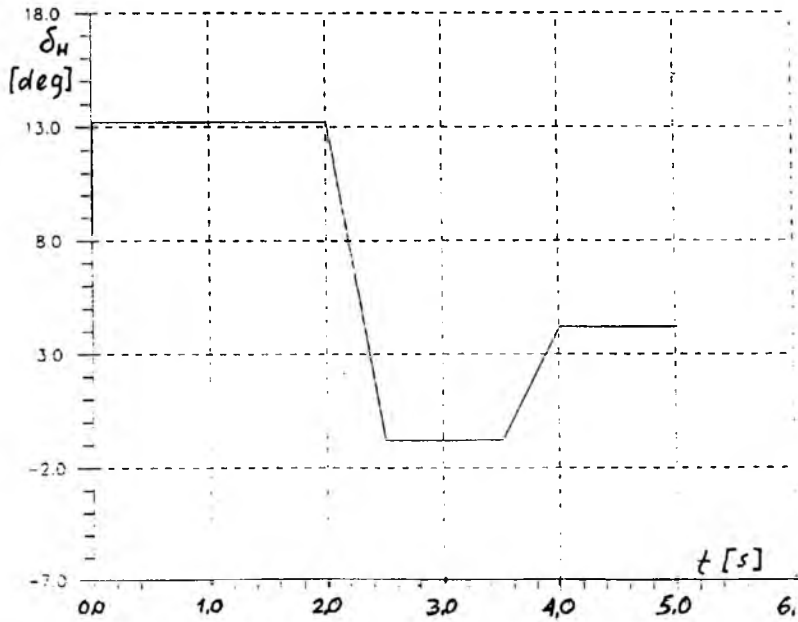
Przykładowe obliczenia przeprowadzono dla szybowca wyczynowego SZD-42-2 "JANTAR 2B". Szybowiec wykonuje symetryczne wyrwanie z ustalonego lotu ślizgowego z prędkością V_{dop} . Lot odbywa się przy następujących parametrach dla $t = 0$:

wysokość	$h = 960$ m;
prędkość	$V_0 = 220$ km/h;
kąt toru	$\gamma = -5.04$ deg;
kąt natarcia	$\alpha = -3.03$ deg;
kąt wychylenia steru	$\delta_H = 13.2$ deg;
współczynnik obciążenia	$n_z = 0.93$.

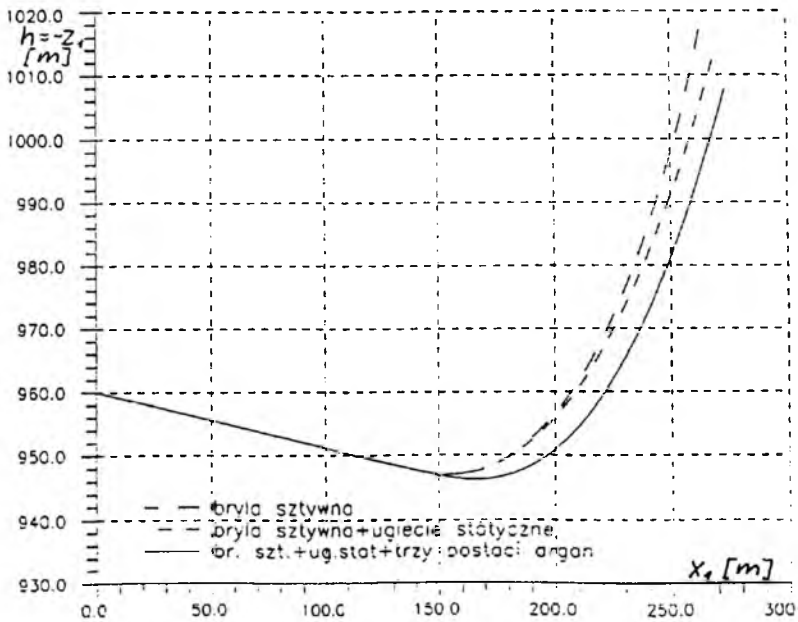
Szybowiec był sterowany przez pilota, który wychylał ster wysokości wg. rys.8.

Całkując numerycznie równania ruchu przy założeniu sterowania, wyznaczono trajektorię lotu (rys.9) oraz zmiany wysokości lotu w czasie manewru (rys.10) dla rozmaitych modeli fizycznych:

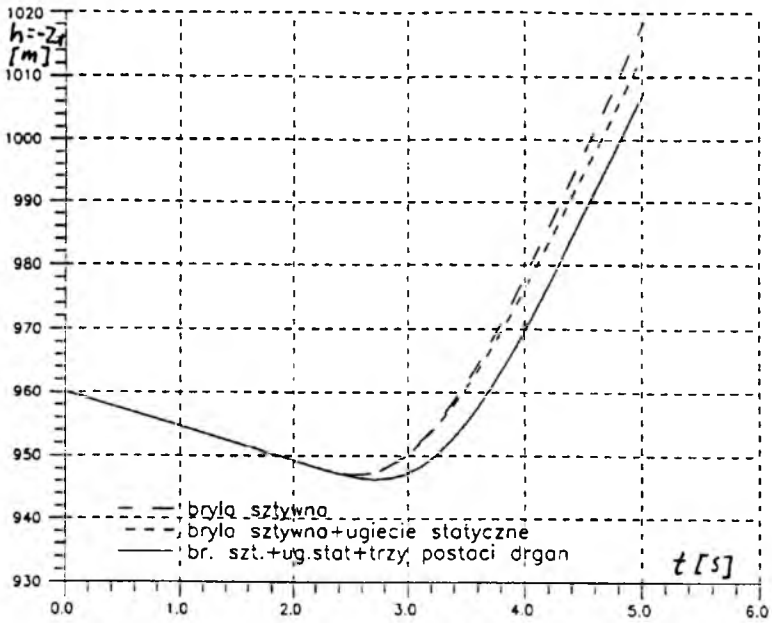
– szybowiec nieodkształcalny, jako bryła sztywna,



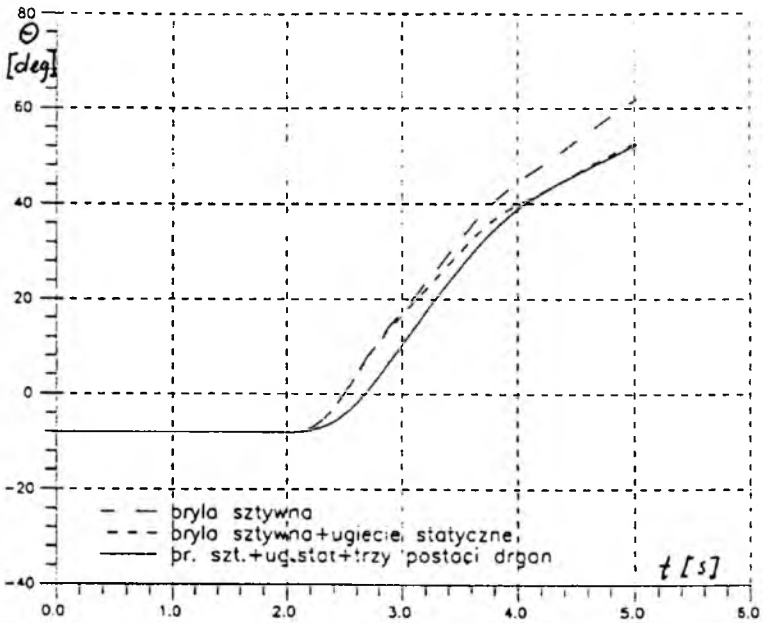
Rys. 8. Wychylenia steru wysokości δ_{II} w fazie wyrwania



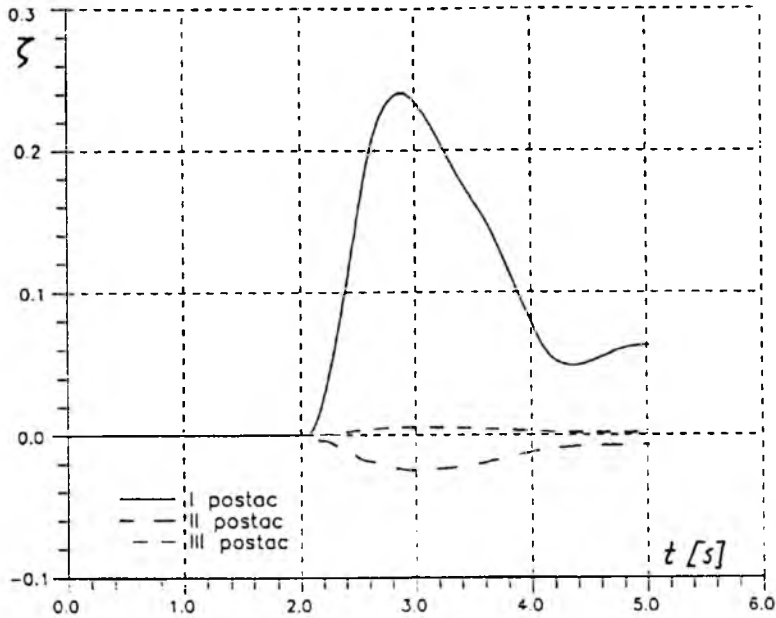
Rys. 9. Trajektoria lotu szybowca – wyrwanie



Rys. 10. Zmiana wysokości lotu w czasie manewru wyrwania



Rys. 11. Zmiana kąta pochylenia szybowca w czasie manewru wyrwania



Rys. 12. Zmiany amplitudy drgań ζ_{gj} końca skrzydła w czasie manewru wyrwania

- szybowiec z ugiętymi statycznie skrzydłami,
- szybowiec z ugiętymi skrzydłami, sprężyste drgającymi.

Na rys. 11 przedstawiono zmiany kąta pochylenia szybowca θ w czasie manewru, oraz zmiany amplitudy drgań końca skrzydeł w czasie (rys.12).

Przykładowo pokazano wybrane parametry wyznaczone na drodze symulacji numerycznej. Wyraźnie widoczna jest dominacja drgań o pierwszej postaci rezonansowej I nad wyższymi postaciami.

Uwzględnienie odkształcalności szybowca ma widoczny wpływ na trajektorię lotu – bardziej "miękkie wyprowadzenie", efekt "resorowania" przez sprężyste skrzydła.

5. Analiza numeryczna stateczności dynamicznej testowego szybowca

Dynamiczne równania ruchu (2.1) ÷ (2.9) sprowadzono do postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

i po przekształceniach uzyskano w postaci:

$$\dot{z} = \mathbf{R}z \quad (5.2)$$

gdzie macierz stanu \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Badanie stateczności sprowadzono do zagadnienia na wartości własne macierzy stanu \mathbf{R} (5.3), wyznaczając wartości własne w postaci:

$$\lambda_{j,j+1} = \zeta_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1} \quad (5.4)$$

przy czym:

– czas słumienia amplitudy do połowy:

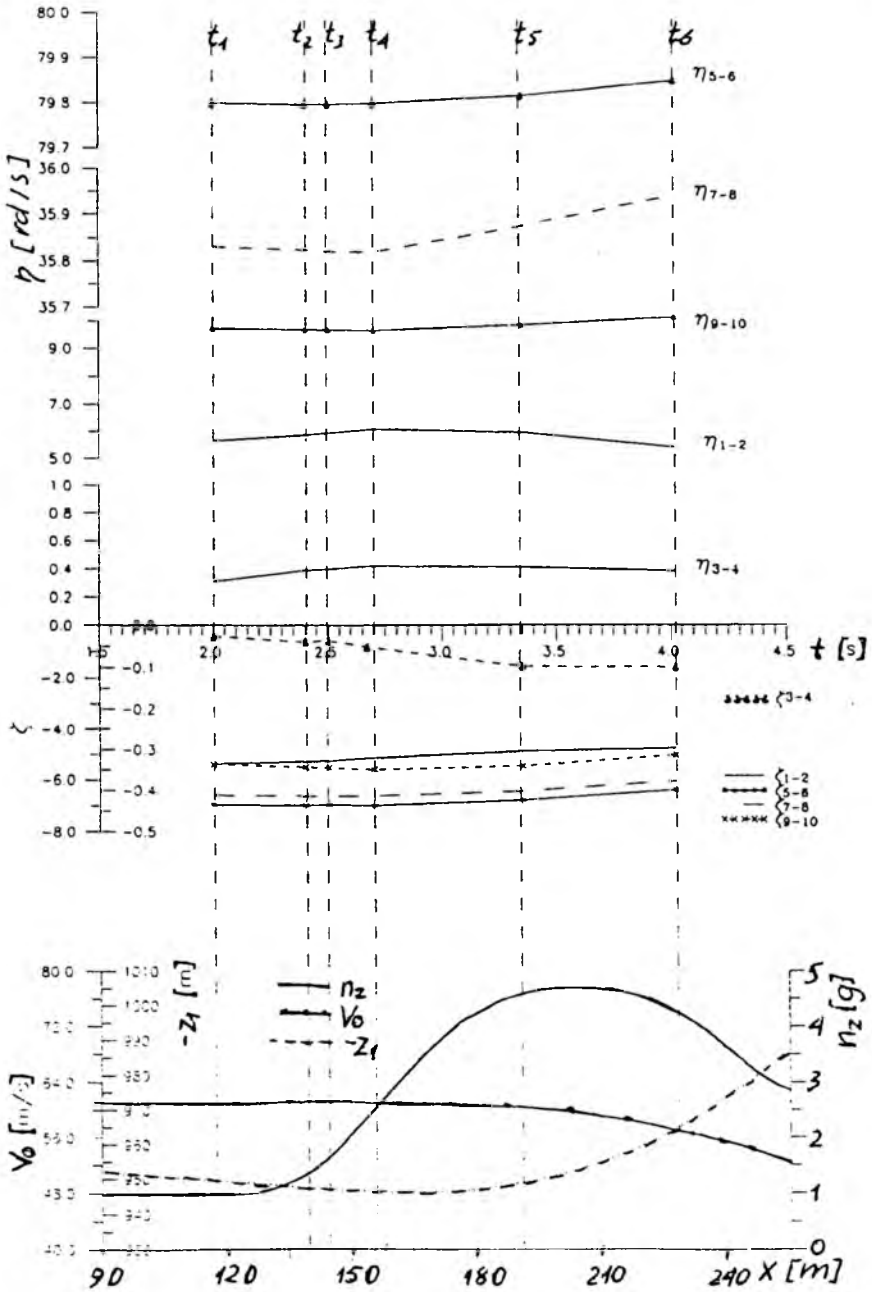
$$T_{\frac{1}{2}j} = \frac{\ln 2}{\zeta_j} \quad (5.5)$$

– okres wahań:

$$T_j = \frac{2\pi}{\eta_j} \quad (5.6)$$

Obliczenia przeprowadzono dla siedmiu przypadków:

- (a) szybowiec ze skrzydłami prostymi (stateczność podłużna),
- (b) szybowiec z ugiętymi statycznie skrzydłami (stateczność podłużna),
- (c) I postać drgań giętnych skrzydeł (stateczność podłużna),
- (d) II postać drgań giętnych skrzydeł (stateczność podłużna),
- (e) III postać drgań giętnych skrzydeł (stateczność podłużna),
- (f) stateczność podłużna dla szybowca traktowanego jako bryła sztywne + odkształcone statycznie skrzydła + trzy postacie drgań sprężystych skrzydeł (I, II, III),
- (g) stateczność integralna dla szybowca traktowanego jako bryła sztywna + odkształcone statycznie skrzydła + trzy postacie drgań sprężystych skrzydeł (I, II, III) w locie przestrzennym.



Rys. 13. Trajektoria lotu w wyrwaniu $z_1 = f(x)$, zmiana prędkości lotu V_0 , współczynnika obciążenia n_z oraz zmiany tłumienia ζ_j i częstości wahań η_j stateczności dynamicznej

Tablica 1. Wartości własne dla różnych konfiguracji szybowca

$\lambda =$ $\zeta \pm i\eta$	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
	sztywne	sztywne+ statyczne	szt.+stat. +I postać	szt.+stat. +II postać	szt.+stat. +III postać	b+c+ d+e	integr.
oscylacje szybkie							
$\lambda_{1,2}$	-5.5386±	-5.5873±	-5.3682±	-5.5813±	-5.5865±	-5.3559±	-5.3021±
	i5.70348	i4.83655	i5.56321	i4.84234	i4.83729	i5.6519	i4.8652
wahania fugoidalne							
$\lambda_{3,4}$	-0.0021±	-0.0266±	-0.0267±	-0.0341±	-0.0265±	-0.0269±	-0.0397±
	i0.38872	i0.31153	i0.31159	i0.31048	i0.31145	i0.31245	i0.30875
przemieszczenia pionowe wywołane drganiami skrzydeł III postać $\nu_{III} = 74.45 \text{ rd/s}$							
$\lambda_{5,6}$	-	-	-	-	-6.9063±	-6.9507±	-6.7931±
	-	-	-	-	i74.1492	i79.7989	i79.7037
przemieszczenia pionowe wywołane drganiami skrzydeł II postać $\nu_{II} = 36.76 \text{ rd/s}$							
$\lambda_{7,8}$	-	-	-	-6.7245±	-	-6.5825±	-6.5455±
	-	-	-	i36.1441	-	i35.8311	i34.9579
przemieszczenia pionowe wywołane drganiami skrzydeł I postać $\nu_I = 11.18 \text{ rd/s}$							
$\lambda_{9,10}$	-	-	-5.3682±	-	-	-5.3868±	-8.2069±
	-	-	i9.71919	-	-	i9.7152	i9.25552
przechylenia							
λ_{11}	-	-	-	-	-	-	-35.9697
odchylenie spiralne							
λ_{12}	-	-	-	-	-	-	-0.04115
holendrowanie							
$\lambda_{13,141}$	-	-	-	-	-	-	-0.0001±
	-	-	-	-	-	-	-35.9697

Wyniki otrzymane dla przypadków (a) ÷ (g) są zamieszczone w tablicy 1 i dla przypadku (f) na wykresie (rys.13). Dla przypadków (a) i (b) otrzymano po dwie pary pierwiastków zespolonych sprzężonych, odpowiadających ruchom tłumionym tj. oscylacjom szybkim i wahaniom fugoidalnym:

- dla przypadków (a) ÷ (g):
 $\lambda_{1,2} = \zeta_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$ - oscylacje szybkie;
 $\lambda_{3,4} = \zeta_{3,4} \pm i\eta_{3,4}$ - wahania fugoidalne;
- dla przypadków (e), (f), (g):
 $\lambda_{5,6} = \zeta_{5,6} \pm i\eta_{5,6}$ - drgania sprężyste skrzydła - postać III;
- dla przypadków (d), (f), (g):
 $\lambda_{7,8} = \zeta_{7,8} \pm i\eta_{7,8}$ - drgania sprężyste skrzydła - postać II;
- dla przypadków (c), (f), (g):

$\lambda_{9,10} = \zeta_{9,10} \pm i\eta_{9,10}$ – drgania sprężyste skrzydła – postać I;

- dla przypadku (g) (stateczność integralna):

$\lambda_{11} = \zeta_{11} \pm i\eta_{11}$ – aperiodyczne przechylenie szybowca (stateczność przechylenia);

$\lambda_{12} = \zeta_{12}$ – aperiodyczne odchylenie szybowca (stateczność spiralna);

$\lambda_{13,14} = \zeta_{13,14} \pm i\eta_{13,14}$ – stateczność holendrowania.

6. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić:

- ugięcie statyczne skrzydeł ma niewielki wpływ na rozpatrywane parametry lotu;
- decydujący wpływ na zmiany obciążeń mają niskie częstotliwości drgań rezonansowych – łagodzą obciążenia i zmianę kąta pochylenia;
- w przypadku badania stateczności wystąpiło wyraźne sprzężenie dwóch postaci ruchu: oscylacji szybkich i przemieszczeń pionowych wywołanych odkształcalnością skrzydeł;
- szybowiec traktowany jako obiekt sztywny jak i z drgającymi sprzężenie skrzydłami jest stateczny dynamicznie, części rzeczywiste ζ_j wszystkich wartości własnych λ_j są ujemne tzn. $\lambda_j < 0$;
- opracowany model matematyczny jest uniwersalny, pozwala na analizę własności dynamicznych odkształcalnych obiektów latających przy zastosowaniu dyskretyzacji przez postacie rezonansowe, lub wcześniej wyznaczone numerycznie postacie własne obiektów.

Literatura

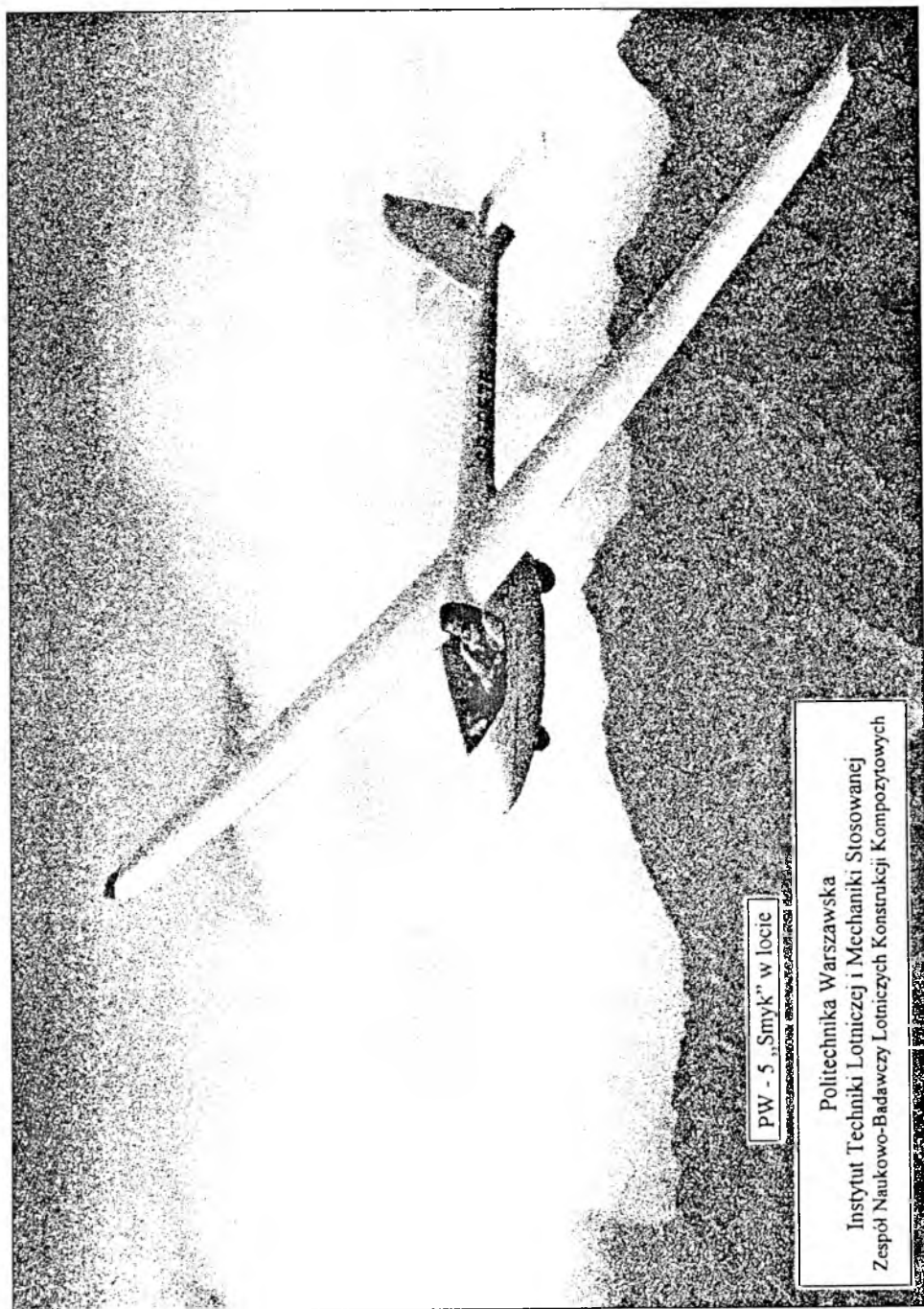
1. ALEKSANDROWICZ R., SZEMPLIŃSKA W., MARYNIAK J., *Ground Resonance Testing of Sailplanes*, Aero-Revue 4, 1959
2. BARDAKJI S., *Symulacja numeryczna i analiza wpływu sprężystości skrzydeł szybowca na własności dynamiczne i stateczność integralną w locie*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1993

3. ŁANECKA-MAKARUK W., MARYNIAK J., *Zagadnienie flutteru skrzydeł szybowców*, Technika Lotnicza, 10-11, Warszawa 1964
4. MARYNIAK J., *The Influence of Aileron Flexibility and Mass Unbalance on the Flutter Speed*, Aero-Review, 2, 1967
5. MARYNIAK J., RUBELEK P., ZŁOCKA M., *Primenenija uravnenij Boltzmann-Gamela v issledowanijach bokowej ustojcivosti uprugogo letajuscego obiektu*, Godisnik na VUZ, Prilozna Matematika, XI, kn.3, Sofia 1975
6. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika 35, Warszawa 1975
7. MARYNIAK J., OSOWSKI T., *Modelowanie fizyczne i matematyczne startu szybowca za pomocą lin gumowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika, z.107, Gliwice 1992
8. MARYNIAK J., LOSTAN M., *Wpływ odkształcalności giętej skrzydeł na stateczność podłużną szybowca*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 8, 2, PWN, Warszawa 1970
9. MARYNIAK J., BARDAKJI S., *Uproszczony model i analiza wpływu sprężystości giętej skrzydeł szybowca na parametry lotu w wyrwaniu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 1198, Mechanika, z.113, Gliwice 1992
10. MICHAŁAK A., *Analiza wpływu odkształcalności giętej skrzydeł na stateczność dynamiczną szybowca*, Dyplomowa praca magisterska (prom. J.Maryniak), Wydz. MEiL, PW, Warszawa 1986 (nie publikowano)
11. *Próby rezonansowe szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B"*. Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa, Warszawa 1986 (nie publikowano)
12. SCANLAN R.H., ROSENBAUM R., *Drgania i flutter samolotów*, PWN, Warszawa 1964
13. SKOLIK G., *Wpływ odkształcalności giętej skrzydeł szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B" na parametry lotu - I postać giętna*, Dyplomowa praca magisterska (prom. J.Maryniak), Wydz. MEiL, PW, Warszawa 1991 (nie publikowano)
14. STAFIEJ W., *Wpływ górnopłytkowego hamulca aerodynamicznego na obciążenia skrzydła szybowca*, Technika Lotnicza i Astronautyczna, 4, 1978
15. SZEMPLIŃSKA W., ALEKSANDROWICZ R., MARYNIAK J., *Próby rezonansowe szybowców*, Technika Lotnicza, 6, 1968
16. TOCZEK K., *Wpływ statycznego ugięcia skrzydeł na własności lotu szybowca na przykładzie szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B"*, Dyplomowa praca magisterska (prom. J.Maryniak), Wydz. MEiL, PW, Warszawa 1985 (nie publikowano)
17. TOCZEK K., *Wpływ odkształcalności giętej skrzydeł szybowca SZD-42-2 "Jantar 2B" na parametry lotu - II postać giętna*, Dyplomowa praca magisterska (prom. J.Maryniak), Wydz. MEiL, PW, Warszawa 1991 (nie publikowano)
18. MARYNIAK J., *Ogólny model matematyczny sterowanego samolotu*, w "Mechanika w Lotnictwie", PTMTS, Warszawa 1992
19. MARYNIAK J., *Ogólny model symulacji samolotu*, Sprawozdanie nr 140, Zespół N-B DOR, ITLiMS, PW, Warszawa 1985 (nie publikowano)

Dynamic Stability of a Controlled Sailplane with Deformable, Elastic Wings

Summary

The paper presents the dynamics of a sailplane. The rigid body degrees of freedom along with the elastic vibrations of wings superimposed on their static deflections have been taken into account. The distributed elastic properties of wings have been discretised through the frequencies and shapes obtained in ground vibrations tests (GVT). The flight parameters has been found for the SZD-42-2 "Jantar 2B" sailplane. Dynamic stability of the system have been tested for three different physical models: (1) – rigid body, (2) – rigid body with statically deformed wings, (3) – case (2) with elastic vibrations included.



PW - 5 „Smyk” w locie

Politechnika Warszawska
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Zespół Naukowo-Badawczy Lotniczych Konstrukcji Kompozytowych

PILOT-CZŁOWIEK W SYSTEMIE STEROWANIA SAMOŁOTEM I W SYMULATORZE LOTU

JERZY MARYNIAK

*Institut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska*

AGNIESZKA MARYNIAK

*Zakład Psychologii Klinicznej
Centrum Zdrowia Dziecka Warszawa-Międzylesie*

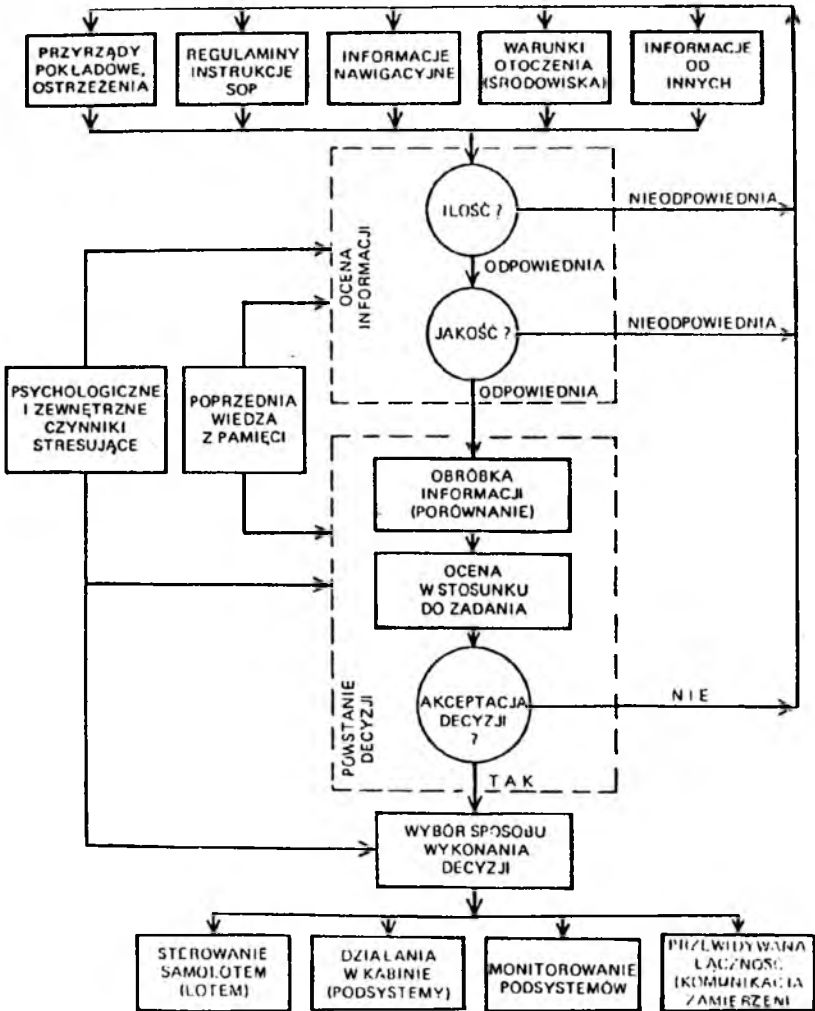
W pracy przedstawiono udział człowieka w systemach sterowania obiektem i odpowiadającym mu symulatorze. Pokazano predyspozycje człowieka w systemach sterowania.

Przedstawiono jakim warunkom musi odpowiadać symulator aby nabyte reakcje, odruchy i decyzje przez pilota były równowazne w sterowanym samolocie.

Człowiek pilotujący samolot poddany jest bodźcom zewnętrznym pochodzącym od: otoczenia, dynamiki samolotu, obserwacji przyrządów pokładowych i informacji radiowych [13]. Bodźce poprzez receptory oddziałują na zmysły człowieka i są przekazywane do mózgu. Mózg spełnia również rolę procesora, w którym po skorzystaniu z pamięci i przetworzeniu w procesie myślenia bodźce jako impulsy są przekazywane na efekторы [13] w postaci reakcji nieświadomych – reakcje wegetatywne i odruchy oraz w postaci reakcji świadomych jako realizacja podjętych decyzji [1,3,4,5,13,14,15,16,18,19,20].

Samolot i odpowiadający mu symulator różnią się kinematyką, dynamiką, położeniem, dynamiką napędów i sterowaniem [6,7,8,10,11,12,13,14] (rys.1). Należy dążyć aby wrażenia odczucia i złudzenia pilota w czasie lotu samolotem i treningu w symulatorze (rys.1) były jak najbardziej zbliżone.

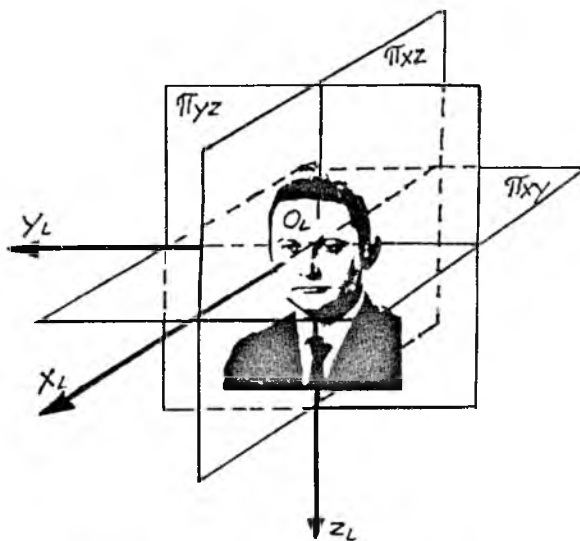
Należy dążyć aby wyrobione odruchy, reakcje i decyzje podejmowane przez pilota były identyczne zarówno w samolocie jak i w symulatorze, co powinno być miarą jakości symulatora, (rys.1) [13].



Rys. 3. Model informacyjny – Laubera 1975 NASA, praktycznie stosowany przez NTBS badania wypadków lotniczych

pod uwagę zastosowanie modeli matematycznych do celów uniwersalnych symulatorów lotu, przyjąć właściwe układy odniesienia.

Głowa człowieka jest wyposażona w eksteroreceptory: wzrok, słuch, węch, smak oraz proprioreceptory równowagi statycznej – system otoliczny i dynamiczny – kanały półokrężne [13].

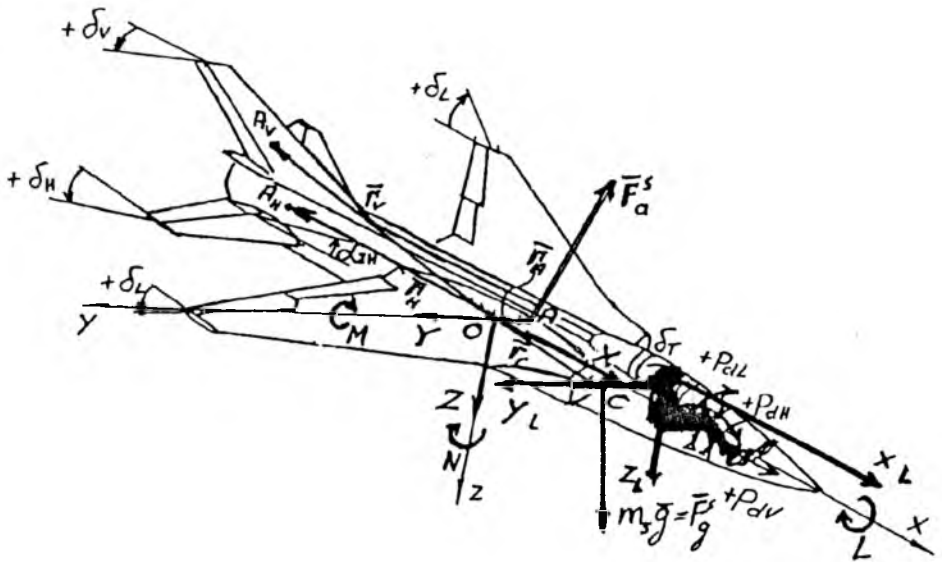


Rys. 4. Trójścian zasadniczy głowy

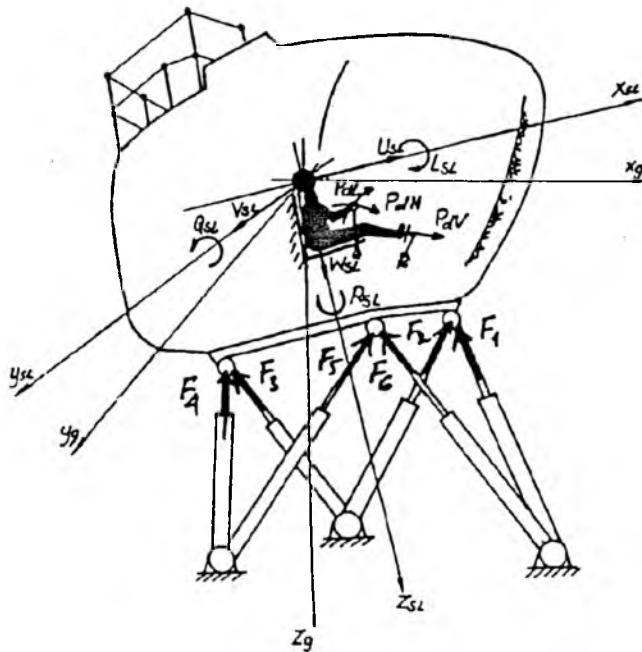
W tym celu przez głowę poprowadzono trzy płaszczyzny tworzące "trójścian zasadniczy głowy" (rys.4): płaszczyznę czołową π_{yz} , płaszczyznę strzałkową π_{xz} oraz płaszczyznę poziomą π_{xy} . Wzajemne krawędzie przecięcia płaszczyzn wyznaczają prawoskrętny układ odniesienia $O_L x_L y_L z_L$ związany z głową człowieka [17], rys.4. Głowa jest właściwym elementem umieszczenia układu odniesienia, w którym będą wyznaczane parametry kinematyczne ruchu tak samolotu (rys.5) jak i symulatora (rys.6).

Transmitancje przedstawiające przenoszenie przyspieszeń ruchów translacyjnych samolotu U, V, W na odczuwane przez człowieka U_L, V_L, W_L (rys.7) opracowano i przedstawiono w [17], po zmodyfikowaniu pokazano na rys.7 wprowadzając współczynniki wzmocnień i stałe czasowe oraz czas zwłoki wg [17]. Natomiast na rys.8 pokazano transformacje prędkości kątowych samolotu P, Q, R na odczuwane przez człowieka P_L, Q_L, R_L wprowadzając również współczynniki wzmocnień, stałe czasowe i czas zwłoki wg [17].

Przykładowo na podstawie [17] przedstawiono odpowiedź kinematyczną symulatora $\ddot{X}_{SL}, \dot{X}_{SL}$ i X_{SL} na jednostkowe wymuszenie skokowe przyspie-



Rys. 5. Układy odniesienia związane z samolotem i głową pilota, wychylenia sterów oraz działające siły



Rys. 6. Układy odniesienia związane z symulatorem i głową pilota oraz siły wysięgników działające na platformę symulatora

$$D=0 \quad |d| \leq d_{TH}$$

$$D=d \cdot \text{SGN}(d) \quad |d| > d_{TH}$$

$$\frac{\hat{f}_L}{f} = \frac{K(\tau_a s + 1)}{(\tau_L s + 1)(\tau_S s + 1)}$$

$$\dot{x} = Ax + Bf$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [b_1 \ b_0]^T$$

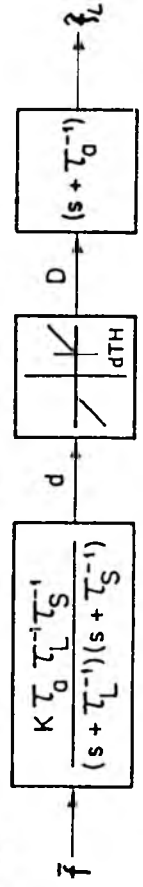
$$\bar{f} = \bar{a} - \bar{g}$$

$$a_0 = (\tau_L \tau_S)^{-1}$$

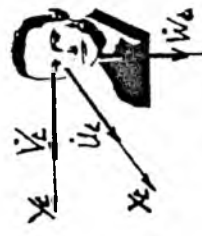
$$a_1 = \tau_L^{-1} + \tau_S^{-1}$$

$$b_0 = K(\tau_L \tau_S)^{-1}$$

$$b_1 = K\tau_a(\tau_L \tau_S)^{-1}$$



$$\bar{f} = \text{col}[\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}]$$



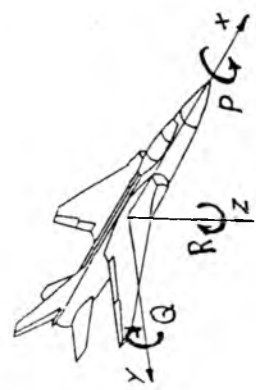
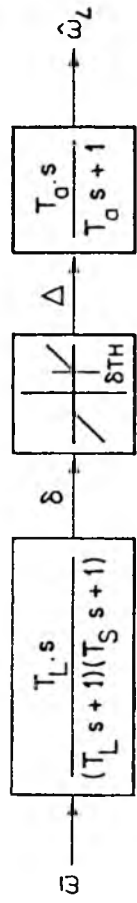
$$\hat{f}_L = \text{col}[\dot{u}_L, \dot{v}_L, \dot{w}_L]$$

przyspieszenie			
	podłużne \dot{u}	boczne \dot{v}	pionowe \dot{w}
τ_L (s)	5.33	5.33	5.33
τ_S (s)	0.66	0.66	0.66
τ_a (s)	13.2	13.2	13.2
K	0.4	0.4	0.4
δ_{TH} (deg/s)	0.17	0.17	0.28

Rys. 7. Funkcja przenoszenia składowych przyspieszeń liniowych samolotu odczuwane przez pilota

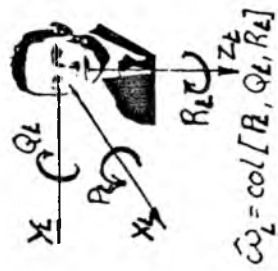
$$\frac{\hat{\omega}_L}{\omega} = \frac{T_L T_a s^2}{(T_L s + 1)(T_S s + 1)(T_a s + 1)}$$

$\Delta = 0 \quad |\delta| \leq \delta_{TH}$
 $\Delta = \delta - \text{sgn}(\delta) \delta_{TH}$
 $|\delta| > \delta_{TH}$



$$\bar{\omega} = \text{col}[P, Q, R]$$

prędkości kątowe			
	pochylenia Q	przechylenia P	odchylenia R
T_L (s)	5.3	6.1	10.3
T_S (s)	0.1	0.1	0.1
T_a (s)	30	30	30
δ_{TH} (deg/s)	3.6	3	2.6



$$\hat{\omega}_L = \text{col}[R_L, Q_L, P_L]$$

Rys. 8. Funkcja przeniesienia składowych prędkości kątowych samolotu przez pilota

szenia samolotu $\ddot{X} = A = 1 \text{ m/s}^2$ (rys.9).

Przy projektowaniu systemów sterowania samolotów i odpowiadającym im symulatorów lotu należy uwzględnić czas latencji t_L w procesach nerwowych to znaczy czas jaki upływa między bodźcem a reakcją, zależy on od właściwości przewodzenia impulsów przez komórki nerwowe [23] i jest różny dla poszczególnych kanałów zmysłów człowieka. W tabelicy 1 [20] podano przykładowe czasy latencji w sekundach.

Tablica 1. Czas latencji prostej reakcji psychomotorycznej przy działaniu bodźców różnej modalności (źródło: Łomow, 1966)

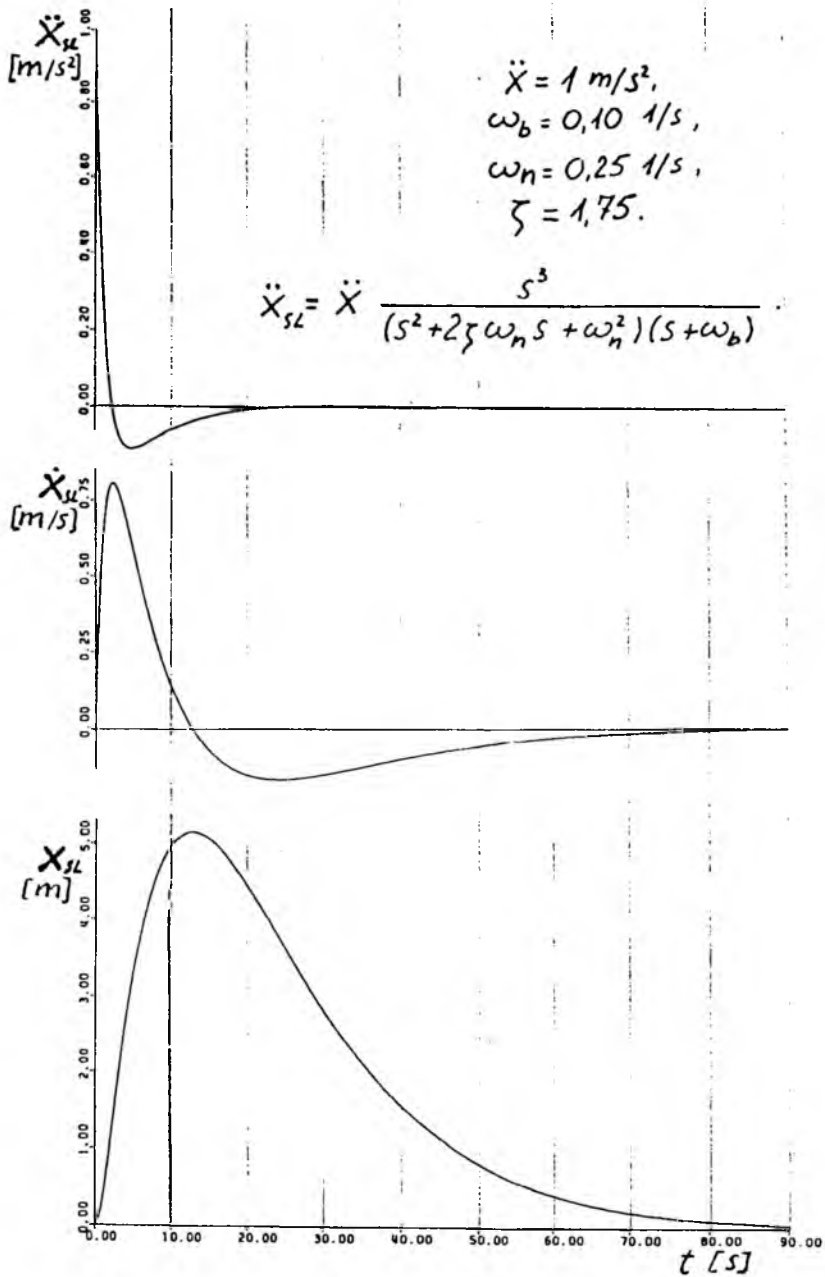
Analizator-receptor	Czas latencji [s]
Dotykowy (palce dłoni)	0.09 ÷ 0.22
Słuchowy (dźwięk)	0.12 ÷ 0.18
Wzrokowy (światło)	0.15 ÷ 0.22
Węchowy (zapach)	0.31 ÷ 0.39
Termiczny (ciepło-zimno)	0.28 ÷ 1.60
Smakowy (słodkie-gorzkie)	0.45 ÷ 1.08
Aparat przedsionkowy ucha (obroty)	0.400

Należy szczególnie zwracać uwagę na przeprowadzanie eksperymentów w locie i odpowiednio na symulatorze. W [3] przytoczone są materiały uzyskane eksperymentalnie w realnym locie i na symulatorach. W eksperymentach przeprowadzonych z zastosowaniem symulatora istotnym sygnałem pobudzającym pilota do działania były wskazania sztucznego horyzontu, zaś w locie – przyspieszenia kątowe. Różnice w środowisku informacyjnym w locie i na symulatorze znalazły swoje odbicie w różnicach ilościowych wskaźników efektywności działania pilotów, tablica 2 [3].

W tabelicy 2 "okres latencji" jest to czas jaki upływa w odroczonej reakcji między bodźcem a reakcją [23] czas utajenia, czas nieuwidaczniania.

Różnice wynikające z badań w locie i na symulatorze (Tablica 2) wynikają z procesu poznania i analizy, na który składa się:

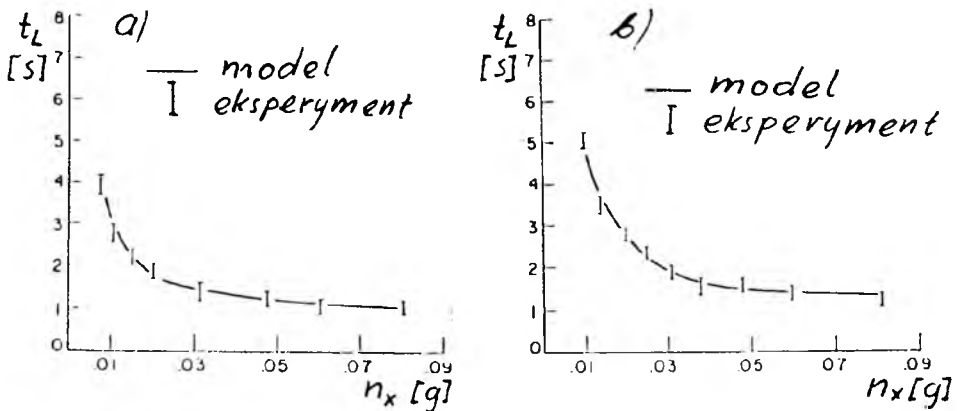
- wykrycie sygnału,
- rozpoznanie sygnału,
- identyfikacja sygnału,
- ocena sytuacji,
- wybór metody i działanie.



Rys. 9. Odpowiedź kinematyczna modelu symulatora przyspieszenie, prędkość, przemieszczenie na jednostkowe skokowe, wymuszenie przyspieszeniem podłużnym samolotu

Tablica 2. Zależność wskaźników jakości działania pilota od modelowania systemu informacji sytuacji awarii pilota automatycznego

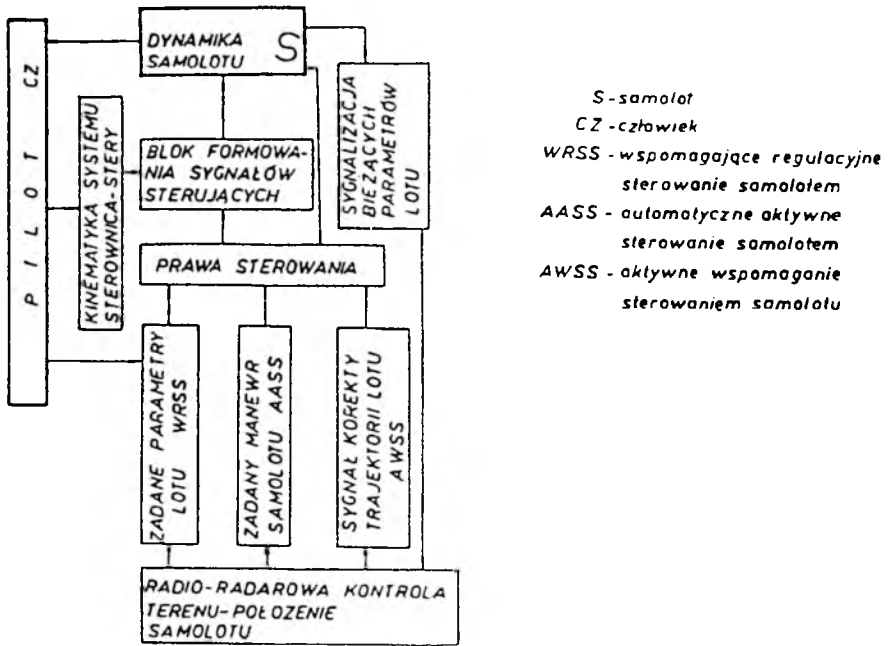
Porównywane wskaźniki jakości działania	Pełen system informacji w eksperym. lotniczym na samolocie	Tylko sygnał instrumentalny w eksperymencie symulatorowym
Okres latencji reakcji motorycznej na awarię	0.1 ÷ 0.4 s	0.7 ÷ 5.5 s
Prawdopodobieństwo rozpoznania sytuacji	0.47	1.0
Czas rozpoznania awarii	2 ÷ 108 s	3 ÷ 6 s
Przyczyna trudności rozpoznania i błędnych czynności	złożoność rozpoznania sytuacji	złożoność regulacji motorycznej



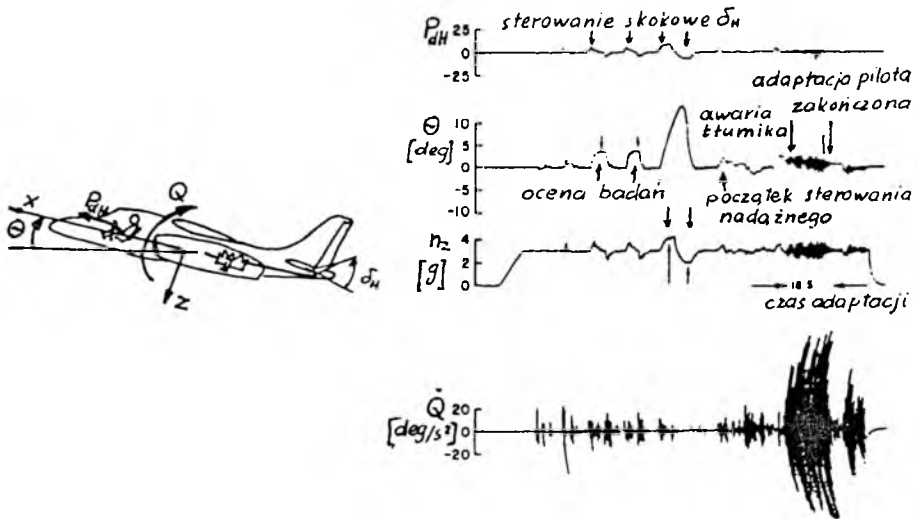
Rys. 10. Zmiana czasu latencji w zależności od przeciążenia podłużnego dla ciała w pozycji leżącej i stojącej

Czas latencji t_L zależny jest od przyspieszenia działającego na człowieka i położenia ciała [17]. Na (rys.10) przedstawiono zmiany czasu latencji t_L [17] dla przyspieszeń działających wzdłuż osi $0x$ obiektu dla położenia ciała w pozycji poziomej na wznak (rys.10a) i pozycji wyprostowanej (rys.10b).

W procesie budowy uniwersalnych symulatorów lotu i ich modeli matematycznych należy wykorzystać progi czułości człowieka w poszczególnych kanałach przenoszenia bodźców przez zmysły.



Rys. 11. Schemat blokowy sterowania samolotem w systemie automatycznym, ręcznym i mieszanym



Rys. 12. Reakcja samolotu w czasie wymuszeń skokowych sterem wysokości oraz zakłócenie spowodowane awarią w systemie sterowania sterem wysokości i przejście na sterowanie ręczne

Przykładowo progi wrażliwości człowieka na przyspieszenia kątowe podano w [3] i tak, w locie podczas trwania przyspieszenia kąowego $0.5 \div 1.0$ s próg wynosi 2.4 deg/s^2 a podczas trwania $2.1 \div 3.1$ s wynosi 1.2 deg/s^2 .

Tablica 3. Zależności czasu latencji reakcji motorycznej od przyspieszenia kąowego P i gradientu narastania przyspieszenia normalnego dn_z/dt

Kątowe przyspieszenie samolotu P [deg/s^2]	Gradient przeciąż. pionowego dn_z/dt [1/s]	Czas latencji reakcji motorycz. t_L [s]
	$0.03 \div 0.12$	3.5
	$0.12 \div 0.15$	1.2
$5 \div 10$	$0.25 \div 0.70$	0.4
$15 \div 20$	$1.3 \div 1.7$	0.3
$25 \div 30$	$2.6 \div 3.3$	0.2

Przytoczone progi czułości, Tablica 3 wg [3], wykazują, że jeżeli wprowadzi się samolot w przechylenie z przyspieszeniem kąowym $0.5 \div 0.7 \text{ deg/s}^2$ to wartość przechyłu może osiągnąć nawet 30 deg bez odczuwania przeciążenia przez pilota [15]. Te własności zmysłów organizmu człowieka należy wykorzystać przy budowie uniwersalnych symulatorów lotu oraz w procesie aktywnego sterowania samolotem.

Współczesne samoloty bojowe posiadające wysoki stopień automatyzacji z wykorzystaniem komputerów pokładowych umożliwiają wprowadzenie szeregu systemów nawigacji i sterowania automatycznych, ręcznego i mieszanych, (rys.11).

W procesie sterowania obiektem zachodzi wzajemne współdziałanie w systemie samolot + człowiek + otoczenie + zadanie. W układzie tym występuje dopasowanie i współdziałanie cech dwóch systemów człowiek-maszyna czyli układ "pilot-samolot".

Przy długotrwałym automatycznym sterowaniu następuje osłabienie bezpośredniego związku pilota z samolotem co w przypadku przejścia na ręczne sterowanie zwiększa czas adaptacji. Podczas opracowywania schematu włączenia człowieka w układ automatycznego sterowania konieczne jest, aby układ ten był przystosowany na korekcyjne oddziaływanie pilota na samolot. W przeciwnym razie może powstać sytuacja, gdy automatyka staje się przeszkodą w pilotowaniu [3]. Automatyka ubezwłasnowolnia załogę samolotu (patrz Warszawska katastrofa A-320).

Na (rys.12) stanowiącym modyfikację wyników przedstawionych w [2] widzimy, że czas adaptacji przejścia na sterowanie ręczne w przypadku awarii automatycznego sterowania w kanale pochylania wynosi 18 s.

Z powyższych rozważań wynika, że współczesne uniwersalne symulatory lotu powinny posiadać:

- symulację sterowania automatycznego,
- symulację sterowania ręcznego i mieszanego,
- wprowadzenia awarii w systemie sterowania automatycznego i możliwość przejścia na sterowanie ręczne.

Należy podjąć próby możliwości wprowadzania indywidualnych charakterystyk psycho-neuro-fizjologicznych trenowanego pilota – może to zapobiegać występowaniu chorób symulatorowej.

W systemie sterowania wprowadzać "sztuczne czucie", które odpowiadałoby wysiłkowi pilota w procesie sterowania samolotem. Należy tak wprowadzać obciążenia [3] na sterownicy samolotu i symulatora wyrażających zależność między siłą bodźca i intensywnością wrażenia aby spełniały – prawo Webera-Fechnera. Jest to prawo psychologiczne [23], które określa zależność między siłą bodźców działających na organy zmysłowe człowieka a siłą wywołwanego przez nie wrażenia. Prawo to stwierdza, że przy równoczesnym przyroście siły bodźca przyrost siły wrażenia jest coraz mniejszy, że przy bodźcach słabych wystarczy mały przyrost ich siły, aby różnica została zauważana, natomiast przy bodźcach silnych trzeba większego przyrostu ich siły aby wywołać równoważny przyrost siły wrażenia to znaczy $\Delta J/J = K$, gdzie J – bodziec, ΔJ – przyrost siły bodźca, K – wielkość stała [3].

Zatem słuszne jest stwierdzenie [3]:

"Na podstawie analizy środowiska informacyjnego i zadań pilota należy wybrać takie warunki lotu, które można stworzyć w eksperymencie. Przy tym trzeba określić typ eksperymentu: lotniczy, symulatorowy laboratoryjny (np. w Wojskowym Instytucie Medycyny Lotniczej – samolot, symulator, wirówka, przyp. autora); zaplanować sposób skomplikowania warunków pracy badanego: zakłócenia, czynności równoczesne, sytuacja awarii. Wreszcie należy sprecyzować, jakie czynniki fizyczne lotu powinny oddziaływać na badanego w trakcie eksperymentu a także dobrać kompleks wskaźników efektywności i niezawodności współdziałania pilota z techniką."

Przy projektowaniu systemów sterowania symulatorem niezbędna jest współpraca specjalistów z dziedziny neurologii, fizjologii i psychologii oraz doświadczonych pilotów. Niezbędne jest określenie [13]:

- najdogodniejszego modelu decyzyjnego człowieka,

- charakteru funkcji reakcji poszczególnych zmysłów na bodźce zewnętrzne i wewnętrzne,
- progów czułości poszczególnych zmysłów w zależności od charakteru bodźca zewnętrznego,
- czułości progowej receptorów,
- maksymalnego gradientu zmian bodźców, przy których odpowiednie zmysły człowieka nie reagują,
- sposobu uzyskiwania takich samych lub zbliżonych wrażeń, złudzeń, odczuć przez zamienne działanie na zmysły,
- sposobu symulacji przeciążeń lub uzyskiwania efektów fizjologicznych analogicznych jak przy przeciążeniu,
- efektu działania przeciążeń spowodowanych zmianą położenia platformy,
- możliwości zastosowania wielokomorowych kombinezonów ciśnieniowych o sterowanym wypełnianiu,
- innych koncepcji możliwych do realizacji.

Należy wprowadzić na symulatorach sterowanie automatyczne i ręczne przez pilota.

Literatura

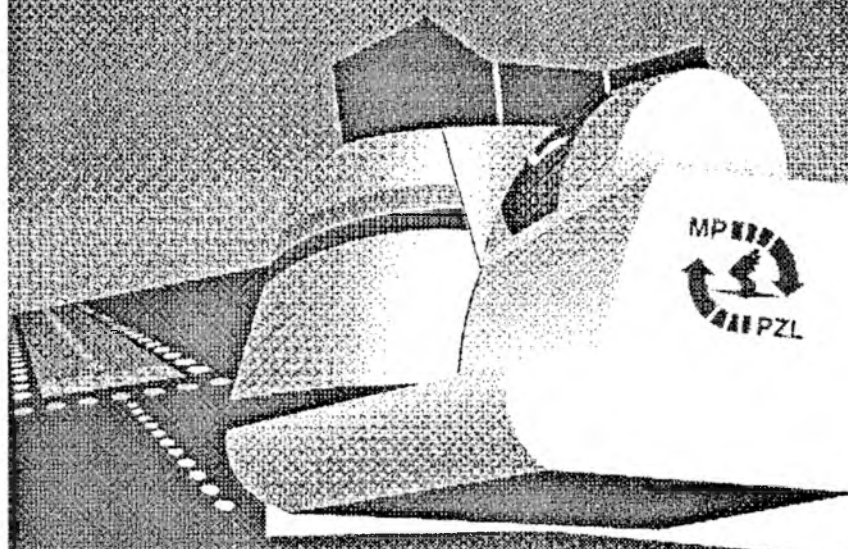
1. *Bionika – system nerwowy jako układ sterowania*, Praca zbiorowa pod redakcją R. Gawrońskiego, PWN Warszawa 1970
2. DRAPER C.S., WHITAKER H.P., YOUNG L.R., *The Roles of Men and Instrument in Control and Guidance Systems for Spacecraft*, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts USA for presentation at The XVth International Astronautical Congress, Warsaw, Poland 1964
3. *Eksperymentalna psychologia lotnicza*, Pod redakcją B.F. Lomowa, K. K. Platonowa, PWN Warszawa 1984
4. GAWROŃSKI R., *Rozpoznanie i decyzja*, PWN Warszawa 1970
5. HEMPEL L., *Człowiek i maszyna*, WKŁ, Warszawa 1984
6. MARYNIAK J., *System symulacji trenażera lotu, naprowadzania, walki i dowodzenia*, MTiS, 25, 1-2, PWN Warszawa 1987

7. MARYNIAK J., *Ogólna koncepcja systemu symulatora z uwzględnieniem sprzężeń między poszczególnymi blokami*, Sprawozdanie nr 140/85 ZNB Dynamiki Obiektów Ruchomych, ITLiMS PW, Warszawa 1985 (nie publikowane)
8. MARYNIAK J., *Ogólne modelowanie fizyczne i matematyczne obiektów latających jako elementów systemu symulatora – matematyczny model sterowanego samolotu*, Sprawozdanie nr 141/85 ZNB Dynamiki Obiektów Ruchomych, ITLiMS PW, Warszawa 1985 (nie publikowane)
9. MARYNIAK J., *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, Zbiór referatów XXVI Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice", Gliwice-Kudowa 1987
10. MARYNIAK J., *Modelowanie w dynamice obiektów latających*, Zbiór referatów XIII Sympozjum "Drgania w Układach Fizycznych", Poznań-Błażejewko 1988
11. MARYNIAK J., *Ogólny model matematyczny sterowanego samolotu*, Mechanika w Lotnictwie, PTMTiS, Warszawa 1993
12. MARYNIAK J., MAŁECKI J., *Dynamiczne równania ruchu platformy uniwersalnego symulatora lotu o sześciu stopniach swobody*, Mechanika w Lotnictwie, PTMTiS, Warszawa 1993
13. MARYNIAK J., *Zagadnienia symulacji lotu na symulatorach lotniczych – samolot, człowiek, symulator*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, **28**, 3-4, Warszawa 1990
14. MARYNIAK J., *Ogólny model strukturalny uniwersalnego symulatora lotu z uwzględnieniem symulowanego samolotu, człowieka i symulatora*, Sprawozdanie nr 194/88-N Sp.Pracy "Nauka-Innowacja-Technika" ZNB Dynamiki Obiektów Ruchomych, ITLiMS PW, Warszawa 1988 (nie publikowane)
15. MCCORMICK E.J., *Antropotechnika*, WNT, Warszawa 1964
16. MORECKI A., EKIEL J., FIDELUS K., *Bionika ruchu*, PWN, Warszawa 1971
17. REID L.D., NAHON M.A., *Flight Simulation Motion – Base Drive Algorithms: Part 1 – Developing and Testing the Equations*, UTIAS Report No.296 CN ISSN 0082-5255, Institute for Aerospace Studies, University of Toronto 1985
18. SMOLICZ T., *Wybrane zagadnienia lotniczej psychologii inżynierskiej*, (konспект wykładów) PLL "LOT", Warszawa 1982
19. SMOLICZ T., *Wpływ procesów decyzyjnych pilota na sterowanie samolotem komunikacyjnym podczas końcowej fazy zbliżania do lądowania*, Rozprawa doktorska, Wyd. MEiL PW 1985
20. TRELAK J., *Podstawy psychologii lotniczej*, Dęblin 1988 (nie publikowane)
21. KOZIELECKI J., *Psychologiczna teoria decyzji*, PWN, Warszawa 1978
22. SMOLICZ T., *Człowiek i automatyzacja*, Postępy Astronautyki, nr 3137, 1979
23. *Słownik psychologiczny*, Pod redakcją W.Szewczuka, Wiedza Powszechna, Warszawa 1985r

Human Pilot in an Aircraft and Flight Simulator Control System**Summary**

The paper presents the human pilot carrying out the control task in the aircraft and its model in a flight simulator. Predispositions of a human being to control the dynamic systems have been shown. The authors have presented the features of a flight simulator for the pilot reactions, decisions and reflexes to be equal to those required in the controlled aircraft.

POLSKIE SYMULATORY



AEROSPACE INDUSTRIES

Al. Krakowska 110/114, 00-972 Warszawa, P.O. Box 112
Tel: (48-22) 46-54-17, Fax: (48-22) 46-54-18

SYNTEZA POKŁADOWEGO SYSTEMU STEROWANIA RAKIETĄ PRZECIWPANCERNĄ

MACIEJ MRÓZ

BOGDAN MACHOWSKI

KONRAD SIENICKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Opracowanie obejmuje ideę realizacji układu odwzorowującego wektor stanu pocisku raketowego, tzw. obserwatora Luenbergera oraz sposób wykorzystania uchybu między zmiennymi stanu obserwatora a obiektu rzeczywistego, do sterowania lotem rakiety. Techniczna realizacja procesu sterowania została przedstawiona na przykładzie rozwiązania zastosowanego w najnowszych typach pocisków przeciwpancernych.

1. Wstęp

Bieżąca znajomość współrzędnych stanu obiektu latającego powinna być w pełni wykorzystywana dla realizacji precyzyjnego procesu naprowadzania na cel.

Zazwyczaj w praktyce nie ma możliwości mierzenia wszystkich składowych wektora stanu obiektu a informacja do układu sterowania przekazywana jest na podstawie pomiaru jedynie pewnej części parametrów i to nierzadko obciążonych zarówno szumami pomiarowymi jak i zakłóceniami różnego typu oddziaływującymi bezpośrednio na raketę traktowaną jako system dynamiczny.

W wyniku burzliwego rozwoju układów mikroprocesorowych coraz częściej w nowo opracowywanych typach raket spotyka się cyfrowe systemy sterowania, których zalety w porównaniu z analogowymi odpowiednikami niepomiernie rosną. Szczególnie ujawnia się to przy realizacji optymalnych i adaptacyjnych sposobów sterowania. Głównie dla tych ostatnich realizację programu naprowadzania można wykorzystywać przy niepełnej informacji wejściowej a także przy zakłóceniach o charakterze stochastycznym.

Możliwość taka nabrała bardzo realnych kształtów po 1964r., kiedy to Luenberger [2,4] przedstawił koncepcję rekonstrukcji niemierzalnych składowych wektora stanu poprzez zastosowanie tzw. obserwatora oraz w następstwie sformułowania przez Kalmana pozytywnych odpowiedzi na dwa z fundamentalnych dla teorii sterowania zagadnień [8]:

- czy jest możliwe przeprowadzenie układu dynamicznego z dowolnego stanu początkowego $\mathbf{x}(t_0)$ do dowolnego żądanego stanu końcowego w skończonym czasie oraz ograniczonym sterowaniu?
- czy jest możliwa identyfikacja stanu początkowego $\mathbf{x}(t_0)$ przez pomiar wyjścia $\mathbf{y}(t)$ w skończonym przedziale czasu?

znanych pod pojęciami sterowalności i obserwowalności układu dynamicznego.

2. Idea realizacji obserwatora

Obserwatorem nazywa się układ, który potrafi na podstawie odpowiedzi $\mathbf{y}(t)$ oraz sterowania $\mathbf{u}(t)$ odtworzyć wektor stanu $\mathbf{x}(t)$ [2]. Innymi słowy obserwatorem może być po prostu wierny model rozpatrywanego układu, im dokładniejszy, tym odczytane z modelu wartości wektora stanu $\hat{\mathbf{x}}(t)$ będą mniej różnić się od wartości wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ układu rzeczywistego, jeśli będą poddane takiemu samemu sygnałowi sterującemu.

Rakietę przeciwpancerną można potraktować jako bryłę sztywną z odkształcalnym układem sterowania [7] i opisać układem równań:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

gdzie:

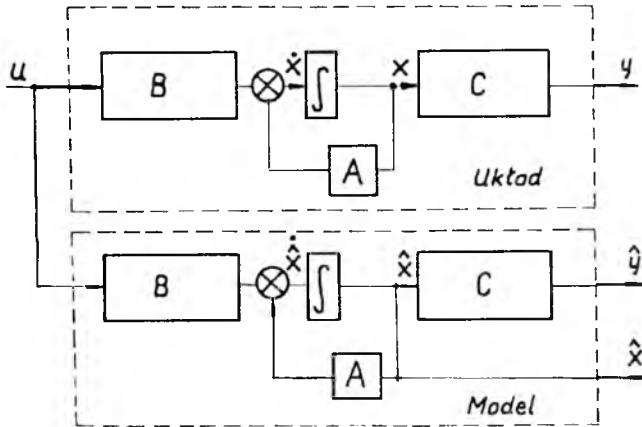
- \mathbf{x} – wektor stanu,
- \mathbf{u} – wektor sterowania,
- \mathbf{y} – wektor wyjścia,
- \mathbf{A} – macierz stanu,
- \mathbf{B} – macierz sterowania,
- \mathbf{C} – macierz wyjścia.

Model opiszemy równaniami w postaci:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$$

Problem adekwatności modelu i obiektu rzeczywistego jest zatem zagadnieniem pierwszoplanowym, gdyż informacja o obiekcie będzie na tyle prawdziwa, na ile model będzie dobrym odzwierciedleniem rzeczywistości. Powyższe układy równań ilustruje rys.1.



Rys. 1. Schemat strukturalny najprostszego obserwatora

Rozbieżność pomiędzy układem rzeczywistym a modelem prowadzi do błędów w odtworzeniu wektora stanu:

$$\hat{x} - x = e \quad (2.3)$$

którego wartość będzie zanikać do zera, gdyż z założenia przyjęty rzeczywisty obiekt latający jak i jego model są asymptotycznie stabilnymi.

W praktycznych wykonaniach nie pozostaje się na schemacie przedstawionym powyżej, lecz uzależnia się proces odtwarzania wektora stanu od rezultatów procesu sterowanego, czyli od różnicy wyjść z układu rzeczywistego $y(t)$ i modelu $\hat{y}(t)$. Wykonuje się to poprzez wprowadzenie sprzężenia zwrotnego przedstawionego na rys.2. Działanie obserwatora w takim przypadku opisuje zależność:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.4)$$

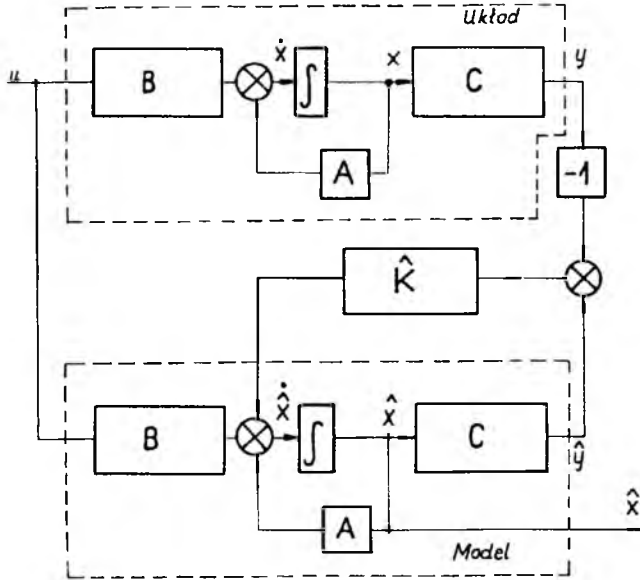
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KC(\hat{y} - y)$$

zatem:

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = A(\hat{x} - x) + K\hat{C}(\hat{x} - x) \quad (2.5)$$

i wówczas:

$$\dot{e} = (A + \hat{K}C)e \quad (2.6)$$



Rys. 2. Schemat strukturalny obserwatora uzależnionego od sygnału różnicowego z wyjścia modelu i układu rzeczywistego

W tym przypadku szybkość i sposób zanikania błędu $e(t)$ odtworzenia wektora stanu jest uzależniona od właściwego wyznaczenia macierzy sprzężenia \hat{K} . Musi ona posiadać wartości własne leżące w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej Evansa jako warunek konieczny realizacji procesu naprowadzania, natomiast odpowiedni ich rozkład może zapewnić żądaną dynamikę procesu sterowanego, do czego można doprowadzić narzucając warunki na współczynniki macierzy \hat{K} metodami analogicznymi do przedstawionych w pracach [6,7].

3. Techniczna realizacja systemu sterowania z wykorzystaniem obserwatora Luenbergera i filtra Kalmana

Bardziej złożony sposób rozwiązania zagadnienia sterowania w stosunku do przedstawionego na rys.2 występuje wówczas, gdy w strukturze systemu występują elementy mające przewidywać wpływ błędów losowych i

uwzględniać je przy sterowaniu w/g optymalnych kryteriów. Wykorzystuje się wówczas proces estymacji (zwany także predykcją lub ekstrapolacją) dla oszacowania przyszłych wartości określonego procesu stochastycznego w oparciu o jego wartości zaobserwowane w określonym czasie lub w oparciu o pewne założone, znane wcześniej odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa.

Jeżeli znany jest "a priori" rozkład błędów, to estymator optymalny można określić jako wartość oszacowania danego parametru wykorzystując procedury optymalizacji znane pod nazwą rozwiązania bayesowskiego [1], a techniczne rozwiązania ze względu na prostotę syntezy zawierają zazwyczaj jedynie odpowiedniego rodzaju układy filtracji [3], polepszające określone wskaźniki jakości systemu, a przede wszystkim dokładność określenia miejsca położenia.

W literaturze poświęconej teorii filtracji np. [1,3,4,9], metody analizy i syntezy filtrów optymalnych, głównie filtrów Wienera i Kalmana są opisane dokładnie, łącznie z przykładami konkretnych zastosowań [9] i określeniem tzw. zasięgu pamięci filtru.

Dla dyskretnego filtru Kalmana jest wówczas układ dynamiczny (rakietą wraz z systemem sterowania) opisywany równaniem różnicowym [5,9]:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (3.1)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}(k+1)$ – n -wymiarowy wektor stanu,
- $\mathbf{w}(k)$ – p -wymiarowy wektor zakłóceń,
- $\mathbf{A}(k+1, k)$ – $(n \times n)$ -wymiarowa macierz stanu,

Równanie obserwacji ma postać:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k+1) \quad (3.2)$$

gdzie:

- $\mathbf{y}(k+1)$ – m -wymiarowy wektor pomiarowy,
- $\mathbf{v}(k+1)$ – m -wymiarowy wektor błędów pomiarowych,
- $\mathbf{H}(k+1)$ – $(m \times n)$ -wymiarowa macierz pomiarowa.

Wektory $\mathbf{v}(k)$ i $\mathbf{w}(k)$ są nieskorelowane o zerowych wartościach przeciętnych oraz macierzach kowariancji $\mathbf{R}(k)$ i $\mathbf{Q}(k)$.

Optymalna ocena stanu przy filtracji wyraża się równaniem rekurencyjnym [5]:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1/k+1) = \mathbf{A}(k+1, k)\hat{\mathbf{x}}(k/k) + \mathbf{K}(k+1) \left[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\mathbf{A}(k+1, k)\hat{\mathbf{x}}(k/k) \right] \quad (3.3)$$

gdzie $\mathbf{K}(k+1)$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą wzmocnień Kalmana.

Dla oceny jakości wektora stanu wykorzystuje się $n \times n$ wymiarową macierz kowariancji błędów filtracji $\mathbf{P}(k+1/k+1)$, gdzie:

$$\mathbf{P}(k+1/k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)]\mathbf{P}(k+1/k) \quad (3.4)$$

w której $\mathbf{P}(k+1/k)$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą błędów predykcji określoną przez zależność:

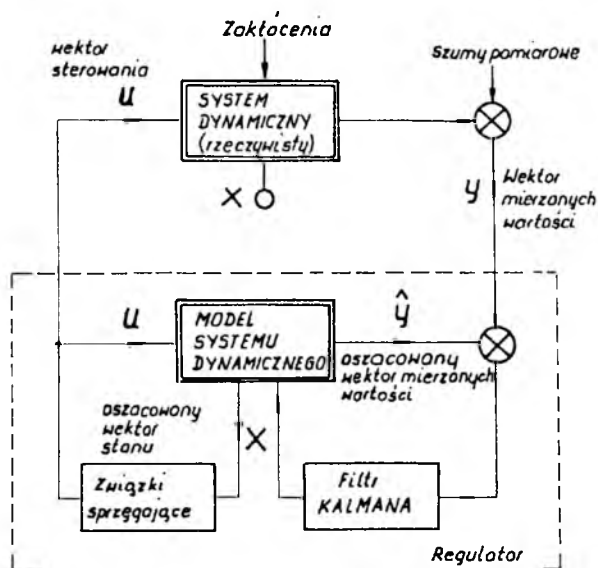
$$\mathbf{P}(k+1/k) = \mathbf{A}(k+1, k)\mathbf{P}(k/k)\mathbf{A}^T(k+1, k) + \mathbf{Q} \quad (3.5)$$

Podstawiając (3.5) do (3.4) otrzymuje się elementy macierzy błędów filtracji.

Jak z tego wynika algorytm filtracji kalmanowskiej sprowadza się do:

- dla warunków początkowych $\mathbf{P}(0,0)$ należy przy $k=0$ wyliczyć wyrażenia na macierz błędów filtracji i wzmacnienia,
- następnie operację powtarzać dla $k=1, 2, 3, \dots$

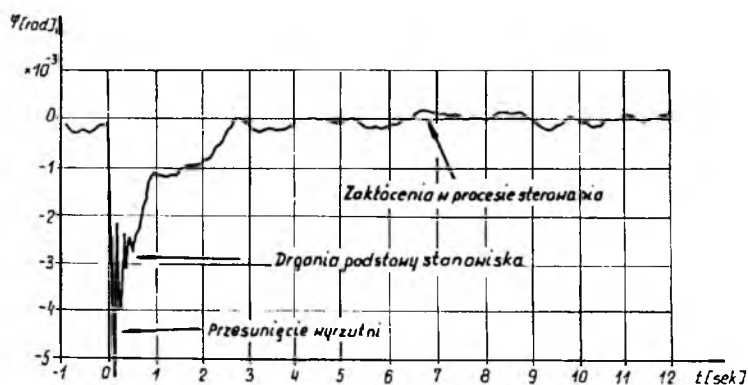
Przedstawiona metoda kowariancyjna wynika wprost z iteracyjnego opisu filtru.



Rys. 3. Schemat strukturalny systemu sterowania pociskiem przeciwpancernym

Na rys.3 przedstawiona została struktura realizacji technicznej sterowania pociskiem przeciwpancernym nowej generacji, dla którego podstawową

zaletą zapewniającą wysokie prawdopodobieństwo trafienia w cel jest wprowadzenie z układu śledzenia wyrzutni parametrów ruchu celu i błędów jego śledzenia do pętli sterowania. Pomiary parametrów śledzenia za celem są rejestrowane na ok. 1 sekundę przed startem i analizowane przez filtr sterowania (Kalmana), natomiast wszelkie stany nieustalone występujące w chwili startu (rys.4), wynikające z przesunięcia wyrzutni, drgań podstawy oraz zakłóceń zarówno procesu sterowania jak i zakłóceń zewnętrznych są zamodelowane na stałe w filtrze, którego model był oceniany i korygowany w wyniku wielokrotnych strzelań poligonowych w różnorodnych warunkach.



Rys. 4. Przykład modelu zakłóceń przyjętych do realizacji filtru

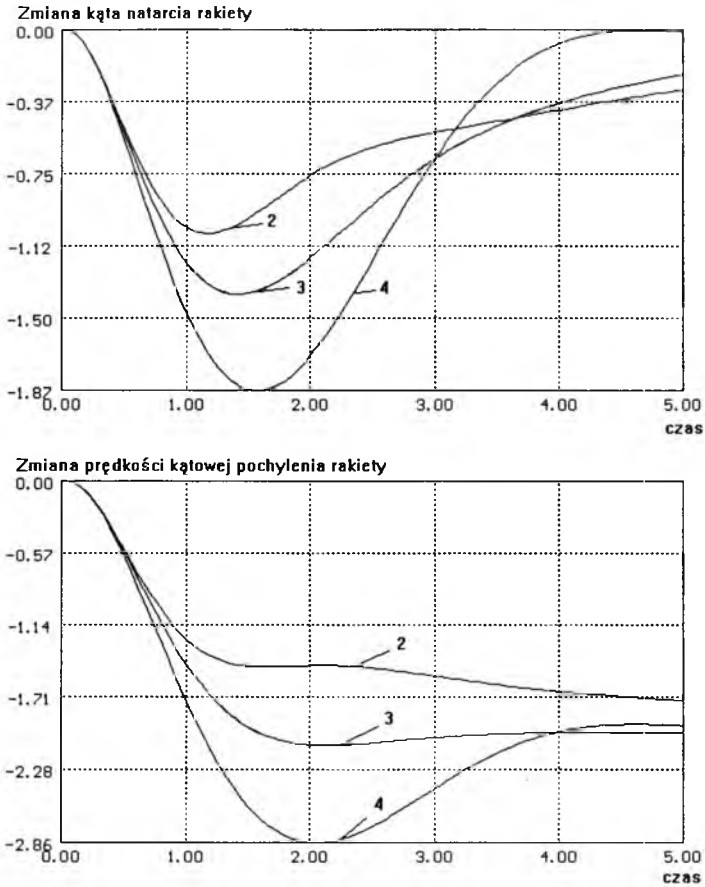
Ze względu na niejawny charakter danych dotyczących systemu, o ogólnej postaci modelu, opisanego równaniem (2.2), w którym:

$$\dot{\hat{x}} = \text{col} \left[\dot{\theta}, \alpha, \dot{z}, z \right] \quad u = \left[\delta, 0, 0, 0 \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \text{col} \left[b_{11}, b_{12}, b_{13}, 0 \right]$$

gdzie:

- $\dot{\theta}$ – prędkość kątowna pochylenia rakiety,
- α – kąt natarcia,
- z, \dot{z} – przemieszczenie i prędkość przemieszczania środka masy rakiety w płaszczyźnie odchylenia,
- δ – kąt wychylenia steru.



Rys. 5. Wyniki badań systemu sterowania

Wyniki badań przedstawione na rys.5. posiadają umowną skalę odniesienia na obu osiach. Zamiarem autorów jest bowiem wykazanie jedynie wpływu ilości mierzonych parametrów wektora stanu, uwzględnianych w pętli sterowania, na jakość procesu sterowanego. Cyfry przy wykresach wskazują ilość mierzonych parametrów wektora stanu wykorzystywaną w pętli sterowania. Im wyższa jest ich wartość, tym lepsza jest jakość procesu sterowania i tym szybciej następuje osiągnięcie stanu ustalonego.

Literatura

1. DEUTSCH R., *Teoria estymacji*, PWN, Warszawa 1969
2. KWIATKOWSKI W., *Teoria sterowania*, WAT, Warszawa 1989
3. KONATOWSKI S., ROSZAK M., *Porównanie metod filtracji stosowanych w układach nawigacyjnych*, Biul.WAT, 12, 1991
4. LEONIDES K.T., *Filtracija i stochastičeskoe upravljenje v dinamičeskich sistemach*, Moskwa 1980
5. MEDITCH J.S., *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*, WNT, Warszawa 1975
6. MRÓZ M., *Warunki najszybszego tłumienia procesu przejściowego dla układów opisanych równaniami wektorowo-macierzowymi*, Biul.WAT, 14, 1982
7. MRÓZ M., *Optymalne warunki zdalnego sterowania obiektów latających w systemie bezprzewodowym*, Rozpr.hab., WAT, Warszawa 1990
8. OGATA K., *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa 1974
9. SCHWEPPE F.C., *Układy dynamiczne w warunkach losowych*, WNT, Warszawa 1978

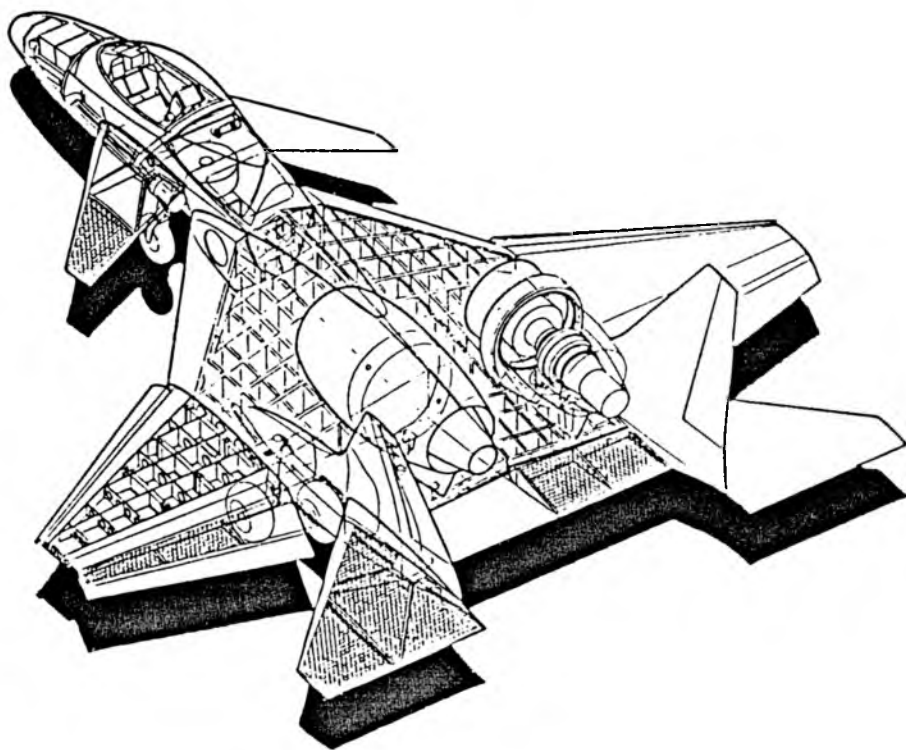
Anti-Tank Rocket On-Board Control System Synthesis

Summary

Design concept of the system transforming the rocket state vector, the so-called Luenberger observer, together with the way of the observer state variables deviations from those for a real object application to the rocket flight control has been presented in the paper. Realisation of the control process has been shown on the latest design applied to modern types of anti-tank rockets.

PZL-230

Skorpion



BOJOWY SAMOLOT POŁA WALKI -
DUŻEJ MANEWROWOŚCI

ZAGADNIENIA ADAPTACJI PARAMETRÓW MODELU DYNAMICZNEGO SAMOLOTU DO WYMAGAŃ SYMULATORA LOTU

ZBIGNIEW PATURSKI

ROMAN RUCIŃSKI

MP-PZL Aerospace Industries Ltd.

W referacie przedstawiono problemy, z jakimi autorzy zetknęli się przy modyfikacjach modelu dynamiki lotu samolotu do specyficznych wymagań symulatora lotu samolotu TS-11 Iskra. Omówiono wymagania stawiane modelowi dynamiki lotu w zastosowaniach symulatorowych, zakres modyfikacji, jakim musi zostać poddany model dynamiki lotu oraz przedstawiono uwagi dotyczące weryfikacji modelu.

1. Wprowadzenie

Zadaniem symulatorów lotu jest obniżenie kosztów i zwiększenie efektywności procesu szkolenia pilotów statków powietrznych. Obecny stan techniki pozwala na konstruowanie symulatorów mogących zastąpić samolot szkolny przynajmniej na niektórych etapach szkolenia personelu latającego. Ze względu na to, że symulator jest urządzeniem naziemnym i sytuacje zdarzające się podczas lotu są symulowane, możliwe jest realizowanie scenariuszy, które w normalnych warunkach nie mogłyby się odbyć ze względu na zagrożenie bezpieczeństwa załogi i statku powietrznego.

Jednym z elementów niezbędnych do prawidłowej symulacji zachowania się samolotu w trakcie lotu i poruszania się po ziemi jest poprawny model dynamiki ruchu samolotu. W dużej mierze od jakości tego modelu zależą odczucia pilota wykonującego ćwiczenie i jego ocena wartości symulatora lotu. Możliwości modelu dynamiki lotu samolotu mają też znaczący wpływ na zakres zadań, do jakich symulator może zostać zastosowany. Kiepska jakość modelu dynamiki lotu może spowodować, że symulator będzie traktowany nie jako pełnowartościowe urządzenie, lecz jako "zabawka", która powoduje powstawanie złych nawyków i wydłuża proces szkolenia.

Dotychczasowe doświadczenia wykazują, że weryfikacja modelu dynamiki lotu jest jedną z najbardziej czasochłonnych i najbardziej żmudnych czynności jakie muszą zostać wykonane podczas konstruowania symulatora. Fakt ten wynika z wymagań, jakie stawia się dynamice lotu we współczesnym symulatorze lotniczym.

2. Wymagania wobec modelu dynamiki lotu stosowanego w kompleksowym symulatorze lotu

2.1. Bezpieczeństwo ćwiczącego

Podstawowym wymogiem, jaki musi spełnić model dynamiki lotu jest zapewnienie ćwiczącemu maksymalnego bezpieczeństwa podczas wykonywania zadania w symulatorze lotu. Jednym z celów konstruowania symulatorów jest umożliwienie wykonania zadanego scenariusza bez narażania ćwiczącego na niebezpieczeństwo wypadku lotniczego. Naziemne symulatory lotu zapewniają realizację tego wymogu niejako z definicji. Pojawia się jednak problem wynikający z faktu, że symulator jest urządzeniem technicznym i jako taki stanowi zagrożenie dla pilota wykonującego ćwiczenie. Udział dynamiki lotu w tworzeniu takiego zagrożenia polega na tym, że dynamika lotu generuje prędkości i przyspieszenia wpływające na ruchy platformy (w przypadku ruchomego symulatora lotu) oraz generuje siłę realizowaną przez układ wykonawczy symulacji sił na organach sterowania. Zarówno w przypadku platformy, jak i układu symulacji sił istnieje niebezpieczeństwo zajścia stanu, który spowoduje utratę zdrowia pilota. Może to nastąpić w wyniku nieprawidłowego działania modelu dynamiki lotu, który w jednym ze stanów lotu może wygenerować przyspieszenia niebezpieczne dla pilota. Podobna sytuacja zachodzi w przypadku stosowania aktywnego układu symulacji sił na organach sterowania. Oprogramowanie dynamiki lotu może wygenerować siły, które są w stanie spowodować obrażenia u ćwiczącego pilota. Zapobieganie takim sytuacjom jest podstawowym wymogiem, stawianym modelowi dynamiki lotu. Wymóg bezpieczeństwa jest realizowany przez cały system zabezpieczeń obejmujący zarówno zabezpieczenia programowe jak i zabezpieczenia sprzętowe. Zabezpieczenia występujące w modelu dynamiki lotu mają charakter programowy i obejmują:

- ograniczenia sił występujących na organach sterowania do wartości, które nie mogą spowodować obrażeń u pilota;

- odporność na brutalne sterowanie;
- sterowanie tłumieniem w układach symulacji sił na organach sterowania;
- ograniczenia przyspieszeń wynikających z rozwiązania równań ruchu, zwłaszcza przyspieszeń impulsowych;
- zabezpieczenia przed generowaniem niepoprawnych wartości w przypadku wystąpienia błędów arytmetycznych np. dzielenia przez zero;
- sterowanie blokadami organów sterowania (w przypadku symulowania awarii układu sterowania) za pomocą informacji dla układu wykonawczego o konieczności zablokowania układu, a nie przez wymuszanie dużej siły.

Wymienione zabezpieczenia, wraz z zabezpieczeniami sprzętowymi, działającymi w układach wykonawczych (sterownik, układy hydrauliczne lub elektryczne) zapewniają pilotowi bezpieczeństwo podczas wykonywania ćwiczenia. Wszystkie wymienione zabezpieczenia są poddawane drobiazgowym testom podczas budowy symulatora.

2.2. Prawdliwość odczuć

Jednym z podstawowych wymagań, jakie są stawiane symulatorowi jest wytworzenie u ćwiczącego pilota wrażeń możliwie najbliższych występującym w trakcie prawdziwego lotu. Wymaganie to powoduje, że przy dopasowywaniu modelu dynamiki lotu do pracy w symulatorze lotu ostatecznym czynnikiem weryfikującym poprawność modelu są odczucia doznawane przez pilota w trakcie symulowanego lotu. Konieczność spełnienia tego warunku ma, z punktu widzenia konstruktora modelu, swoje zalety i wady.

- Główne zalety to:
 - możliwe są modyfikacje modelu, które nie są zgodne z fizyką zjawisk zachodzących w prawdziwym samolocie, lecz pozwalające na osiągnięcie zamierzonego efektu np.: zjawiska drgania drążka sterowego przy oderwaniu strug na skrzydle nie są symulowane za pomocą zmiany modelu aerodynamiki lecz za pomocą sztucznego wprowadzenia drgań drążka bezpośrednio do modelu sił na organach sterowania;

- możliwe jest usunięcie z modelu tych elementów, które nie mają istotnego wpływu na odczucia pilota np. nie jest konieczne dokładne odzwierciedlenie zmiany masy samolotu; wystarczy by zmiana masy była w przybliżeniu zgodna ze stanem faktycznym; pozwala to na uproszczenie modelu zużycia paliwa w silniku samolotu;
- możliwe jest stosowanie danych przybliżonych, zwłaszcza w tych przypadkach, w których istnieją duże trudności w zgromadzeniu odpowiednich danych np. w przypadku parametrów masowych uzbrojenia, charakterystyk podwozia.

- Główne wady to:

- konieczność zapewnienia prawidłowości odczuć w całym zakresie stosowania symulatora;
- konieczność "uśredniania" wrażeń doznawanych przez pilotów w trakcie wykonywania lotów testowych (niejednoznaczność ocen);
- brak możliwości weryfikacji odczuć pilotów w przypadku zajęcia sytuacji nietypowych lub awaryjnych;
- trudności z weryfikacją w przypadku samolotów prototypowych lub produkowanych w krótkiej serii.

2.3. Pełny zakres stosowalności

Szeroki zakres zastosowań symulatorów lotu powoduje dodatkowe wymagania wobec modelu dynamiki lotu. Model dynamiki lotu do zastosowania w symulatorze lotu powinien obejmować wszystkie stany lotu, cały zakres ruchu samolotu po Ziemi począwszy od kołowania przez start do lądowania. Ponadto konieczne jest uwzględnienie rozmaitych wariantów podwieszeń uzbrojenia zewnętrznego, zatankowania paliwem i obsadzenia załogą. Ponieważ symulatory mają służyć do ćwiczenia zachowania się w warunkach ekstremalnych, konieczne jest uwzględnienie przez model dynamiki lotu stanów awaryjnych. Wymienione uwarunkowania powodują, że nie można stosować uproszczeń – dopuszczalnych w wielu innych zastosowaniach – takich jak:

- założenie o małych kątach natarcia i ślizgu;
- założenie o małych ruchach wokół położenia równowagi;
- założenie o prostoliniowym ruchu na ziemi;

– założenie o nieprzekraczaniu krytycznego kąta natarcia.

W zastosowaniach symulatorowych mamy do czynienia ze wszystkimi aspektami ruchu samolotu począwszy od kołowania, przez start do lotów w całym zakresie prędkości i lądowania. Loty są wykonywane w całym zakresie kątów natarcia i ślizgu. Duże kąty natarcia występują na przykład w trakcie przeciągnięcia, korkociągu oraz w trakcie silnego wiatru. W tym ostatnim przypadku krytyczny jest etap poruszania się samolotu po Ziemi przy wietrze wiejącym z boku lub z tyłu. Ze względu na to, że z reguły nie są dostępne dane dotyczące charakterystyk aerodynamicznych samolotu dla kątów natarcia większych niż 90 stopni i kątów ślizgu większych niż 60 stopni konieczne jest sztuczne ograniczanie tych kątów do wartości, dla których są dostępne dane.

Innym istotnym aspektem zastosowania modelu dynamiki do symulatora jest konieczność wiarygodnego symulowania stanów awaryjnych. Trudność polega na tym, że w wielu przypadkach nie są dostępne informacje o zachowaniu się samolotu po zejściu stanu awaryjnego. Instrukcje eksploatacji samolotu informują o stanach poprzedzających zejście awarii, natomiast zachowanie się samolotu po zejściu awarii bardzo często jest nieznane.

2.4. Rozwiązanie układu równań ruchu w czasie rzeczywistym

Warunek rozwiązania układu równań różniczkowych opisujących ruch samolotu w czasie rzeczywistym przestał być warunkiem krytycznym z chwilą zastosowania do symulatorów bardzo szybkich komputerów wyposażonych w procesory RISC. Komplikacja modelu dynamiki ma jednak swoje granice. Wynikają one z tego, że jeden komputer nie zajmuje się wyłącznie rozwiązywaniem układów równań dynamiki lotu. Równania ruchu samolotu są tylko jednym z zadań, które musi wykonywać komputer i w związku z tym model dynamiki lotu nie może być zbyt skomplikowany. W symulatorze pracującym z częstotliwością około 30 Hz czas jednego cyklu obliczeń nie może przekraczać 0.01 sekundy. Wynika to stąd, że czas jaki pozostaje do dyspozycji musi zostać podzielony między bloki programu zajmujące się sterowaniem instalacjami symulowanego samolotu, sterowaniem celami, wyposażeniem specjalnym (uzbrojeniem) oraz dokonujące transmisji między pozostałymi komputerami systemu informatycznego symulatora (zadania transmisji i synchronizacji zajmowały w zastosowanych przez MP-PZL rozwiązaniach największej czasu).

2.5. Odporność na zakłócenia danych wejściowych

Danymi dostarczonymi do modelu dynamiki lotu są położenia organów sterowania uzyskiwane ze sterownika połączonego z kabiną oraz dodatkowe informacje uzyskiwane z części oprogramowania symulującego pracę instalacji pokładowych samolotu. Dane uzyskiwane są z czujników zainstalowanych w kabinie za pośrednictwem komputera sterującego kabiną (sterownika). Mimo kontroli przeprowadzanej przez sterownik informacje dostarczane do oprogramowania dynamiki lotu muszą być ponownie sprawdzane. Innym rodzajem zakłócenia jest nierównomierność kroku całkowania. W symulatorze krok całkowania jest obliczany na podstawie upływającego czasu rzeczywistego. Ze względu na to, że blok dynamiki lotu jest wykonywany sekwencyjnie z innymi modułami działającymi w symulatorze, czas wykonywania tych bloków wpływa na długość kroku całkowania. Jednym z elementów krytycznych jest konieczność synchronizacji komputerów pracujących w sieci. Czas martwego wyczekiwania na synchronizację komputerów stanowi dużą część jednego cyklu pracy symulatora i zmienia się dość znacznie. Do całkowania równań ruchu musi zostać użyta metoda mało wrażliwa na zakłócenia. W zbudowanych symulatorach była stosowana metoda Rungego-Kutty rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych. Dotychczasowe doświadczenia wykazują, że metoda ta dobrze nadaje się do symulatorów lotu.

3. Model podstawowy dynamiki lotu (uzyskany z badań tunelowych i badań w locie)

3.1. Model bryły samolotu

Samolot jest traktowany jako bryła sztywna o sześciu stopniach swobody. Stery traktowane są jako nieważkie. Uwzględniana jest zmiana masy samolotu spowodowana ubywaniem paliwa ze zbiorników i zrzutem środków bojowych. Ruch samolotu jest modelowany za pomocą sześciu równań różniczkowych zwyczajnych opisujących oddziaływanie sił i momentów sił zewnętrznych oraz sześciu równań różniczkowych zwyczajnych opisujących związki kinematyczne między quasiprędkościami w układzie nieinercyjnym związanym z samolotem i prędkościami w układzie inercyjnym związanym z Ziemią.

3.2. Model aerodynamiki

Do modelowania opływu samolotu przez powietrze jest stosowana aerodynamika stacjonarna. Współczynniki aerodynamiczne mają postać wielomianów zależnych od kątów natarcia i ślizgu oraz liczby Macha. Powyżej krytycznego kąta natarcia współczynniki aerodynamiczne są modyfikowane za pomocą liniowych zależności od kątów natarcia i ślizgu.

3.3. Model podwozia

Goleń podwozia jest traktowana jako sprężyna o sztywności zmieniającej się wraz ze stopniem skrócenia goleni podwozia. Równoległe do sprężyny jest podłączony tłumik o zmiennym tłumieniu. Model podwozia uwzględnia zmienne współczynniki tarcia pneumatyka o podłoże w zależności od panujących warunków atmosferycznych i rodzaju nawierzchni drogi startowej. Model podwozia uwzględnia siły tarcia tocznego powstające podczas ruchu niezahamowanego koła, tarcia koła zahamowanego, siły boczne powstające podczas lądowania z wiatrem bocznym oraz tłumienia powstające przy zakrętach. Nie uwzględniono wpływu momentów bezwładności podwozia na momenty bezwładności całego samolotu. Ruch podwozia jest opisany za pomocą układu równań różniczkowych zwyczajnych.

3.4. Model sił sterujących

Siłami sterującymi zachowaniem samolotu są siły aerodynamiczne powstające na skutek wychylenia powierzchni sterowych, siły wynikające z działania zespołu napędowego, siły wynikające z oddziaływania podwozia samolotu z podłożem i siły wynikające z oddziaływania na samolot użytego uzbrojenia. Siły aerodynamiczne są proporcjonalne do wychylenia powierzchni sterowych. Modele pracy powierzchni sterowych uwzględniają luzy w układach sterowania oraz nieliniowości przełożeń między wychyleniem drążka sterowego lub pedałów i wychyleniem powierzchni sterowych. Zespół napędowy oddziałuje na samolot siłą ciągu, momentami giroskopowymi oraz w przypadku samolotu śmigłowego momentem od śmigła. Uzbrojenie oddziałuje na samolot siłą odrzutu podczas strzelania z działka.

4. Modyfikacja modelu podstawowego

4.1. Ograniczenie kątów natarcia i kątów ślizgu przy małych prędkościach lotu

Duże kąty natarcia i ślizgu powstają najczęściej w trakcie postoju lub wolnego ruchu samolotu po płycie lotniska przy silnie wiejącym wietrze. Wiatr wiejący z boku samolotu lub z tyłu powoduje powstanie kątów ślizgu powyżej 90 stopni. Ponieważ współczynniki aerodynamiczne są wyznaczone dla kątów ślizgu mniejszych od 60 stopni, przekroczenie wartości granicznej powoduje, że współczynniki aerodynamiczne obliczone za pomocą wielomianów aproksymacyjnych są niepoprawne. W efekcie powstaje zjawisko "zwiewania" samolotu z pasa. Zjawisko to może wpływać na inne modele, na przykład na siły powstające w podwoziu. Efektem tego może być obracanie się samolotu na pasie startowym. Ponieważ zjawisko takie nie może wystąpić w trakcie symulacji, konieczne jest modyfikowanie kątów ślizgu tak, by z jednej strony zapewnić poprawne zachowanie samolotu podczas ruchu na pasie startowym i w trakcie kolowania, a jednocześnie uzyskać efekty działania bocznego wiatru na samolot.

Podobne zjawiska występują w przypadku symulacji turbulencji atmosferycznej. Podmuch pionowy o dużej prędkości występujący podczas toczenia się samolotu z niewielką prędkością powoduje powstanie dużych kątów natarcia. Podstawienie tych kątów natarcia do równań powoduje, że samolot "staje dęba". W konsekwencji następuje zaburzenie rozwiązania równań ruchu.

4.2. Ograniczenia sił i momentów działających na samolot przy zetknięciu z ziemią

Uderzenie kołami o Ziemię powoduje powstanie sił w goleniach podwozia. Siła w goleni podwozia jest funkcją prędkości pionowej samolotu oraz przemieszczenia pionowego samolotu. Prędkość i przemieszczenie samolotu są efektem całkowania równań ruchu samolotu. Przemieszczenie pionowe samolotu w jednym kroku całkowania zależy od długości kroku całkowania. Często się zdarza, że wyliczona siła jest bardzo duża. Duża siła działająca na samolot powoduje powstanie gwałtownych przyspieszeń nie występujących w rzeczywistości. Jeszcze bardziej niekorzystny przypadek zachodzi jeżeli lądowanie następuje z bocznym wiatrem. W takim przypadku lądowanie przeprowadzane jest w ten sposób, że najpierw o Ziemię uderza jedno koło, a następnie drugie. Uderzenie jednym kołem powoduje powstanie dużej siły oraz dużego nieźrównoważonego

momentu. Moment ten powoduje przewrócenie się samolotu. Efektowi temu można zapobiec przez sztuczne ograniczenie momentu przechylającego samolotu.

4.3. Modyfikacje modelu wymuszone przez symulowane awarie

Podstawowy model dynamiki lotu nie zawiera z reguły informacji o zachowaniu się samolotu w sytuacjach awaryjnych. Do awarii wpływających bezpośrednio na dynamikę lotu samolotu należą awarie urządzeń sterujących (blokada lub zerwanie więzi mechanicznej między organem sterowania i powierzchnią sterową), awarie podwozia (zablokowanie podwozia w położeniu "zamknięte" lub "otwarte", częściowe wypuszczenie podwozia, awaria zamków blokujących podwozie w położeniu "otwarte", pęknięcie opony, zablokowanie hamulców). Z punktu widzenia modelowania zjawiska najbardziej kłopotliwe są przypadki niesymetrycznego wypuszczenia podwozia. Kłopotliwość tego przypadku polega na tym, że nie są dostępne dane dotyczące charakterystyk aerodynamicznych samolotu z jedną golenią wysuniętą. Dokonanie pomiarów współczynników aerodynamicznych w czasie badań w locie nie jest możliwe. Z podobnym przypadkiem mamy do czynienia przy symulowaniu niesymetrycznego wychylenia klap. Asymetryczne wychylenie klap jest bardzo groźnym zjawiskiem ponieważ powoduje powstanie dużego momentu przechylającego, który jest trudny do zrównoważenia za pomocą lotek. Ponadto dodatkowe zagrożenie spowodowane jest tym, że klapy są wysuwane na małych wysokościach lotu, co utrudnia lub uniemożliwia wykonanie odpowiedniego manewru. Z tych powodów symulacja awarii była przeprowadzana metodą kolejnych przybliżeń, w której ostateczna postać algorytmu symulacji awarii została opracowana po wielu lotach testowych z udziałem pilotów.

4.4. Modyfikacje modelu spowodowane opóźnieniami powstającymi w systemie symulatora

W modelu dynamiki lotu zakłada się, że efekt zadziałania pewnej przyczyny pojawia się natychmiast po powstaniu tej przyczyny. Ewentualne opóźnienia mogą powstawać tylko na skutek bezwładności samolotu. Tymczasem symulator jest urządzeniem technicznym, które wprowadza pewne opóźnienia wynikające z konieczności dokonania obliczeń, transmisji danych między komputerami, synchronizacji działań poszczególnych komputerów itp. Weźmy pod

uwagę następujący przykład: pilot wychyla drążek sterowy "na siebie". Informacja o wychyleniu drążka jest przekazywana przez układ pomiarowy do komputera zarządzającego kabiną (sterownika). Sterownik przekazuje informacje do komputera głównego. W komputerze głównym informacja ze sterownika zostaje przełożona na wychylenie kątowne steru wysokości. Wychylenie steru wysokości powoduje powstanie momentu, który wstawiany jest do równań ruchu. Rozwiązany jest układ równań ruchu oraz wyznaczone siły działające na drążek w kabinie pilota. Informacje o prędkości i położeniu samolotu są przekazywane do modułu symulującego pracę instalacji samolotu. Moduł ten wyznacza między innymi położenie wskaźników przyrządów w kabinie pilota. Położenie wskaźników przyrządów jest przekazywane do sterownika, a stamtąd do imitatorów przyrządów. Imitatory ustawiają wskaźnik w pożądanym położeniu. Sterownik przekazuje także informację o sile do układu symulacji sił na drążku sterowym. W tym momencie pilot dostrzega reakcję samolotu na przyrządach i odczuwa zmianę siły na drążku sterowym. Jak widać, informacja o podjęciu działania przez pilota musi przejść dość długą drogę, zanim będą widoczne efekty. Ponieważ model dynamiki samolotu powinien oddawać reakcje rzeczywistego samolotu konieczna jest modyfikacja niektórych współczynników aerodynamicznych, tak by ostateczna reakcja symulatora była podobna do reakcji rzeczywistego samolotu.

5. Współpraca z pilotami

5.1. Konieczność "dostrajania" modelu na podstawie symulacji testowych

Ostatecznym kryterium poprawności działania symulatora jest pozytywna ocena pilotów. Model dynamiki lotu uzyskany z badań tunelowych modelu lub badań w locie z reguły nie spełnia wymagań pilotów co do zgodności zachowań z oryginałem. Kluczowym zagadnieniem jest rozpoczęcie współpracy z pilotami na odpowiednio wczesnym etapie konstruowania symulatora. Pozwala to na stopniowe usuwanie błędów i niezgodności modelu z oryginałem. Jest dość istotną rzeczą podejmowanie współpracy zarówno z pilotami doświadczalnymi jak i z pilotami z jednostek, w których symulator będzie używany. Wynika to stąd, że każdy użytkownik zwraca uwagę na inny aspekt funkcjonowania symulatora. Na początkowym etapie testowania nowej konstrukcji najbardziej pożądana jest współpraca a pilotami doświadczalnymi, ponieważ lepiej od pilotów z jednostek liniowych orientują się w fizyce zjawisk zachodzących

w samolocie podczas lotu. Dzięki nim możliwe jest "dostrojenie" podstawowych charakterystyk aerodynamicznych, sił na organach sterowania itp. W końcowym etapie testowania pożądana jest współpraca z pilotami z jednostek docelowych. Piloci ci są wyczuleni na te cechy symulatora, które są najistotniejsze w procesie szkolenia.

5.2. Oszacowanie jakości symulacji

Oceny jakości symulacji dokonywane przez różnych pilotów bardzo często różnią się diametralnie. Na przykład przy testowaniu skuteczności lotek symulatora samolotu TS-11 Iskra niektórzy piloci twierdzili, że lotki są za mało skuteczne, podczas gdy inni byli zdania, że lotki są zbyt skuteczne. Jeszcze większe problemy powstają przy szacowaniu przyczyn zaistniałych nieprawidłowości. Należy podchodzić z dużą rezerwą do przyczyn nieprawidłowego zachowania się symulatora sugerowanych przez pilotów. Ponieważ zmiana jednego współczynnika aerodynamicznego powoduje daleko idące konsekwencje, należy dokonywać jej z dużą ostrożnością. Każda poprawa powinna być przetestowana przez kilku pilotów w czasie różnych lotów. Zdarza się bowiem dość często, że poprawa jednego parametru powoduje pogorszenie jakości symulacji w innych stanach lotu. Wynika to z dużej komplikacji całego systemu i dużej ilości sprzężeń między poszczególnymi modułami. Konieczna jest też świadomość, że nie jest możliwe uzyskanie idealnej zgodności symulacji z rzeczywistym samolotem. Z tego względu konieczne jest wypracowanie kompromisu między oczekiwaniami, możliwościami i nakładami na opracowanie symulatora.

6. Wnioski

Opracowanie modelu dynamiki lotu składa się z dwu części. Część pierwsza polega na określeniu współczynników aerodynamicznych i charakterystyk podwozia na podstawie badań modeli samolotu w tunelu aerodynamicznym, badań stoiskowych podwozia i badań w locie samolotu. Od jakości tych badań zależy w dużej mierze jakość modelu dynamiki lotu. Z tego powodu należałoby przyszłe konstrukcje lotnicze już na etapie projektu przystosować do tworzenia dla nich symulatorów. W obecnej sytuacji producenci samolotów nie są przygotowani do dostarczania danych niezbędnych do skonstruowania symulatora.

Brakuje często podstawowych danych, a wiele parametrów samolotu zmienia się bardzo często w wyniku modernizacji samolotu utrudniając tworzenie modelu dynamiki lotu. Wiele problemów stwarza też modelowanie sytuacji awaryjnych. Nie ma bowiem możliwości przetestowania ich na prawdziwym samolocie ze względów bezpieczeństwa. Nie są też dostępne wyniki badań tunelowych dla modelu z wypuszczonymi niesymetrycznie klapami, podwoziem czy z podwieszonym uzbrojeniem. Druga część opracowania modelu dynamiki lotu sprowadza się do testowania oprogramowania i wprowadzania poprawek. Na tym etapie konieczna jest współpraca użytkownika końcowego oraz pilotów doświadczalnych. Bardzo korzystna jest sytuacja, w której samolot, do którego jest budowany symulator, jest znany dużej liczbie pilotów. Wynika to stąd, że piloci po "przelataniu" kilku godzin w kabinie symulatora przyzwyczajają się do niego i zaczynają im umykać błędy oczywiste dla pilotów którzy zasiadają w kabinie symulatora po raz pierwszy. Problem ten nabiera znaczenia w przypadku konstruowania symulatora do samolotów wprowadzanych do produkcji seryjnej. Liczba pilotów latających takim samolotem jest niewielka, stąd trudności z uzyskaniem opinii od dużej liczby pilotów. Przypadek nowo wprowadzanego samolotu jest najbardziej pożądanym z punktu widzenia użytkownika sprzętu, który spodziewa się otrzymać samolot wraz z symulatorem. Jest też najtrudniejszy do zrealizowania. Z tego względu konieczna jest współpraca między producentami przy tworzeniu samolotu i symulatora do niego.

Adaptation of Airplane Dynamic Parameters to Meet a Flight Simulator Needs

Summary

The paper presents problems which the authors met during the work on adaptation of the mathematical model of an airplane to meet the specific requirements of the TS-11 Iskra flight simulator. The flight simulator requirements imposed on a dynamic model of airplane as well as details of model modification and airplane model validation were discussed.

ANALIZA DYNAMIKI SAMOŁOTU PO WEJŚCIU W PODMUCH PRZY UWZGLĘDNIENIU WPLYWU STRUMIENIA ZAŚMIGŁOWEGO

JIMOH PEDRO

Institut Lotnictwa, Warszawa

W pracy przedstawiono modelowanie fizyczne i matematyczne wpływu uskoku wiatru typu "microburst" na dynamikę samolotu z uwzględnieniem strumienia zaśmigłowego. Dynamiczne równania ruchu samolotu wyprowadzono stosując formalizm Boltzmann-Hamela. Uwzględniono dodatkowy wpływ strumienia zaśmigłowego na dynamikę za pomocą metody Ribnera. Wykonano obliczenia przykładowe dla różnych sytuacji przy zmiennym polu wiatru. Otrzymane wyniki ujawniały zdecydowane pogorszenie własności dynamicznych samolotu podczas mimośrodowego przejścia przez podmuch wiatru przy uwzględnieniu strumienia zaśmigłowego.

1. Wstęp

W pracy przedstawiono wpływ strumienia zaśmigłowego na własności dynamiczne lekkiego samolotu przy wejściu w zmienne pole wiatru. Wpływy zespołu napędowego na dynamikę samolotu są następujące:

- bezpośredni udział śmigła, który jest związany z siłami wytwarzanymi przez śmigło;
- pośrednie wpływy wynikające ze wzajemnego oddziaływania strumienia zaśmigłowego i poszczególnych powierzchni nośnych (skrzydła i usterzenia: poziome i pionowe). Można dzielić pośrednie wpływy na [5,10,11,12]:
 - wpływ spowodowany zmianą ciśnienia dynamicznego na powierzchniach nośnych;
 - wpływ spowodowany zmianą odchylenia strug za płatem w strumieniu zaśmigłowym;

- łączny wpływ spowodowany jednoczesną zmianą ciśnienia dynamicznego i odchylenia strug za płatem.

Obserwowano, że podczas startu lub lądowania samolotu przy zmiennym polu wiatru "microburst", występują duże zmiany prędkości: liniowej i kątowej [9]. Najczęściej te zmiany wywołują szybkie zmiany ciągu silnika śmigłowego, które mogą spowodować zmniejszenie stateczności dynamicznej samolotu [6,7].

2. Równania ruchu samolotu

Samolot traktowano jako bryłę sztywną o sześciu stopniach swobody. W czasie analizy masa samolotu jest stała. Optyw jest quasi-stacjonarny, ściśliwy, nielepki i podkrytyczny. Efekty ściśliwości powietrza uwzględniono według zależności Prandtla- Glacurta. Pominięto oderwania optywu.

Wyprowadzono dynamiczne równania ruchu samolotu w układzie związanym z samolotem przy użyciu formalizmu Boltzmanna-Hamela [3,4]. Te równania będą tu przedstawione w postaci macierzowej:

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{Q} + \mathbf{U}\delta \quad (2.1)$$

gdzie zmodyfikowana macierz bezwładności:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_W, \quad (2.2)$$

– wektor przyspieszeń oraz wektor prędkości:

$$\dot{\mathbf{V}} = \text{col}[\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}] \quad (2.3)$$

$$\mathbf{V} = \text{col}[U, V, W, P, Q, R] \quad (2.4)$$

– macierz sił zewnętrznych:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} = \text{col}[X, Y, Z, L, M, N] \quad (2.5)$$

przy czym X, Y, Z i L, M, N są składowymi sił i momentów sił zewnętrznych pochodzących od aerodynamiki, grawitacji i zespołu napędowego; na przykład zewnętrzny moment pochylający działający na samolot określa się następująco:

$$\begin{aligned}
 M &= -mgx_c \cos \Theta \cos \Phi + \sum_{i=1}^n T_i(z_{T_i} \cos \varphi_T + x_{T_i}) + \\
 &- \sum_{i=1}^n J_T \omega_{T_i} (R \cos \varphi_T + P \sin \varphi_T) + \frac{1}{2} \rho V_A^2 S (-z_A C_x + x_A C_z + c C_m) + \\
 &+ M_{W'} (W' - W'_{zg}) + M_Q (Q - Q_W) + M_{\alpha_{zH}} \alpha_{zH}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

– macierz bezwładności:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

– macierz kinematyczna \mathbf{K} oraz macierz sterowania \mathbf{U} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & -P & 0 & 0 & 0 \\ -Q & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & V & 0 & -R & Q \\ W & 0 & -U & R & 0 & -P \\ -V & U & 0 & -Q & -P & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} X_{\delta_H} & 0 & X_{\delta_V} \\ 0 & 0 & Y_{\delta_V} \\ Z_{\delta_H} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\delta_L} & L_{\delta_V} \\ M_{\delta_H} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\delta_L} & N_{\delta_V} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

gdzie w równaniach (2.1) ÷ (2.9):

- U, V, W – składowe prędkości liniowej;
- P, Q, R – składowe prędkości kątovej;
- Θ, Φ, Ψ – kąty Eulerowskie;
- m – masa samolotu;
- J_x, J_y, J_z – momenty bezwładności;
- J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} – momenty dewiacyjne;
- S_x, S_y, S_z – momenty statyczne.

Bezwymiarowe współczynniki sił i momentów sił aerodynamicznych w równaniu (2.6) z udziałem podmuchu wiatru oraz strumienia zaśmigłowego zależą od kątów: natarcia α , ślizgu β oraz liczb Macha i Reynoldsa:

$$C_x, C_y, C_z, C_l, C_m, C_n = f(\alpha, \beta, Ma, Re) \quad (2.10)$$

Całkowity bezwymiarowy współczynnik momentu pochyłającego określono następująco:

$$C_m = C_m^0 + \Delta C_m^w + \Delta C_m^\alpha \quad (2.11)$$

Związki kinematyczne określono w postaci ogólnej:

$$\dot{\mathbf{r}} = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}] = \mathbf{F}(\mathbf{V}_0, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}_W) \quad (2.12)$$

3. Model uskoku wiatru "microburst"

Składowe prędkości wiatru i jej gradienty określono z modelu uskoku wiatru microburst Bray'a. Jest to trójwymiarowy model wiatru w oparciu o dane meteorologiczne zbierane podczas badania JAWS (Joint Airport Weather Studies) w NASA, USA [1]. Wpływy zmiennego pola wiatru na własności dynamiczne samolotu przejawiają się w postaci dodatkowych: a) chwilowej prędkości liniowej; oraz b) chwilowej prędkości kątowej.

Prędkości opływu:

$$V_A^2 = (U - W_{x_g})^2 + (V - W_{y_g})^2 + (W - W_{z_g})^2 \quad (3.1)$$

podczas gdy chwilowa prędkość kątowa wiatru jest określona z następującej zależności:

$$\boldsymbol{\Omega}_W = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{W} = \text{col}[P_W, Q_W, R_W] \quad (3.2)$$

gdzie:

- $W_{x_g}, W_{y_g}, W_{z_g}$ – składowe liniowej prędkości wiatru;
- P_w, Q_w, R_w – składowe kątowej prędkości wiatru.

4. Model wpływu strumienia zaśmigłowego

Rozpatrzono w niniejszej pracy pośrednie wpływy zespołu napędowego jak wspomniano wyżej we wstępie. Współczynnik wzrostu ciśnienia dynamicznego

na głównym płacie określono z teorii pędu [10,11]:

$$\eta_s = \left(\frac{V_S}{V_A}\right)^2 = \left[1 + \frac{S_{p_i}}{S} \left(\frac{N_r}{qV_A S \dot{S}}\right)\right] \quad (4.1)$$

analogicznie współczynnik wzrostu ciśnienia dynamicznego na usterzeniu poziomym:

$$\eta_h = \left(\frac{V_H}{V_A}\right)^2 = \left[1 + \frac{S_{h_i}}{S_h} \left(\frac{N_r}{qV_A S \dot{S}}\right)\right] \eta_{h_0} \quad (4.2)$$

Zmiana gradientu kąta odchylenia strug za płatem spowodowana strumieniem zaśmigłowym jest określona z metody Ribnera [10,11,12]:

$$\frac{d\varepsilon_\alpha}{d\alpha} = k_1 + k_2 N_\alpha \left(\frac{\partial C_{z_\alpha}}{\partial \alpha}\right)_{C_\alpha} f(P_s) \quad (4.3)$$

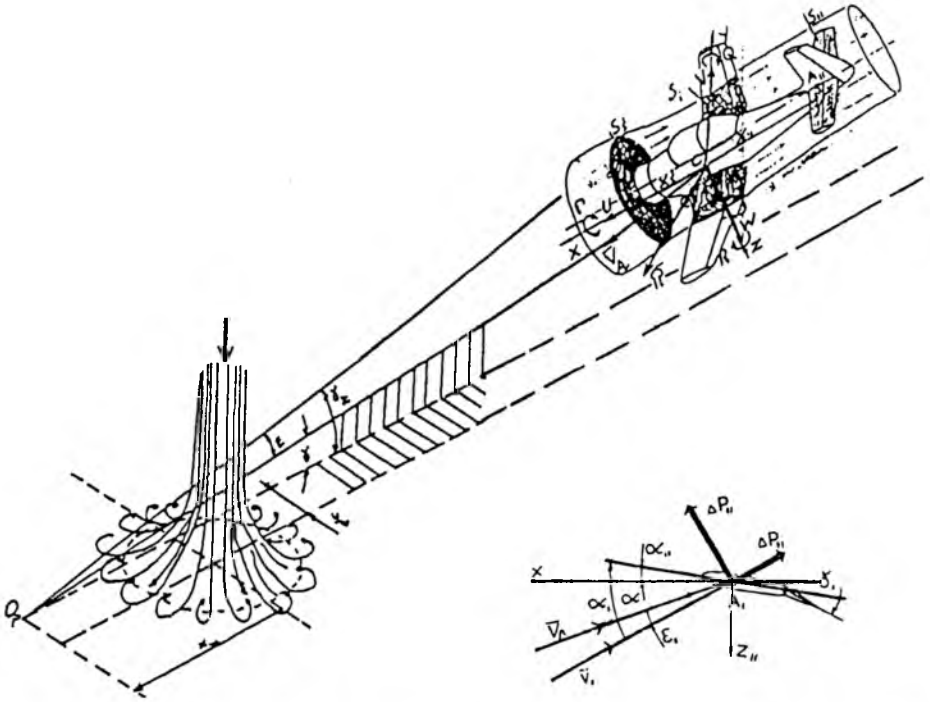
Całkowitą zmianę gradientu współczynnika siły nośnej względem kąta natarcia wywołaną strumieniem zaśmigłowym obliczono z następującego wzoru:

$$\frac{dC_z}{d\alpha} = \frac{dC_{z_g}}{d\alpha} \eta_s + \frac{dC_{h_\alpha}}{d\alpha} \eta_h \frac{S_h}{S} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} - \frac{d\varepsilon_\alpha}{d\alpha}\right) \quad (4.4)$$

5. Symulacja numeryczna i omówienie wyników

Przeprowadzono symulację numeryczną dla lekkiego samolotu z napędem śmigłowym. Zastosowano pełne nieliniowe równania ruchu samolotu do analizy numerycznej ze względu na sprzężenie pomiędzy ruchami: podłużnym a bocznym przy większych odchyleniach od lotu ustalonego. Wybrano spośród wielu wyników obliczeniowych następujące 4 przypadki do przedstawienia w niniejszej pracy:

- (a) wariant podstawowy (zerowy): tj. bezwietrzny prostoliniowy lot ustalony na wysokości 400 m, bez wpływu strumienia zaśmigłowego;
- (b) wariant pierwszy stanowi prostoliniowy lot ustalony na wysokości 400 m w zmienny podmuch wiatru bez wpływu strumienia zaśmigłowego;
- (c) wariant drugi: tj. bezwietrzny prostoliniowy lot ustalony na wysokości 400 m z uwzględnieniem wpływu strumienia zaśmigłowego;
- (d) Wariant trzeci: prostoliniowy lot ustalony na wysokości 400 m w zmiennym polu wiatru, przy uwzględnieniu wpływu strumienia zaśmigłowego. Jądro uskoku wiatru znajduje się w punkcie o współrzędnych $x_w = 1000$ m i $y_w = 200$ m.

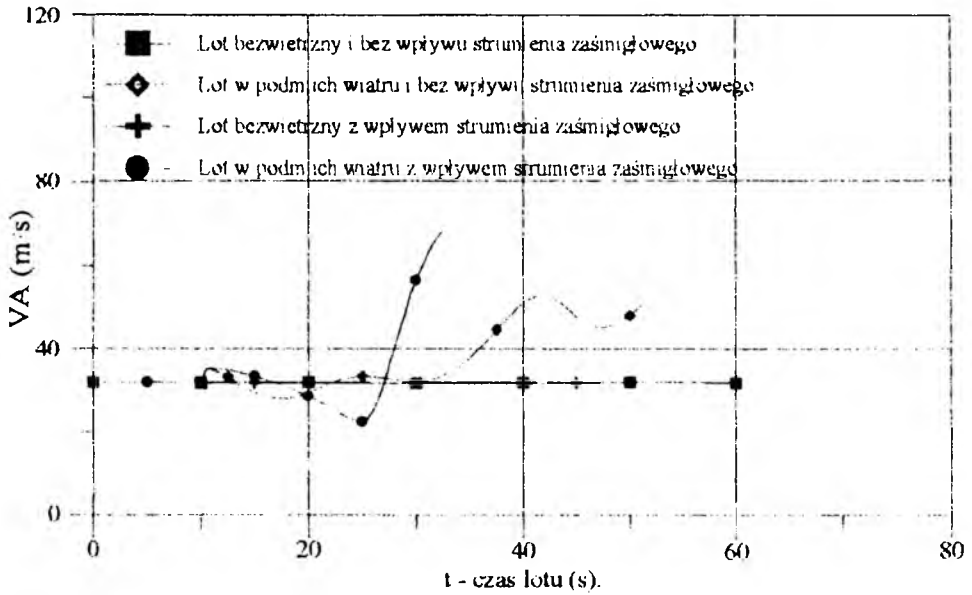


Rys. 1. Układy współrzędnych odniesienia oraz kątowe i liniowe prędkości samolotu

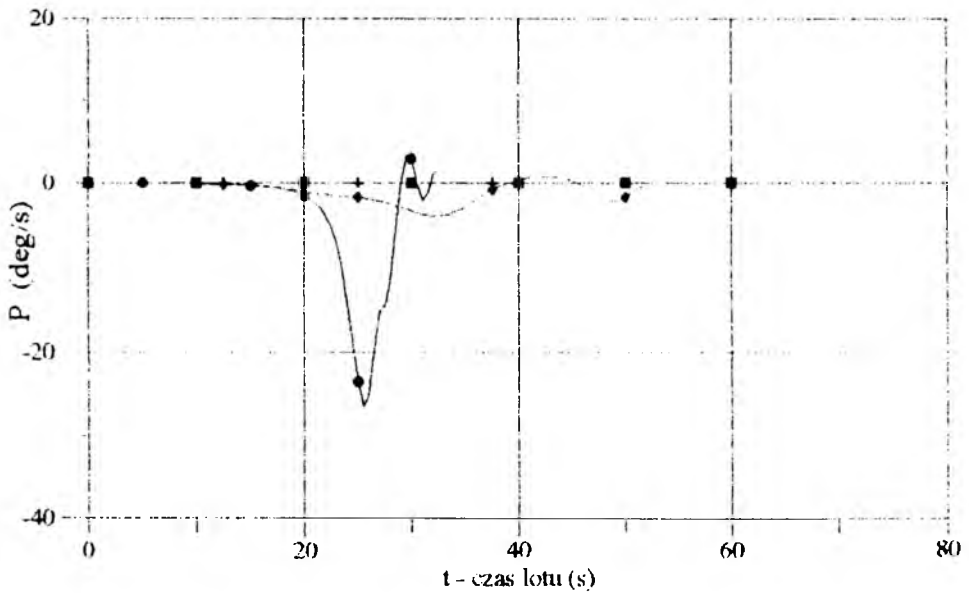
Otrzymane wyniki symulacji numerycznej przedstawiono na rys.2 ÷ rys.13. W przypadku (b) zauważono wzrost tłumienia oscylacji szybkich w wyniku strumienia zaśmigłowego, natomiast spadkowi tłumienia oscylacji fugoidalnych towarzyszy wzrost jego okresu [7]. W przypadku (b) i (d) występowało totalne pogorszenie własności dynamicznych, które doprowadziło do katastrofy. W locie w podmuchach wiatru z uwzględnieniem wpływu strumienia samolot runął na ziemię po około 33 s (rys.9).

Przeprowadzona analiza numeryczna w tej pracy pokazała, że strumień zaśmigłowy zdecydowanie pogarsza własności dynamiczne lekkiego samolotu. Pogorszenie stateczności dynamicznej wynika ze zmniejszenia zapasu stateczności statycznej ($-dC_m/d\alpha$) samolotu w wyniku zwiększenia się $d\epsilon/d\alpha$ przy usterzeniach: poziomym i pionowym.

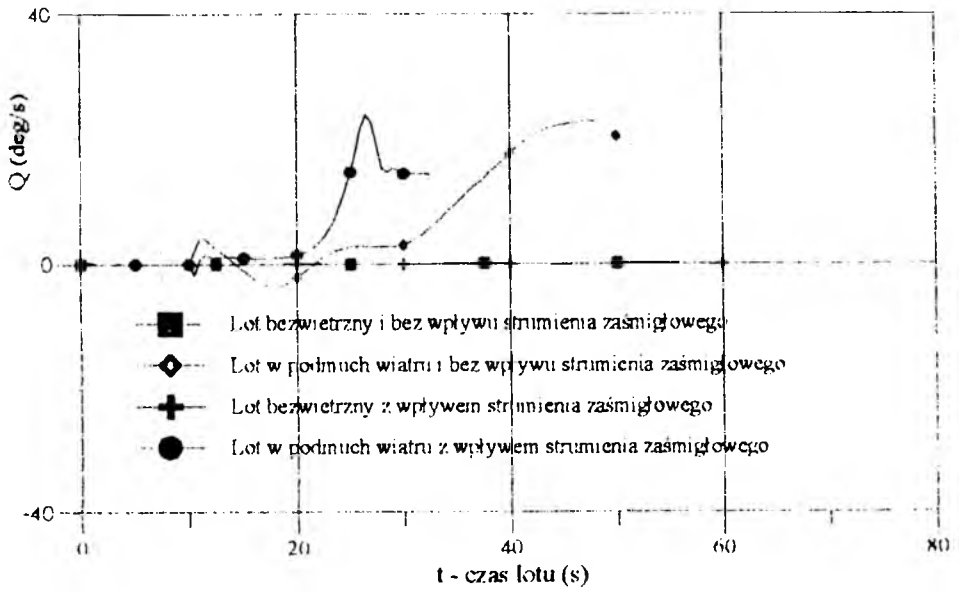
W wyniku symulacji numerycznej zauważono niekorzystny wpływ strumienia zaśmigłowego na dynamikę samolotu po wejściu w zmienny podmuch, który doprowadził samolot do katastrofy. Otrzymane wyniki symulacji numerycznej potwierdzają, że samoloty z napędem śmigłowym nie są mniej za-



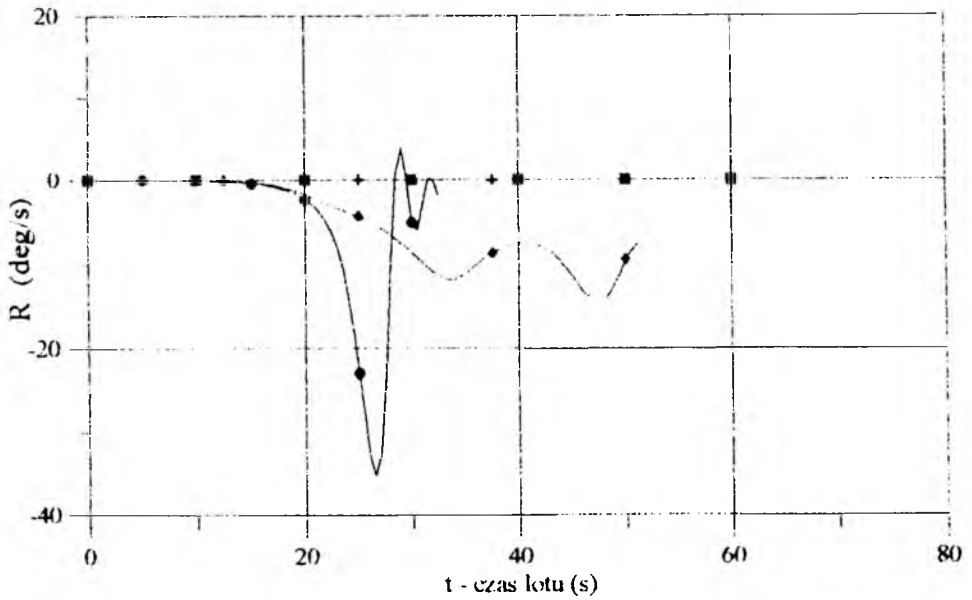
Rys. 2. Przebiegi zmian prędkości lotu samolotu w czasie



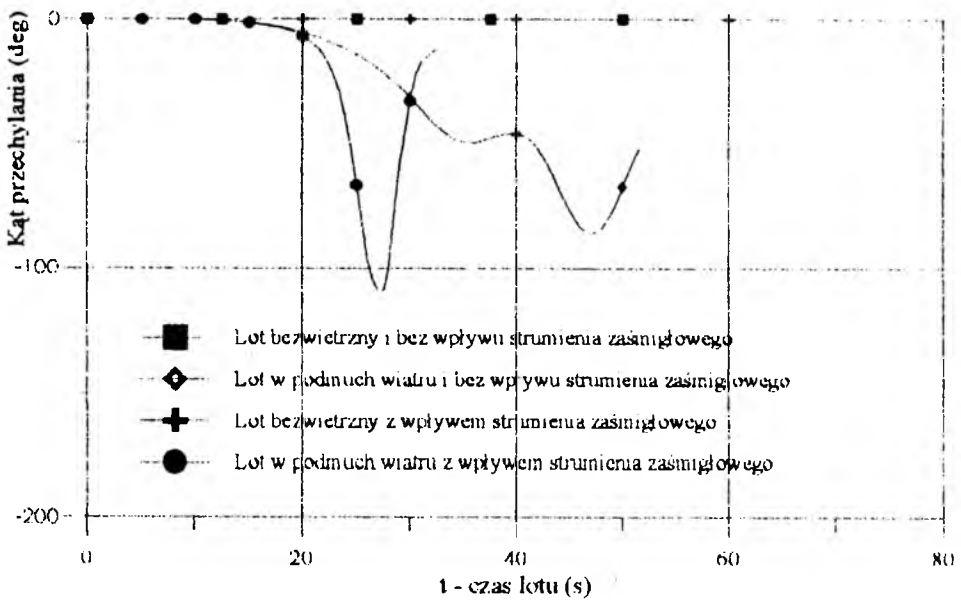
Rys. 3. Zmiany kątownej prędkości przechylenia w czasie



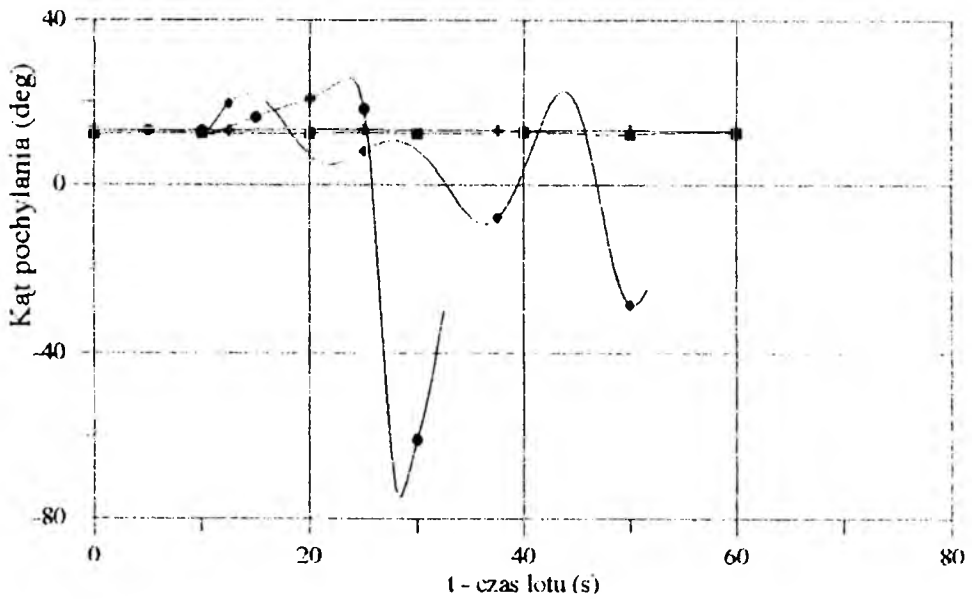
Rys. 4. Zmiany kątowej prędkości pochylania w czasie



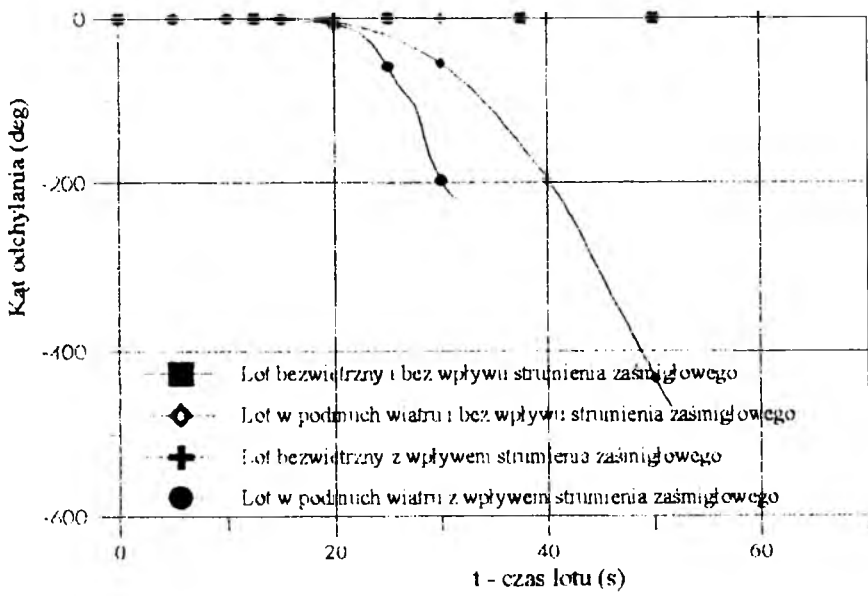
Rys. 5. Zmiany kątowej prędkości odchylenia w czasie



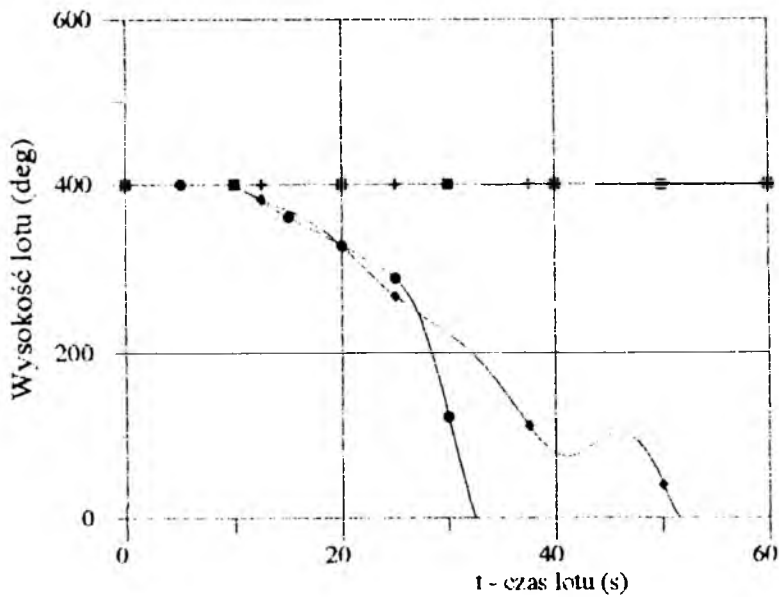
Rys. 6. Zmiany kąta przechylenia w czasie



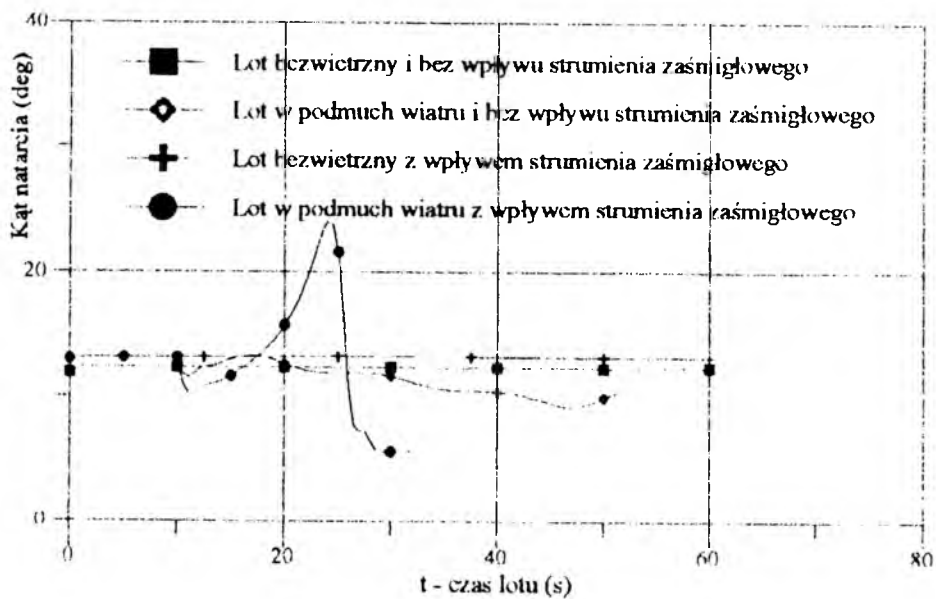
Rys. 7. Zmiany kąta pochylania w czasie



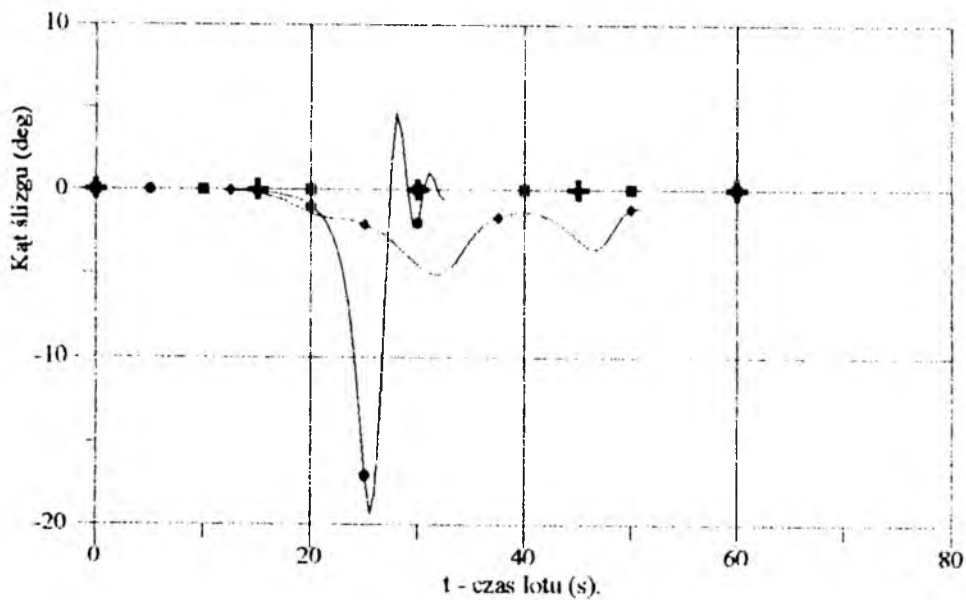
Rys. 8. Zmiany kąta odchylenia w czasie



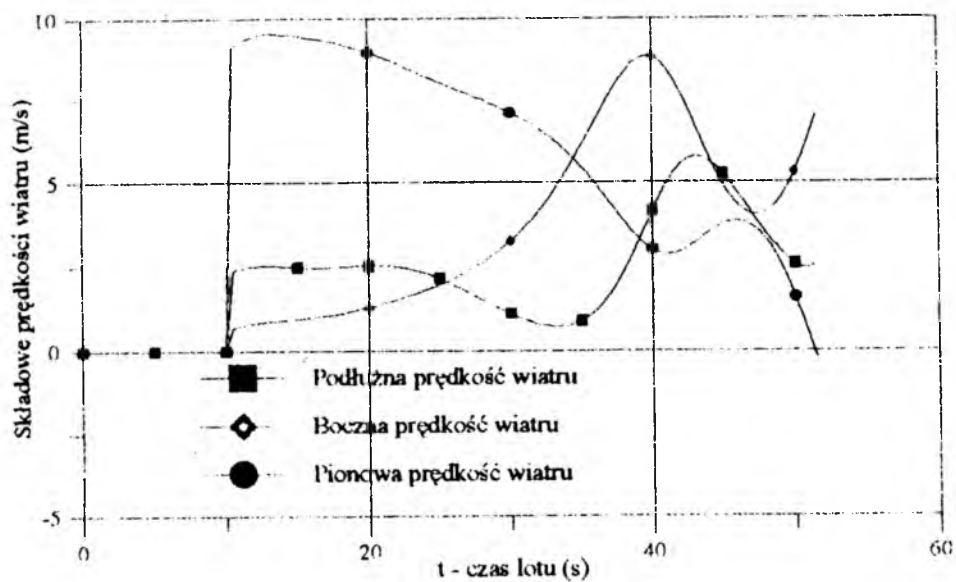
Rys. 9. Zmiany wysokości lotu w czasie



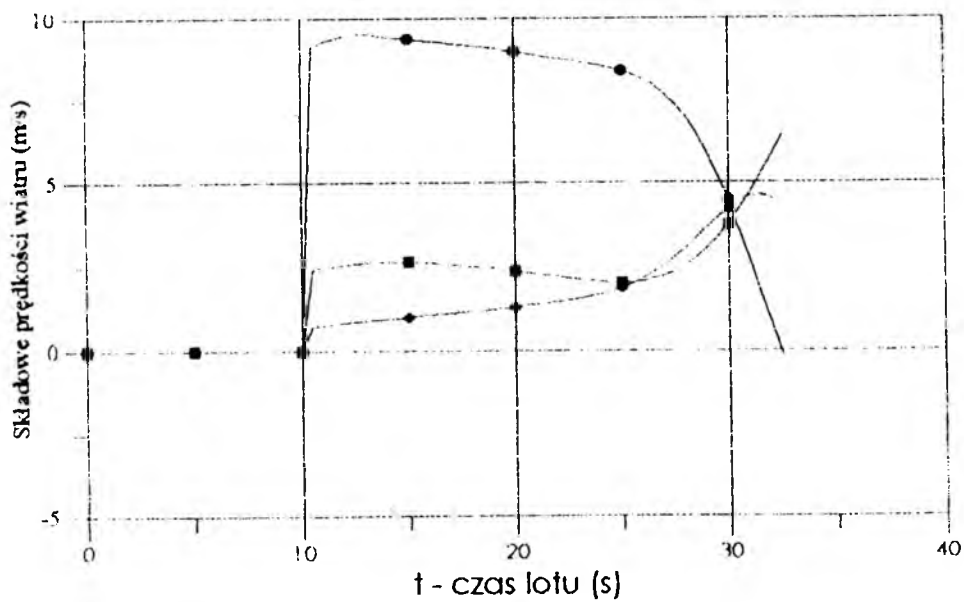
Rys. 10. Zmiany kąta natarcia w czasie



Rys. 11. Zmiany kąta ślizgu w czasie



Rys. 12. Składowe prędkości wiatru w czasie bez wpływu strumienia zaśmigłowego



Rys. 13. Składowe prędkości wiatru w czasie przy uwzględnieniu strumienia zaśmigłowego

grożone uskokiem wiatru typu "microburst" niż duże samoloty odrzutowe. Należy prowadzić dalsze prace badawcze dla tego typu samolotów.

Dominujący wpływ na własności dynamiczne samolotu podczas wejścia w podmuch dla badanego przypadku ma pionowy podmuch W_{z_0} , ale nie należy lekceważyć kombinacji średniej wartości podmuchu pionowego z podłużnym gradientem wiatru. Przejście samolotu obok jądra uskoju wiatru daje mniejszy wiatr podłużny jak również zakłócający boczny moment, który pogarsza dynamikę samolotu.

Główną wadą zaproponowanego modelu wpływu strumienia zaśmigłowego w niniejszej pracy jest trudność dokładnego określenia pola powierzchni skrzydła i usterzenia umieszczonego w strumieniu zaśmigłowym. Przedstawiony model może być wykorzystany do sprawdzenia własności dynamicznych samolotu podczas wejścia w zmienny podmuch wiatru, dla różnych etapów projektowania, eksploatacji i produkcji samolotów.

Literatura

1. BRAY R.S., *A Method for Three-Dimensional Modelling of Windshear Environments for Flight Simulator Applications*, NASA TM85969, 1985
2. FISZDON W., *Mechanika Lotu*, t.1,2, PWN, Łódź-Warszawa 1961
3. MARYNIAK J., *Ogólny model matematyczny sterowanego samolotu*, Zbiór Referatów IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie", PTMTS Oddz. Warszawa 1992
4. MARYNIAK J., *Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanych obiektów ruchomych*, Materiały III Krajowej Konferencji Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania, Gdynia 1991
5. MCCORMICK B.W., *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*, John Wiley and Sons, New York 1979
6. PEDRO J., GORAJ Z., *Modelowanie wpływu strumienia zaśmigłowego na pochodne aerodynamiczne stateczności*, XXXIII Sympozjon "Modelowanie w Mechanice", Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, "Mechanika", z.115, Gliwice 1994
7. PEDRO J., GORAJ Z., *Power Influence on Frequencies and Damping of Natural Modes for Light Aircraft*, XVI Symposium on Vibrations in Physical Systems, Poznań-Błażejewko, 1994
8. PEDRO J., MARYNIAK J., *Numerical Simulation of Propeller Slipstream Effects on the Dynamic Properties of a Light General Aviation Aircraft*, 8th Conference on Dynamic Processes Simulation SPD-8, Chochołowska Valley, Tatra Mountains, Poland, 1994
9. PEDRO J., MARYNIAK J., *Wpływ uskoju wiatru "microburst" na lot startującego samolotu*, V Ogólnopolska Konferencja "Mechanika w Lotnictwie", Warszawa 1992

10. PERKINS C.D., HAGE R.E., *Airplane Performance, Stability and Control*, John Wiley and Sons, New York, 1949
11. RAYMER D.P., *Aircraft Design; "A Conceptual Approach"*, AIAA Education Series, 1989
12. ROSKAM J., *Airplane Design; Part IV Preliminary Calculations of Aerodynamic, Thrust and Power Characteristics*, Roskam Aviation and Engineering Corporation, Ottawa, Kansas 1990

Analysis of Aircraft Dynamics in a Wind Field with Propeller Slipstream Effects

Summary

Physical and mathematical modelling of aircraft dynamics in a variable wind field with propeller slipstream effects is presented in the paper. Aircraft dynamics equations are derived using the Boltzmann-Hamel formalism. The additional effect of propeller slipstream was included into the model with the aid of Ribner's method. Sample numerical simulation was carried out for different situations in a variable wind. The obtained results showed some degradation in aircraft dynamic properties during flight in a variable wind field with propeller slipstream.

ASPEKTY TEORETYCZNE METODY FUNKCJI LAPUNOWA DO SYNTEZY NIELINIOWEGO PRAWA STEROWANIA SAMOLOTEM

JÓZEF PIETRUCHA

MARIA ZŁOCKA

ITLiMS, Politechnika Warszawska

Omówiono inną możliwość syntezy prawa sterowania niż powszechnie stosowana metoda Kalmana-Letowa. Wzięto pod uwagę koncepcję funkcji Lapunowa, które zwykle służą do badania stateczności.

Sformułowano "zwykłe" i optymalne zagadnienie stabilizacji. Do rozwiązania zagadnienia optymalnego zastosowano twierdzenie Krasowskiego. Podano wskazówki praktyczne do jego stosowania.

Dla właściwej syntezy regulatora sprawą kluczową jest znajomość modelu matematycznego obiektu sterowania i dlatego poświęcono temu cały duży rozdział. Zaprezentowano hierarchię modeli ruchu symetrycznego samolotu nieodkształcalnego, a przede wszystkim modele używane do sterowania lotami manewrowymi.

Do syntezy nieliniowego prawa sterowania zaproponowano metodę Zubowa, która polega na poszukiwaniu funkcji Lapunowa i sterowania w postaci szeregów potęgowych.

1. Wprowadzenie

Wśród zagadnień rozpatrywanych w dynamice lotu ważne miejsce zajmuje sterowanie ruchem obiektu latającego, a zwłaszcza stabilizacja zadanego ruchu tego obiektu. Zagadnienie takie nazywać będziemy synteza prawa sterowania. Tradycyjnie bywa ono rozwiązywane metodą wielokrotnej analizy (np. [1]). Zaletą takiej syntezy jest jej uniwersalność, ale analiza wszystkich wariantów nie jest możliwa i nigdy nie mamy pewności, że uzyskaliśmy rozwiązanie optymalne.

Bardziej nowoczesną metodą jest podejście wywodzące się z teorii sterowania. Dużą popularność wśród dynamików zdobyła zwłaszcza metoda Kalmana-Letowa [2], gdyż prowadzi ona do regulatora liniowego i stacjonarnego. Jednak

metoda ta ma tę wadę, że wymaga posługiwania się liniowym modelem obiektu sterowanego.

Oczywiście w klasycznych zagadnieniach mechaniki lotu z powodzeniem stosuje się modele liniowe, a już z reguły linearyzację przeprowadza się w celu odpowiedzi na pytanie o stateczność lokalną. W ślad za tym postępowaniem linearyzację przeprowadza się również w celu przeprowadzenia syntezy. Zachodzi jednak obawa, że w ten sposób traci się okazję do bardziej efektywnego wykorzystania sterowania (np. [3]).

W wielu zagadnieniach współczesnej mechaniki lotu modele liniowe są raczej wyjątkiem niż regułą. W niektórych wypadkach linearyzacja może być przeprowadzona w celu odpowiedzi na pytanie o stateczność lokalną, lecz dla zagadnień lotu manewrowego linearyzacja uniemożliwia przewidzenie stateczności. Jak pokazano w pracy [4] zdarzają się sytuacje, w których sprawa stateczności może być rozstrzygnięta tylko z uwzględnieniem wyrazów nieliniowych.

Celem referatu jest omówienie innej możliwości syntezy prawa sterowania; proponujemy mianowicie zastosowanie koncepcji funkcji Lapunowa wywodzących się z bezpośredniej metody Lapunowa badania stateczności. Oczywiście, koncepcja ta nie jest nowa – pierwsza praca [5] pojawiła się już w r. 1960, ale zawierała ona tylko rozważania teoretyczne i proste przykłady ilustrujące główne idee; poza tym od tamtego czasu sporo się zmieniło (np. [6]). Warto także podkreślić, że metoda funkcji Lapunowa przeżywa wyraźny renesans (zob. np. [7]).

2. Sformułowanie zagadnienia stabilizacji

Rozważmy zagadnienie stabilizacji statku powietrznego opisanego modelem ogólnym:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.1)$$

gdzie:

- \mathbf{x} – n -wymiarowy wektor stanu zbudowany ze współrzędnych i prędkości uogólnionych;
- \mathbf{u} – r -wymiarowy wektor sterowania, którego składowymi są wychylenia powierzchni sterowych oraz ciąg napędu;
- \mathbf{f} – funkcja wektorowa n -wymiarowa określona w obszarze:

$$t \geq 0 \quad \|\mathbf{x}\| < X \quad (2.2)$$

taka, że spełnia warunek:

$$f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

a $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ jest r -wymiarową funkcją wektorową ciągłą w obszarze (2.2) i spełniającą warunek:

$$\mathbf{u}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Na normę $\|\mathbf{u}\|$ żadnych ograniczeń a priori nie nakłada się. Zakłada się natomiast, że funkcje $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ i $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ spełniają warunki zapewniające istnienie i jednoznaczność rozwiązania $\mathbf{x}(t)$ równania (2.1) przy dowolnych warunkach początkowych (\mathbf{x}_0, t_0) z obszaru (2.2).

Klasyczne zagadnienie stabilizacji (tzn. stabilizacji nieoptymalnej czyli "zwykłej") polega na wyznaczeniu takiego sterowania $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, aby rozwiązanie zerowe $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ równania (2.1) było asymptotycznie stateczne. Zagadnienie stabilizacji optymalnej polega na wyznaczeniu takiego sterowania $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, aby nie tylko rozwiązanie zerowe $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ równania (2.1) było asymptotycznie stateczne, ale by ponadto funkcjonal:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t) dt \quad (2.5)$$

gdzie $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ jest zadaną funkcją nieujemną w obszarze (2.2), osiągnął wartość minimalną.

Warto zaznaczyć, że w sformułowaniu nieklasycznym osłabia się żądanie stateczności asymptotycznej dopuszczając stateczność nieasymptotyczną, a nawet techniczną [8].

3. Podstawy matematyczne rozwiązania zagadnienia stabilizacji

3.1. Koncepcja ruchu zakłóconego

U podstaw każdej metody stabilizacji leży koncepcja ruchu zakłóconego z teorii stateczności, przeniesiona na grunt teorii sterowania. W celu pełniejszego naświetlenia tej koncepcji przedstawimy najpierw pewne pojęcia z teorii równań różniczkowych [9]. Rozważmy mianowicie nieliniowe równanie różniczkowe w postaci:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \quad (3.1)$$

Niech $X_0(t)$ oznacza pewne rozwiązanie równania (3.1). Nazywamy je *rozwiązaniem* lub *ruchem niezakłóconym*. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0(t) \quad (3.2)$$

które wskazuje, że $\mathbf{x}(t)$ jest odchyleniem rozwiązania $\mathbf{X}(t)$ od ruchu zakłóconego $\mathbf{X}_0(t)$. Na mocy określenia $\mathbf{X}_0(t)$ ma miejsce równanie:

$$\dot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0(t)) \quad (3.3)$$

Wobec tego dla odchylenia $\mathbf{x}(t)$ mamy równanie różniczkowe w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

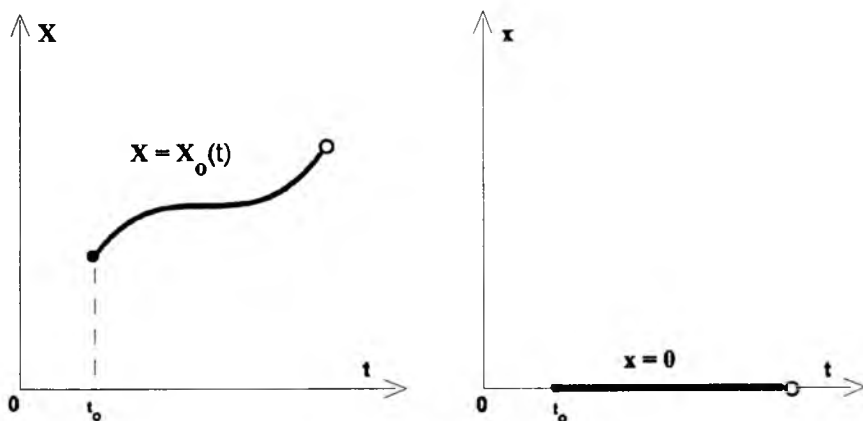
gdzie:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) \quad (3.5)$$

Z oznaczenia (3.5) wynika, że dla $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ zachodzi:

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Dzięki przekształceniu (3.2) badanie stateczności rozwiązania $\mathbf{X}(t)$ sprowadza się do badania stateczności rozwiązania zerowego $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, czyli położenia równowagi dynamicznej (zob. rys.1).



Rys. 1. Sprowadzenie badania stateczności ruchu niezakłóconego w przestrzeni (\mathbf{X}, t) do badania stateczności położenia równowagi w przestrzeni (\mathbf{x}, t)

Równanie różniczkowe (3.4) nazywa się *równaniem ruchu zakłóconego* lub *równaniem zredukowanym*. W związku z tym rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$ nazywamy

ruchem zakłóconym. W teorii sterowania bywa ono częściej nazywane *procesem nieustalonym* lub *przejściowym*. Według [10] proces nieustalony jest to zmiana w czasie współrzędnych stanu układu od chwili przyłożenia wymuszenia na wejściu układu do chwili rozpoczęcia procesu ustalonego – w miarę upływu czasu proces nieustalony dąży do zera przy założeniu stateczności ruchu.

3.2. Metoda funkcji Lapunowa

Jak wiadomo, podstawy klasycznej teorii stateczności oparte są na równaniu zredukowanym (3.4). Ale w swej fundamentalnej pracy z 1892 r. Lapunow przedstawił inną metodę, którą nazwał *drugą metodą*, a która w literaturze współczesnej nazywana jest *metodą bezpośrednią*. Istotną cechą tej metody jest to, że daje ona warunki stateczności bez potrzeby rozwiązywania równania (3.4).

Kluczową rolę w zastosowaniach metody bezpośredniej do stabilizacji odgrywa wyrażenie (w literaturze oznaczane często przez B):

$$\beta(V; t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \frac{dV}{dt} + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.7)$$

w którym wielkość $V = V(t, \mathbf{x})$ jest *funkcją Lapunowa*, a wielkość φ jest funkcją podcałkową we wskaźniku jakości (2.5). Funkcję

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad}V)^\top \mathbf{f} \quad (3.8)$$

gdzie \mathbf{f} jest prawą stroną równania (2.1), nazywamy pochodną zupełną funkcji $V(t, \mathbf{x})$ na rozwiązaniach \mathbf{x} lub wzdłuż rozwiązań \mathbf{x} równania (2.1).

Przypomnijmy, że funkcją Lapunowa nazywana jest pewna funkcja skalarna $V(\mathbf{x}, t)$ o następujących własnościach:

- (a) $V > 0$ i $\dot{V} < 0$ kiedy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- (b) $V = 0$ i $\dot{V} = 0$ kiedy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Bazą matematyczną metody funkcji Lapunowa jest II twierdzenie Lapunowa o stateczności asymptotycznej ruchu niezakłóconego (zob. np. [9], str.382). W tymże twierdzeniu, oprócz pochodnej funkcji Lapunowa, pojawia się ważne pojęcie "funkcja mająca nieskończenie małą granicę wyższego rzędu". Dla skrócenia zapisu własność tę oznaczymy przez Γ . Funkcja $V(t, \mathbf{x})$ ma własność Γ , kiedy spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}) &\leq \gamma(\|\mathbf{x}\|) \\ \delta(\|\mathbf{x}\|) &\rightarrow \infty \quad \text{przy} \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

gdzie γ i δ są niemalejącymi funkcjami skalarnymi takimi, że $\alpha(0) = 0$ oraz $\delta(0) = 0$. Np. funkcja $V = (x_1 + \dots + x_n) \sin t$ ma własność Γ , natomiast nie ma jej funkcja $V = \sin[t(x_1 + \dots + x_n)]$, chociaż jest ograniczona!

3.3. Twierdzenie Krasowskiego

Warunki wystarczające stabilizacji optymalnej modelu (2.1) podał Nikołaj N. Krasowski w r.1966 w postaci tzw. twierdzenia IV ([11], str.485), które nazwiemy *twierdzeniem Krasowskiego*. Omówimy je tutaj dla wygody wprowadzając przy tym współczesną notację teorii sterowania.

W swoim twierdzeniu Krasowski przyjął założenie, że istnieje dodatnio określona funkcja $V(t, \mathbf{x})$ mająca własność Γ oraz istnieje funkcja $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$, które w obszarze (2.2) spełniają następujące warunki:

1) funkcja

$$W(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)) \quad (3.9)$$

jest dodatnio określona;

2) zachodzi równość

$$\beta(V; t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (3.10)$$

3) dla każdego \mathbf{u} zachodzi nierówność

$$\beta(V; t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad (3.11)$$

Przy tych warunkach teza Krasowskiego brzmi: funkcja $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia stabilizacji optymalnej. Ponadto spełniona jest następująca relacja:

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t), t) dt = \min \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt = V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \quad (3.12)$$

3.4. Wskazówki praktyczne

W praktyce użytek z twierdzenia Krasowskiego do syntezy prawa sterowania sprowadza się do korzystania z dwóch równań: pierwszym jest warunek (3.10), który po uwzględnieniu oznaczenia (3.7) i wzoru (3.8) przybiera postać:

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad}V)^T \mathbf{f} + \varphi = 0 \quad (3.13)$$

Drugie równanie:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}} = (\text{grad} V)^\top \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (3.14)$$

otrzymuje się z żądania, aby wielkość β osiągała wartość minimalną. W równaniach (3.13) i (3.14) oznaczono: $\beta \equiv \beta(V; t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, $V \equiv V(t, \mathbf{x})$, $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

Widzimy więc, że do przeprowadzenia syntezy potrzebna jest znajomość modelu matematycznego obiektu sterowania (wyrażona poprzez wektor \mathbf{f}) oraz wyspecyfikowanie funkcji φ .

Chociaż wybór funkcji φ zależy od charakteru konkretnego zadania, to można wyodrębnić trzy istotne wątki:

1. minimalizacja wskaźnika (2.5) powinna zapewnić dostatecznie szybkie zanikanie ruchu zakłóconego;
2. wartość wskaźnika (2.5) powinna wiarygodnie szacować energię potrzebną do wypracowywania sterowań;
3. funkcja podcałkowa φ powinna być na tyle prosta, aby synteza nie okazała się zbyt trudna.

Warunki te w sposób zadowalający spełnia funkcja φ wybrana w postaci formy kwadratowej dodatnio określonej:

$$\varphi = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \quad (3.15)$$

gdzie \mathbf{Q} i \mathbf{R} są macierzami wagowymi.

4. Modele matematyczne ruchu samolotu

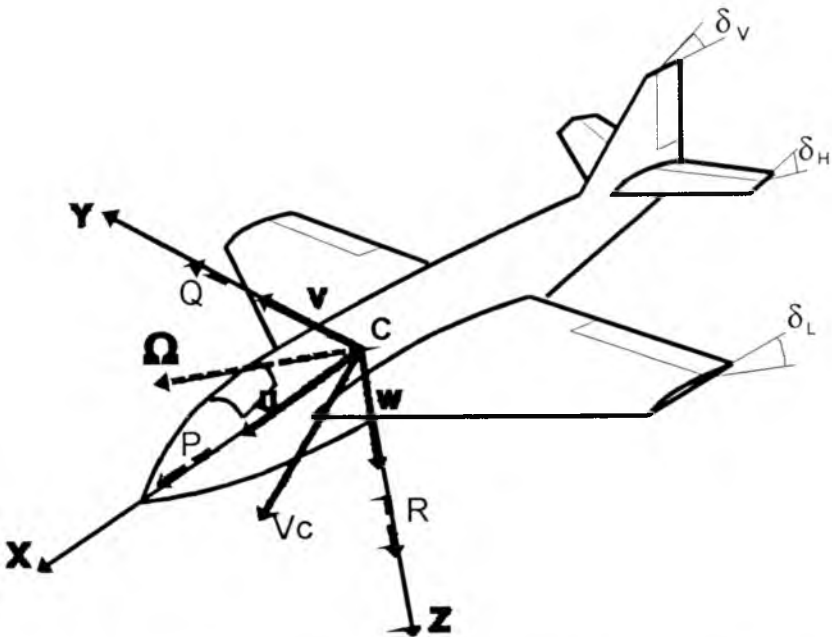
4.1. Model ruchu przestrzennego samolotu nieodkształcalnego

Na model matematyczny ruchu samolotu składają się równania ruchu samolotu modelowanego jako pewien zespół ciał (sztywnych i/lub odkształcalnych) oraz model obciążeń działających na ten zespół. Należy od razu stwierdzić, że chociaż w pracach teoretycznych przyjmuje się model ogólny w postaci (2.1), to taki model nie został jeszcze opracowany, zwłaszcza dla samolotu odkształcalnego.

Dla ustalenia myśli i uproszczenia zapisów zajmiemy się tutaj tylko ruchem samolotu nieodkształcalnego. Standardowy model fizyczny dla takiego przypadku obejmuje następujące założenia:

- masa i momenty bezwładności są stałe;
- samolot ma pionową płaszczyznę symetrii geometrycznej i masowej;
- siła ciągu leży w płaszczyźnie symetrii;
- pomija się efekt giroskopowy;
- opływ jest quasistacjonarny;
- sterowanie odbywa się za pomocą konwencjonalnych organów sterowania;
- wychylenia powierzchni sterowej są ograniczone.

Zauważmy, iż na tej liście nie znalazło się założenie, że zakłócenia warunków lotu ustalonego są małe. Jak zobaczymy dalej, znajdzie to uzasadnienie.



Rys. 2. Samolotowy układ współrzędnych ze składowymi prędkościami V_C i prędkości kątovej ω oraz wychyleniami powierzchni sterowych

Dla przyjętego modelu fizycznego, w zależności od wybranego układu współrzędnych, można zbudować różne postacie modelu matematycznego.

Równania podane są w układzie nieinercyjnym sztywno związanym z samolotem; początek układu znajduje się w środku masy C samolotu, a oś Cx jest równoległa do kierunku średniej cięciwy aerodynamicznej (rys.2). Model matematyczny dla takiego przypadku ma postać (por. [12]):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = [U, V, W; P, Q, R; \phi, \theta, \psi; h]^T \quad (4.2)$$

oraz:

$$\begin{aligned} f_1 &= -QW + RV + \frac{X}{m} & f_6 &= \frac{A-B}{C}PQ + \frac{N}{C} \\ f_2 &= -RU + PW + \frac{Y}{m} & f_7 &= P + Q \sin \phi \tan \theta + R \cos \phi \tan \theta \\ f_3 &= -PV + QU + \frac{Z}{m} & f_8 &= Q \cos \phi - R \sin \phi \\ f_4 &= \frac{B-C}{A}QR + \frac{L}{A} & f_9 &= Q \sin \phi \sec \theta + R \cos \phi \sec \theta \\ f_5 &= \frac{C-A}{B}PR + \frac{M}{B} & f_{10} &= U \sin \theta - V \sin \phi \cos \theta - W \cos \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

W wyrażeniach (4.2) i (4.3) użyto następujących oznaczeń (podajemy tylko te, które nie są naniesione na rys.2): θ , ϕ i ψ – odpowiednio kąt pochylenia, przechylenia i odchylenia; h – wysokość lotu; X, Y, Z oraz L, M, N – składowe wektorów sił oraz momentów sił (z uwzględnieniem obciążeń aerodynamicznych) względem osi x, y i z ; m – masa samolotu; A, B, C – momenty bezwładności samolotu względem osi x, y i z .

Zauważmy, że równanie (4.1) jest nieliniowe, niezależnie od charakteru obciążeń X, Y, Z oraz L, M, N . Zauważmy także, że równanie to nie zawiera jeszcze wektora sterowania; wektor ten pojawi się dopiero na etapie specyfikowania wymienionych obciążeń.

Obciążenia aerodynamiczne działające na samolot są ważnym elementem modelu i w istotny sposób wpływają na charakterystyki dynamiczne samolotu. Dla dowolnego ruchu przestrzennego obciążenia te zależą od kształtu samolotu, wychyleń powierzchni sterowych $\delta_H, \delta_L, \delta_V$, kątów natarcia α i ślizgu β oraz prędkości samolotu V_C .

4.2. Hierarchia modeli ruchu symetrycznego samolotu nieodkształcalnego

Ponieważ rozwiązanie zagadnienia syntezy zależy od klasy modelu, więc przedstawimy kilka różnych modeli ruchu samolotu. Dla ruchu symetrycznego

(podłużnego) wektor stanu (4.2) redukuje się do postaci:

$$\mathbf{x} = [U, W, Q, \theta, h]^T \quad (4.4)$$

a równanie stanu (4.1) przybiera postać:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -QW + \frac{X}{m} & \dot{W} &= QU + \frac{Z}{m} & \dot{Q} &= \frac{M}{B} \\ \dot{\theta} &= Q & \dot{h} &= U \sin \theta - W \cos \theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} X &= p_\infty S C_x - mg \sin \theta + T \cos \alpha_s \\ Z &= p_\infty S C_z + mg \cos \theta - T \sin \alpha_s \\ M &= p_\infty S \bar{c} C_m \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdzie:

$$p_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_C^2 \quad (4.7)$$

- ρ_∞ – gęstość powietrza niezaburzonego;
- α_s – kąt między wektorem ciągu i osią podłużną samolotu;
- \bar{c} – średnia cięciwa aerodynamiczna;

$$C_x = C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha \quad (4.8)$$

$$C_z = -C_L \cos \alpha - C_D \sin \alpha$$

Ponieważ obciążenia aerodynamiczne zależą od zmiennych V_C i α , warto zatem "stary" wektor stanu (4.4) zastąpić wektorem "nowym":

$$\mathbf{z} = [\alpha, V_C, Q, \theta, h]^T \quad (4.9)$$

dzięki czemu układ równań (4.5) można przedstawić w postaci:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) \quad (4.10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F_1 &= Q + \left(q_\infty C_z + \frac{g \cos \theta}{V_C} - \tau \sin \alpha_s \right) \cos \alpha + \\ &- \left(q_\infty C_x - \frac{g \sin \theta}{V_C} + \tau \cos \alpha_s \right) \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= (q_\infty V_C C_x - g \sin \theta + \tau V_C \cos \alpha_s) \cos \alpha + \\
 &+ (q_\infty V_C C_z + g \cos \theta - \tau V_C \sin \alpha_s) \sin \alpha
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

$$F_3 = \frac{p_\infty S \bar{c} C_m}{B} \quad F_4 = Q$$

$$F_5 = V_C \sin(\theta - \alpha)$$

przy czym dla skrócenia zapisu wprowadzono oznaczenia:

$$q_\infty = \frac{p_\infty S}{m V_C} \quad \frac{T}{m V_C} = \tau \tag{4.12}$$

Należy podkreślić, że model (4.10) ma na razie znaczenie li tylko symboliczne, gdyż wektor sterowania \mathbf{u} nie został jeszcze dookreślony. Załóżmy zatem, że będziemy sterować za pomocą steru wysokości i dźwigni sterowania silnikiem, tzn. zmiennymi sterującymi będą wychylenia steru i moduł ciągu silnika:

$$\mathbf{u} = [\delta_H, T]^T \tag{4.13}$$

Teraz możemy już założyć konkretną postać funkcyjną współczynników siły nośnej i oporu:

$$C_L = C_L(\alpha, \dot{\alpha}, Q, \delta_H) \tag{4.14}$$

$$C_D = C_D(\alpha, \dot{\alpha}, Q, \delta_H)$$

Dalsza konkretyzacja zależy od charakteru badanego zagadnienia (analiza stateczności, analiza wrażliwości, synteza prawa sterowania). Jeżeli chcemy otrzymać model:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{4.15}$$

popularny ostatnio w dynamice lotu manewrowego (zob np. [13]), to wystarczy założyć, że:

$$C_* = C_*(\delta_H = 0) + C_{*,H} \delta_H \tag{4.16}$$

gdzie symbol $*$ obejmuje oznaczenia L, D i m , natomiast zapis $\delta_H = 0$ oznacza, że wzór (4.16) dotyczy wartości bez uwzględnienia steru wysokości. Wprowadzono tu także nowy zapis pochodnych aerodynamicznych, który nawiązuje do typowego oznaczenia pochodnych cząstkowych w mechanice ośrodków ciągłych.

Model (4.15) otrzymujemy po podstawieniu do równań (4.11)_{1,2} wzorów (4.8) z uwzględnieniem zależności (4.14) oraz założenia (4.16). W celu ilustracji podajemy niezerowe elementy macierzy \mathbf{H} (o wymiarach 5×2):

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\frac{p_\infty S}{mV_C} C_{L,H} & h_{12} &= \frac{\sin \alpha}{mV_C} \\ h_{21} &= -\frac{p_\infty S}{m} C_{D,H} & h_{22} &= \frac{\cos \alpha}{m} \\ h_{31} &= \frac{p_\infty S \bar{c}}{B} C_{m,H} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Innym modelem nieliniowym, który często pojawia się w pracach na temat syntezy nieliniowego prawa sterowania jest model:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \psi(\mathbf{x}) \quad (4.18)$$

gdzie $\psi(\mathbf{x})$ oznacza wyrazy rzędu co najmniej drugiego. Model (4.18) można uzyskać z modelu (4.15) poprzez linearyzację jego prawej strony wokół stanu ustalonego (np. [14]). Należy podkreślić, że dla opisu dynamiki samolotów o wysokiej manewrowości takie postępowanie jest nie do przyjęcia i trzeba stosować linearyzację wokół nominalnego stanu lotu. Wydaje się nam, że modelem bardziej adekwatnym do sterowania taką dynamiką jest model:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.19)$$

który uwzględnia nie tyle nieliniowość urządzenia sterującego, co przede wszystkim fakt, że stan nominalny może zależeć od czasu. Można pokazać, że uzyskanie modelu (4.19) wymaga wzbogacenia współczynników (4.16) o wyrazy wyższego rzędu.

Do syntezy liniowego prawa sterowania stosowany jest model:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.20)$$

który otrzymuje się z modelu (4.18) po zaniedbaniu wyrazu nieliniowego.

5. Aspekty teoretyczne metody funkcji Lapunowa

5.1. Metody budowania funkcji Lapunowa

Wykorzystanie twierdzenia Krasowskiego do rozwiązania zagadnienia syntezy sterowania stabilizującego związane jest z typowymi trudnościami wszystkich zagadnień, w których stosuje się funkcje Lapunowa, a największą trudnością jest znalezienie odpowiedniej funkcji Lapunowa.

Można uważać, że funkcja Lapunowa reprezentuje sumę energii obiektu. Wówczas druga metoda Lapunowa polega na uogólnieniu idei, że energia potencjalna obiektu osiąga minimum w stanie równowagi asymptotycznie statecznej. Nieraz uważa się funkcję Lapunowa za uogólnioną odległość od położenia punktu równowagi w przestrzeni stanów [15].

W literaturze opisano wiele rozmaitych sposobów budowania tej funkcji (np. [16,17]), co świadczy tylko o tym, że brak jest metodologii ogólnej. Największe nadzieje na opracowanie algorytmu budowy odpowiedniej funkcji Lapunowa pokłada się w koncepcji *wektorowych funkcji Lapunowa*, które wprowadził Bellman [18] do badania stateczności i dlatego też są one zwane *funkcjami Lapunowa-Bellmana*.

Idea Bellmana została podjęta i rozwinięta przez Matrosowa i jego uczniów, którzy opracowali tzw. *metodę porównywania* (zob. [19]). Prezentacja tej metody nie wchodzi w zakres niniejszej pracy i powinna się stać tematem oddzielnego opracowania. Wspomnimy więc tylko, że oprócz równania ruchu zakłóconego rozważa się pewien układ pomocniczy o znanych własnościach. Zadanie polega na ustaleniu związku między rozwiązaniami obu układów. Autorom niniejszej pracy nie jest znane ani jedno rozwiązanie tą metodą modeli nieliniowych przedstawionych w p.4.2.

5.2. Związek funkcji Lapunowa z metodą Bellmana

W zagadnieniach nieliniowych, dla których nie ma wypracowanych metod budowania funkcji Lapunowa, pomocne mogą być związki tej funkcji z innymi metodami syntezy praw sterowania. Tutaj rozważmy najbardziej naturalny związek z metodą programowania dynamicznego Bellmana (zwaną tutaj metodą Bellmana). W tym celu weźmy pod uwagę równanie ruchu zakłóconego w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) \quad (5.1)$$

gdzie u jest skalarą (jak w przykładzie 5.3) oraz wskaźnik jakości w postaci:

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}, u, t) dt \quad (5.2)$$

Jak wiadomo (np. [20] p.5.6.3), wyznaczenie sterowania u , które minimalizuje wskaźnik (5.2) sprowadza się do rozwiązania *równania Bellmana* (zwanego też *równaniem Hamiltona-Jacobiego-Bellmana*):

$$\min_u \left\{ \varphi(\mathbf{x}, u, t) + \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\top} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) \right\} = 0 \quad (5.3)$$

Zalóżmy teraz, że znana jest pewna funkcja generująca $S(\mathbf{x}, t)$ i odpowiadające jej sterowanie $u = u(\mathbf{x}, t)$. Po zamknięciu równania (5.1) takim sterowaniem, równanie (5.3) przybiera postać:

$$\frac{dS}{dt} = -\varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}, t), t) \quad (5.4)$$

Zalóżmy, że S jest funkcją dodatnio określoną. Wówczas z równania (5.4) wynika, że funkcja S jest funkcją Lapunowa dla układu zamkniętego i jego stateczność asymptotyczna jest zapewniona.

5.3. Przykład

Pokażemy, że użycie prostych form kwadratowych w charakterze funkcji Lapunowa prowadzi do bardzo pożytecznego wyniku. W tym celu rozważmy klasę modeli liniowych stacjonarnych typu (4.20) w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (5.5)$$

(co odpowiada sterowaniu ruchem podłużnym samolotu tylko za pomocą steru wysokości – por. (4.13)) i przyjmijmy funkcję Lapunowa w postaci:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (5.6)$$

gdzie $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P} > \mathbf{0}$ jest macierzą liczbową o wymiarach 5×5 , na razie nieznaną. W analogicznej postaci przyjmujemy funkcję podcałkową (3.15):

$$\varphi(\mathbf{x}, u) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} + ru^2 \quad (5.7)$$

gdzie $\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} > \mathbf{0}$ jest zadaną macierzą liczbową o wymiarach 5×5 , natomiast $r > 0$ jest zadaną stałą.

Na podstawie (3.14) po uwzględnieniu (5.5), (5.6) i (5.7) otrzymujemy sterowanie:

$$u = -\frac{1}{r}\mathbf{b}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (5.8)$$

gdzie nieznaną macierz \mathbf{P} wyznacza się na podstawie równania (3.13), które w naszym przypadku przybiera postać:

$$\frac{1}{r}\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^\top \mathbf{P} - 2\mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

a więc ma ono charakter algebraicznego równania Riccatiego, dobrze znanego w teorii sterowania.

5.4. Synteza nieliniowego prawa sterowania

Kierując się omówionym przykładem oraz wskazówkami z p.3.4 przedstawimy teraz propozycję rozwiązania dla przypadku, kiedy równanie stanu ma postać (4.19). Po analogicznych zabiegach jak w p.5.3 otrzymamy układ dwóch równań nieliniowych:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\text{grad}V)^T (\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) + \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u} = 0 \quad (5.10)$$

$$(\text{grad}V)^T \left(\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right) + 2\mathbf{R}\mathbf{u} = 0$$

z dwiema niewiadomymi V i \mathbf{u} . Do uzyskania rozwiązania przybliżonego takiego układu są stosowane metody szeregów, a w szczególności szeregów potęgowych, co było zaproponowane przez Zubowa ([21], §12). Warunkiem zastosowania jest spełnienie założenia, że funkcja nieliniowa $\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ da się rozwinąć w szereg względem współrzędnych wektora stanu \mathbf{x} i sterowania \mathbf{u} , zbieżnego jednostajnie względem $t \geq 0$ w pewnym otoczeniu początku układu współrzędnych $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{u} = \mathbf{0}$; zakłada się przy tym, że szereg ten nie zawiera wyrazów liniowych względem wspomnianych współrzędnych.

Metoda Zubowa polega na poszukiwaniu funkcji Lapunowa V i sterowania \mathbf{u} w postaci:

$$V = \sum_{n=2}^{\infty} V_n(\mathbf{x}) \quad \mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}_n(\mathbf{x}) \quad (5.11)$$

gdzie V_n i \mathbf{U}_n są formami jednorodnymi n -tego stopnia względem zmiennych stanu. Zubow wprawdzie pokazał, że szeregi (5.11) są zbieżne, a \mathbf{u} jest sterowaniem optymalnym, ale trzeba podkreślić, że współczynniki tych szeregów należy dopiero wyznaczyć z nieskończonego układu równań algebraicznych nieliniowych (które powstaną po podstawieniu szeregów (5.11) do równań (5.10)), co może zrodzić pewne kłopoty numeryczne.

6. Wniosek końcowy

Dopóki nie zostaną opracowane efektywne algorytmy budowy funkcji Lapunowa, metoda funkcji Lapunowa będzie miała charakter raczej pewnej zasady porządkującej, niż metody syntezy prawa sterowania samolotami zwłaszcza o wysokiej manewrowości.

Literatura

1. DŻYGADŁO Z., BOŁDAK R., 1985, *Nueryczne modelowanie dynamiki figur akrobacji lotniczej*, BIULETYN WAT, XXXIV, 137-158
2. KRASOVSKIJ A.A., 1973, *Sistemy avtomatičeskogo upravljenija poletom i ich analitičeskoe konstruirovanie*, "Nauka", Moskva
3. GARRARD W.L., JORDAN J.M., 1977, *Design of Nonlinear Automatic Flight Control Systems*, AUTOMATICA, **13**, 497-505
4. PIETRUCHA J., ZŁOCKA M., 1994, *Analiza możliwości stabilizacji układu nieliniowego za pomocą sterowania liniowego*, ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ., MECHANIKA, **15**, 323-329, GLIWICE
5. KALMAN R.E., BERTRAM J.E., 1960, *Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov*, J. BASIC ENGINEERING, **82**, 371-393
6. MATROSOV V.M., MALIKOV A.I. (RED.), 1986, *Funkcii Ljapunova i ich primenenija*, "Nauka", Novosibirsk
7. VADALI S.R., 1990, *Feedback Control of Space Structures: A Liapunov Approach*, IN "MECHANICS AND CONTROL OF LARGE FLEXIBLE STRUCTURES" (ED. J.L.JUNKINS), PROG. ASTRO.& AERO., **129**, 639-665, WASHINGTON
8. MARTYNYUK A.A., 1977, *Technical Stability of Nonlinear and Control Systems*, NONLINEAR VIBRATION PROBLEMS, **19**, 47-84
9. GUTOWSKI R., 1971, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, WARSZAWA
10. *Encyklopedia techniki*, tom *Automatyka*, 1972, WNT, Warszawa
11. KRASOVSKIJ N.N., 1966, *Probemy stabilizacii upravljajemych dviženij, w Teorija ustojčivosti dviženija*, "Nauka", Moskva
12. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ, MECHANIKA, **32**, WARSZAWA
13. AZAM M., SINGH S.N., 1994, *Invertibility and Trajectory Control for Nonlinear Maneuvers of Aircraft*, J. GUIDANCE, CONTROL AND DYNAMICS, **17**, 192-200
14. TOMCZYK A., 1976, *Pewna metoda suboptymalnego sterowania nieliniowego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody*, PRACA DOKTORSKA, IPPT, WARSZAWA
15. GÓRECKI H. (RED.), 1980, *Algorytmy i programy sterowania*, WNT, WARSZAWA
16. GIBSON J.E., SCHULTZ D.G., 1962, *The Variable Gradient Method for Generating Liapunov Functions*, AIEE TRANS., **81**, 203-209
17. RADZISZEWSKI B., 1977, *O najlepszej funkcji Lapunowa i jej zastosowaniu do badania stateczności ruchu*, PRACA HABILITACYJNA, IPPT, WARSZAWA
18. BELLMAN R., 1962, *Vector Lyapunov Functions*, J. SOC. INDUSTR. & APPL. MATH., SER.A, No.1, 32
19. MATROSOV V.M. I DR., 1980, *Metod sravnenija v matematičeskoi teorii sistem*, "Nauka", Novosibirsk

20. KACZOREK T., 1974, *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, WARSZAWA
21. ZUBOV V.I., 1975, *Lekcii po teorii upravljenija*, "Nauka", Moskva

Theoretical Aspects of Liapunov Functions Method for Synthesis of Aircraft Nonlinear Control Law

Summary

Another way of the control law synthesis, different from the commonly used Kalman-Letov method, is discussed. The concept of Liapunov functions that is usually employed in stability investigations is taken into account.

The "ordinary" and optimal stabilization problems are formulated. To solve the optimal problem the Krasovski theorem is applied. Practical instructions referring to this theorem are offered.

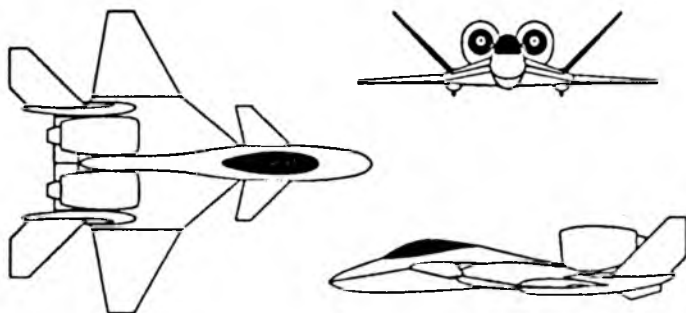
The key matter in the proper controller synthesis is the knowledge of the mathematical model of the object under control. Therefore, the hierarchy of models of longitudinal motion of a rigid airplane is presented. The main emphasis is put on the modelling of manoeuvring flights.

The Zubov method for the synthesis of a nonlinear control law is proposed. It consists in the representation of a Liapunov function and a control in the terms of power series.

*Praca została sfinansowana przez Komitet Badań Naukowych.
Grant Nr 7S101 05006*

PZL-230 *Skorpion*

- UDŹWIG ŚRODKÓW BOJOWYCH 4000 kg
- PRĘDKOŚĆ MAKSYMALNA PRZY ZIEMI 1000 km/h
- CZAS ZAWROTU O 180° 5 sek
- DŁUGOŚĆ STARTU Z PEŁNYM OBCIĄŻENIEM (Z TRAWY) 400 m
- PROMIENŃ DZIAŁANIA (40' WALKI) 300 km



PROJEKT: PZL-WARSZAWA-OKĘCIE

BADANIE ZACHOWAŃ DYNAMICZNYCH MOTOLOTNI W LOCIE ŚLIZGOWYM ZWIĄZANYCH ZE STEROWANIEM PODŁUŻNYM

MIROSLAW RODZEWICZ

ITLiMS, Politechnika Warszawska

W pracy opisano badania eksperymentalne zachowań dynamicznych motolotni w locie ślizgowym powodowanych skokowymi zmianami położenia sterownicy. Przedstawione zostały zarejestrowane w locie przebiegi położenia sterownicy oraz wysokości i prędkości lotu, a następnie wyniki analizy tych przebiegów. Na zakończenie dokonano porównania przebiegów rzeczywistych z przebiegami otrzymanymi w wyniku symulacji komputerowej eksperymentu oraz przedstawiono bieżunową prędkość odpowiadającą rozpatrywanemu, (nieustalonemu), stanowi lotu.

1. Wprowadzenie

Celem tych badań było dostarczenie danych umożliwiających sprawdzenie poprawności modelu matematycznego układu pilot-lotnia (rys.1) stosowanego przez autora do analizy lotu holowanego lotni oraz symulacji numerycznych sytuacji niebezpiecznych w locie holowanym lub ślizgowym [1].

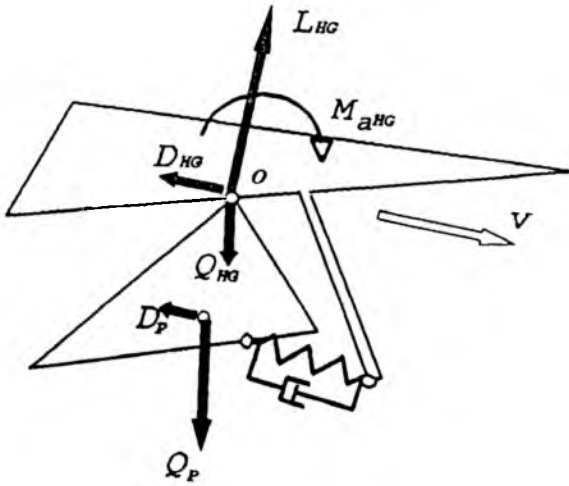
Obiektem badań była specjalnie wyposażona motolotnia, której zespół napędowy służył wyłącznie do startu i nabrania wysokości, natomiast pomiary odbywały się w locie ślizgowym, z nie pracującym silnikiem.

Eksperyment polegał na zbadaniu, w warunkach ustalonego lotu ślizgowego, wpływu skokowych zmian położenia podłużnego sterownicy (realizowanych w sekwencji: pozycja A – pozycja B – pozycja A) na prędkość i wysokość lotu.

Parametry te oraz położenie sterownicy względem wózka motolotni były zapisywane na rejestratorze cyfrowym (Rys.2).

Wybór motolotni, zamiast lotni, wynikał z następujących względów:

- masa posiadanej aparatury rejestracyjno-pomiarowej nie pozwalała na wykonanie bezpiecznego startu z nóg pilota,



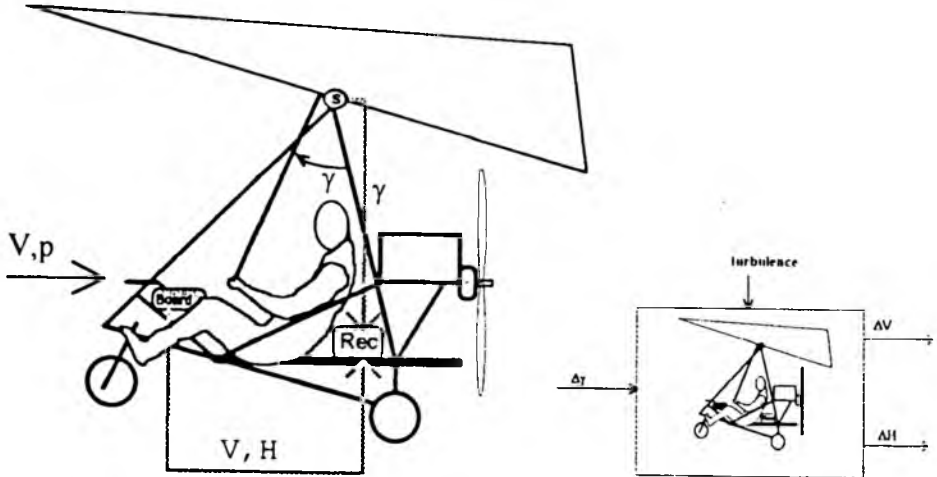
Równania ruchu w/g d'Alamberta

$$\sum_{HG-P} \vec{M}_O^* = 0$$

$$\sum_{HG-P} \vec{F}^* = 0$$

$$\sum_{HG-} \vec{M}_O^* = 0$$

Rys. 1. Model fizyczny i model matematyczny układu pilot-lotnia. Symbol * stosowany we wzorach oznacza, że uwzględniane są tu także siły bezwładności lub ich momenty względem punktu 0



Rys. 2. Schemat układu pomiarowego

- wózek motolotni, z racji przegubowego podwieszenia oraz liczby stopni swobody ruchu (możliwe wyłącznie przemieszczenia kątowe), bardziej odpowiadał przyjętemu modelowi fizycznemu układu pilot-lotnia niż tekstylna uprząż pilota.

2. Opis urządzeń

Motolotnia:

- Skrzydło typu Stratus M-14 (prod. Akademicki Ośrodek Konstrukcyjny PW):

- powierzchnia nośna	14 m ²
- wydłużenie	6.7
- kąt wierzchołkowy	132°
- masa własna	45 kg

Cechy konstrukcyjne tego skrzydła (tj. zamknięty profil, gęste żebroowanie, duże napięcie wstępne powłoki, pływający dźwigar, zredukowana kieszeń kilowa, itd.) oraz cechy geometryczne były zbliżone do cech lotni, której dane aerodynamiczne posłużyły do budowy modelu matematycznego układu pilot-lotnia.

- Wózek:

- typ	"trike" (trójkolowy, z przednim kołem sterowanym)
- masa własna	105 kg
- silnik	26 kW

- Urządzenia pomiarowe (rys.2):

- ruchy sterownicy, (a ściślej – kąt pochylenia kila lotni względem wózka), mierzone były za pomocą czujnika potencjometrycznego, powiązanego z węzłem podwieszenia wózka;
- prędkość i wysokość lotu mierzono wykorzystując elektroniczny zestaw przyrządów pokładowych firmy AOA (RFN). Zestaw ten został uzupełniony o blok wzmacniaczy operacyjnych przetwarzających sygnały na wejścia rejestratora;
- użyto rejestratora typu TRC-8412 produkcji Instytutu Geofizyki PAN – Wydział Doświadczalny GEOPAN. (Jest to rejestrator cyfrowy z pamięcią magnetyczną, o częstotliwości zapisu 0.1 sek).

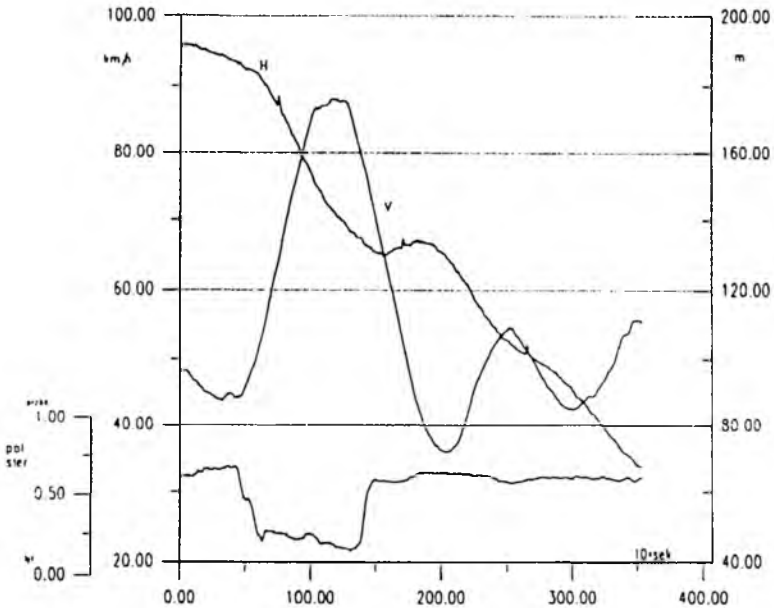
Masa całkowita układu w locie wynosiła 240 kg.

Loty odbywały się przy wietrze 3 m/s, w warunkach słabej turbulencji.

3. Wyniki badań

W trakcie eksperymentu wykonano 5 prób.

Przykładowe wyniki zarejestrowanych danych zamieszone zostały na rys.3.



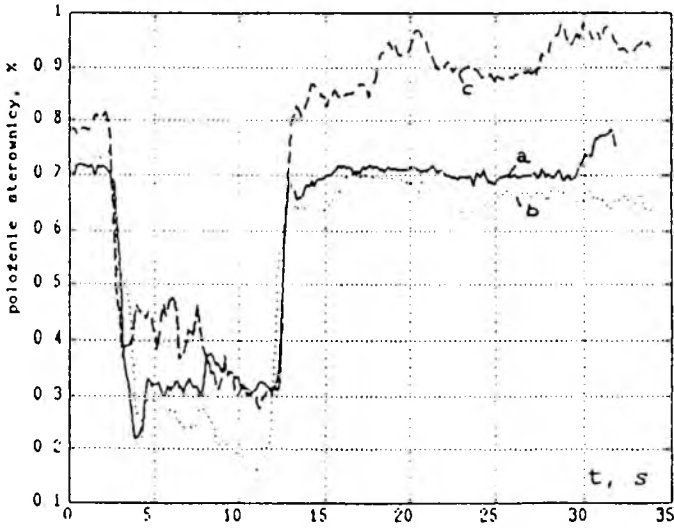
Rys. 3. Przebieg położenia sterownicy oraz przebiegi prędkości i wysokości lotu

Do szczegółowej analizy zarejestrowanych przebiegów wytypowano 3 zapisy przy których:

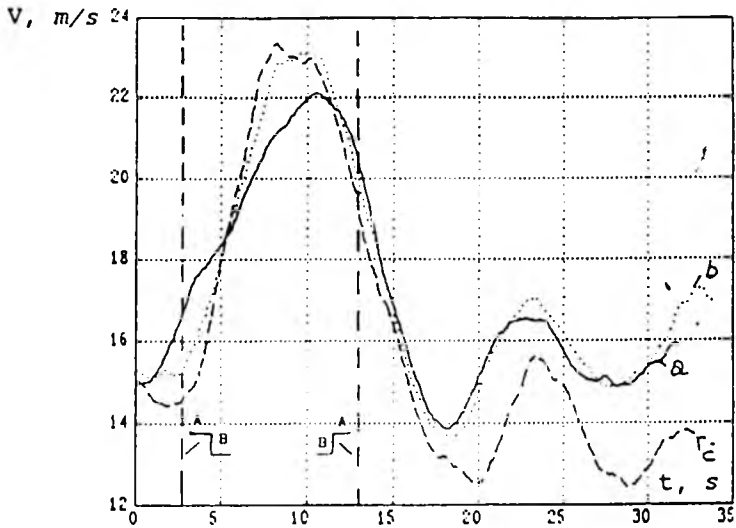
- sekwencja zmian położenia sterownicy miała ten sam przebieg czasowy.,
- wpływ zakłóceń zewnętrznych był najmniejszy.

Wzmiankowane zakłócenia, to różnego rodzaju podmuchy atmosferyczne, lokalne turbulencje itd. Mogły one powodować zmiany prędkości, bądź jako efekt bezpośredniego działania, bądź poprzez wymuszenie dodatkowej reakcji pilota.

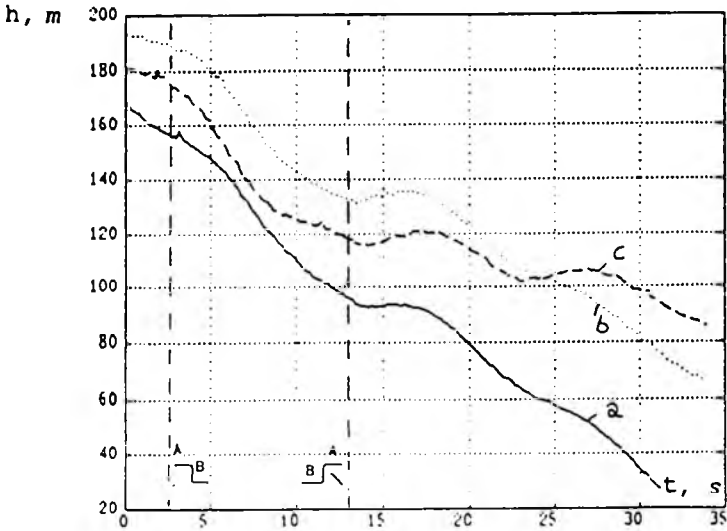
Wykresy zbiorcze wyskalowanych przebiegów wybranych do analizy szczegółowej zamieszczono na rysunkach 4, 5 i 6.



Rys. 4. Wykres zbiorczy położenia sterownicy



Rys. 5. Wykres zbiorczy przebiegów prędkości lotu



Rys. 6. Wykres zbiorczy przebiegów wysokości lotu

Symbolami a, b, c oznaczono kolejne próby, natomiast "schodkami" – momenty i charakter zmian położenia sterownicy.

Wstępna analiza wykresów prowadzi do następujących wniosków:

- Skokowe zmiany położenia sterownicy dają wyraźny efekt dynamiczny w postaci oscylacji prędkości i wysokości.

Czas, który upływał od momentu ściągnięcia sterownicy do chwili jej ponownego wypchnięcia był zbyt krótki do ustalenia się parametrów lotu. Na tym odcinku widoczne jest tylko jedno ekstremum przebiegu prędkości, co ogranicza możliwości pomiaru okresu oscylacji odpowiadających temu stanowi lotu.

Średni czas, przetrzymywania sterownicy w ustalonym położeniu, po powtórny wypchnięciu, jest równy, w przybliżeniu, podwojonemu okresowi oscylacji prędkości lub wysokości lotu.

- Powtarzalność okresów oscylacji w poszczególnych zapisach jest duża.

Dla przebiegów (a) i (b), które odpowiadają podobnym zmianom położenia sterownicy – również amplitudy oscylacji są do siebie zbliżone. Drobną nieregularność krzywych prędkości wynika między innymi z nieregularności realizacji prostokątnych przebiegów położenia sterownicy. Jest ona spowodowana m.in. tym, że pilot poza realizacją zadania

zmuszony był do stałego utrzymywania równowagi poprzecznej lotni, co wiązało się z drobnymi ruchami sterownicy.

- Przypadek (c) dotyczy tego samego doświadczenia, ale zrealizowanego przy mniejszej prędkości (sterownica bardziej wypchnięta w położeniu "A").

Widoczny jest spadek wartości średniej prędkości oraz spadek pochylenia krzywej wysokości.

Są to wnioski natury jakościowej.

Analiza dokładności pomiarów przesądziła o wykorzystaniu rezultatów eksperymentów do badań względnych zmian wartości parametrów lotu.

Stosunkowo duża wartość błędów pomiarowych prędkości (± 1.9 m/s) oraz ograniczona (z konieczności) liczba pomiarów, uniemożliwiająca dokonanie analiz statystycznych – nie pozwala to bowiem na ścisłe obliczenie stanu energetycznego układu pilot-lotnia, niezbędne np. przy wyznaczaniu dynamicznych osiągnięć lotni.

Z powyższych względów wyniki badań eksperymentalnych zastosowano do analizy parametrów mniej wrażliwych na dokładność pomiaru prędkości lub wysokości.

Takim parametrem jest np. częstotliwość oscylacji prędkości spowodowanych skokiem położenia sterownicy.

Parametr ten jest wypadkową szeregu właściwości dynamicznych układu pilot-lotnia, np.:

- cech aerodynamicznych układu – (zwłaszcza zmienności charakterystyki aerodynamicznej dla różnych prędkości),
- cech masowych układu – (zwłaszcza wartości momentów bezwładności),
- podatności ramion pilota, itd.

Częstotliwość oscylacji prędkości spowodowaną skokową zmianą położenia sterownicy jest zatem parametrem pozwalającym na ocenę zgodności zachowań dynamicznych układu rzeczywistego i modelu. Wyniki wstępnej analizy czasu półokresów oscylacji prędkości lotu zamieszczono poniżej.

Czas pierwszego półokresu po ściągnięciu sterownicy: $T_{0.5} = 6.5 \pm 0.1$ s;

Czas pierwszego półokresu po wypchnięciu sterownicy: $T_{0.5} = 6.1 \pm 0.3$ s;

Czas drugiego półokresu po wypchnięciu sterownicy: $T_{0.5} = 4.7 \pm 0.1$ s.

Powyższe wyniki nie dają podstaw do wyciągnięcia wniosków na temat częstotliwości oscylacji w dłuższym przedziale czasowym. Zauważalne

jest natomiast, że po ściągnięciu sterownicy – 1-szy półokres po zakłóceniu jest dłuższy niż następujący za nim 2-gi półokres. Wytłumaczyć to można nieliniowością rzeczywistego układu przejawiającą się m. innymi w tym, że okres oscylacji prędkości spowodowany przez skok położenia sterownicy jest zależny od amplitudy oscylacji. Ponadto istotna jest tu uwaga, że w momencie wypychania sterownicy – prędkość lotu nie była ustalona po uprzednim skokowym ściągnięciu sterownicy. Przebieg prędkości w przypadku B jest więc wynikiem nałożenia się efektów kolejnych ruchów sterownicą.

W celu dokładniejszego zbadania oscylacji prędkości przeprowadzono aproksymację zarejestrowanego przebiegu funkcją okresową.

Z uwagi na szybki postęp procesu ustalania się wartości kolejnych półokresów tych zmian (praktycznie już w pierwszym cyklu) zrezygnowano z badania zmienności okresu.

Do analizy przyjęto postać funkcji aproksymacyjnej o stałym okresie i gasnącej amplitudzie:

$$y(t) = e^{-\lambda_2 t} \cos(\lambda_1 t + \phi) \quad (3.1)$$

Parametrami tej funkcji są wielkości $\lambda_1, \lambda_2, \phi$ obliczane przez program według kryterium minimalizacji uchybu między przebiegiem zarejestrowanym, a funkcją $y(t)$. Wartości przebiegu zarejestrowanego normalizowano poprzez podzielenie przez wartość prędkości odpowiadającej chwili $t = 0$.

Dla wszystkich próbek chwilę $t = 0$ wybrano jednakowo, jako 1 sekundę od momentu ponownego wypchnięcia sterownicy.

Taki sposób wyboru przedziału czasowego próbki pozwalał na niwelację opisanego wyżej zjawiska wydłużenia pierwszych półokresów oscylacji.

Do analizy wybrano próbki w/g kryteriów opisanych na wstępie podrozdziału. Przykład aproksymacji danych uzyskanych z eksperymentu zamieszczono na rys.7.

Wyniki analizy przebiegów (a), (b), (c) potwierdziły dużą powtarzalność okresu oscylacji w poszczególnych próbkach.

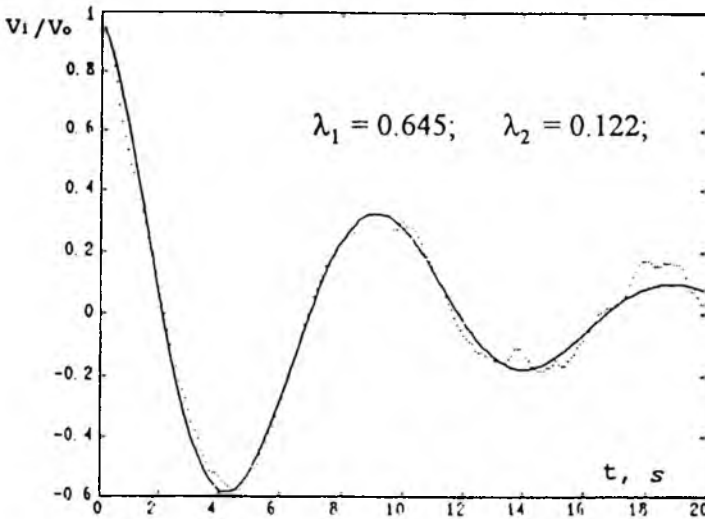
Średnia wartość tego parametru wyniosła:

$$T_{sr} = \frac{2\pi}{\lambda_1 sr} = 9.79 \pm 0.05 \text{ s}$$

Wartość ta jest zbliżona do podwojonego wyniku wstępnej analizy dotyczącego 2-giego półokresu oscylacji po wypchnięciu sterownicy.

Większy rozrzut wykazała wartość parametru λ_2 związanego z tłumieniem oscylacji.

Wpływ na to miały zarówno zakłócenia zewnętrzne, jak i różnice wartości prędkości lotu w chwili wypchnięcia sterownicy.



Rys. 7. Przykład aproksymacji przebiegu prędkości po skoku położenia sterownicy funkcją $y(t) = \exp(-\lambda_2 t) \cos(\lambda_1 t + \phi)$

4. Wnioski z badań eksperymentalnych

Przeprowadzone badania były pierwszą w kraju próbą rejestracji dynamicznych zmian parametrów lotu lotni. W odniesieniu do sformułowanego na wstępie celu badań – uzyskane wyniki dają orientację odnośnie podstawowych cech dynamicznych lotni w locie ślizgowym.

Jednocześnie, wynikają stąd wnioski dotyczące przyszłych badań tego rodzaju:

1. Należy wydłużyć okresy między kolejnymi zmianami położenia sterownicy, co najmniej do $25 \div 30$ s. Wymaga to zmiany wysokości początkowej próby i odpowiedniego dostosowania toru pomiaru wysokości. (W przeprowadzonych badaniach wysokość początkowa 200 m wynikała z dopuszczalnej wartości sygnału na wejściu rejestratora i była wynikiem kompromisu między rozdzielczością i zakresem mierzonego sygnału).
2. Należy poprawić pozycjonowanie sterownicy np. poprzez zabudowę wskaźników ułatwiających pilotowi utrzymywanie zadanego położenia sterownicy. (Blokowanie sterownicy wykluczono ze względów bezpieczeństwa).
3. W przypadku zastosowania innych kryteriów podobieństwa zachowań

dynamicznych lotni, związanych z pomiarem zmian bezwzględnych wartości prędkości lub wysokości lotu – liczbę pomiarów należy dostosować do potrzeb analizy statystycznej.

5. Badania porównawcze cech dynamicznych układu rzeczywistego i modelu

Sprawdzianem poprawności modelu układu pilot-lotnia były badania porównawcze przebiegów parametrów lotu zarejestrowanych na obiekcie rzeczywistym oraz pochodzących z symulacji komputerowych.

W trakcie symulacji zrealizowano taką samą sekwencję skokowych zmian położenia sterownicy, jak ta, która miała miejsce podczas eksperymentu. Przebieg jej był następujący:

- pozycja A (lot ustalony, $V \approx 15$ m/s),
- pozycja B (rozpędzanie lotni w czasie ok. 9 sek),
- pozycja A (powrót do poprzedniego położenia sterownicy).

Z uwagi na to, że w badaniach eksperymentalnych posłużono się obiektem zastępczym, tj. badano lot ślizgowy motolotni z niepracującym silnikiem, w danych wejściowych do symulacji uwzględnione zostały niezbędne zmiany parametrów.

Dotyczyły one:

- masy i momentu bezwładności bryły pilota. W danym przypadku, oprócz pilota uwzględniają one wózek motolotni,
- oporu bryły układu podwieszzonego pod lotnią.

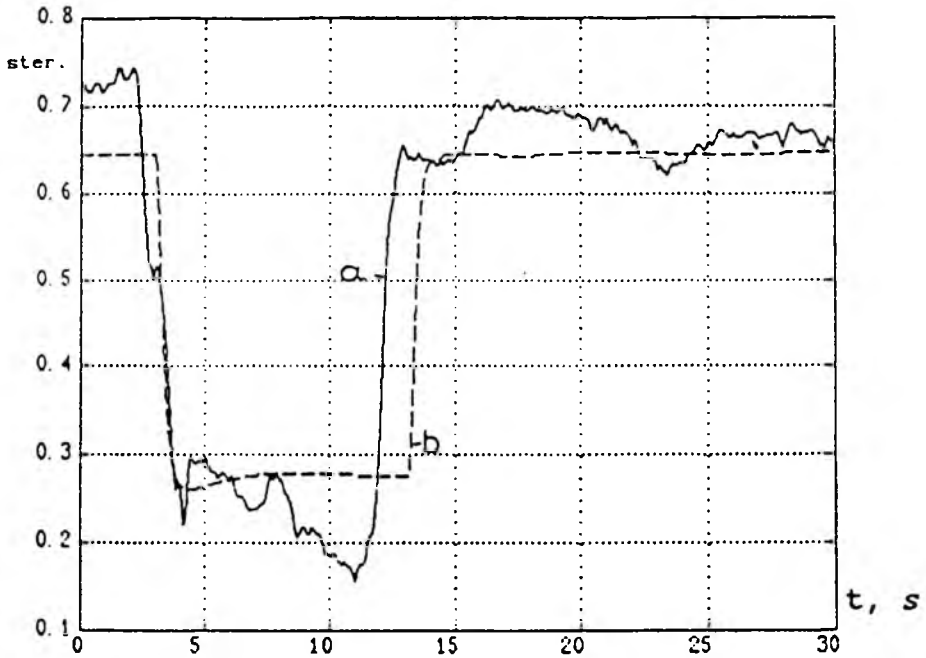
Wyniki symulacji przedstawione zostały wspólnie z wybranym przypadkiem zapisu eksperymentu.

Zamieszczone wykresy wykazują dużą zgodność jakościową zachowań modelu oraz obiektu rzeczywistego w analizowanym przedziale czasu.

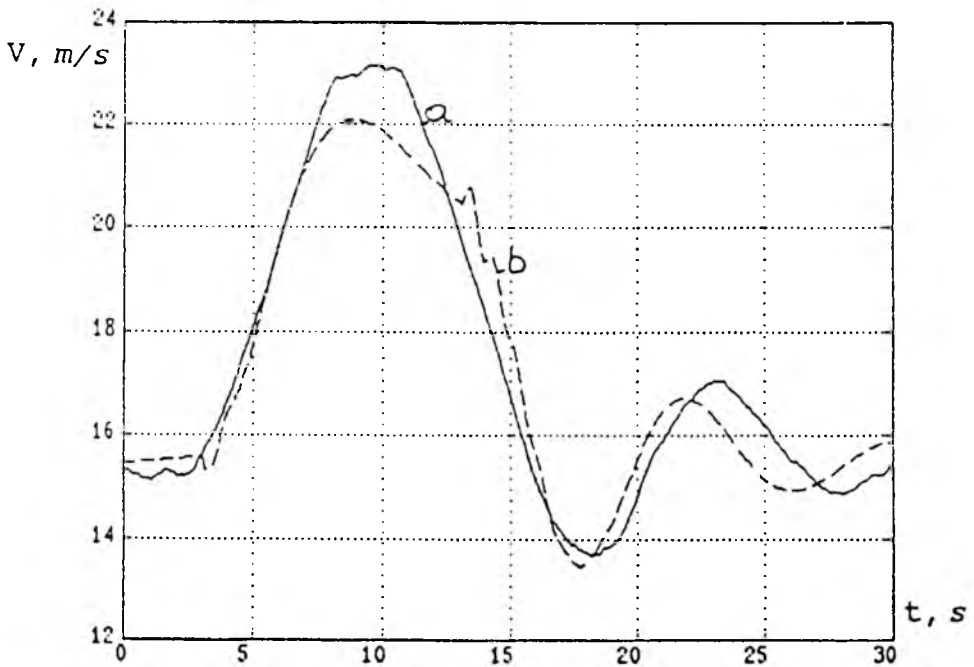
Widoczne są jednak drobne niezgodności fazowe przebiegów oraz niewielkie różnice częstotliwości oscylacji prędkości lub wysokości lotu.

Wartości współczynników λ_1 i λ_2 funkcji (1) zastosowanej tym razem do aproksymacji przebiegów prędkości uzyskanych w wyniku symulacji komputerowej eksperymentu wynoszą:

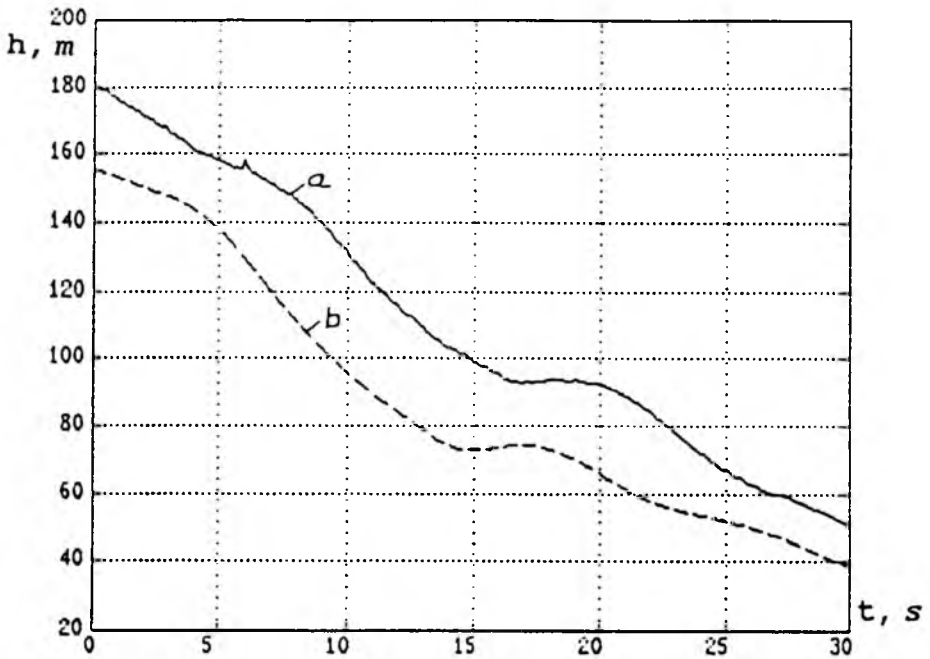
$$\lambda_1 = 0.744 \qquad \lambda_2 = 0.123$$



Rys. 8. Sekwencja zmian położenia sterownicy: (a) – obiekt rzeczywisty; (b) – model



Rys. 9. Przebiegi prędkości: (a) – obiekt rzeczywisty; (b) – model



Rys. 10. Przebiegi wysokości: (a) – obiekt rzeczywisty; (b) – model

Daje to 14% niezgodność okresów oscylacji prędkości przebiegu rzeczywistego i uzyskanego w wyniku symulacji numerycznej.

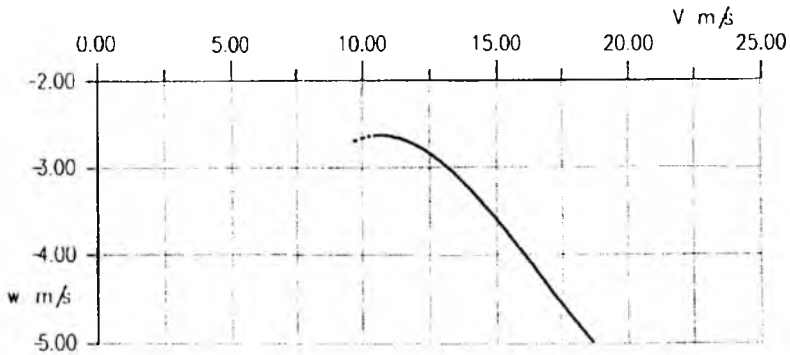
Ocena tej rozbieżności wymaga uwzględnienia faktu, że badana lotnia miała cechy aerodynamiczne nie pokrywające się dokładnie z cechami lotni wzorcowej, której dane aerodynamiczne wykorzystano w symulacjach lotu.

Biorąc pod uwagę, że częstotliwość oscylacji prędkości jest w dużym stopniu zależna od współczynnika momentu aerodynamicznego, który w miękopłatach jest funkcją zarówno kąta natarcia, jak też prędkości lotu – wynik ten należy uznać za wystarczające potwierdzenie zgodności cech dynamicznych obiektu rzeczywistego i modelu rozpatrywanego przez autora.

Ubočnym rezultatem przeprowadzonych eksperymentów było wyznaczenie biegunowej prędkości motolotni w locie ślizgowym, bez napędu, odniesionej do prędkości lotu przyrządowej (rys.11).

Z uwagi na fakt, że wyznaczano ją w warunkach dynamicznych (tj. obciążeń niestabilnych) trzeba tu brać pod uwagę, że biegunowa ta może się różnić od biegunowej uzyskanej przy quasistatycznych zmianach parametrów w locie. Miękopłat ma bowiem tę cechę, że geometria płata zależy w dużym

BADANIE ZACHOWAŃ DYNAMICZNYCH MOTOLOTNI...



Rys. 11. Biegunowa (dynamiczna) prędkości motolotni (odniesiona do prędkości lotu przyrządowej)

stopniu od działających obciążeń, a zmianom tej geometrii towarzyszą efekty aerodynamiczne z dziedziny zarówno przepływów stacjonarnych, jak też nie-stacjonarnych.

6. Literatura

1. RODZEWICZ M., *Modelowanie startów wyciagarkowych lotni*, Rozprawa doktorska, PW, 1992

Investigation of the Dynamic Behaviour of a Motorised Hang-Glider Caused by its Longitudinal Control

Summary

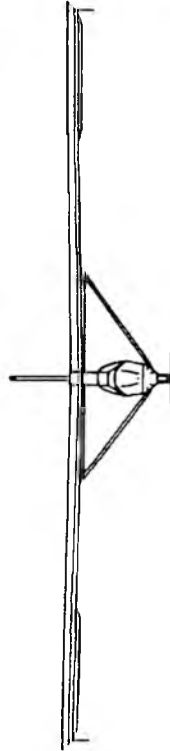
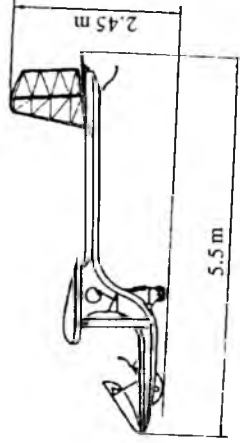
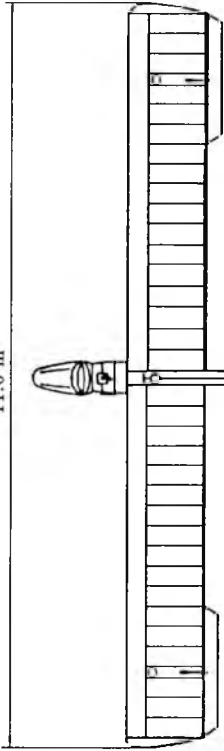
An experimental investigation of the dynamic behaviour of the motorised hang-glider caused by sudden changes of the control bar position are described in the paper.

The flight parameters as air-speed and altitude recorded as a function of the speed bar position presented together with the results of their analysis.

Also a comparison between the flight parameters values recorded in real flight tests and the computer simulation results is given.

The velocity-polar of the hang-glider is shown as the additional result of the investigation.

11.0 m



PW - 2 „Gapa”

Politechnika Warszawska
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Zespół Naukowo-Badawczy Lotniczych Konstrukcji Kompozytowych

PROBLEMATYKA MODELOWANIA W BADANIACH TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ WĘZŁA KADŁUBOWEGO POŁĄCZENIA SKRZYDŁA-KADŁUB SZYBOWCA PW-5

MIROSLAW RODZEWICZ

*Instituýt Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechniki Warszawskiej*

W pracy opisano wstępný etap badañ modelowych trwałości zmęczeniowej jednego z głównych węzłów konstrukcyjnych szybowca PW-5, t.j. węzła łączenia skrzydeł z kadłubem znajdujĄcego się we wródcie głównej kadłuba. Praca zawiera opis:

- struktury modelu obciĄżeń eksploatacyjnych w wersji standardowej oraz uproszczonej, przeznaczonej do badañ modelowych;
- opis próbek modelujĄcych węzeł;
- szczególowy opis eksperymentu wraz z prezentacją graficzną zarejestrowanych przebiegów siły i odkształcenia, w szczególności procesu ustalania się pętli histerezy naprężeniowo-odkształceniowej;
- model reologiczny próbki i wyniki symulacji komputerowej procesu ustalania się pętli histerezy naprężeniowo-odkształceniowej.

1. Wstęþ

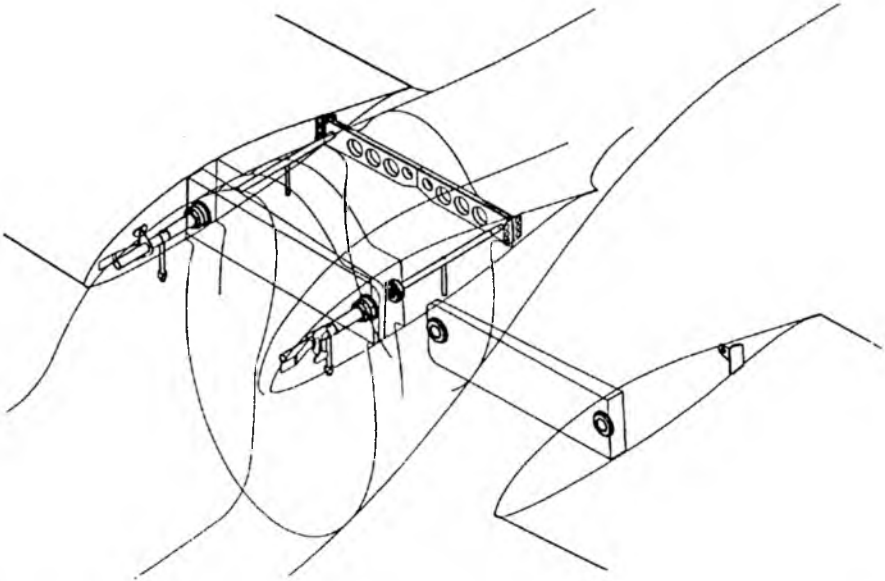
RozwiĄzania konstrukcyjne węzłów zastosowanych w połączeniu skrzydła-kadłub szybowca PW-5 sĄ aplikacją wynalazku [1] opracowanego w Zespole Naukowo-Badawczym Lotniczych Konstrukcji Kompozytowych ITLiMS. CechĄ badanego rozwiĄzania jest to, że siłę skupionĄ pochodzĄcĄ od obciĄżeń zewnĘtrznych wprowadza się w powłokę kompozytowĄ za pomocĄ zamka labiryntowego kotwiĄcego włókna zbrojenia, bez stosowania połączy klejonych typu metal-kompozyt.

Poczynione wcześniejsze próby statyczne takiego węzła dowiodły jego dużej wytrzymałości i dobrego wykorzystania nośności tkanin zbrojenia. Kolejnym krokiem stało się określenie trwałości zmęczeniowej węzła.

Rozpoczęte niedawno badania w tym zakresie w istotny sposób wiĄzĄ się z problematyką modelowania. W grę wchodzi:

1. zastąpienie rzeczywistego fragmentu konstrukcji węzła kadłubowego jego modelem (tj. próbką odwzorowującą strukturę powłoki kompozytowej i konstrukcję węzła);
2. utworzenie modelu obciążeń eksploatacyjnych węzła na podstawie założonego modelu eksploatacji szybowca i przetransponowanie go na obciążenia próbki;
3. modelowanie zachowań reologicznych próbki i znalezienie związków między zmianą cech reologicznych, a stopniem degradacji sturkury kompozytu wywołanym historią obciążeń.

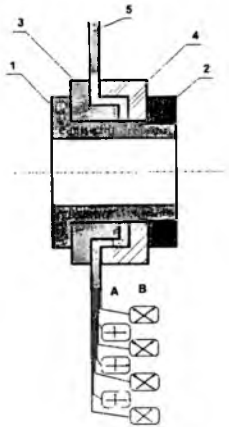
W pracy zaprezentowano wyniki wstępnych badań.



Rys. 1. Rozwiązanie konstrukcyjne połączenia skrzydła-kadłub szybowca PW-5

2. Model eksploatacji – spektrum obciążeń eksploatacyjnych szybowca

Podstawą badań trwałości zmęczeniowej płatowca jest tzw. spektrum (a



Rys. 2. Schematyczny przekrój węzła kadłubowego połączenia skrzydło-kadłub szybowca PW-5: 1,2 – tuleja z nakrętką, 3,4 – elementy zamka labiryntowego, 5 – powłoka kompozytowa. Warstwy tkanin: A – wzmocniających (dekoncentratorów), B – główne warstwy nośne

ściślej histogram) obciążeń eksploatacyjnych wynikających z założonego modelu eksploatacji.

W modelu tym podstawowe znaczenie ma przeznaczenie szybowca, tzn. czy ma to być szybowiec szkolny, wyczynowy, akrobacyjny, itp.

Z przeznaczenia szybowca wynikają m. innymi takie parametry, jak [3]:

- ilość startów wykonywanych za pomocą danego sposobu wlotu (np. za samolotem, wyciągarką, itd.),
- udział procentowy lotów w danej konfiguracji masowej (z balastem wodnym, bez balastu),
- udział procentowy danego rodzaju lotów (np. lotów termicznych, akrobacji, lotów szkolnych),
- udział procentowy lotów w danej konfiguracji aerodynamicznej (dot. wychylenia klap).

Istotnym parametrem modelu eksploatacji jest również całkowita liczba godzin wylatywanych przez szybowiec w ciągu roku, zależna od regionu, czynników ekonomicznych, itd.

Uwzględnia się przy tym ponadto:

- spodziewane kwalifikacje pilotów, mające związek z częstością występowania brutalnych manewrów,

- spodziewane warunki termiczne i średnią długość przelatywanych przez szybowiec tras, mające związek z częstością występowania określonego rodzaju obciążeń od podmuchów termicznych,
- spodziewany rodzaj nawierzchni pola wzlotów, mający związek z ilością obciążeń pochodzących od poruszania się po nierównościach terenu przy rozbiegu lub dobiegu, itd.

Zakres zmian obciążeń szybowca w poszczególnych stanach eksploatacji wyznaczany jest metodą obliczeniową lub przez pomiary. Jest on limitowany charakterystyką obciążeniową szybowca, którą określają przepisy techniczne dla danego rodzaju szybowca.

Wyznaczenie spektrum obciążeń eksploatacyjnych przypadających na dany okres użytkowania szybowca wymaga nie tylko dużej wiedzy inżynierskiej, ale też umiejętności przewidywania, gdyż przy żywotności szybowców sięgającej 20 lat, model eksploatacyjny szybowca może ulegać zmianom jakościowym (np. zdarza się często, że szybowiec zaprojektowany, jako wyczynowy, w miarę upływu lat zmienia swój status na szkolno-treningowy).

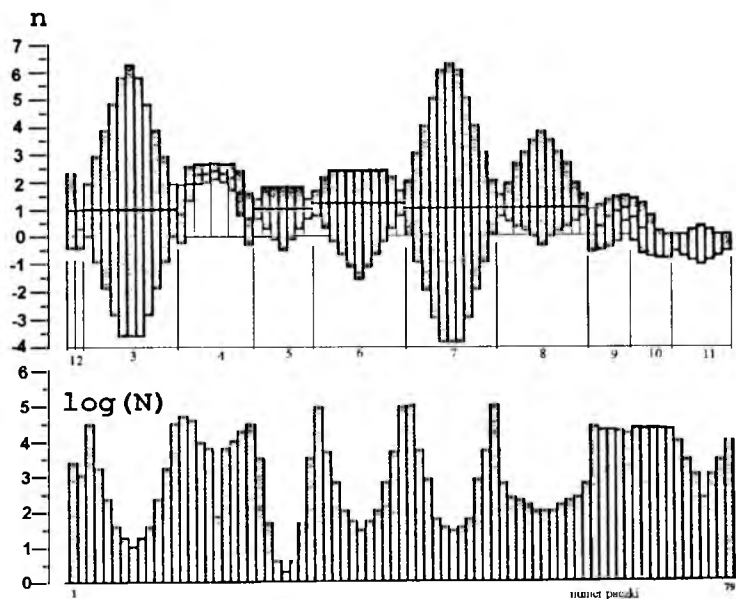
Jedną z metod stosowanych do określania spektrum obciążeń eksploatacyjnych szybowców jest wykorzystanie informacji zebranej podczas użytkowania szybowców o podobnych cechach techniczno/eksploatacyjnych.

W przypadku szybowca PW-5, do wstępnych badań węzłów połączenia: skrzydło-kadłub adaptowano spektrum obciążeń eksploatacyjnych szybowca SZD-51-1 Junior [2]. Zabieg ten uzasadniony jest podobieństwem obu szybowców pod względem konstrukcji i osiągow.

Powstały tą metodą histogram dla 1000 h eksploatacji uwzględnia wielkość oraz liczbę obciążeń występujących w stanach takich, jak wymienione na rys.3.

Przedstawiony histogram jest wynikiem dyskretyzacji obciążeń według wybranych przedziałów wartości. Każdemu stanowi eksploatacji przypisuje się blok obciążeń składającą się z m -paczek cykli obciążeń. Każda paczka określona jest przez parametry dotyczące wartości współczynnika obciążenia: $n(i)_{min}$, $n(i)_{max}$ i $n(i)_{odn}$, gdzie i jest numerem porządkowym paczki oraz ilości cykli obciążeń w tym zakresie. Parametry te są jednocześnie nastawami urządzenia realizującego obciążenie skrzydeł w próbach zmęczeniowych.

Dla szybowca SZD-51-1 (oraz PW-5), przy wybranym dla tego przypadku sposobie dyskretyzacji obciążeń, takich paczek wyodrębniono w sumie 79. Suma cykli wszystkich paczek dla 1000 godzin eksploatacji wynosi 904 800. Realizacja tych obciążeń na stanowisku badawczym byłaby procesem wielomiesięcznym! Wynika to stąd, że przy dowodowych próbach trwałości każdy cykl musi być powtórzony k -krotnie w zależności od współczynnika



Rys. 3. Spektrum obciążeń eksploatacyjnych szybowca bloki obciążeń i odpowiadające im stany eksploatacji: 1 – wzlot za pomocą wyciągarki, 2 – wzlot za samolotem, 3 – podmuchy w locie holowanym, 4 – podmuchy podczas wzlotu za wyciągarką, 5 – loty szkolne, 6 – podmuchy podczas krążenia, 7 – podmuchy podczas przeskoków międzykominowych, 8 – akrobacja podstawowa, 9 – rozbieg, 10 – dobieg, 11 – kołowanie

rozrzutu k dla danej próby. Poza tym w przypadku konstrukcji kompozytowych, przyspieszenie procesu prób (np. przez zwiększenie częstotliwości obciążeń powyżej 3 Hz) powoduje znaczący przyrost temperatury niektórych fragmentów struktury i wpływa na wynik próby.

Te wszystkie względy przemawiają za tym, że metody stosowane przy próbach trwałości zmęczeniowej prototypów całych skrzydeł są nieoptymalne w odniesieniu do prób pojedynczych węzłów podejmowanych w fazie projektowania lub optymalizacji konstrukcji.

3. Modelowanie warunków pracy rzeczywistej konstrukcji – założenia upraszczające

W świetle uwag końcowych poprzedniego rozdziału powstaje pytanie: – w jaki sposób najszybciej można byłoby zorientować się co do trwałości

zmęczeniowej proponowanego rozwiązania konstrukcyjnego?

Skuteczną metodą byłoby poddanie tego fragmentu konstrukcji wszystkim cyklom obciążeń scharakteryzowanych widmem opisanym wcześniej. Jednak ze względu na czasochłonność próby oraz z uwagi na uwarunkowania techniczne i ekonomiczne zdecydowano się na poniższe uproszczenia.

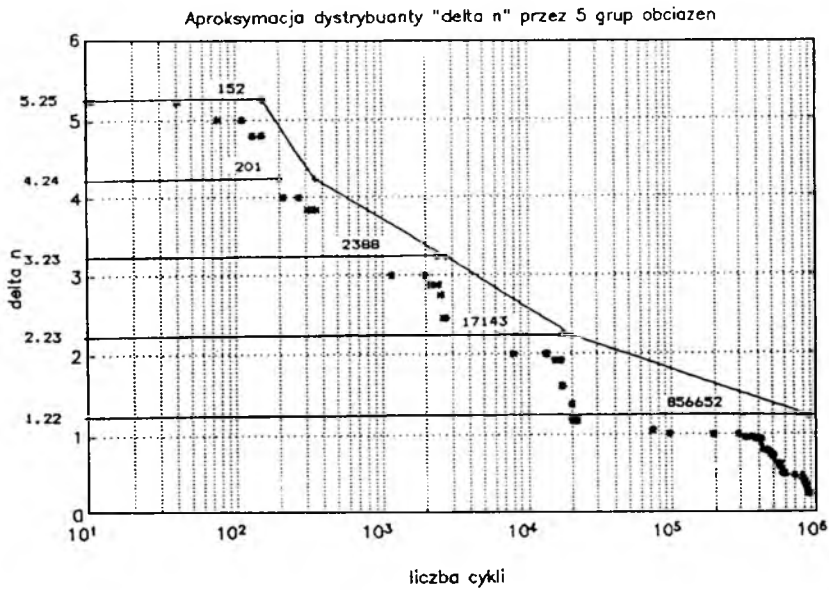
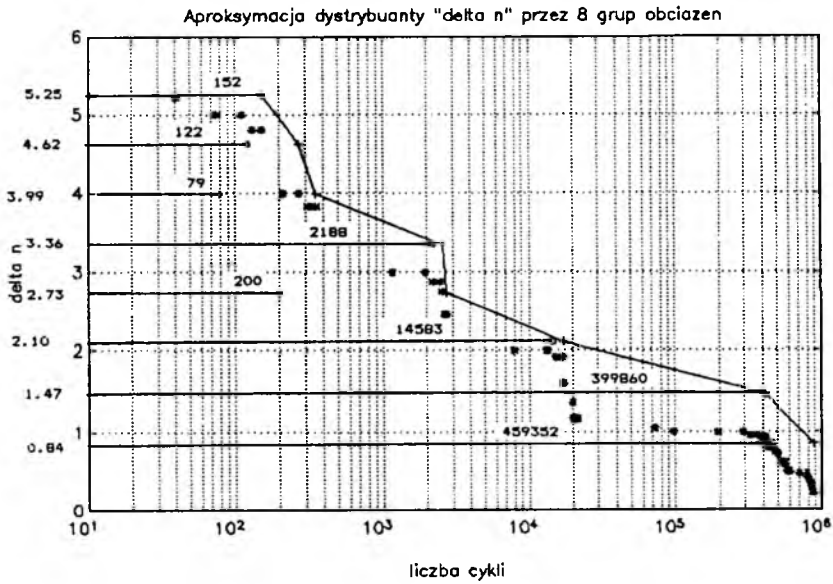
- a) Założono, że w miejsce rzeczywistej wręgi zawierającej węzeł kadłubowy badaniu poddany zostanie model (tj. próbka w postaci płytki z osadzonym w niej węzłem).
- b) Zamiast naprzemiennych cykli obciążeń dwukierunkowych: realizowany będzie cykl: zmiennych obciążeń jednokierunkowych. Przyjęto przy tym, że dla wszystkich paczek obciążeń $n_{odn} = \text{const} = 1$ (uproszczenie to wynika z możliwości maszyny wytrzymałościowej, będącej w dyspozycji autora).
- c) Zamiast dyskretyzacji spektrum na 79 paczek obciążeń zostanie dokonana wtórna dyskretyzacja na mniejszą ilość paczek cykli obciążeń.

Eksperyment przy takich założeniach nie jest traktowany, jako substytut pełnej próby zmęczeniowej węzłów połączenia: skrzydła-kadłub, lecz jako badania rekonesansowe.

I tak – zgodnie z założeniami – na potrzeby badań zmęczeniowych modelu węzła utworzono uproszczony model obciążeń eksploatacyjnych. W tym celu wyznaczono dystrybuantę przyrostów obciążeń w każdej paczce, definiowanych, jako różnicę między wartością maksymalną, a wartością odniesienia.

Na wykresach, rys.4, tworzą ją zbiory punktów zaznaczonych symbolami: (*). Liczbę paczek cykli ograniczono przez zastosowanie nowego podziału zakresu zmienności Δn na j równej długości przedziałów. Histogramy oznaczone symbolami (o) i dystrybuanty obciążeń oznaczone symbolami (+) krzyżykami dla $j = 5$ i $j = 8$ zamieszczono również na rys.4.

Uproszczenie modelu obciążeń eksploatacyjnych ułatwia realizację prób zmęczeniowych na maszynie wytrzymałościowej (mniejsza liczba nastaw). Stosowanie tego uproszczenia nie pogarsza stopnia drastyczności próby, gdyż dystrybuanty aproksymujące przebieg modelowy znajdują się po jego prawej stronie, tj. zawierają większą liczbę cykli. W uproszczonym modelu liczba cykli o maksymalnej amplitudzie obciążeń wynosi 152.



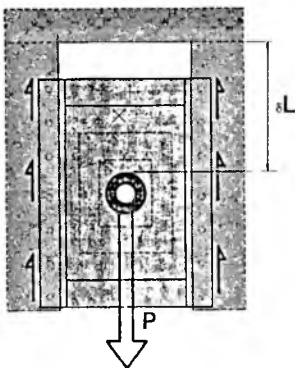
Rys. 4. Histogramy i dystrybuanty uproszczonych modeli obciążeń eksploatacyjnych: (a) – z podziałem na 8 grup obciążeń, (b) – z podziałem na 5 grup obciążeń

4. Przygotowanie eksperymentu

Do badań zmęczeniowych wykorzystano ten sam rodzaj próbki, który poddawany był próbom statycznym na etapie optymalizacji konstrukcji węzła.

Próbką była płytka kompozytowa o wymiarach 300×220 mm, z umieszczonym centralnie węzłem wprowadzenia siły skupionej, rozwiązaniem identycznie, jak we wrędze kadłubowej (ta sama struktura kompozytu i geometria elementów metalowych).

Maszynę wytrzymałościową typu ZD-20 PU z hydraulicznym układem siłowym, przystosowano do eksperymentu poprzez zabudowanie w układzie zawieszenia próbki dynamometru tensometrycznego. W układzie zawieszenia próbki umieszczono również indukcyjny czujnik przemieszczeń umożliwiający pomiar odkształcenia δL . Sposób obciążenia próbki pokazano na rys.5.



Rys. 5. Sposób obciążania próbki i mierzone parametry

Do rejestracji siły i odkształcenia wykorzystano komputer PC 286 z kartą przetwornika analogowo-cyfrowego Advantech PCL 812. Sygnały pobierano ze wzmacniacza mostka tensometrycznego KWS 6A-5, firmy Hottinger, oraz przetwornika przemieszczeń MPL-108 firmy Peltron.

5. Eksperymenty

W dotychczas zrealizowanym wstępnym etapie prac eksperymenty przeprowadzono na 2 próbkach. Poddano je działaniu paczki 152 cykli o ekstremalnej

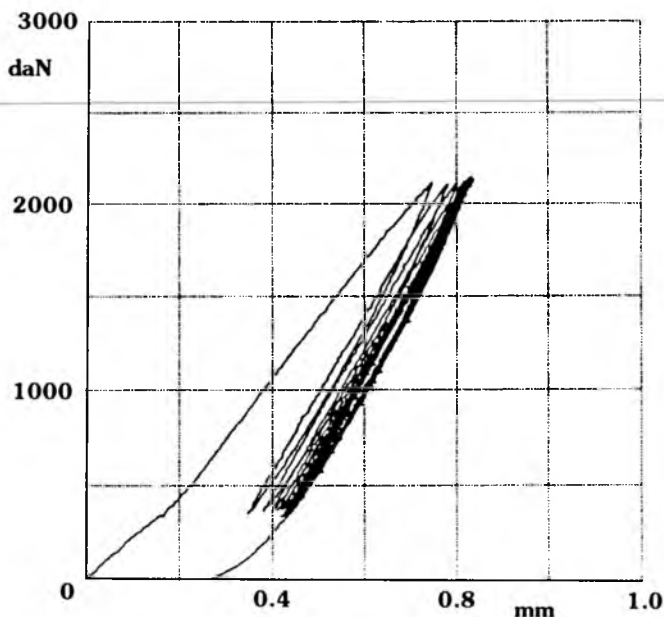
amplitudzie współczynnika obciążeń tj. od 1 do 5.97, co odpowiada zmienności siły w zakresie 347 daN do 2047 daN.

Na próbce 1 zrealizowano jedną paczkę cykli obciążeń, po czym dokonano próby wytrzymałości doraźnej uzyskując wynik $P_{niszcz} = 4620$ daN.

Na próbce 2 zrealizowano kolejno 10 paczek cykli, po czym poddano ją próbie wytrzymałości doraźnej uzyskując wynik $P_{niszcz} = 4060$ daN.

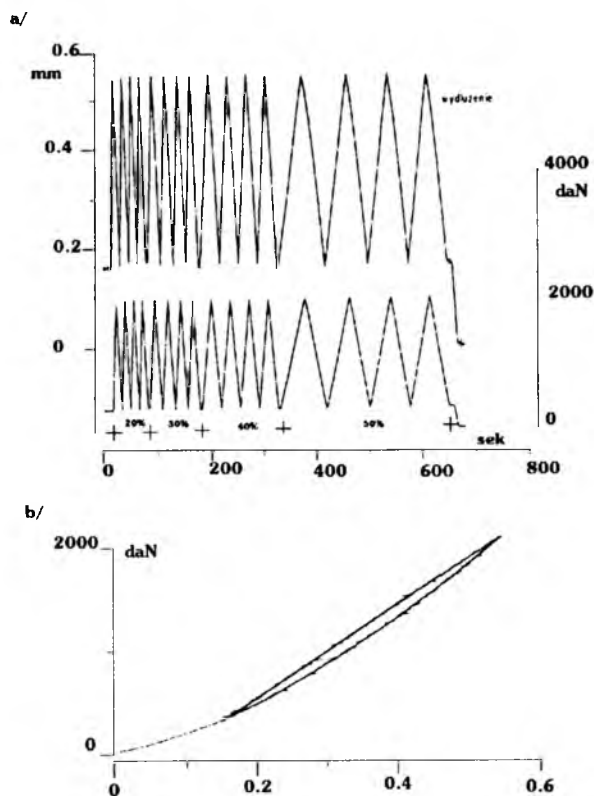
W opisie przedstawiono kolejno:

- Rys.6 – przebiegi pierwszej paczki cykli obciążeń próbki nr.2. Widoczny jest proces ustalania się pętli histerezy naprężeniowo-odkształceniowej w pierwszych cyklach obciążania próbki.



Rys. 6. Przebiegi pierwszej paczki cykli obciążeń próbki nr.2

- Sprawdzian wrażliwości wydłużenia na prędkość przyrostu obciążenia. Rezultaty są widoczne na rys.7a, 7b. Zmiana częstotliwości obciążeń w zbadanym zakresie nie miała wpływu na kształt pętli histerezy. Wynik ten jest pomocny przy analizie histerezy naprężeniowo-odkształceniowej oraz przy budowie modelu reologicznego próbki.

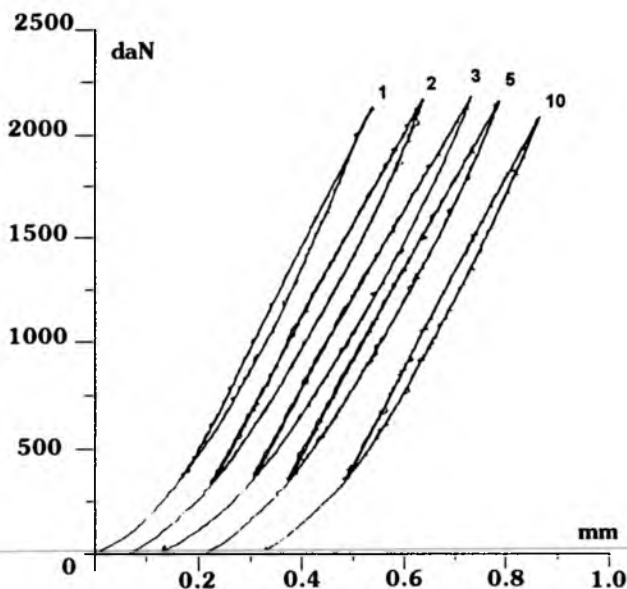


Rys. 7. Realizacja obciążenia próbki z różnymi prędkościami przyrostu siły

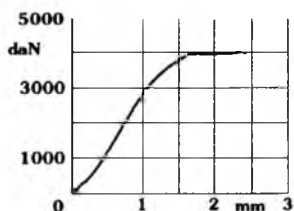
- Rys.8 – porównanie ustalonych kształtów pętli histerezy naprężeniowo-odkształceniowej dla różnych paczek obciążeń.

Zmiany tych kształtów dla kolejnych paczek cykli obciążeń wskazują na zachodzenie procesu rozsztywnienia próbki pod wpływem obciążeń (zmiany kąta nachylenia pętli). Ilość zrealizowanych paczek obciążeń była jednak zbyt mała, aby móc sformułować ogólniejsze wnioski. Oczekuje się, że przy większej liczbie paczek obciążeń, gdy struktura kompozytu zostanie naruszona w sposób bardziej istotny, szerokość pętli i jej kształt mógłby być skorelowany ze stanem degradacji struktury.

- Rys.9 – przebieg próby wytrzymałości doraźnej.



Rys. 8. Porównanie ustalonych kształtów pętli histerezy naprężeniowo-odkształceniowej dla kolejnych powtórzeń paczki obciążeń

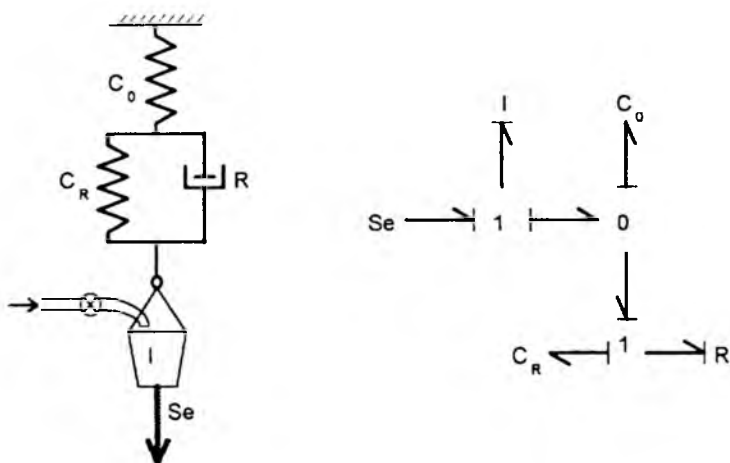


Rys. 9. Przebieg próby wytrzymałości doraźnej próbki nr.2 po zrealizowaniu obciążeń zmiennych

6. Modelowanie zachowań reologicznych próbki konstrukcyjnej węzła (próby wstępne)

Podstawą działań dot. modelowania zachowań reologicznych próbki konstrukcyjnej węzła jest hipoteza, że w miarę postępu degradacji struktury kompozytu wokół rozpatrywanego węzła zmieniać się będą również cechy reologiczne struktury konstrukcyjnej. Zakłada się zatem, że badanie tych cech mogło by być metodą diagnostyki stanu zmęczenia tego fragmentu konstrukcji.

W pierwszym przybliżeniu zastosowano do tego celu standardowy mo-



Rys. 10. Model fizyczny układu pomiarowego oraz model matematyczny wyprowadzony metodą grafów wiązań

del reologiczny I rzędu, opisujący zachowanie próbki podczas eksperymentu w sposób makroskopowy. Obrany model fizyczny układu pomiarowego, oprócz samej próbki odwzorowuje również sposób jej obciążania, realizowany przez maszynę wytrzymałościową. Przy tworzeniu modelu matematycznego posłużono się metodą grafów wiązań (rys.10). Na podstawie modelu matematycznego układu przeprowadzono symulację numeryczną zachowania się próbki, dobierając parametry modelu w taki sposób, aby otrzymać wynik zbliżony do rzeczywistego, zarówno przy badaniu przebiegu procesu ustalania się pętli histerezy odkształceniowo-naprężeniowej, przy danej częstotliwości zmian obciążeń, jak też przy badaniu wrażliwości kształtu pętli histerezy na częstotliwość zmian obciążeń

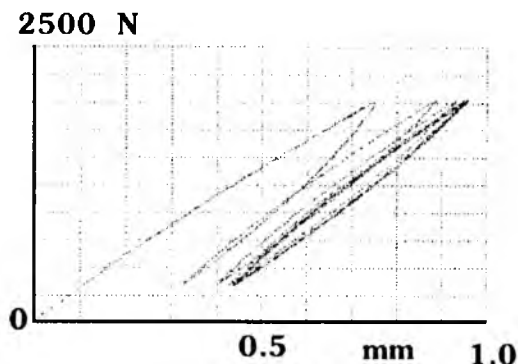
$$\dot{p} = mg - \frac{q_0}{c_0} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} p \\ q_0 \\ q_R \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_0 = \frac{p}{I} - \frac{q_0}{c_0 R} + \frac{q_R}{c_0 R}$$

$$\dot{q}_R = \frac{q_0}{c_0 R} - \frac{q_R}{c_0 R}$$

Przykładowe wyniki symulacji procesu ustalania się pętli histerezy naprężeniowo-odkształceniowej zamieszczono na rys.11.

Uzyskane wyniki potwierdzają przydatność tak uproszczonego modelu do odwzorowywania zachowań reologicznych badanej próbki.



Rys. 11. Wynik symulacji numerycznej procesu ustalania się pętli histerezy naprężeniowo-odkształceniowej

W dalszych działaniach planowane jest powiązanie zmian wartości parametrów modelu reologicznego z historią przebytych obciążeń. Będzie to możliwe dopiero po zebraniu dostatecznej ilości informacji z badań eksperymentalnych.

Jak to wcześniej zaznaczono, przedstawiony model ma charakter makroskopowy i nie odzwierciedla zjawisk zachodzących wewnątrz struktury próbki, jaką mógłby odwzorowywać model MES. Zadanie utworzenia takiego modelu i jego identyfikacja parametryczna, jest jednak zagadnieniem wciąż jeszcze trudnym do realizacji.

Literatura

1. FILIPIAK J., KĘDZIERSKI J., ŚWITKIEWICZ R., *Złącze do wprowadzania elementu przenoszącego siłę skupioną w powłokę kompozytową* Patent nr. 146658 Urz. Patentowy PRL 1989
2. STAFIEJ W., *Dokumentacja obliczeń zmęczeniowych SZD-51-1*, PZL-Bielsko
3. STAFIEJ W., *Zagadnienia związane z programowaniem widma obciążeń eksploatacyjnych skrzydeł szybowców kompozytowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej

On Modelling in Investigations into Fatigue Properties of the Wing-Fuselage Joint in the PW-5 Sailplane

Summary

Results the preliminary investigation into the fatigue properties of the main fuselage joint of the PW-5 sailplane described in the paper.

Following subjects have been taken into consideration:

- structure of the model of exploitation loads have been constructed in two forms: standard and simplified
- description and the results of the experiments (fatigue tests)
- rheological model of the specimen and results of the computer simulation of rheological behaviour of this model.

O WERYFIKACJI PARAMETRÓW KINEMATYCZNYCH I DYNAMICZNYCH REJESTROWANYCH NA POKŁADZIE SAMOLOTU

GRZEGORZ MAREK SŁUGOCKI

Politechnika Warszawska

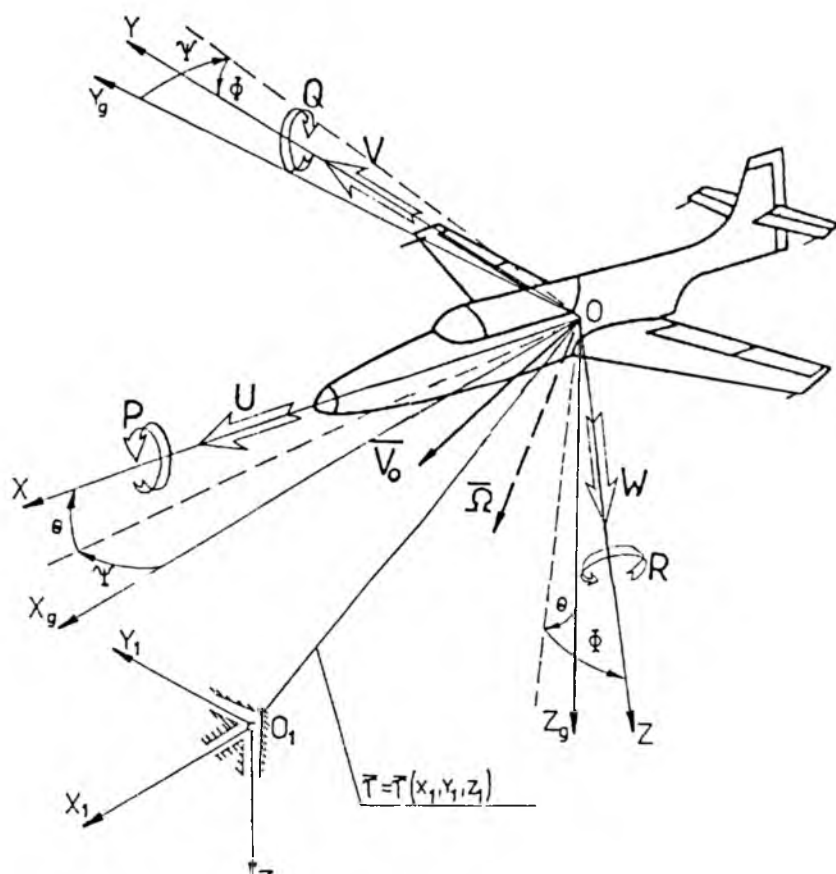
W niniejszej pracy przedstawiono metodę różniczkowania numerycznego z filtracją w zastosowaniu do algorytmu odwrotnego do procedury całkowania równań dynamiki samolotu. Przeprowadzono tą drogą weryfikację parametrów zarejestrowanych na pokładzie samolotu TS-11 "Iskra" i stwierdzono ich bardzo dobrą zgodność z otrzymanymi wynikami, co oznacza realność toru lotu i położenia katowych samolotu w badanej sekwencji wykonywanych wiązań akrobatycznych.

1. Wstęp

Weryfikacja parametrów lotu samolotu jest zagadnieniem odwrotnym do rozwiązywania równań dynamiki lotu, w których jako dane występują: dane masowe, geometryczne, aerodynamiczne i zespołu napędowego oraz dane ośrodka (powietrza) i parametry lotu kinematyczne i dynamiczne rejestrowane w locie lub symulowane.

Zagadnienia dynamiki lotu są szczegółowo opisane przez Etkina [1], Maryniaka [2,3], Manerowskiego [4,5], Goraja [6], natomiast u autora [8] podana jest jedynie ogólna postać równań dynamiki samolotu jako równania Boltzmanna-Hammela. Bekey i Karplus [7], Manerowski i inni [5] podają algorytmy obliczeniowe prowadzące od parametrów rejestrowanych na pokładzie samolotu (z uwzględnieniem rzeczywistych warunków atmosferycznych) do kątów orientacji przestrzennej ϕ, θ, ψ i położenia przestrzennych samolotu w układzie $0_1x_1y_1z_1$ inercjalnym. Jest to całkowanie układu równań różniczkowych prawie liniowych i nieliniowych z warunkami początkowymi; są nimi parametry lotu ustalonego bezpośrednio przed rozpoczęciem wiązanki akrobatycznej.

Parametry: ϕ, θ, ψ i x_1, y_1, z_1 podlegają dwukrotnemu różniczkowaniu w dziedzinie czasu, a następnie transformacji Eulera; wynikiem są zweryfikowane parametry kinematyczne i dynamiczne.



Rys. 1. Układy odniesienia: $O_1x_1y_1z_1$ inercjalny, $Oxyz$ samolotowy

2. Różniczkowanie numeryczne lokalne z filtracją

Autor zastosował do otrzymania wzorów do obliczania I i II pochodnej wielomian aproksymacyjny, stopnia $r = 5$ na siatce $N = 11$ węzłów równo-odległych, składający się z wielomianów Grama, określony w przedziale standardowym $x \in \langle -1, 1 \rangle$, dla którego określamy parametr siatki $h = 0.2$ zdefiniowany jak niżej:

$$h = \frac{2}{N - 1} \quad (2.1)$$

Wielomian aproksymacyjny ma postać:

$$y(x) = \sum_{j=0}^5 a_j p_j(x, 10) \quad (2.2)$$

gdzie:

$p_j(x, 10)$ ($j=0, 1, \dots, 5$) – są wielomianami Grama przyjmującymi wartości $p_j(-1, 10) = (-1)^j$ i $p_j(1, 10) = 1$,

$a_j = (f, p_j) / \|p_j\|^2$ – są współczynnikami rozwinięcia ortogonalnego będącymi ilorazami iloczynu skalarnego funkcji danej $f(x)$ i wielomianu Grama stopnia j -ego przez kwadrat jego normy; oba są określone w przestrzeni $l^2(E)$ (Hilberta) jak następuje:

$$(f, p_j) = \sum_{s=0}^{10} f(x_s) p_j(x_s, 10) \quad (2.3)$$

$$\|p_j\|^2 = \sum_{s=0}^{10} [p_j(x_s, 10)]^2$$

Iloczyn skalarny (2.3)₁ jest niezależny od postaci funkcji $f(x)$.

Wielomian pochodny rzędu k ma postać:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^5 a_j p_j^{(k)}(x, 10) \quad k \leq 2 \quad (2.4)$$

i podstawiając $x = x_s$ kolejno dla $s = 0, 1, \dots, 10$ mamy obliczone pochodne k -tego rzędu funkcji wejściowej $f(x)$ określonej w przedziale standardowym $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Gdy zmienna $X \in \langle a, b \rangle$ nie jest równa zmiennej standardowej x , dla przedziału której mamy określoną funkcję $f(x)$ pokrytego siatką lokalną, to dokonujemy transformacji tego przedziału na przedział standardowy jak niżej:

$$X = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)x \quad (2.5)$$

Dla zmiennej czasowej $T = l\Delta T$, gdzie:

l – numeracją l -tego węzła siatki globalnej, $l = 0, 1, \dots, GN - 1$;

GN – liczba węzłów na siatce globalnej;

ΔT – jest czasem próbkowania;

określamy położenie siatki lokalnej na siatce globalnej jako położenie wybranego węzła tej pierwszej na drugiej:

$$ls = l - sv \quad ls = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (2.6)$$

gdzie sv jest wybranym węzłem siatki lokalnej.

Liczbę tych położeń wyznacza zależność:

$$M = GN - N + 1 = GN - 10 \quad (2.7)$$

dla których obliczamy iloczyny skalarne (2.3)₁:

$$(f, p_j)_{ls} = \sum_{s=0}^{10} f(ls + s)p_j(s, 10) \quad (2.8)$$

a następnie współczynniki rozwinięcia w postaci:

$$a_{j(ls)} = \frac{(f, p_j)_{ls}}{\|p_j\|} \quad (2.9)$$

Wielomian aproksymacyjny przybiera wówczas postać:

$$y(ls + s) = \sum_{j=0}^5 a_{j(ls)} p_j(s, 10) \quad (2.10)$$

a po k -krotnym jego zróżniczkowaniu mamy:

$$y^{(k)}(ls + s) = \sum_{j=k}^5 a_{j(ls)} p_j^{(k)}(s, 10) \quad (2.11)$$

dla $0 < ls < M - 1$. W wyrażeniach (2.12)÷(2.13) dokonujemy podstawienia $s = sv$ (najlepiej gdy $sv = 5$, wtedy używamy węzła centralnego), otrzymując odpowiednio:

$$y(l) = y(ls + sv) \quad (2.12)$$

$$y^{(k)}(l) = y^{(k)}(ls + sv) \quad (2.13)$$

zaś dla $ls = 0$ i $ls = M - 1$ wykonujemy obliczenia odpowiednio dla $s = 0, 1, \dots, sv$ i $s = sv, \dots, N - 1$, natomiast pochodne w dziedzinie czasu otrzymujemy z zależności:

$$y^{(k)}(T) = \frac{y^{(k)}(l)}{(\Delta T)^k} \quad (2.14)$$

Stożek r wielomianu aproksymacyjnego (2.1) winien spełniać warunki:

$$3 \leq r \leq 2\sqrt{N - 1} \quad (2.15)$$

$$r - k \geq 2 \quad k = 2$$

co dla wyżej wymienionej metody ma miejsce, a eliminuje zjawisko Rungego i jednocześnie zapewnia dokładne obliczanie II pochodnej.

3. Zależności w algorytmie obliczeń

Składowe prędkości liniowej $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$, w układzie nieruchomym $0_1x_1y_1z_1$ wyrażają się poprzez składowe prędkości liniowej u, v, w w układzie związanym z samolotem $0xyz$ (zaczepionym w środku masy samolotu) w sposób następujący:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{1,1}u + a_{1,2}v + a_{1,3}w \\ \dot{y}_1 &= a_{2,1}u + a_{2,2}v + a_{2,3}w \\ \dot{z}_1 &= a_{3,1}u + a_{3,2}v + a_{3,3}w\end{aligned}\quad (3.1)$$

natomiast zależności odwrotne mają postać:

$$\begin{aligned}u &= b_{1,1}\dot{x}_1 + b_{1,2}\dot{y}_1 + b_{1,3}\dot{z}_1 \\ v &= b_{2,1}\dot{x}_1 + b_{2,2}\dot{y}_1 + b_{2,3}\dot{z}_1 \\ w &= b_{3,1}\dot{x}_1 + b_{3,2}\dot{y}_1 + b_{3,3}\dot{z}_1\end{aligned}\quad (3.2)$$

i wyrażenie na moduł prędkości całkowitej V :

$$V = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\quad (3.3)$$

przy czym macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} cechują się ortonormalnością, to znaczy:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{AA}^T = \mathbf{I} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \mathbf{B}\quad (3.4)$$

a ich elementy są następujące:

$$\begin{aligned}a_{1,1} &= b_{1,1} = \cos \psi \cos \theta \\ a_{2,1} &= b_{1,2} = \sin \psi \cos \theta \\ a_{3,1} &= b_{1,3} = -\sin \theta \\ a_{1,2} &= b_{2,1} = \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi \\ a_{2,2} &= b_{2,2} = \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \phi \cos \psi \\ a_{3,2} &= b_{2,3} = \sin \phi \cos \theta \\ a_{1,3} &= b_{3,1} = \sin \phi \sin \psi + \sin \theta \cos \phi \cos \psi \\ a_{2,3} &= b_{3,2} = -\sin \phi \cos \psi + \sin \theta \cos \phi \sin \psi \\ a_{3,3} &= b_{3,3} = \cos \phi \cos \theta\end{aligned}$$

gdzie ϕ, θ, ψ są kątami Eulera (rys.1) zależnymi od czasu t .

Z kolei składowe prędkości kątovej P, Q, R w układzie samolotowym wyrażają się kątami Eulera i ich I-mi pochodnymi następującym układem równań:

$$\begin{aligned} P &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ Q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ R &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

i wyrażenie na moduł prędkości kątovej Ω :

$$\Omega = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \quad (3.6)$$

Kąty natarcia α i ślizgu β znajdujemy odpowiednio z zależności:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w}{u} \quad \beta = \arcsin \frac{v}{V} \quad (3.7)$$

jako funkcje zależne od czasu t .

Pochodne składowych prędkosci liniowej w układzie samolotowym mają następujące składowe:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{b}_{1,1} \dot{x}_1 + \dot{b}_{1,2} \dot{y}_1 + \dot{b}_{1,3} \dot{z}_1 + b_{1,1} \ddot{x}_1 + b_{1,2} \ddot{y}_1 + b_{1,3} \ddot{z}_1 \\ \dot{v} &= \dot{b}_{2,1} \dot{x}_1 + \dot{b}_{2,2} \dot{y}_1 + \dot{b}_{2,3} \dot{z}_1 + b_{2,1} \ddot{x}_1 + b_{2,2} \ddot{y}_1 + b_{2,3} \ddot{z}_1 \\ \dot{w} &= \dot{b}_{3,1} \dot{x}_1 + \dot{b}_{3,2} \dot{y}_1 + \dot{b}_{3,3} \dot{z}_1 + b_{3,1} \ddot{x}_1 + b_{3,2} \ddot{y}_1 + b_{3,3} \ddot{z}_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Składowe przyspieszenia liniowego w tymże układzie są jak niżej:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{u} + wQ - vR = b_{1,1} \ddot{x}_1 + b_{1,2} \ddot{y}_1 + b_{1,3} \ddot{z}_1 \\ a_y &= \dot{v} + uR - wP = b_{2,1} \ddot{x}_1 + b_{2,2} \ddot{y}_1 + b_{2,3} \ddot{z}_1 \\ a_z &= \dot{w} + vP - uQ = b_{3,1} \ddot{x}_1 + b_{3,2} \ddot{y}_1 + b_{3,3} \ddot{z}_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

a jego moduł wyraża się wzorem:

$$A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{z}_1^2} \quad (3.10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \dot{b}_{1,1} &= -\dot{\theta} \sin \theta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta \\ \dot{b}_{1,2} &= -\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi + \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta \\ \dot{b}_{1,3} &= -\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{2,1} &= \dot{\phi}(\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi) + \\
&+ \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi \sin \phi - \dot{\psi}(\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi) \\
\dot{b}_{2,2} &= \dot{\phi}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) + \\
&+ \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \sin \phi + \dot{\psi}(\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) \\
\dot{b}_{2,3} &= \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi \\
\dot{b}_{3,1} &= \dot{\phi}(\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \sin \theta) + \\
&+ \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi \cos \psi + \dot{\psi}(\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \sin \theta) \\
\dot{b}_{3,2} &= -\dot{\phi}(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta) + \\
&+ \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi \sin \psi + \dot{\psi}(\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \sin \theta) \\
\dot{b}_{3,3} &= -\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi
\end{aligned}$$

Przyspieszenie kątowe w układzie samolotowym ma następujące składowe:

$$\dot{P} = -\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta + \ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin \theta \quad (3.11)$$

$$\dot{Q} = -\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi}(-\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta) + \ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \sin \phi$$

$$\dot{R} = -\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \phi - \dot{\psi}(\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta) - \ddot{\theta} \sin \phi + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \phi$$

a jego moduł wyraża się wzorem:

$$E = \sqrt{\dot{P}^2 + \dot{Q}^2 + \dot{R}^2} \quad (3.12)$$

Należy zaznaczyć, że nie jest konieczne w tym zagadnieniu rozpatrywanie składowych prędkości i przyspieszeń kątowych w układzie inercyjnym.

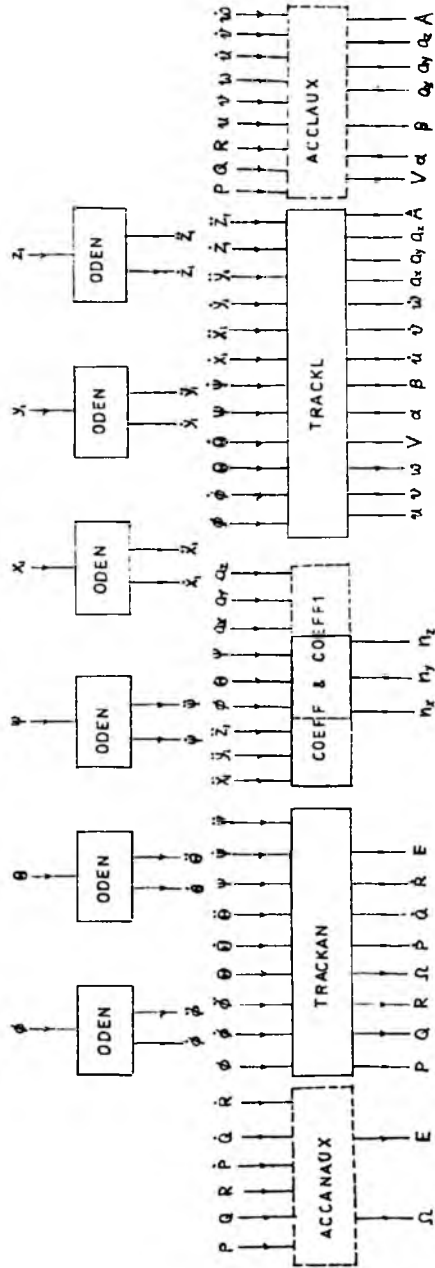
Współczynniki obciążeń oblicza się z zależności:

$$\begin{aligned}
n_x &= -\frac{b_{1,1}\ddot{x}_1 + b_{1,2}\ddot{y}_1 + b_{1,3}(\ddot{z}_1 - g)}{g} = -\frac{a_x + g \sin \theta}{g} \\
n_y &= -\frac{b_{2,1}\ddot{x}_1 + b_{2,2}\ddot{y}_1 + b_{2,3}(\ddot{z}_1 - g)}{g} = -\frac{a_y - g \cos \theta \sin \phi}{g} \\
n_z &= -\frac{b_{3,1}\ddot{x}_1 + b_{3,2}\ddot{y}_1 + b_{3,3}(\ddot{z}_1 - g)}{g} = -\frac{a_z - g \cos \theta \cos \phi}{g}
\end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ jest standardową wartością przyspieszenia ziemskiego.

4. Aplikacje praktyczne i wnioski

Jak wspomniano poprzednio, weryfikację parametrów mierzonych w locie przeprowadza się poprzez proces odwrotny do całkowania układu równań dy-



Rys. 2. Schemat działania systemu programów

namiki ruchu z transformacją z układu $0xyz$ związanego z samolotem na układ $0_1x_1y_1z_1$ inercjalny (związany z ziemią). Parametrami rejestrowanymi na pokładzie samolotu podlegającymi weryfikacji są:

t – czas lotu;

V – prędkość lotu;

$h = -z_1$ – wysokość lotu;

P, Q, R – składowe prędkości kątowej w układzie $0xyz$;

α – kąt natarcia;

β – kąt ślizgu;

n_x, n_y, n_z – współczynniki obciążenia w układzie $0xyz$;

te ostatnie mogą być weryfikowane wymiennie ze składowymi przyspieszenia liniowego a_x, a_y, a_z w tymże układzie i jego modulem A (ten ostatni jest tu przedstawiany).

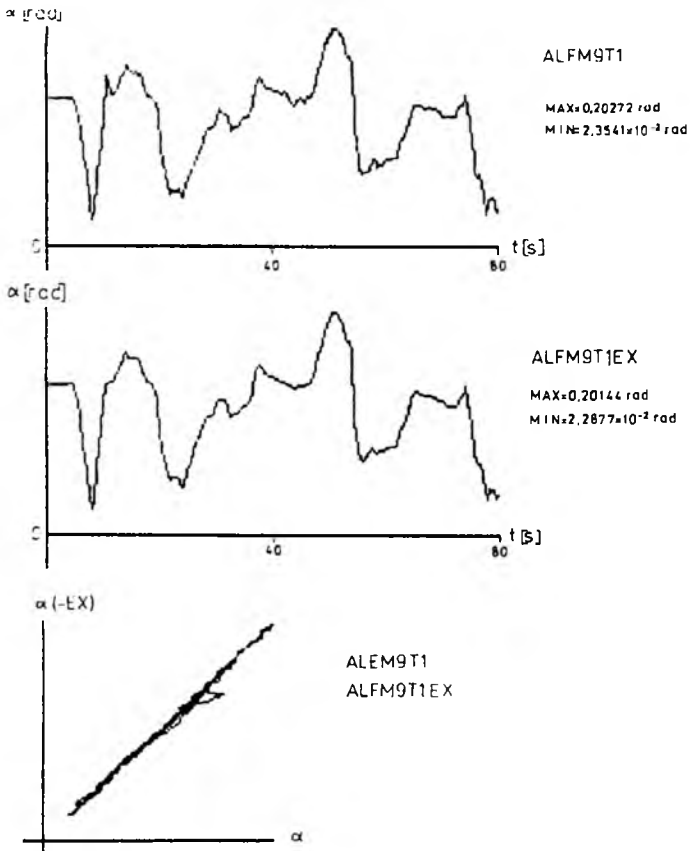
Badania przeprowadzono dla samolotu TS-11 "Iskra" w przedziale czasowym równym $t = 80$ s (w tym początkowy lot ustalony przez $t_u = 5$ s) z próbkowaniem przebiegów ϕ, θ, ψ i x_1, y_1, z_1 co 0.5 s. Parametry są zatem wyrażone jako tablice o $GN = 161$ elementach o oznaczeniach: M9T1 (obliczenia własne) i M9T1EX (dane pomiarowe).

Na wykresach są przedstawione:

- α jako zbiory ALFM9T1, ALFM9T1EX w funkcji czasu i wzajemnej zależności (rys.3). Oba zbiory wykazują niemal idealną zgodność liczbową w całym zakresie czasowym.
- β jako zbiory BETM9T1, BETM9T1EX w funkcji czasu i wzajemnej zależności (rys.4). Oba zbiory wykazują bardzo dobrą zgodność ilościową w całym zakresie czasowym.
- A jako zbiory ACM9T1, ACM9T1EX w funkcji czasu i wzajemnej zależności (rys.5). Oba zbiory wykazują idealną zgodność liczbową w całym czasowym, z tym że dla chwili czasowej $T = 0$ mamy $A = 0$ dla pliku doświadczalnego ACM9T1EX (jest on wyliczany ze składowych a_x, a_y, a_z w układzie $0xyz$, które pochodzą bezpośrednio z pomiarów).

Zaistniałe drobne rozbieżności mają za przyczynę:

1. zmienność rzeczywistego położenia środka masy samolotu;

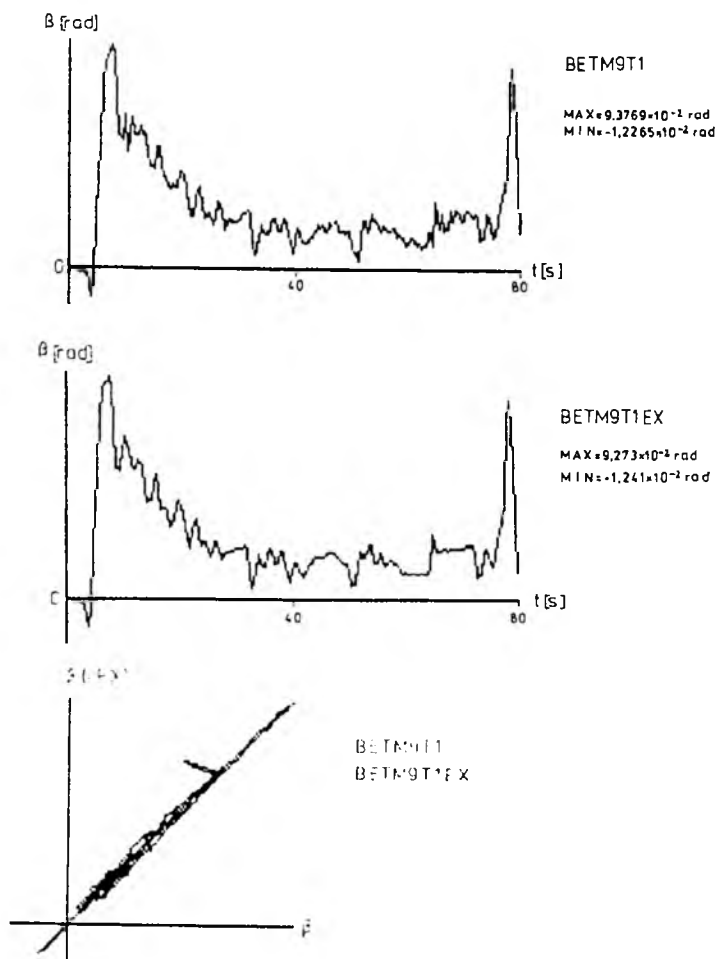


Rys. 3. Kąt natarcia α ; (a) – obliczony, plik ALFM9T1, (b) – eksperymentalny, plik ALFM9T1EX, (c) – wzajemna relacja obu plików

2. dokładność przyrządów pomiarowych;
3. błędy całkowania równań dynamiki;
4. błędy zareprezentowanej metody różniczkowania;

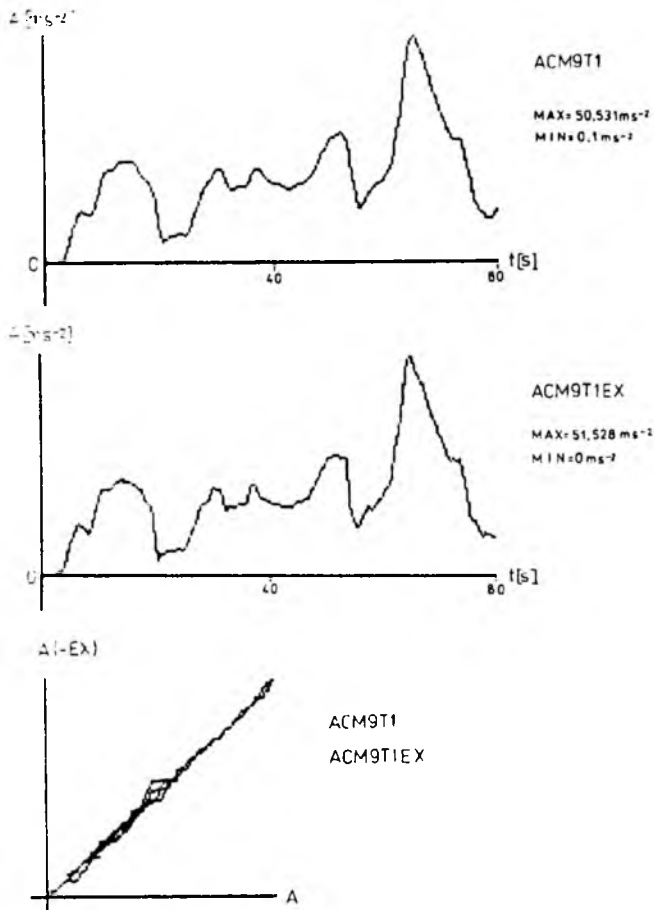
Stąd wnioski końcowe są następujące:

1. zastosowana metoda różniczkowania jest niezawodna;
2. tor lotu i kąty orientacji były prawidłowo obliczone;
3. nie wolno formatować wartości kątów orientacji (gdy są wyliczane w radianach) ani tym bardziej współrzędnych toru lotu do z góry zadanej małej liczby cyfr znaczących.



Rys. 4. Kąt ślizgu β ; (a) – obliczony, plik BETM9T1, (b) – eksperymentalny, plik BETM9T1EX, (c) – wzajemna relacja obu plików

Powyżej zareprezentowana metoda weryfikacji bardzo dokładnie określa czy kąty orientacji przestrzennej i tor lotu są takie jak to wynika z wyników całkowania równań dynamiki, biorąc pod uwagę fakt że każde różniczkowanie numeryczne jest źródłem błędów oraz to że dane eksperymentalne są też obarczone błędami.



Rys. 5. Moduł przyspieszenia liniowego A ; (a) – obliczony, plik ACM9T1, (b) – eksperymentalny, plik ACM9T1EX, (c) – wzajemna relacja obu plików

Literatura

1. ETKIN B., *Dynamics of atmospheric flight*, John Wiley, New York 1972
2. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, WPW 1975
3. MARYNIAK J., *Ogólny model symulacji samolotu*, Prace ITLiMS 1985
4. MANEROWSKI J., *Identyfikacja modelu dynamiki lotu samolotu odrzutowego oraz jego układów sterowania*, BT ITWL, Warszawa 1990
5. MANEROWSKI J., NOWAKOWSKI M., RYMASZEWSKI S., *Komputerowy model dynamiki lotu zweryfikowany próbami w locie*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 28/1990

6. GORAJ Z., *Obliczenia sterowności, równowagi i stateczności w zakresie poddźwiękowym*, PW 1984
7. BEKEY G.A., KARPLUS W.J., *Obliczenia hybrydowe*, PWN Warszawa 1976
8. SŁUGOCKI G.M., *Opracowanie metody wygładzania i różniczkowania numerycznego w zastosowaniu do obliczeń parametrów kinematycznych i dynamicznych lotu samolotu na podstawie danych pomiarowych*, Warszawa 1993 (praca dyplomowa)
9. HILDEBRAND F.B., *Introduction to numerical analysis*, John Wiley and Sons, New York 1956
10. BJÖRCK A., DAHLQUIST G., *Metody numeryczne*, PWN 1987

Verification of the Kinematic and Dynamic Parameters Recorded on the Airplane Board

Summary

In the present paper a method of numerical differentiation is presented in view of its application to the algorithm, which is an inversion of the integration of the set of differential equations being a description of the airplane's dynamics. By this procedure, the verification of the parameters of flight, recorded onboard the airplane TS-11, "Iskra" (Spark), proved a very good agreement between the results and the recorded parameters, what means that the position angles sequence and the flight path are realistic in the tested set of the aerobatic manoeuvres.

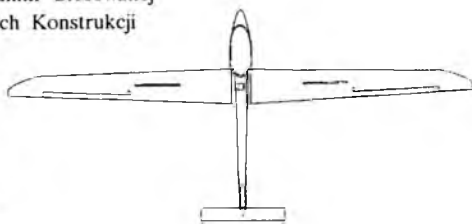
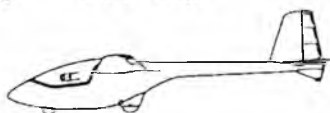
KONSTRUKCJE PROGRAMU ULS

Politechnika Warszawska
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Zespół Naukowo-Badawczy Lotniczych Konstrukcji
Kompozytowych

ROK
OBLOTU

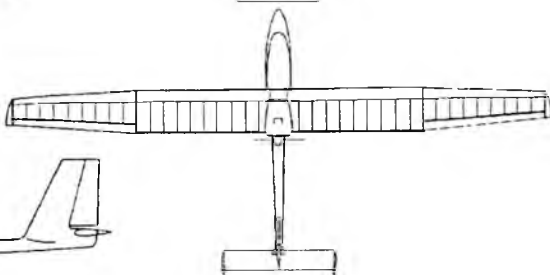
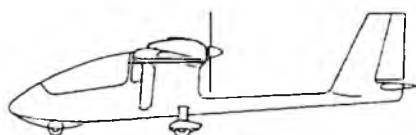
1992

PW-5 "Smyk"



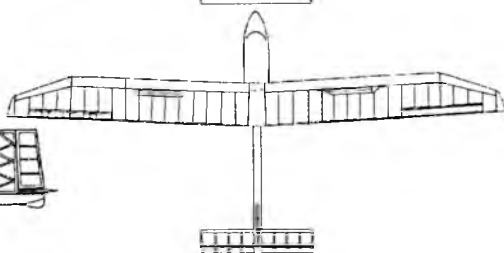
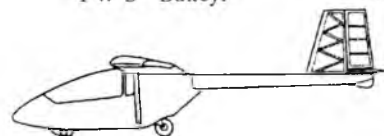
1990

PW-4 "Pelikan"



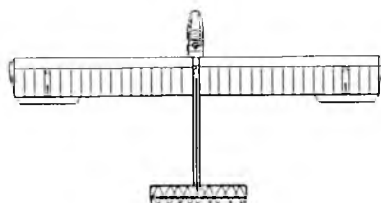
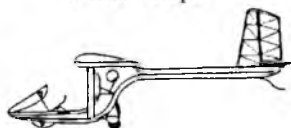
1988

PW-3 "Bakcyl"



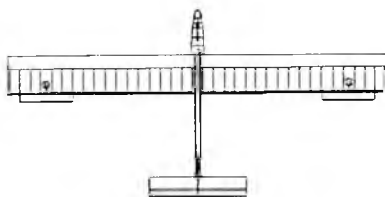
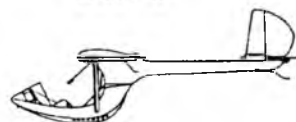
1985

PW-2 "Gapa"



1981

ULS-PW



NIEKTÓRE ALGORYTMY OBRÓBK I DANYCH EKSPERYMENTALNYCH UWZGLĘDNI AJĄC E ZWIĄZKI POMIĘDZY MIERZONYMI SYGNAŁAMI

KRZYSZTOF SZAFRAN

Institut Lotnictwa, Warszawa

W pracy przedstawiono kilka algorytmów obróbki danych eksperymentalnych, – dane z badań w locie – które uwzględniają aprioryczne związki pomiędzy mierzonymi sygnałami. Wykorzystano teoretyczne zależności z praw dynamiki lotu – równania Eulera – związki kinematyczne pomiędzy kątami, a prędkościami kątowymi.

Pokazano sposoby wyznaczenia nowych estymatorów, które wygładzają szeregi danych eksperymentalnych i zmniejszają dyspersję w porównaniu z innymi metodami (obniżenie granicy Rao-Cramera).

Wyliczenia poparto prostymi przykładami badań symulacyjnych. Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach.

1. Wstęp

Dane eksperymentalne, w tym również uzyskane podczas badań w locie, zawierają informację zniekształconą przez błędy powstające w procesie pomiaru i rejestracji. Błędy te utrudniają przeprowadzenie dokładnej i stabilnej identyfikacji obiektów latających. Jednym ze sposobów ograniczenia ich wpływu na wyniki identyfikacji jest wtórna obróbka danych eksperymentalnych, wyznaczająca estymaty (oceny) mierzonych sygnałów, które zmniejszają wpływ zakłóceń pomiarowych na rezultat i jakość identyfikacji.

W statystycznych metodach identyfikacji, najwyższa efektywność estymat (graniczna dokładność) określana jest nierównością Rao-Cramera. Wyznacza ona minimalną wartość dyspersji estymaty mierzonego sygnału. Jednym ze sposobów zmniejszenia dyspersji estymatora (granica Rao-Cramera) jest obróbka danych eksperymentalnych z zastosowaniem algorytmów uwzględniających istniejące związki pomiędzy mierzonymi sygnałami. Związki te, dalej

nazywać będziemy apriorycznymi. Sposób ten pozwala uzyskać poprawione dane z eksperymentu, bez konieczności stosowania dodatkowej aparatury. Poprawa jest uzyskiwana na drodze czysto obliczeniowej.

Załóżmy, że pomiędzy mierzonymi parametrami dynamicznymi (np. kątami obrotu i prędkościami kątowymi ruchu obiektu) istnieje znany związek analityczny. W praktyce pomiarowej wielkości kątów obrotowych i prędkości kątowych mogą być mierzone niezależnie – kąty platformą giroskopową, prędkości kątowe giroskopami prędkościowymi. Związek analityczny pomiędzy nimi nie jest wykorzystywany. Jak wiadomo, zarówno kąty, jak i prędkości kątowe są rejestrowane z błędami zawierającymi błędy czujników, błędy transmisji i rejestracji.

Związki aprioryczne pomiędzy mierzonymi parametrami mogą być dowolnego typu, opisane np. równaniami algebraicznymi, różniczkowymi, liniowymi i nieliniowymi, czy też nierównościami. Te, które dają się opisać równaniami pozwalają na wyznaczenie estymaty obrabianych sygnałów, natomiast nierówności umożliwiają oszacowanie granic obszaru maksymalnej dokładności obrabianych danych pomiarowych. Z rozważań teoretycznych przeprowadzonych w [5] można wnioskować, że uwzględnienie zależności innego typu, np. logicznych, stochastycznych i innych – może spowodować poprawę dokładności uzyskiwanych wyników.

W prezentowanej pracy rozważono jedne z prostszych postaci związków apriorycznych pomiędzy mierzonymi sygnałami, a mianowicie związki opisane algebraicznymi równaniami liniowymi, oraz nieliniowymi równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Przedstawione algorytmy wyznaczania estymat dotyczą wtórnej obróbki danych eksperymentalnych – wygładzania szeregów czasowych. Algorytmy tego typu mogą być przydatne we wszystkich zagadnieniach, w których zbierane są i obrabiane dane statystyczne w postaci szeregów czasowych. Mogą to być różnego rodzaju badania np. mechaniczne (żywności silników), ekonomiczne (wahania cen), demograficzne (rozwój populacji). Przetworzone szeregi czasowe uwzględniane w zagadnieniach identyfikacji modeli matematycznych prowadzą do polepszenia jakości uzyskiwanych rezultatów. Przytoczone przykłady ograniczają się do wąskiej grupy związków apriorycznych występujących w prostszych wersjach równań dynamiki lotu samolotów.

2. Algorytm wygładzania n szeregów czasowych z uwzględnieniem związków w postaci k algebraicznych równań liniowych

Przyjmijmy, że zarejestrowano rezultat pomiarów n zmiennych w czasie parametrów $x_n(t)$ ruchu obiektu dynamicznego w postaci szeregów czasowych $y_n(t)$, zapisanych następująco:

$$\mathbf{Y}^T(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]$$

Niech model sygnału pomiarowego opisany będzie równaniem:

$$y_i(t) = x_i(t) + \eta_i(t)$$

gdzie:

- η_i – błąd stochastyczny w postaci białego szumu spełniającego warunki:

$$E[\eta_i] = 0 \qquad E[\eta_i \eta_j] = \sigma^2 \delta_{ij} \delta_{kl}$$

δ_{ij}, δ_{kl} – symbole Kroneckera.

Poszukujemy estymat $\hat{x}(t)$ mierzonych parametrów ruchu, pod warunkiem, że istnieje pewna znana informacja o wzajemnej zależności pomiędzy rzeczywistymi wartościami parametrów $x(t)$.

Niech związki istniejące pomiędzy szeregami czasowymi opisuje k równań algebraicznych:

$$\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{D}$$

gdzie:

- \mathbf{B} – macierz stałych współczynników,
- \mathbf{X} – wektor mierzonych parametrów,
- \mathbf{D} – wektor współczynników.

Po przeprowadzeniu syntezy równań ruchu badanego obiektu dynamicznego z uwzględnieniem związków apriorycznych opisanych powyższą równością, oraz minimalizacji funkcjonału przedstawionego poniżej:

$$\Phi^* = \sum_{s=-m}^m \sum_{j=m}^n [y_i(t+s) - a_{j0} - a_{j1}s - a_{j2}s^2 - \dots - a_{jq}s^q]^2 + \Lambda^T(\mathbf{B}\mathbf{X} - \mathbf{D}) \quad (2.1)$$

gdzie:

λ – wektor współczynników Lagrange'a,
 m – szerokość okna wygładzania,
 q – stopień wielomianu aproksymacyjnego,
 otrzymamy zależność opisującą estymaty parametrów $x(t)$

$$\hat{x}(t) = \frac{3}{\nu(m)} \sum_{s=-m}^m [\phi(m, s)(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{Y}(t+s) + (3m^2 + 3m - 1) \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}] \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T(t+s) &= [y_1(t+s), y_2(t+s), \dots, y_n(t+s)] \\ \nu(m) &= (2m-1)(2m+1)(2m+3) \\ \phi(m, s) &= 3(3m^2 + 3m - 1) - 15s^2 \end{aligned}$$

oraz

\mathbf{C} – macierz o elementach $c_{jk} = \sum_{i=1}^n b_{ji} b_{ri}$.

Przykład.

Niech dana będzie macierz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times k}$$

Z przedstawionych powyżej zależności wyliczamy współczynniki macierzy \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = (n-k) \begin{bmatrix} \frac{n-k+1}{n-k} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ ! & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{n-k+1}{n-k} \end{bmatrix}$$

podstawiając dla danego przykładu $n = 3$, $k = 2$, otrzymamy:

$$n-k = 1 \quad n-k+1 = 2 \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a przyjmując, że dyspersje pomiarów są jednakowe i równe σ_1^2 , uzyskujemy:

$$\sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sigma_1^2 & \frac{1}{3}\sigma_1^2 & -\frac{1}{3}\sigma_1^2 \\ \frac{1}{3}\sigma_1^2 & \frac{1}{3}\sigma_1^2 & -\frac{1}{3}\sigma_1^2 \\ -\frac{1}{3}\sigma_1^2 & -\frac{1}{3}\sigma_1^2 & \frac{1}{3}\sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Uzyskany wynik pokazuje, że w omówionym przykładzie uwzględnienie związków apriorycznych występujących pomiędzy szeregami czasowymi do sporządzenia estymat mierzonych parametrów, trzykrotnie zmniejsza dyspersję.

3. Algorytm wygładzania szeregów czasowych z uwzględnieniem związku apriorycznego w postaci nieliniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu

Niech dane będą dwa szeregi czasowe $y_1(t)$, $y_2(t)$, gdzie $t \in (0, N)$, które są rezultatem pomiaru dwóch parametrów dynamicznych. Ponadto, niech pomiędzy mierzonymi parametrami $x_1(t)$, $x_2(t)$ istnieje związek w postaci równania różniczkowego:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f(x_1, x_2) \quad (3.1)$$

Funkcja $f(x_1, x_2)$ jest ciągła i jednoznaczna względem x_2 , oraz istnieje ciągle rozwiązanie równania (3.1). Niech będzie też możliwe przekształcenie równania (3.1) do postaci:

$$x_2(t) = g\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right)$$

Rozdzielmy zadanie wygładzania na dwa etapy:

- pierwszy, w którym wykorzystując równanie związku otrzymamy polepszoną ocenę mierzonego parametru x_1 ;
- drugi, gdzie przyjmiemy otrzymaną ocenę \hat{x}_1 jako faktyczne dane pomiarowe i wyznaczmy ocenę drugiego szeregu \hat{x}_2 .

Procedurę można powtórzyć wprowadzając jako dane pomiarowe oceny \hat{x}_1 i \hat{x}_2 , uzyskując w ten sposób oceny drugiego przybliżenia \hat{x}_1^1 i \hat{x}_2^1 . Tak więc istnieje możliwość zbudowania procesu iteracyjnego polepszania ocen obrabianych danych.

Wprowadzimy nowe zmienne:

$$x_3 = f(x_1, x_2) \quad x_4 = g\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right) \quad (3.2)$$

aby formalnie sprowadzić jeden związek nieliniowy do dwóch równań liniowych:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3 \quad x_2 = x_4$$

Przyjmijmy metodę przemieszczanego okna wygładzania o szerokości $2m + 1$ w dyskretnym czasie ze środkiem w punkcie t_1 . Ogólny wzór aproksymacji szeregu czasowego opisuje zależność:

$$x_i(t, s) = \sum_{r=0}^q a_{ir}(t) s^r \quad (3.3)$$

Niech w otoczeniu punktu t_1 szereg czasowy będzie aproksymowany następującymi wielomianami:

$$\begin{aligned} x_1(t, s) &= a_{10}(t) + a_{11}(t)s + a_{12}(t)s^2 + a_{13}(t)s^3 \\ x_2(t, s) &= a_{20}(t) + a_{21}(t)s + a_{22}(t)s^2 \\ x_3(t, s) &= a_{30}(t) + a_{31}(t)s + a_{32}(t)s^2 \\ x_4(t, s) &= a_{40}(t) + a_{41}(t)s + a_{42}(t)s^2 \end{aligned}$$

Uwzględniając równanie (3.1) możemy zapisać:

$$a_{11} + 2a_{12}s + 3a_{13}s^2 = a_{30} + a_{31}s + a_{32}s^2$$

Jeśli ten warunek jest spełniony przy dowolnym s , to prawdziwe są związki:

$$a_{11} = a_{30} \quad a_{12} = \frac{1}{2}a_{31} \quad a_{31} = \frac{1}{3}a_{32}$$

3.1. Pierwszy etap

Przyjmijmy kryterium optymalizacji w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \sum_{s=-m}^m \left[(y_1 - a_{10} - a_{11}s - a_{12}s^2 - a_{13}s^3)^2 + \right. \\ &+ (y_2 - a_{20} - a_{21}s - a_{22}s^2)^2 + (y_3 - a_{30} - a_{31}s - a_{32}s^2)^2 \left. \right] + (3.4) \\ &+ \lambda_1(a_{11} - a_{30}) + \lambda_2\left(a_{12} - \frac{1}{2}a_{31}\right) + \lambda_3\left(a_{13} - \frac{1}{3}a_{32}\right) \end{aligned}$$

po zróżniczkowaniu otrzymamy układ równań, z którego po rozwiązaniu otrzymamy wyrażenie na ocenę $\hat{x}_1(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= \sum_{s=-m}^m \left[\frac{1}{\nu_1(m)} (\psi(m, 4) - \psi(m, 2)s^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} \frac{\psi(m, 2)\psi(m, 0)s - \psi(m, 2)}{\nu_1(m) + 4\psi(m, 0)\psi(m, 2)} \right) y_1 + \frac{1}{8} \frac{\psi(m, 2)f(y_1, y_2)}{\nu_1(m) + 4\psi(m, 0)\psi(m, 2)} \left. \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \nu_1(m) &= (4m^2 - 1)(2m + 3) & \psi(m, 2) &= \frac{(2m + 1)m(m + 1)}{3} \\ \psi(m, 0) &= 2m + 1 & \psi(m, 4) &= \frac{(2m + 1)m(m + 1)(3m^2 + 3m - 1)}{15} \end{aligned}$$

oraz estymatę pierwszej pochodnej:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= \sum_{s=-m}^m \left[\frac{1}{\nu_2(m)} (\psi(m, 6)s - \psi(m, 4)s^3) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\psi(m, 6)\mu_{22} - \psi(m, 4)\mu_{21}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2} \right) y_1 + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\psi(m, 4)\mu_{11} - \psi(m, 6)\mu_{12}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2} \frac{\psi(m, 4)s - \psi(m, 2)s^3 f(y_1, y_2)}{\nu_2(m)} + \\ &\left. - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \left(\frac{\partial^2 f(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 f(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \nu_2(m) &= \psi(m, 2)\psi(m, 0) - \psi^2(m, 4) \\ \mu_{11} &= \frac{\nu_1(m)\psi(m, 6) - \nu_2(m)\psi(m, 4)}{\nu_1(m)\nu_2(m)} \\ \mu_{22} &= -\frac{9\psi(m, 2)\nu_1(m) + \psi(m, 0)\nu_2(m)}{18\nu_1(m)\nu_2(m)} \\ \mu_{12} &= \frac{3\nu_1(m)\psi(m, 4) + \psi(m, 2)\nu_2(m)}{6\nu_1(m)\nu_2(m)} = \mu_{21} \end{aligned}$$

3.2. Drugi etap

Po pierwszym etapie obróbki otrzymano dwa szeregi czasowe estymat pierwszego parametru \hat{x}_1 i jego pochodnej $\hat{\dot{x}}_1$

$$\{\hat{x}_1(1), \hat{x}_1(2), \dots, \hat{x}_1(N)\} \quad \{\hat{\dot{x}}_1(1), \hat{\dot{x}}_1(2), \dots, \hat{\dot{x}}_1(N)\}$$

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:

$$\hat{x}_1 = z_1(t) \quad \hat{\dot{x}}_1 = z_1(t)$$

Będziemy traktować oznaczenia z_1 i \dot{z}_1 , jako nowe szeregi czasowe, oraz posłużymy się równaniem $x_2 = g(x_1, \dot{x}_1)$ do utworzenia kryterium:

$$\Phi_2^* = \sum_{s=-m}^m \left[\left(z_2(s) - b_{20} - b_{21}s - b_{22}s^2 \right)^2 + \left(z_4(s) - b_{40} - b_{41}s - b_{42}s^2 \right)^2 \right] + \\ + \lambda_1(b_{20} - b_{40}) + \lambda_2(b_{21} - b_{41}) + \lambda_3(b_{22} - b_{42})$$

Uwzględniono tu równanie związku $x_2 = x_4$, oraz założono, że dla $s \in (-m, m)$ spełniona jest przybliżona zależność:

$$b_{20} + b_{21}s + b_{22}s^2 \cong b_{40} + b_{41}s + b_{42}s^2$$

Warunkiem koniecznym spełnienia powyższej równości jest ekstremum powyższego kryterium:

$$\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial b_{ij}} = 0 \quad (3.7)$$

Rozwiązanie układu równań (3.7) pozwala wyliczyć współczynniki b_{ij} i znaleźć współczynniki Lagrange'a:

$$\lambda_1 = \sum_{-m}^m (z_2 - z_4) \quad \lambda_2 = \sum_{-m}^m (z_2 - z_4)s \\ \lambda_3 = \sum_{-m}^m (z_2 - z_4)s^2$$

Z dalszej syntezy równań uwzględniających związek wyznaczono estymaty szeregów czasowych:

$$\hat{z}_1(t) = b_{20} = \frac{1}{2\nu_1(m)} \sum_{-m}^m [\psi(m, 4) - s^2\psi(m, 2)](z_2 + z_4) \\ \hat{z}_4(t) = \frac{1}{2\nu_1(m)} \sum_{-m}^m [\psi(m, 4) - s^2\psi(m, 2)](z_2 + z_4)$$

estymaty $\hat{z}_1(t)$ i $\hat{z}_4(t)$ są sobie równe, $z_4(t) = g(z_1, \dot{z}_1)$.

Dla $\hat{z}_2(t)$ otrzymujemy:

$$\hat{x}_2 = \hat{z}_2 = \frac{1}{2\nu_1(m)} \sum_{s=-m}^m [\psi(m, 4) - s^2\psi(m, 2)] (\hat{x}_2 + g(\hat{x}_1, \dot{\hat{x}}_1))$$

Powyższa procedura, rozdzielona na dwa etapy, może być poddana kolejnym iteracjom. Istotny problem w przedstawionym algorytmie stanowi przesunięcie wartości estymat związane z nieliniowością związków (3.1). Można to częściowo kompensować wprowadzając poprawki do otrzymanych ocen parametrów obrabianego szeregu czasowego.

4. Przykłady symulacji działania algorytmów wygładzania

Dla zilustrowania efektywności oraz poprawności działania opracowanych algorytmów, przytoczymy proste przykłady.

• Przykład 1.

Dane są dwa szeregi czasowe $x_1(t)$, $x_2(t)$ danych eksperymentalnych, pomiędzy którymi zachodzi związek:

$$x_2(t) = [x_1(t)]^2 \qquad x_1(t) = \sin t$$

Ponadto przyjęto:

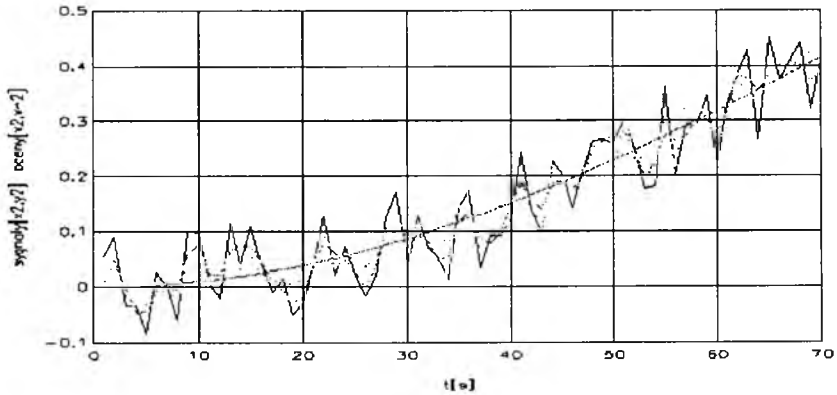
$$q = 2 \qquad m = 1$$

stąd:

$$\nu(m) = \nu(m) = (2m - 1)(2m + 1)(2m + 3) = 15$$

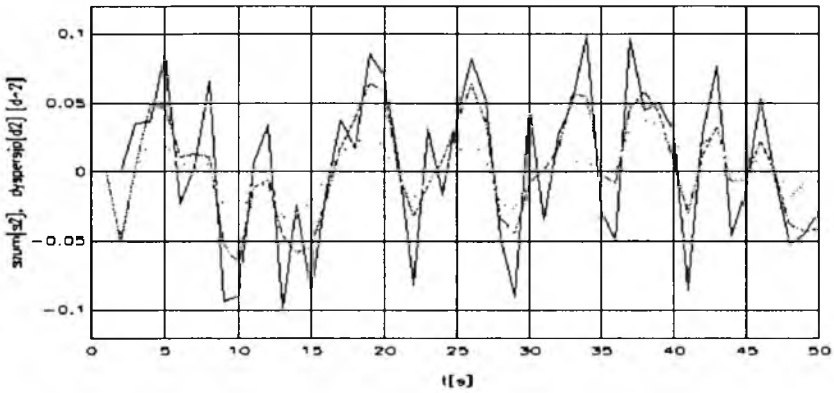
$$\phi(m, s) = 3(3m^2 + 3m - 1) - 15s^2 = 15(1 - s^2)$$

$$\phi(m, -1) = 0 \qquad \phi(m, 0) = 15 \qquad \phi(m, 1) = 0$$



Rys. 1. Oceny danych eksperymentalnych

Do wyznaczenia ocen szeregów czasowych wykorzystano wzory (2.1). Na rysunku 1 zamieszczono wyniki symulacji oraz estymaty uzyskane po obróbce z zastosowaniem algorytmów wygładzania. Na rysunku 2 pokazano dyspersje sygnału oraz dyspersje uzyskanych ocen. Z rysunku widać, że wielkość dyspersji po obróbce uległa istotnemu zmniejszeniu.



Rys. 2. Dyspersja obrabianych danych

- Przykład 2.

Dane są dwa szeregi czasowe będące pomiarami dwóch parametrów obiektu dynamicznego – samolotu – kąta pochylenia θ i prędkości kątowej pochylenia q . Pomiedzy tymi parametrami zachodzi związek kinematyczny opisany równaniem:

$$\frac{d\theta}{dt} = q$$

Przyjęto: $m = 2$

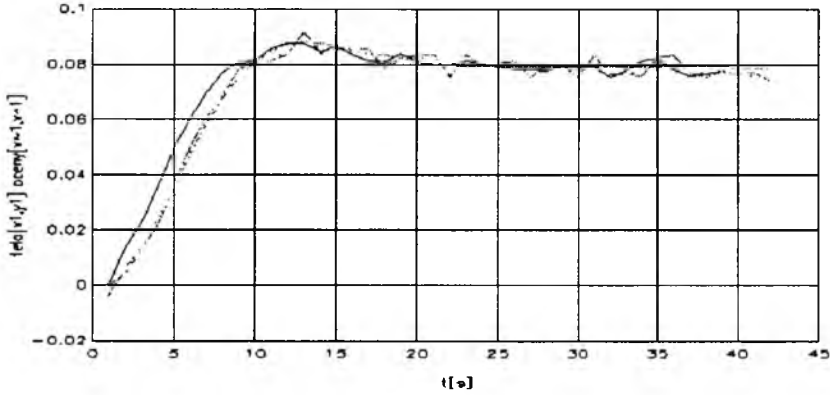
i stąd:

$$\begin{array}{lll} \psi(m, 0) = 5 & \psi(m, 2) = 10 & \psi(m, 4) = 34 \\ \psi(m, 6) = 130 & \nu_1(m) = 70 & \nu_2(m) = 144 \end{array}$$

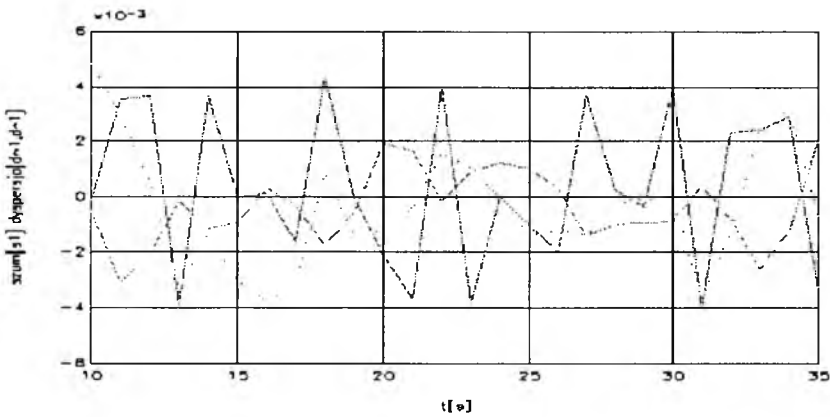
Po wyznaczeniu z (3.5) i (3.6) wzorów opisujących estymaty parametrów θ i q przeprowadzono symulację komputerową.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= \sum_{s=-2}^2 \left[\frac{1}{70} \left(34 - 10s^2 + \frac{1}{4} \frac{10 \cdot 5s - 10}{70 + 4 \cdot 5 \cdot 10} \right) y_1 - \frac{1}{8} \frac{10f(y_1, y_2)}{70 + 4 \cdot 5 \cdot 10} \right] \\ \hat{x}_1(t) &= \sum_{s=-2}^2 \left[\frac{1}{144} (130s - 34s^3) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{130\mu_{22} - 34\mu_{21}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2} \right) y_1 + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{34\mu_{11} - 130\mu_{12}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2} \frac{34s - 10s^3 f(y_1, y_2)}{144} + \\ &\left. - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \left(\frac{\partial^2 f(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 f(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Przykładowe wyniki uzyskanych ocen kąta pochylenia θ i dyspersje ocen obrabianych sygnałów zamieszczono na rysunkach 3 i 4.



Rys. 3. Oceny danych eksperymentalnych



Rys. 4. Dyspersja obrabianych danych

5. Zakończenie

Uwzględnienie apriorycznych związków pomiędzy mierzonymi szeregami czasowymi, tak dla przypadku związków liniowych, jak i nieliniowych, prowadzi do polepszenia oceny parametrów (zmniejszenie dyspersji). Nie we wszystkich przypadkach jest to jednak możliwe. W tych pomiarach, gdzie dyspersje

dwóch mierzonych parametrów znacznie się od siebie różnią, nie ma efektu poprawienia ocen dla szeregu ze względnie małym szumem, a nawet ocena może się pogorszyć. Jednak w większości zagadnień technicznych wielkości szumów nałożonych na sygnały pomiarowe jest zbliżonego rzędu, a zatem zastosowanie przedstawionych algorytmów umożliwia uzyskanie lepszych wyników.

Literatura

1. ANDERSON B.D.O., MOORE J.B., *Filtracja optymalna*, WNT, Warszawa, 1984
2. BOX G.E.P., JENKINS G.M., *Analiza szeregów czasowych*, PWN, Warszawa, 1983
3. WATSON G.S., *Serial Correlation in Regression Analysis*, Mimeo Series, No.49
4. ANDERSON T., *Statističeskij analiz vremennyh rjadov*, MIR, Moskva, 1976
5. SZAFRAN K., *Ispolzovanie apriornych analitičeskich svjazej dlja sinteza ěffektivnyh algoritmov obrabotki ěksperimentalnoj informacii v zadačach dinamiki polěta*, praca doktorska; Kijów, 1993

Some Algorithms for Experimental Data Analysis Considering Mutual Relations Between Measured Signals

Summary

The paper presents a few algorithms analysing the experimental data – flight dynamics parameters. Same relations between measured signals of an aircraft altitude angles and its angular velocities have been considered. Principles of flight dynamics in a form of the Euler dynamic and kinematic equations have been applied. New estimators smoothing data series have been determined, enabling reduction of the Rao-Cramer limit.

An example of computer simulation has been presented.

WYBRANE PROBLEMY SYMULACJI LOTU NA SYMULATORZE

CEZARY SZCZEPAŃSKI

MP-PZL Aerospace Industries Ltd,

ITLiMS, Politechnika Warszawska

W referacie przedstawiono najważniejsze problemy, jakie napotykają producenci i użytkownicy symulatorów lotu na przykładzie symulatora samolotu TS-11 "Iskra". Ujęto je w trzy grupy. Pierwsza związana jest z człowiekiem, jego anatomią i fizjologią; druga to problemy techniczne sprzętowe i programowe związane z konstruowaniem symulatora lotu; trzecia to problemy eksploatacyjne, a w tym właściwe wykorzystanie symulatorów w procesie szkolenia personelu latającego.

1. Wprowadzenie

Symulator określony jest w "Leksykonie naukowo-technicznym" [1] jako: "urządzenie pozwalające na odtwarzanie przebiegów rzeczywistych w warunkach sztucznych, stosowane zwykle do celów szkoleniowych". Przez analogię, symulator lotu jest urządzeniem odtwarzającym rzeczywiste loty, stosowanym zwykle do szkolenia personelu latającego. Takie właśnie urządzenia są najlichniesze wśród symulatorów. Będą one przedmiotem rozważań niniejszego artykułu.

Drugim nie mniej ważnym obszarem zastosowań symulatorów, także w lotnictwie, są badania. Symulatory w takich zastosowaniach mają na ogół bogatsze wyposażenie i są konstruowane z nadmiarami parametrów w stosunku do wymaganych minimów.

Problemy, z jakimi mają do czynienia konstruktorzy, producenci i użytkownicy symulatorów lotu można podzielić na trzy grupy:

1. Związane z człowiekiem (anatomią i fizjologią).

2. Konstrukcyjne:

– programowe, związane z modelowaniem i oprogramowaniem,

- sprzętowe, związane z konstruowaniem i technologią.

3. Eksploatacyjne:

- związane z metodami wykorzystania symulatorów podczas szkolenia,
- związane z techniczną stroną eksploatacji.

W niniejszym artykule, ze względu na jego ograniczoną objętość, skoncentrowano się na analizie problemów towarzyszących projektowaniu, budowie i wykorzystaniu symulatorów lotu do szkolenia personelu latającego.

Szkolenie personelu latającego to proces dynamiczny [2]. Powinien więc być traktowany zgodnie z teoriami cybernetycznymi jako sekwencja cząstkowych procesów dynamicznych. Pod pojęciem cząstkowego procesu dynamicznego rozumie się w tym przypadku zadanie, które powinien opanować pilot podczas szkolenia.

Prawidłowo ułożony program szkolenia powinien zawierać sekwencję zadań uszeregowanych od najprostszego do najbardziej złożonego. Podczas szkolenia nie można przechodzić do zadania następnego bez opanowania zadania wcześniejszego. Wzrost stopnia wyszkolenia można odwzorować jako zmianę w czasie wskaźników opanowania zadania. Najczęściej przyjmuje się jako ten wskaźnik prawdopodobieństwo popełnienia błędu lub niewykonania zadania. Przebieg zmian takiego wskaźnika ma charakter wykładniczy [2].

Cały proces szkolenia pilota ma doprowadzić do wytworzenia u niego "modelu pojęciowego" [3] procesu sterowania lotem samolotu. Dobrze zinternalizowany "model pojęciowy", nazywany niekiedy "modelem wewnętrznym", pozwoli pilotowi wyobrazić sobie aktualny stan samolotu, to znaczy jego orientację przestrzenną oraz stan systemów pokładowych, i porównać go z zaplanowanym. Na koniec umożliwi wypracowanie odpowiednich sygnałów sterujących, mających na celu osiągnięcie przez samolot stanu zadanego.

Odpowiednie zastosowanie symulatorów lotu w procesie szkolenia pilotów może go skrócić, obniżyć jego koszty nawet o połowę, a także uczynić bezpieczniejszym.

2. Problemy związane z człowiekiem

Głównym problemem związanym z symulacją lotu w symulatorze jest konieczność uwzględnienia cech anatomicznych i fizjologicznych pilotów. Jest

to w istocie główna przyczyna, z której wynikają wszystkie problemy. Po krótko zostaną omówione zjawiska wpływające w najistotniejszy sposób na symulację lotu.

Do człowieka, a więc także i pilota, docierają informacje z otoczenia i z wnętrza jego ciała. Informacje te mają charakter sygnałów energetycznych odbieranych przez receptory znajdujące się na wejściach układu nerwowego. Sygnały te nazywane są bodźcami. Bodźce wywołują wrażenia, czyli impulsy nerwowe przekazywane przez układ nerwowy człowieka z receptorów do mózgu. Wrażenia zmieniają się w zależności od charakteru bodźców, w tym od zmian ich natężenia i częstotliwości. Wrażenia przetwarzane są przez odpowiednie ośrodki w mózgu i porównywane z istniejącymi już w pamięci człowieka wzorcami – modelami pojęciowymi. Wrażenia tworzą w mózgu percept, pozwalający człowiekowi na zinterpretowanie bieżącej sytuacji. Percept ma ustalony charakter i zależy bezpośrednio od stanu otoczenia.

Podczas rzeczywistego lotu na pilota działają bodźce wzrokowe, ruchowe, dźwiękowe i zapachowe wywołujące wrażenia sumujące się na percept – lot samolotem. Jest on bardzo podobny w zbliżonych warunkach lotu na takim samym samolocie podczas różnych lotów. Wydawałoby się więc, że w symulatorze należy wygenerować takie same bodźce, aby piloci mieli wrażenia takie jak podczas rzeczywistego lotu, a więc by interpretowali lot w symulatorze jako lot w samolocie. Takie też były początkowo dążenia producentów i użytkowników symulatorów lotu. Nie oszczędzono środków na możliwie wierne, dynamiczne odwzorowanie bodźców działających na pilota podczas rzeczywistego lotu. Po kilkunastu latach eksploatacji symulatorów na masową skalę jako urządzeń treningowych dla personelu latającego i przeprowadzeniu szeregu badań stwierdzono, że wygenerowanie w symulatorze bodźców bardzo zbliżonych do tych w samolocie, nie daje w efekcie takich samych perceptów, a więc i interpretacji odbywanego lotu jako lot rzeczywisty.

W USA stwierdzono, że nawet przy bardzo wysokiej klasy symulatorach i typie ćwiczenia LOFT (Line Oriented Flight Training), polegającym na ćwiczeniu lotu na symulatorze tak, jakby przebiegał on w rzeczywistości, co w przypadku np. lotu przez Atlantyk daje 6-7 godzinny trening, piloci zachowują w podświadomości fakt lotu w symulatorze. Niemożliwe jest w istocie wywołanie w symulatorze za pomocą takich samych bodźców takich samych wrażeń, jak w samolocie. To, jakie bodźce i w jakim natężeniu należy wygenerować by wywołać wrażenia takie jak podczas rzeczywistego lotu stanowi najistotniejszy problem, jaki należy rozwiązać podczas projektowania i budowy symulatorów lotu.

Problem ten jest w istocie źródłem pozostałych problemów symulacji lotu na symulatorze. Jedynym właściwym podejściem do ich rozwiązania jest

wyjście od przeznaczenia symulatora, uwzględnienie zagadnień związanych ze współpracą człowieka z systemem technicznym jakim jest symulator, a w końcu optymalizacja parametrów użytkowych i technicznych pod względem ekonomicznym. Na tym ostatnim etapie powinno się minimalizować koszt symulatora treningowego przy założonym zakresie jego zastosowań. W przypadku symulatorów badawczych stosuje się pewną nadmiarowość możliwości do aktualnych potrzeb, co powoduje ich wyższy koszt niż podobnych symulatorów treningowych.

3. Problemy konstrukcyjne

Problemy konstrukcyjne związane z symulacją lotu na symulatorze można podzielić na dwie grupy:

- związane z modelowaniem symulowanego obiektu i jego otoczenia;
- związane z konstrukcją i technologią wykonania symulatora lotu.

3.1. Modelowanie

Modelowanie symulowanego obiektu i jego otoczenia ma podstawowe znaczenie dla symulatora lotu. Adekwatność modeli matematycznych, implementowanych w symulatorze, do rzeczywistych procesów i zjawisk stanowi podstawowy warunek uzyskania poprawnego symulatora lotu. Problemem zasadniczym jest tu identyfikacja modeli poszczególnych modułów symulowanego obiektu, ze względu na trudność ze zdobyciem wiarygodnych danych do ich weryfikacji. Omówimy najważniejsze moduły – modele wchodzące w skład symulatora lotu oraz problemy związane z ich tworzeniem.

Dynamika ruchu symulowanego obiektu. Obejmuje dynamikę lotu i ruchu po ziemi symulowanego samolotu lub śmigłowca. We współczesnych symulatorach lotu mamy do czynienia z modelami cyfrowymi realizowanymi przez komputery w czasie rzeczywistym. Model dynamiki ruchu utworzony jest zwykle przez układ równań różniczkowych zwyczajnych nieliniowych, często niestacjonarnych, uzupełnionych nieliniowymi równaniami algebraicznymi. Model ten powinien być rozwiązywany w czasie rzeczywistym z odpowiednią częstotliwością.

Podstawowe problemy z jakimi mamy tu do czynienia to:

- adekwatność przyjętych modeli matematycznych zjawisk fizycznych,
- odpowiednia metoda całkowania równań ruchu.

Problem adekwatności modeli fizycznych odnosi się przede wszystkim do modelu aerodynamiki. Na przykład [4] modelując ruch wirnika czteropłatowego śmigłowca jego stan wyznacza się z częstotliwością 200 Hz, co wymaga około 15 milionów operacji zmiennoprzecinkowych na sekundę. Także weryfikacja modelu aerodynamiki stanowi źródło najliczniejszych problemów, ze względu na dużą ilość danych niezbędnych do jego tworzenia.

Równania ruchu symulowanego obiektu tworzą układy równań o dużym rozrzucie wartości własnych i jako takie wymagają niezwykle wyrafinowanych metod ich rozwiązywania, a wymaganie czasu rzeczywistego i odpowiedniej częstotliwości uzyskania tych rozwiązań znacznie problem komplikuje.

Zespół napędowy. Ze względu na jego znaczenie dla wykonania symulowanego lotu modelowanie pracy zespołu napędowego stanowi osobne zagadnienie, choć siły i moment sił pochodzące od niego wchodzi w prawe strony równań dynamiki lotu.

Podstawowym problemem jest właściwe modelowanie zmian ciągu poszczególnych silników w zależności od: ich prędkości obrotowej, wysokości lotu, prędkości lotu i stanu automatyki sterującej pracą silnika. Źródłem danych są tu najczęściej badania stanowiskowe silników na hamowniach. Dla zastosowania modelu w symulatorze lotu typowe dane z prób hamownianych są na ogół niewystarczające. Powinny być one uzupełniane wynikami badań na rzeczywistym obiekcie w locie.

Z punktu widzenia metod numerycznych mamy tu do czynienia z zagadnieniami aproksymacji funkcji wielu zmiennych, stanowiącymi osobny problem.

Instalacje pokładowe. Moduł ten obejmuje modelowanie pracy instalacji pokładowych w warunkach normalnych i awaryjnych. W symulatorze samolotu TS-11 "Iskra" zamodelowano działanie następujących instalacji pokładowych: elektrycznej, hydraulicznej, pneumatycznej, tlenowej, wyposażenia radiowego, nawigacyjnego, uzbrojenia. Problem stanowią tu przede wszystkim:

- logika działania poszczególnych instalacji oraz ich wzajemnych zależności,
- praca instalacji w warunkach awaryjnych.

O awariach instalacji bardzo często nie istnieje inna informacja poza przewidywanym zachowaniem się instalacji. Informacje zarejestrowane podczas

rzeczywistych stanów awaryjnych rzadko są na tyle kompleksowe, aby wystarczyły do stworzenia pełnego modelu takiego stanu i do weryfikacji przyjętego modelu. Nawet w tak dobrze znanym samolocie jak TS-11 "Iskara" wiele stanów awaryjnych instalacji pokładowych nie było opisanych i udokumentowanych. Ich modele tworzone na drodze żmudnych analiz i weryfikowano w oparciu o wiedzę teoretyczną i wrywkowe doświadczenia pilotów, którzy spotkali się z niektórymi z nich w swojej praktyce.

Pewnym ułatwieniem w tworzeniu modeli pracy instalacji pokładowych jest fakt, że z punktu widzenia pilota w symulatorze istotne są jedynie objawy działania instalacji, to jest na przykład informacja na wskaźnikach, lampkach i ekranach o aktualnym stanie parametrów pracy instalacji albo dźwięki towarzyszące pracy instalacji lub jej symulowanej awarii. Jeżeli jednak awaria instalacji wpływa na inne moduły symulowanego obiektu, np. aerodynamikę, należy ten wpływ zamodelować. Niejednokrotnie stwarza to znaczne trudności z powodu braku jakichkolwiek danych empirycznych o modelowanych zjawiskach.

Kolejnym zagadnieniem jakie należy w tym przypadku uwzględnić jest dynamika samych wskaźników. Szczególnie istotna jest tu dynamika wskazań przyrządów pilotażowo-nawigacyjnych.

Otoczenie. Otoczenie wpływa na dynamikę lotu symulowanego obiektu poprzez gęstość powietrza, liczbę Macha, wiatr, turbulencje i inne zjawiska związane z przemieszczaniem się warstw powietrza. Oddziałuje także na zespół napędowy poprzez gęstość powietrza i temperaturę. Zjawiska atmosferyczne typu burzy z piorunami i błyskawicami wywołują dodatkowo u pilotów wrażenia wzrokowe i słuchowe. Mogą ponadto spowodować zmianę właściwości aerodynamicznych symulowanego obiektu, np. poprzez oblodzenie lub zmianę stanu otoczenia, jak np. przez zmianę współczynnika tarcia na pasie startowym.

Drugą grupą czynników należących do otoczenia a stwarzających problemy przy modelowaniu są obiekty znajdujące się w sąsiedztwie symulowanego samolotu lub śmigłowca. Obiekty te to zarówno elementy rzeźby terenu, jak i obiekty stworzone przez człowieka, a także niezależne od niego, jak na przykład ptaki. Wywołują one wrażenia wzrokowe u pilotów, a mogą także oddziaływać na symulowany obiekt. Na przykład, samolot przeciwnika może podjąć walkę z symulowanym samolotem, samochód jadący po pasie startowym może uszkodzić symulowany samolot, lecący ptak może spowodować uszkodzenie symulowanego samolotu.

Największe problemy napotyka się w tej dziedzinie w tworzeniu bazy danych opisującej konkretny teren. Istotną trudność stwarza tu konflikt pomie-

dzy dokładnością odwzorowania rzeczywistego terenu a objętością pamięci niezbędnej do jego zapisania i żadaną szybkością tworzenia na tej podstawie obrazów z wymaganą częstotliwością minimum 15 Hz, a zalecaną 40 lub 50 Hz. Przy dużej komplikacji prezentowanych obrazów mamy do czynienia z koniecznością zastosowania szybkich i kosztownych komputerów do przetworzenia danych i generowania żądanych obrazów. Muszą one być na tyle dokładne by można było na symulatorze realizować założone zadania. Właśnie te zadania zdeterminują stopień komplikacji stosowanych modeli i realizujących je komputerów. Inne wymagania bazy danych i komputerom będzie się stawiać dla ćwiczenia walki powietrznej a inne dla treningu nawigacji według reguł VFR, czy zwalczania celów naziemnych i powietrznych.

Sterowanie ruchem platformy symulatora. Celem jest uzyskanie takiego ruchu platformy symulatora, który wywoła u pilota wrażenie ruchu jak w rzeczywistym locie. Jest to jedno z bardziej skomplikowanych zagadnień w symulatorze lotu. Należy tu uwzględnić dynamikę reakcji na ruch przez różne receptory człowieka, dynamikę symulowanego obiektu i dynamikę symulatora. Zagadnienie to nie dotyczy jednak symulatora samolotu TS-11 "Iskra", który jest symulatorem nieruchomym. Szerzej zagadnienie to omówiono w [4].

Siły na organach sterowania. Stanowią one dla pilota jedno z podstawowych źródeł informacji o stanie lotu. Dlatego też istotna jest wysoka zgodność sił generowanych w symulatorze z siłami odczuwanymi przez pilota podczas rzeczywistego lotu. Przy czym nie tyle ważna jest wartość tych sił w danym momencie, co dynamika ich zmian. Jakość modeli matematycznych sił obciążających organy sterowania ma tu podstawowe znaczenie.

3.2. Problemy konstrukcyjne i technologiczne

Symulatory lotu należą do wyrobów o najbardziej zaawansowanych technologiach. Z tego względu w zasadzie wszystkie ich moduły stanowią w swoich dziedzinach elementy najbardziej wyrafinowane. Niemniej jednak zostaną tu zasygnalizowane pewne problemy o największym znaczeniu dla jakości symulatora.

Komputery. Problemem natury podstawowej jest dobór komputerów, które będą w stanie zrealizować w czasie rzeczywistym wszystkie obliczenia i wszystkie funkcje niezbędne do symulacji lotu na symulatorze. Obliczenia o jakich tu mówimy, to: realizacja wszystkich wymienionych powyżej modeli, wygenerowanie obrazów dla układu wizualizacji, transmisje wszyst-

kich niezbędnych danych i synchronizacja wszystkich procesów sterowania urządzeniami rzeczywistymi takimi, jak imitatory przyrządów w kabinie pilota, czy organy sterowania lotem symulowanego samolotu. Należy przy tym pamiętać o ograniczeniach budżetowych jakie zwykle towarzyszą doborowi komputerów.

Sterowniki i interfejsy. Muszą obsługiwać w czasie rzeczywistym wszystkie urządzenia imitujące pracę rzeczywistych wskaźników i systemów pokładowych, imitatory obciążeń organów sterowania, projektory i/lub monitory układu wizualizacji, układ ruchu platformy symulatora, układy pomiarowe symulatora, monitory i organy sterowania na stanowisku instruktora. Sprawą zasadniczą jest tu niezbędna wysoka niezawodność tych układów.

Układ prezentacji obrazów. Układ ten ma za zadanie wyświetlenie obrazów tworzonych przez generator obrazu. Ideałem byłby obraz otoczenia jaki widzi pilot przez szyby i peryskop w samolocie. Układy takie są obecnie eksploatowane, jednak ze względu na ich wysoką cenę (do około 10 mln USD) nie są zbyt rozpowszechnione. W większości symulatorów lotu stosuje się układy o kącie widzenia do 200° w poziomie i do 45° w pionie, chociaż w praktyce nawet takie pole widzenia nie jest niezbędne do szkolenia pilotów samolotów, a podnosi to cenę symulatora. W symulatorze samolotu TS-11 "Iskra" przeznaczonym do szkolenia podchorążych w szkole pilotów przyjęto kąt widzenia w poziomie 105° i w pionie 28°. Takie pole widzenia stanowiło optimum pomiędzy zastosowaniami symulatora a jego ceną.

Obraz prezentowany przez układ powinien być ciągły, nie zniekształcony i bez przebarwień. Musi wywoływać wrażenie przestrzenności i perspektywy. Jasność układu optycznego musi umożliwić symulację lotów o dowolnej porze roku i doby.

Stosuje się obecnie dwa rodzaje układów prezentacji obrazów:

- kolimacyjne,
- projekcyjne.

W układach kolimacyjnych obraz tworzony jest na ekranach monitorów i odpowiednio przetwarzany przez układ optyczny. Pilot w symulatorze widzi obraz powiększony, sprawiający wrażenie przestrzenności. Całe pole widzenia w symulatorze tworzone jest przez kilka modułów optycznych. Istotne jest by przerwy między nimi były niedostrzegalne dla pilota. Znaczne trudności technologiczne wiążą się z wyprodukowaniem odpowiedniej jakości zwierciadeł sferycznych i płaskich o wymiarach powyżej 1m. Zwierciadła te muszą być

ponadto pokryte specjalnymi powłokami półprzepuszczalnymi, przeciwodblaskowymi i ochronnymi.

W układach projekcyjnych obraz wytworzony w projektorach rzutuje się na ekrany płaskie, toroidalne lub sferyczne. Najbardziej skomplikowany układ tego typu ma ekran w kształcie kuli, w której umieszczony jest cały symulator. Średnica takiego ekranu sięga 12m. Zapewnia on pole widzenia z kabiny symulatora takie jak z kabiny rzeczywistego samolotu. Jest jednak bardzo kosztowny ze względu na cenę samego ekranu, specjalnych projektorów oraz budynku niezbędnego do jego zabudowy i eksploatacji.

4. Problemy eksploatacyjne

Istnieją tu dwie grupy problemów. Pierwsza, to typowe techniczne problemy eksploatacji urządzeń zawierających elementy elektroniczne, elektryczne, optyczne, mechaniczne precyzyjne, hydraulikę siłową i ciężkie elementy konstrukcji mechanicznych. Zagadnieniami tymi w niniejszym opracowaniu nie będziemy się zajmować, choć mogą stanowić one temat sam w sobie.

Ważniejsza wydaje się druga grupa problemów związanych z umiejętnym wprowadzeniem symulatorów lotu do procesu szkolenia personelu latającego i z oceną wyników ćwiczeń na symulatorze, stopnia wyszkolenia pilota oraz selekcją pilotów pod kątem ich wydolności i przydatności do zawodu pilota. Problemy te nie zostały w Polsce do chwili obecnej w pełni rozwiązane. Stanowiąc będą istotne bariery dla wprowadzenia symulatorów lotu do szkolenia pilotów i podniesienia efektywności tego procesu. Należy położyć szczególny nacisk na ich szybkie rozwiązanie, by na początku wprowadzania symulatorów do szkolenia nie zniechęciły użytkowników do ich wykorzystywania.

5. Zakończenie

Symulator lotu jest skomplikowanym systemem technicznym współpracującym z człowiekiem. Z tego względu *wszystkie* zasygnalizowane problemy symulacji lotu na symulatorze *muszą* być rozwiązane przynajmniej w zadowalającym stopniu, by móc mówić o symulatorze lotu jako urządzeniu przydatnym do

szkolenia pilotów. Rozwiązanie tylko niektórych z nich spowoduje niewykorzystanie nakładów poniesionych na rozwiązanie pozostałych. Tak jak w każdym systemie, symulator lotu i jego wykorzystanie w procesie szkolenia personelu latającego przyniesie tyle korzyści na ile pozwoli najsłabszy element tego systemu.

Literatura

1. *Leksykon naukowo-techniczny*, WNT, Warszawa 1984
2. MORAWSKI J., *Czynnik ludzki w lotnictwie*, XXXI Konferencja Bezpieczeństwa Lotów Lotnictwa Sił Zbrojnych RP, Warszawa 13.01.1994
3. ŁOMOW K.T. (RED), *Eksperymentalna psychologia lotnicza*, PWN, Warszawa 1984
4. SZCZEPAŃSKI C., *Symulatory lotu*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1990

Selected Problems of a Flight Simulation Performed on a Flight Simulator

Summary

The most important problems which are faced by producers and users of flight simulators, on the base of TS-11 "Iskra" jet trainer have been shown. They are grouped in three categories. The first one is connected with a man, his anatomy and physiology; the second one create hardware and software problems connected with designing of a flight simulator; the third one consists exploitation problems, including the proper usage of flight simulators in the training of flight personnel.

PROJEKT MODYFIKACJI UKŁADU STEROWANIA SAMOŁOTEM PZL M20 "MEWA"

czyli

Dydaktyczne latające laboratorium mechaniki lotu i pokładowych
systemów sterowania

ANDRZEJ TOMCZYK

Politechnika Rzeszowska

Ciągły postęp w technice lotniczej, a w szczególności w obszarze wyposażenia pokładowego i układów sterowania powoduje konieczność doskonalenia metod kształcenia studentów specjalności lotniczych. Rozważania teoretyczne oraz komputerowe symulacje nie są już wystarczające. Należy zaprezentować dynamiczne właściwości samolotu podczas rzeczywistego lotu pomiarowego.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono strukturę oraz podstawowe charakterystyki latającego laboratorium dydaktycznego opartego na samolocie PZL M20 "Mewa", w którym zmodyfikowano układ sterowania. Zastosowano metodę "sterowania wg modelu" dla uzyskania założonych charakterystyk pilotażowych oraz właściwości dynamicznych latającego symulatora lotu.

Praca zawiera projekt koncepcyjny modyfikacji układu sterowania, wybrane obliczenia projektowe oraz zasadnicze rozwiązania sprzętowe i programowe tej modyfikacji.

1. Wstęp

Proces kształcenia inżynierów zawiera dwa istotne elementy: etap nabywania wiedzy teoretycznej oraz etap jej weryfikacji. Drugi element tego procesu ma ważne znaczenie dla ukształtowania umiejętności praktycznego wykorzystania wiedzy absolwenta. Weryfikacja teorii może odbywać się na drodze eksperymentu myślowego (np. poprzez jej porównanie z inną, komplementarną teorią), poprzez wykonanie obliczeń (modelowanie matematyczne), wykorzystując symulację analogową lub cyfrową (modele symulacyjne), wreszcie wykonując odpowiednio zaplanowany eksperyment. Doświad-

czenie praktyczne ma tym większą wartość, im bardziej zbliżone jest do rzeczywistego zjawiska. Badania w tunelu aerodynamicznym są dobrym przybliżeniem zjawisk przepływowych, lecz nie pozwalają na odtworzenie w istotnym zakresie dynamicznych właściwości obiektu latającego. Symulatory lotu umożliwiają odwzorowanie wielu cech samolotu ważnych z punktu widzenia pilota i w pewnym zakresie mogą być pożyteczne w kształceniu inżynierów lotnictwa. Ale najbardziej wartościowe poznawczo są badania w locie obiektów rzeczywistych. Ze względu na cel dydaktyczny oraz koszty wykonania lotu samolot badawczy winien być odpowiednio przygotowany i wyposażony w taki sposób, aby możliwie efektywnie wykorzystać czas lotu.

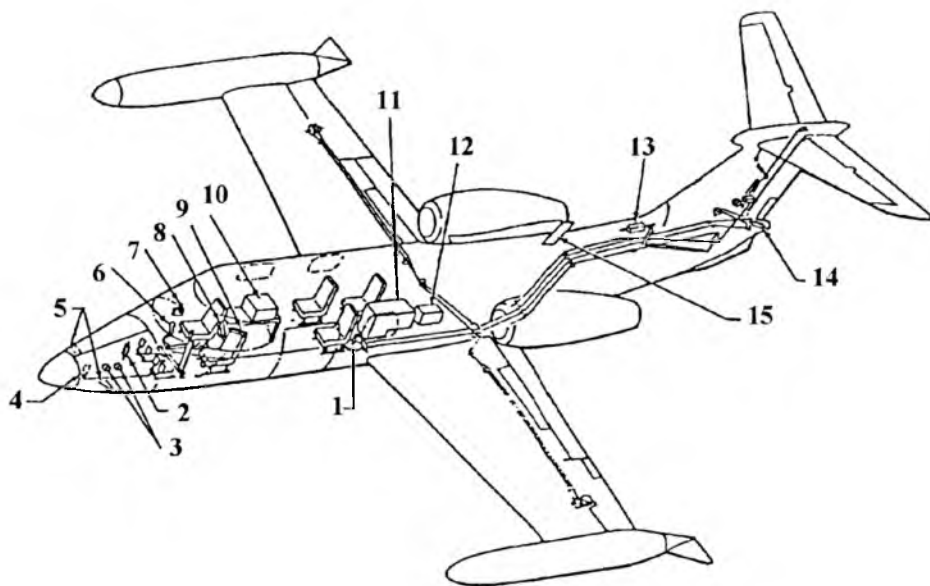
Niniejsza praca przedstawia propozycję modyfikacji wyposażenia pokładowego samolotu PZL M20 "Mewa", a w szczególności prezentuje koncepcję odległościowego układu sterowania samolotem, pozwalającego na prowadzenie w locie eksperymentów w zakresie mechaniki lotu, zasad automatycznego sterowania lotem oraz kształtowania właściwości pilotażowych samolotu.

2. Koncepcja dydaktycznego latającego laboratorium

Podstawową ideą prezentowanego projektu jest taka modyfikacja wyposażenia pokładowego samolotu PZL M20 "Mewa", aby możliwe było wykonywanie lotów pomiarowych z udziałem studentów specjalności lotniczych w celu weryfikacji teoretycznej wiedzy z zakresu mechaniki lotu, pokładowych systemów sterowania i wyposażenia pokładowego. W stacjonarnych laboratoriach dydaktycznych nie można odtworzyć wielu zjawisk zachodzących podczas lotu, np. eksperyment w tunelu aerodynamicznym modeluje tylko niektóre właściwości statku powietrznego, a laboratoryjne modele układów sterowania nie mogą z powodów oczywistych sterować rzeczywistym obiektem. Właściwości pilotażowe samolotu można w sposób zbliżony do doskonałego modelować w bardzo kosztownych lotniczych symulatorach o wielu stopniach swobody, ale niezależnie od stopnia realizmu symulacji, jest to tylko matematyczne modelowanie zjawisk fizycznych. Istotą latającego laboratorium jest możliwość obserwacji i rejestracji przebiegu *rzeczywistych* zjawisk, a modyfikacja wyposażenia pokładowego samolotu pozwala na poznanie szerokiego przedziału właściwości samolotu, w tym wykraczających poza typowe zakresy użytkowania.

Latające symulatory lotu (ang. TIFS – Total in-Flight Simulator) stosowane były w USA już od 1950 roku do symulacji właściwości nowo projektowanych samolotów, łącznie wykorzystano ponad 100 samolotów tego

rodzaju [14]. Najczęściej samoloty badawcze budowane są na bazie istniejących konstrukcji, a ich właściwości i zakres symulacji są dostosowane do stawianych zadań. Typowym przykładem są samoloty o dowolnie modyfikowanych właściwościach pilotażowych (ang. VISTA – The Variable Stability In-Flight Test Aircraft) [6], stosowane w badaniach i do szkolenia pilotów doświadczalnych. W ostatnich latach poświęcono sporo uwagi symulacji w locie właściwości dynamicznych samolotu F-16 w związku z syntezą odległościowego układu sterowania dla tego samolotu [4,7]. Część latających symulatorów dostosowana jest w sposób szczególny do zadań dydaktycznych. Przykładem samolotu treningowego o zmiennych właściwościach pilotażowych jest modyfikacja samolotu "Learjet 25B" opracowana przez korporację Arvin/Calspan [2,5].



Rys. 1. Specjalistyczny układ sterowania modyfikowanego samolotu "Learjet 25B".
Oznaczenia: 1 – mechanizm wykonawczy lotek, 2 – symulacja siły steru kierunku, 3 – przetworniki danych aerodynamicznych, 4 – czujnik kąta ślizgu, 5 – czujniki kąta natarcia, 6 – drążek sterowy, 7 – ministerownica boczna, 8 – symulacja siły sterowania lotkami, 9 – symulacja siły od steru wysokości, 10 – pulpit komputera pokładowego, 11 – blok elektroniczny układu zmiennej stabilności (VSS), 12 – blok elektroniczny konfiguracji układu sterowania, 13 – mechanizm wykonawczy steru wysokości, 14 – mechanizm wykonawczy steru kierunku, 15 – antena UHF

Rys.1 przedstawia rozmieszczenie głównych elementów specjalnie zaprojektowanego odległościowego systemu ręcznego sterowania samolotem. Układ zawiera centralny drążek sterowy oraz ministerownicę boczną, które wyposażone

są w układy symulacji sil na sterownicach. Komputer pokładowy pozwala na modelowanie właściwości dowolnego realnego samolotu lub innego obiektu o założonych charakterystykach dynamicznych.

Podobne latające symulatory budowane są również w Europie, m.in. kilka samolotów badawczych używanych jest w Niemczech [9]. Niektóre wyższe uczelnie lotnicze wyposażone są w dydaktyczne samoloty badawcze, np. Uniwersytet Techniczny w Delft [10,12] oraz Uniwersytet w Cranfield [8,21]. Samoloty te przystosowane są do prowadzenia zajęć z kilkusobową grupą studentów podczas lotu pomiarowego, przy czynnym udziale studentów w przygotowaniu i realizacji eksperymentu. Wydział Lotniczy Uniwersytetu w Cranfield na dwóch samolotach "Jetstream 100" przeprowadza zajęcia z grupą ok. 600 słuchaczy w ciągu roku.

Rys.2 obrazuje uproszczony schemat pokładowej sieci komputerowej służącej do przetwarzania, monitorowania i gromadzenia informacji podczas lotu oraz typowe przykłady wizualizacji parametrów lotu pomiarowego na monitorach pokładowych.

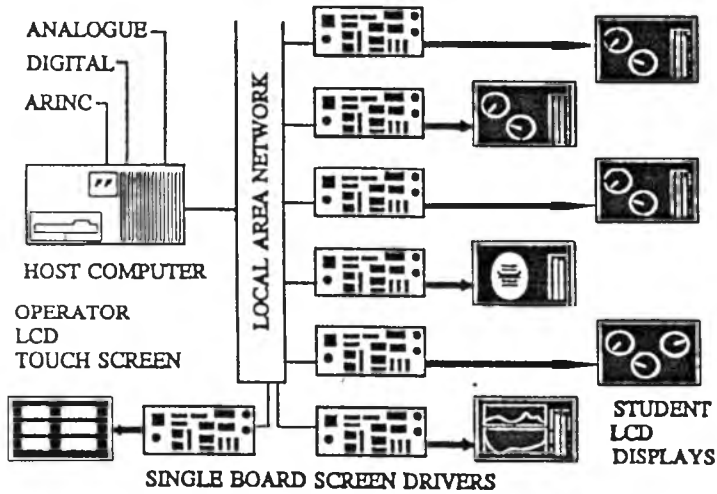
Analizując właściwości latających symulatorów stosowanych w działalności dydaktycznej uniwersytetów lotniczych oraz uwzględniając krajowe możliwości zbudowania samolotu badawczego, zespół Zakładu Systemów Sterowania Politechniki Rzeszowskiej przedstawia poniższą propozycję modyfikacji wyposażenia pokładowego samolotu PZL M20 "Mewa".

Przyjęto podstawowe założenie, aby dokonać jedynie zmian niezbędnych dla realizacji zadań dydaktycznych. Projekt przewiduje zastosowanie dodatkowych elementów pomiarowych, specjalistycznego odległościowego układu sterowania samolotem umożliwiającego sterowanie ręczne oraz automatyczne, a także zabudowę cyfrowego systemu przetwarzania i gromadzenia danych pomiarowych, nie przewiduje się żadnych zmian w konstrukcji płatowca. Zakłada się, że wszystkie manewry wykonywane będą z prędkością mniejszą od prędkości ewolucyjnej, a więc nie zachodzi obawa uszkodzenia płatowca nawet w przypadku krytycznej niesprawności układu sterowania. Przewiduje się zastosowanie "otwartej" struktury sprzętowej i programowej umożliwiającej dalszy rozwój systemu.

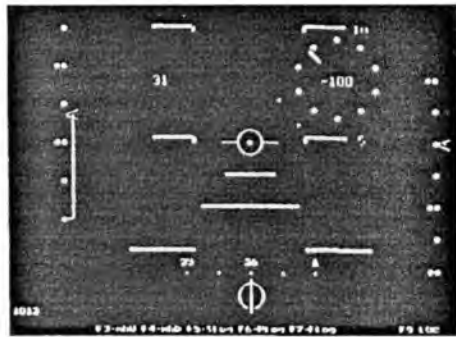
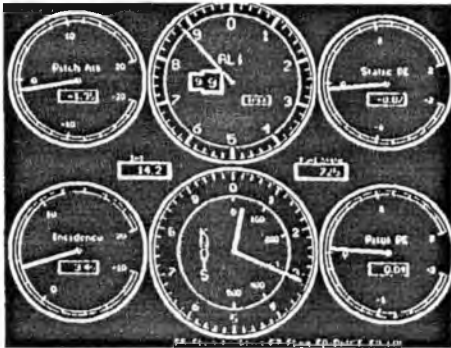
Latające laboratorium dydaktyczne będzie mogło być wykorzystane do wykonania następujących ćwiczeń (eksperymentów):

- pomiar osiągow silniczków samolotu, określenie stanów równowagi, wpływ konfiguracji samolotu na jego osiągi, itp.,
- określenie podstawowych parametrów stateczności statycznej i sterowności samolotu w ruchu symetrycznym i boczny,

CITATION II



Flying Classroom Instrumentation System structure



Rys. 2. Schemat pokładowej sieci komputerowej zastosowanej w samolocie "Cessna Citation II" Uniwersytetu w Delft [12] oraz przykład obrazów generowanych na ekranach pokładowych samolotu "Jetstream 100" Uniwersytetu w Cranfield ([21], u dołu)

- identyfikacja charakterystyk dynamicznych samolotu i jego matematycznego modelu,
- badanie jakości sterowania automatycznego dla różnych praw sterowania oraz różnych właściwościach elementów tego układu (np. czujników pomiarowych, mechanizmów wykonawczych, itp.),
- ocena funkcjonalności dyrektywnych wskaźników pilotażowych działających wg zadanych praw skalowania,
- odległościowe ręczne sterowanie samolotem przy pomocy ministerownicy bocznej, działającej wg założonych praw sterowania,
- modelowanie i ocena właściwości samolotu opisanego założonym modelem matematycznym (np. zachowanie się samolotu niestatecznego statycznie lub dynamicznie),
- ocena właściwości pilotażowych modelowanego samolotu wg umownej skali Coopera-Harpera lub na podstawie pomierzonych parametrów ruchu samolotu.

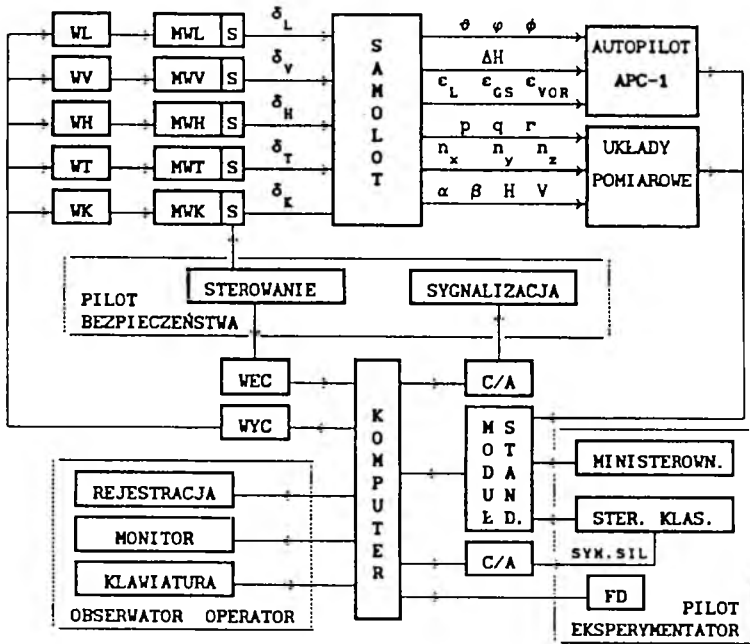
Wymienione powyżej zadania będą mogły być poszerzone o badania właściwości samolotu pilotowanego przy pomocy sterownicy klasycznej, jeśli zastosowany zostanie dodatkowy układ symulacji sił na sterownicy. Rozwiązanie takie wymaga ingerencji w podstawowy układ sterowania samolotem "Mewa" i będzie celowe, jeśli funkcje samolotu poszerzone zostaną o zadania badawcze.

3. Projekt układu sterowania

Najważniejszym systemem samolotu PZL M20 "Mewa" podlegającym modyfikacji jest układ sterowania samolotem. Przyjęto założenie, że wykorzystane będą elementy i zespoły cyfrowego autopilota APC-1P stosowanego w tym samolocie [16,17], co pozwoli uniknąć wprowadzania jakichkolwiek zmian w konstrukcji płatowca. Zabudowa komputera, dodatkowych czujników pomiarowych oraz elementów sterujących i sygnalizacyjnych nie będzie miała wpływu na cechy użytkowe samolotu.

3.1. Projekt sprzętowy

Podstawowe rozwiązania zmodyfikowanego układu sterowania samolotem ilustruje schemat blokowy na rys.3.



Rys. 3. Schemat blokowy pokładowego komputerowego systemu sterowania samolotem oraz przetwarzania i gromadzenia danych pomiarowych

Centralnym elementem układu jest komputer pokładowy współpracujący z autopilotem APC-1P i wyposażony w szereg specjalistycznych modułów wejścia/wyjścia zapewniających integrację systemu. Organy sterowania samolotem wychylane są przez mechanizmy wykonawcze (MW_x , gdzie x oznacza odpowiednio sterowanie w kanale lotek L , steru kierunku V , steru wysokości H , trymera steru wysokości T) oraz opcjonalnie mechanizm wychylający kłapy woporowe K dla uzyskania możliwości bezpośredniego sterowania siłą nośną). Mechanizmy wykonawcze wyposażone są w nadmiarowe sprzęgła bezpieczeństwa ograniczające wielkość przekazywanego momentu (pilot może zawsze wychylić sterownicę, niezależnie od działania automatu) oraz elektromagnetyczne sprzęgła S odłączające mechanizm napędowy od układu sterowania na każde polecenie pilota bezpieczeństwa nadzorującego przebieg lotu. Mechanizmy wykonawcze zasilane są ze wzmacniaczy mocy W_x , które dekodują

sygnały sterujące generowane przez komputer i transmitowane poprzez moduł wyjść cyfrowych WYC. Podstawowe parametry lotu mierzone są przy pomocy przyrządów pokładowych współpracujących z autopilotem (sztuczny horyzont, giroskopowy wskaźnik kursu, odbiorniki VOR/ILS oraz korektor wysokości mierzący odchyłkę wysokości barometrycznej od wartości początkowej) i przetwarzane w zespołach autopilota na postać dogodną do transmisji. Dodatkowo przewiduje się zastosowanie zespołu czujników mierzących parametry aerodynamiczne (prędkość i wysokość lotu oraz kąty natarcia i ślizgu) oraz parametry kinematyczne ruchu (prędkości kątowe ruchu oraz przyspieszenia liniowe względem trzech osi układu związanego z samolotem). Moduł standaryzacji dostosowuje sygnały wyjściowe czujników do wymagań kart wejściowych komputera, w szczególności zawiera przetworniki analogowo-cyfrowe.

Pilot-eksperymentator wykonujący lot pomiarowy może włączyć sterowanie automatyczne lub sterować samolotem ręcznie przy pomocy ministerownicy bocznej, za pośrednictwem komputera sterującego oraz ewentualnie wykorzystując wskazania dyrektywnego wskaźnika pilotażowego *FD*. Sterownica klasyczna (wolant lub centralny dźwążek sterowy) może być opcjonalnie zabudowana pod warunkiem zastosowania układu symulacji sił co przewiduje się do realizacji w dalszej kolejności. Przebieg lotu nadzoruje pilot bezpieczeństwa, który posiada wszystkie informacje o aktualnym stanie systemu (SYGNALIZACJA), ustala mod pracy i parametry układu sterowania oraz ma możliwość bezzwłocznej ingerencji w przebieg lotu (STEROWANIE), m.in. poprzez natychmiastowe odłączenie sprzęgieł mechanizmów wykonawczych i przejęcie sterowania samolotem przy pomocy klasycznego mechanicznego układu sterowania. Obserwatorzy (studenci) podczas lotu dysponują monitorem (ze względu na wielkość kabiny i układ foteli możliwa jest jednoczesna obecność 4 pasażerów, którzy mogą obserwować jeden monitor) oraz klawiaturą, co pozwala na bieżące monitorowanie przebiegu lotu oraz umożliwia modyfikację sparametryzowanych programów obliczeniowych i sterujących. Wszystkie dane pomiarowe rejestrowane są w sposób ciągły w celu poddania ich późniejszej szczegółowej analizie po zakończeniu lotu pomiarowego.

Uzyskanie założonych właściwości funkcjonalnych latającego laboratorium możliwe będzie pod warunkiem zastosowania zespołów o odpowiednich parametrach. Poniżej zestawiono podstawowe wymagania dotyczące najważniejszych elementów systemu:

- komputer sterujący klasy IBM 386/486 (laptop) z barwnym monitorem ciekło-kryształicznym wyposażony w specjalizowane moduły wejścia/wyjścia, w tym porty transmisji szeregowej i równoległej,

- moduł standaryzacji i przetwarzania sygnałów (w tym przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe) zapewniające co najmniej 10-bitową dokładność transmisji danych; zakłada się stosowanie typowych protokołów transmisji RS-232/432 oraz lotniczych standardów ARINC 429/629,
- układy pomiarowe powinny zapewnić pomiar położenia kąowego samolotu oraz wychylenia organów sterowania z dokładnością 0.1° , prędkości kąowych z dokładnością $0.05^\circ/\text{s}$, przyspieszeń liniowych (błąd $< 0.1 \text{ m/s}^2$), prędkości lotu z dokładnością 0.5 m/s oraz pomiar barometrycznej wysokości lotu z dokładnością rzędu 10 m ,
- mechanizmy wykonawcze (elektromechanizmy) powinny zapewnić wychylenie płaszczyzn sterowych z prędkością większą od $100^\circ/\text{s}$ przy stałej czasowej inercji mniejszej od 0.1 s ; konieczny jest pomiar położenia kąowego w celu realizacji różnych wariantów sprzężeń zwrotnych (pozycyjne, prędkościowe),
- ministerownica boczna powinna posiadać możliwość regulacji wielkości sił niezbędnych do jej wychylania.

3.2. Projekt oprogramowania

O rzeczywistych charakterystykach użytkowych latającego laboratorium decydować będzie jakość oprogramowania komputera pokładowego.

Do najważniejszych właściwości projektowanego oprogramowania należy zaliczyć:

- realizacja obliczeń w czasie rzeczywistym, w szczególności konieczność repetycji obliczeń sterujących z częstotliwością min. 20 razy na sekundę,
- współpraca ze specjalizowanymi układami wejścia/wyjścia z wykorzystaniem wektora przerwań procesora; w szczególności najwyższy priorytet przerwań wykorzystany jest do awaryjnego odłączenia mechanizmów wykonawczych od układu sterowania samolotem,
- zapewnienie wysokiej niezawodności działania algorytmów sterowania, poprzez rozbudowę programów diagnostycznych, nadzorujących oraz procedur obsługi działań awaryjnych,
- generowanie sygnalizacji i ostrzeżeń oraz graficznej prezentacji parametrów lotu na ekranie monitora,

- gromadzenie danych w pamięci masowej komputera z okresowym kopiowaniem jej na magnetyczne nośniki informacji.

W projektowaniu oprogramowania wykorzystane będą już wcześniej opracowane procedury [16] oraz praktyczne doświadczenia zgromadzone podczas budowy i badań cyfrowego autopilota APC-1P [17]. Opracowano praktyczne metody diagnostyki cyfrowych układów sterowania [3] oraz procedury podnoszące poziom bezpieczeństwa stosowania złożonych pokładowych systemów sterowania [19].

4. Wybrane obliczenia projektowe

Z punktu widzenia stopnia złożoności funkcji realizowanych przez latające laboratorium najistotniejsze są procedury generujące sterowanie samolotem w taki sposób, aby uzyskać założone właściwości samolotu jako obiektu dynamicznego. Ze względu na uzyskiwane rezultaty wyróżnić możemy dwie grupy algorytmów sterujących:

- modyfikacja charakterystyk dynamicznych samolotu poprzez stosowanie dodatkowych sprzężeń zwrotnych i filtrów formujących w układzie sterowania,
- uzyskanie właściwości dynamicznych samolotu badawczego prawie identycznych z modelem opisującym dynamikę dowolnego samolotu.

Pierwszy sposób postępowania przedstawiony jest w pracy [20] i nie będzie tutaj omawiany. W drugim przypadku należy zastosować takie sterowanie adaptacyjne, aby reakcja rzeczywistego samolotu była zgodna z założonym modelem (sterowanie wg modelu, ang. MRAS – Model-Reference Adaptive System [1,15]). W niniejszej pracy wykorzystano tzw. bezpośrednie sterowanie wg modelu, które prowadzi do poszukiwania wektora współczynników \mathbf{P} na drodze minimalizacji funkcji kosztu $I(\mathbf{P})$ dla skończonego horyzontu obserwacji T .

Dla zlinearyzowanej wersji opisu modelowanego obiektu, samolotu i układu sterowania, zadanie sterowania wg modelu można zapisać w postaci związków:

— model:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{M}x + \mathbf{N}u \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{y} = \mathbf{D}x \quad (4.1)$$

— samolot:

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{A}z + \mathbf{B}\delta \quad z(0) = z_0 \quad \mathbf{v} = \mathbf{C}z \quad (4.2)$$

— układ sterowania:

$$\frac{d\delta}{dt} = \mathbf{E}\delta + \mathbf{K}u + \mathbf{L}e \quad \delta(0) = \delta_0 \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{v} \quad (4.3)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}(t)$ – wektor stanu modelowanego obiektu,
- $\mathbf{z}(t)$ – wektor stanu samolotu sterowanego wg modelu,
- $\delta(t)$ – wektor sygnałów sterujących samolotem (wychylenie płaszczyzn sterowych),
- $\mathbf{u}(t)$ – zadane sterowanie modelowe (wymuszenie zewnętrzne),
- $\mathbf{y}(t)$ – wektor sygnałów wyjściowych modelu,
- $\mathbf{v}(t)$ – wektor sygnałów wyjściowych samolotu,
- $\mathbf{e}(t)$ – wektor błędów sterowania samolotem.

Jakość sterowania wg modelu oceniana jest przy pomocy funkcji kosztu dla skończonego horyzontu obserwacji T :

$$I_T = \int_0^T (\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \delta^T \mathbf{R} \delta) dt \quad (4.4)$$

Macierz współczynników $\mathbf{P} = [\mathbf{K} \ \mathbf{L}]$ opisujących sterowanie wg modelu obliczana jest na drodze bezpośredniej minimalizacji funkcjonu (4.4) przy uwzględnieniu ograniczeń wynikających z technicznej realizacji układu sterowania:

$$\mathbf{P}_{opt} \Leftrightarrow \min_{\mathbf{P}} \{I_T\}$$

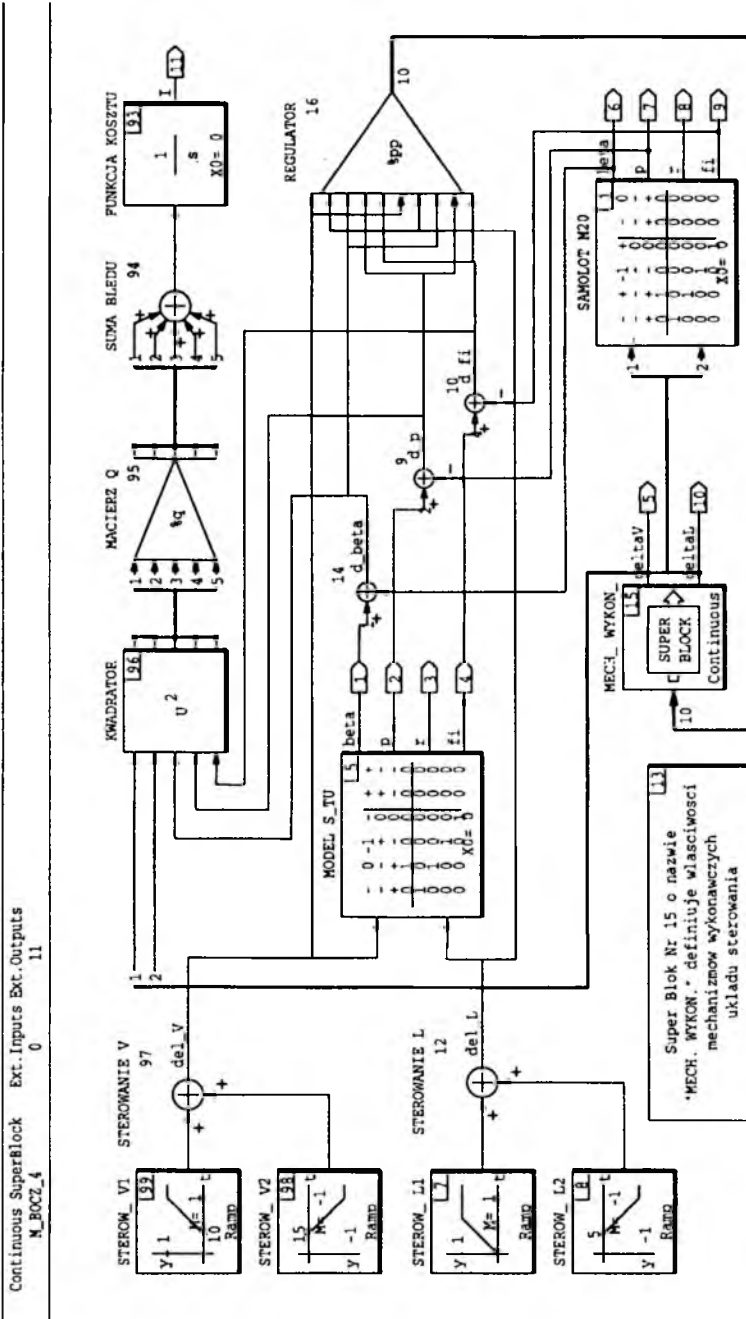
- $\mathbf{P} \in (\mathbf{P}_{min}, \mathbf{P}_{max})$ – ograniczenie wartości współczynników,
- $\text{real}(\lambda_i) < 0$ – warunek stabilności zamkniętego systemu: samolot-układ sterowania,

gdzie λ_i – wartości własne macierzy stanu \mathbf{S} zamkniętego układu sterowania wynikającej z przekształceń wzorów (4.1) ÷ (4.3):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Obliczenia wartości funkcji kosztu I_T można dokonać dla niezerowych warunków początkowych w równaniach (4.1) ÷ (4.3) (będzie to przypadek stabilizacji stanu) lub dla założonego sterowania $\mathbf{u}(t)$ co odpowiada zagadnieniu

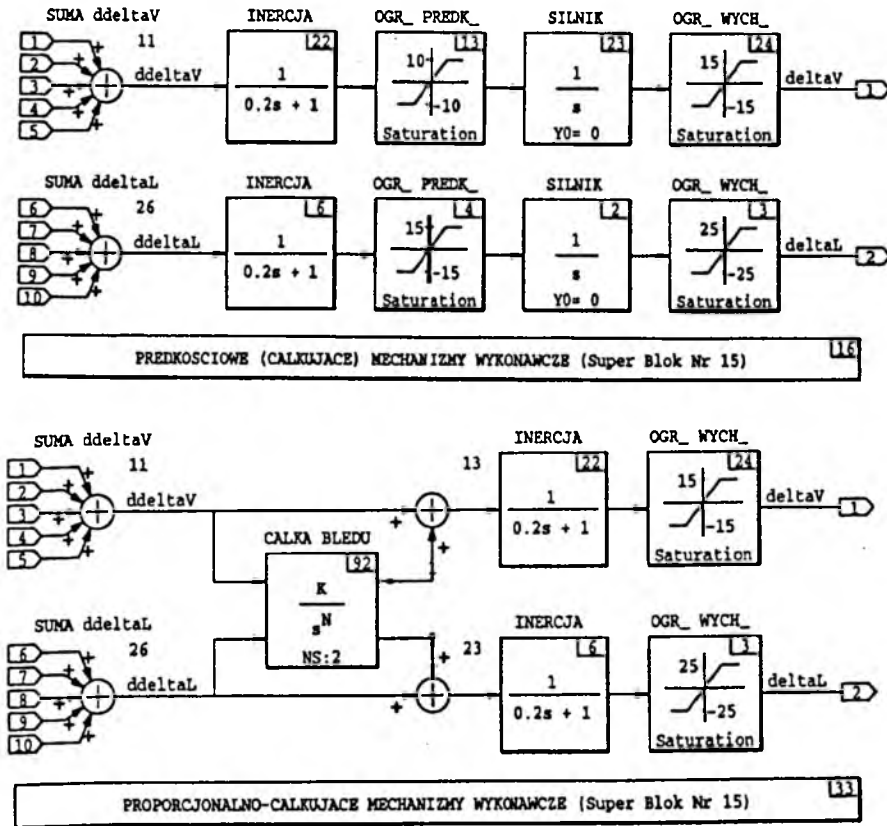
12-DEC-94



Rys. 4. Schemat obliczeń projektowych w celu syntezy sterowania samolotem badawczym zgodnie z zasadą "sterowania wg modelu"

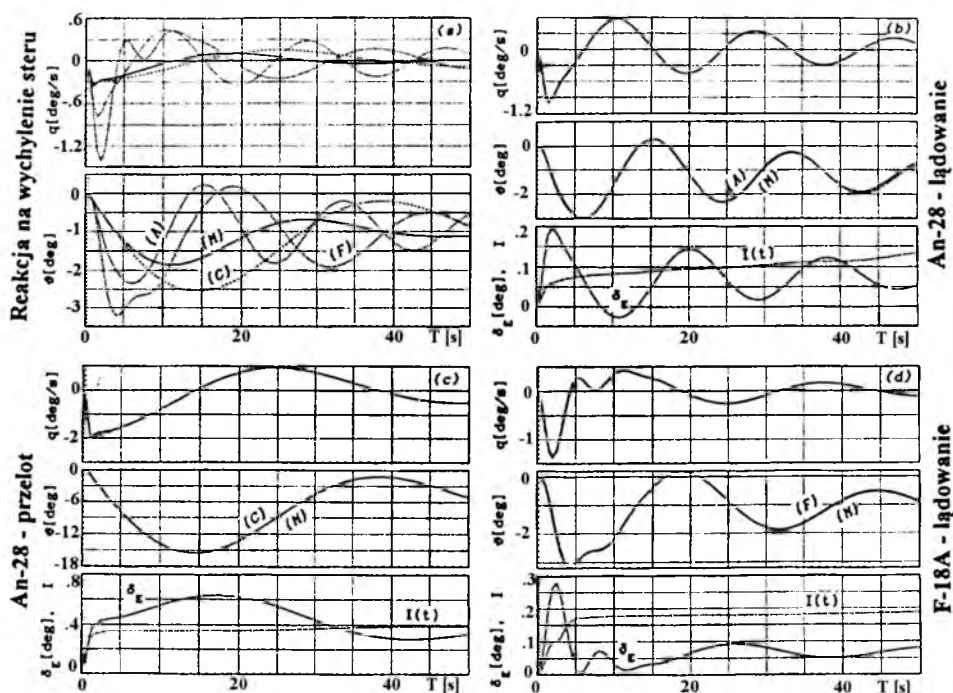
nadążania. W omawianym problemie sterowania wg modelu wykorzystane zostanie zdeterminowane sterowanie $u(t)$ polegające na programowym wychylaniu sterów aerodynamicznych samolotu modelowanego wzorem (4.1).

Zasadę bezpośredniego sterowania wg modelu oraz sposób realizacji obliczeń projektowych ilustruje rys.4 na przykładzie bocznego ruchu samolotu.



Rys. 5. Schematy blokowe mechanizmów wykonawczych układu sterowania

Istotą sterowania wg modelu jest wybór takich właściwości układu sterowania latającego laboratorium (blok 1) reprezentowanych przez wektor współczynników wzmocnienia PP regulatora (blok 16), aby minimalizować różnicę pomiędzy sygnałami wyjściowymi rzeczywistego samolotu a reakcją matematycznego modelu dowolnego obiektu latającego (blok 5) na identyczne wychylenie organów sterowania. Z punktu widzenia pilota sterującego samolotem badawczym będzie on miał właściwości modelowanego obiektu. W programie obliczeniowym realizowanym przy pomocy pakietu MATRIXx [11]



Rys. 6. Porównanie reakcji latającego laboratorium M20 "Mewa" (krzywe {M}) na wychylenie steru wysokości z wyłączonym układem sterowania "wg modelu" (rys.a) oraz z działającym układem sterującym wg modelu samolotu An-28 (rys.b - $V = 35.8$ m/s, $H = 0$ - krzywe {A} oraz rys.c - $V = 106.4$ m/s, $H = 3$ km - krzywe {C}) i samolotu F-18A (rys.d - $V = 68$ m/s, $H = 0$ - krzywe {F})

wychylenie lotek (bloki 7 i 8) oraz steru kierunku (bloki 98 i 99) opisano trapezowym sygnałem o czasie narastania i spadku równym 1 sek i jednostkowej wartości ustalonej trwającej 4 sek. Kwadraty sygnałów sterujących (δ_{L} i δ_{V}) oraz różnic sygnałów wyjściowych (d_{β} , d_p i d_{fi}) mnożone są przez współczynniki wagi macierzy Q (w bloku 95 symbol $\%Q$ oznacza macierz blokową składającą się z macierzy Q i R występujących we wzorze (4.4)) i po scałkowaniu (blok 93) reprezentują wartość funkcji kosztów sterowania $I(t)$. Optymalnych współczynników wzmocnienia regulatora (16) poszukuje się poprzez minimalizację funkcji kosztu dla skończonego przedziału obserwacji T , tj. $\text{optimum}(PP) \Leftrightarrow \min\{I(T)\}$ (w obliczeniach przyjęto $T = 20$ sek, a symbol $\%PP$ oznacza macierz blokową zawierającą macierze K i L). Istotny wpływ na wybór współczynników wzmocnienia oraz końcowe efekty sterowania posiadają właściwości mechanizmów wykonawczych wychylających płaszczyzny sterowe

(super-blok 15). Dwie wersje realizacji mechanizmów wykonawczych przedstawiono na rys.5.

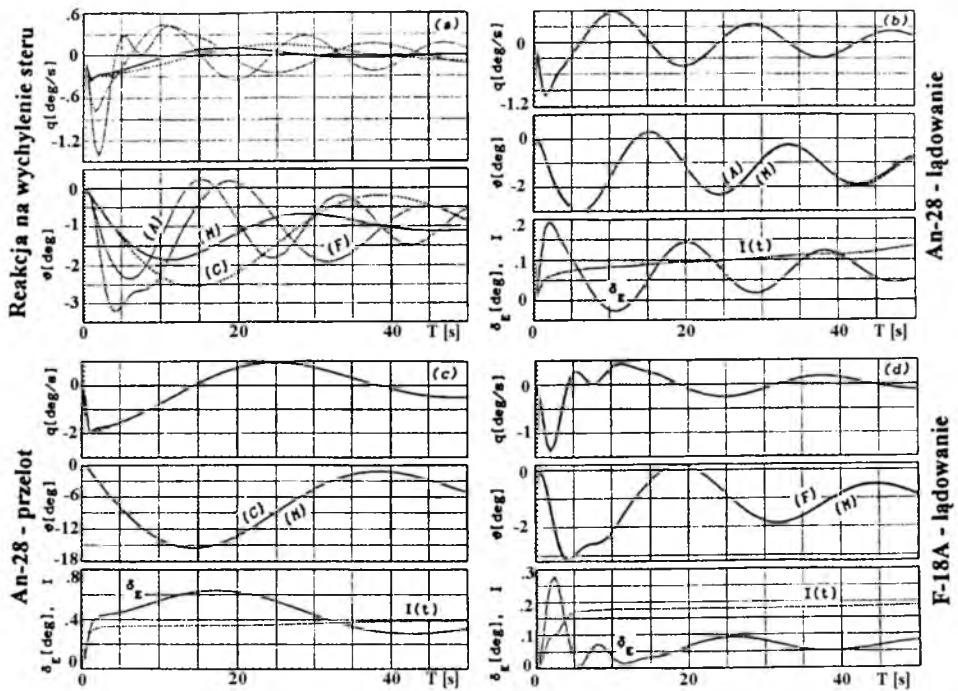
W opracowaniu [18] przedstawiono wyniki symulacji podłużnego ruchu samolotu badawczego dla przypadku bezinercyjnych (idealnych) mechanizmów wykonawczych; rys.6 prezentuje wyniki symulacji uwzględniającej całkujące właściwości mechanizmów wykonawczych stosowanych w autopilocie APC-1P, inercję elektromechanizmów oraz ograniczenia prędkości i kątów wychylenia sterów aerodynamicznych. Obserwować można bardzo dobrą zgodność reakcji na wychylenie steru wysokości δ_E latającego laboratorium i modelowanych samolotów An-28 i F18A.

Bardziej złożona dynamika samolotów w ruchu bocznym powoduje, że sterowanie wg modelu w niektórych przypadkach nie zapewnia "idealnej" zgodności reakcji latającego laboratorium i modelowanego samolotu.

Rys.7 przedstawia wyniki symulacji dla samolotu An-28 (lewa kolumna) z zastosowaniem całkującego (prędkościowego) mechanizmu wykonawczego. Bardzo dobrą zgodność uzyskano dla małej prędkości lotu, natomiast dla konfiguracji przelotowej kąt ślizgu β oraz prędkość kątowna przechylenia p różnią się w sposób widoczny. Jakość sterowania można poprawić zmieniając właściwości mechanizmu wykonawczego na proporcjonalno-całkujące (ster. PI), co obrazuje porównanie wyników symulacji dla samolotu F-4 (prawa kolumna na rys.7). W tym przypadku dobierane są współczynniki proporcjonalności PP (blok 16) i współczynniki akcji całkującej K (blok 92). Dalszą praktyczną poprawę jakości sterowania wg modelu uzyskać można modyfikując macierz wagową Q , która dobierana jest w sposób arbitralny.

5. Uwagi końcowe

Edukacja inżynierów lotnictwa wymaga stosowania efektywnych pomocy dydaktycznych. Latające laboratorium mechaniki lotu, wyposażenia pokładowego i pokładowych systemów sterowania bazujące na będącym w dyspozycji Politechniki Rzeszowskiej samolocie PZL M20 "Mewa" byłoby pierwszym tego typu w kraju. Dotychczasowe doświadczenia praktyczne zespołu Zakładu Systemów Sterowania PRz oraz wykonane obliczenia i symulacje komputerowe pozwalają ocenić, że realizacja prezentowanego projektu jest możliwa i nie wiąże się z nadmiernymi kosztami. Korzyści ze stosowania w dydaktyce *rzeczywistego* samolotu wykonującego *rzeczywiste* loty pomiarowe, dysponującego możliwością modyfikacji jego charakterystyk dynamicznych w szerokim zakresie, jest oczywista. Niestety, często absolwent lotniczego wydziału nie miał



Rys. 7. Symulacja reakcji modelowanego samolotu (linia ciągła) oraz latającego laboratorium (linia przerywana) na trapezowe wychylenie lotek i następnie steru kierunku (δ_e i δ_L oznaczają wychylenia płaszczyzn sterowych samolotu badawczego)

możliwości wykonania lotu nawet w charakterze pasażera. Istotną pomocą stanowią tutaj symulatory lotu, ale jak wspomniano wcześniej, fundamentalną wartością eksperymentu jest jego realizm (patrz np. [13]). Przewodzący w Europie uniwersytety lotnicze (np. w Delft i Cranfield) od lat stosują latające laboratoria jako istotny element inżynierskiej edukacji.

Rozwinięciem idei zbudowania latającego laboratorium dydaktycznego jest projekt samolotu badawczego przeznaczonego do prowadzenia badań i szkolenia pilotów doświadczalnych [20]. Również to zadanie jest całkowicie realne; jeśli mamy poważnie traktować perspektywę istnienia i rozwoju przemysłu lotniczego opracowanie takiego samolotu (lub samolotów) jest konieczne.

6. Literatura

1. ASTROM, K.J., WITTENMARK B., 1989, *Adaptive Control*, Addison-Wesley Publishing Company
2. DEPPE P.R., 1991, *Flight Testing of the Calspan Variable Stability Learjet 25 In-Flight Simulator*, AIAA-91-2915-CP, The Flight Simulation Technologies Conference, New Orleans, 1-6
3. DOŁĘGA B., 1993, *Wybrane aspekty rozwiązań programowych zastosowane w autopilocie dla samolotów lokalnej komunikacji*, Prace Instytutu Lotnictwa Nr 134, Warszawa, 47-56
4. DUNBAR M.V., DARGAN J.L., 1989, *VISTA/F-16 Design Features*, AIAA-89-3330-CP, The Flight Simulation Technologies Conference and Exhibition, Boston, 452-461
5. FIELD E., 1993, *Report on a Visit to the Arvin/Calspan Corporation*, College of Aeronautics Report No 9305, Cranfield Institute of Technology
6. FREARSON D.E., REYNOLDS P.A., 1991, *VISTA: An Essential Tool for the Future*, AIAA-91-2918-CP, The Flight Simulation Technologies Conference, New Orleans, 37-43
7. GOVINDARAJ K.S., NGUYEN B., 1991, *The VISTA/F-16 Simulation Capabilities*, AIAA-91-2919-CP, The Flight Simulation Technologies Conference, New Orleans, 44-55
8. HOPKINS II., 1993, *Testing Ideas*, Flight International, 6-12 October, 30-31
9. JEZIORSKI A., 1994, *Realistic Research*, Flight International, 25-31 May, 49-50
10. KRUIJSEN E.A.C., MULDER J.A., 1991, *The Advanced Automatic Flight Control System Project*, Memorandum LR-653, Technische Universiteit Delft
11. MATRIXx. *User's Guide for Version 3.0*, Integration System Inc., Santa Clara, 1992
12. MULDER J.A., KRUIJSEN E.A.C., 1994, *In-Flight Student Exercises with the DUT Citation II*, Technische Universiteit Delft
13. REYNOLDS P.A., GAWRON V.J., 1990, *When In-Flight Simulation is Necessary*, AIAA-90-2918-CP, AIAA Flight Simulation Technologies Conference and Exhibition, Dayton, 71-77
14. SHAFER M.F., 1991, *In-Flight Simulation at the NASA Dryden Flight Research Facility*, AIAA-91-2916-CP, The Flight Simulation Technologies Conference, New Orleans, 7-23
15. STEVENS B.L., LEVIS F.L., 1992, *Aircraft Control and Simulation*, John Wiley
16. TOMCZYK A., 1993, *Układ automatycznego sterowania dla samolotów lokalnej komunikacji*, Prace Instytutu Lotnictwa, 134, Warszawa, 3-46
17. TOMCZYK A., DZIEDZIC T., 1993, *Some Results of the APC-1P Digital Autopilot Flight Tests*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 31, 3, Warszawa, 601-619

18. TOMCZYK A., 1994, *Symulacja w locie dynamicznych właściwości obiektów latających*, VIII Krajowa Konferencja SPD-8 "Symulacja Procesów Dynamicznych", Polana Chocholowska, 547-554
19. TOMCZYK A., 1994, *Pokładowe systemy nadzorujące działanie układów sterowania samolotem*, XII Krajowa Konferencja Automatyki, Gdynia, 564-571
20. TOMCZYK A., 1994, *Koncepcja samolotu badawczego dla prowadzenia badań oraz szkolenia i treningu pilotów doświadczalnych*, I Konferencja "Metody i Technika Badań Statków Powietrznych w Locie", Mragowo, 233-242
21. WILLIAMS D., 1993, *An Integrated Digital Measurement and Control System for Teaching and Research*, Aerogram, 7, 2, Cranfield Institute of Technology, 14-20

**PZL M20 "Mewa" Flight Control System Modification Project
alias
Flying Laboratory for Flight Mechanics and Flight Control Systems
Teaching**

Summary

The world of aeronautics technology, avionics and flight control systems is changing fast; the question is, how do teaching systems keep up? The development of technology for advanced automatic flight control systems as needed for precise flight control in all phases of flight is not possible if it is based only on theoretical studies and computer simulations. It is essential to evaluate and demonstrate new design procedures and control algorithms in a real flight. The next problems are the dynamics performance and handling quality of modern aircraft, which are often non-typical as well. It is necessary to demonstrate true possibilities of aircraft during special test/teaching flights.

In the paper, the principles of the flying laboratory (In-Flight Simulator) structure are presented. The simulator has been adopted to the real-time simulation of any flying object properties for given dynamic and handling performance. The modification of the properties of the PZL M20 "Mewa" aircraft used as a flying simulator can be obtained by employing a specialized digital automatic flight control system using the principle of "model following control system". It means that model properties of an aircraft are obtained in the way of simultaneous computer simulation of modelled object dynamic, and active steering of an aircraft.

This paper provides the reader with a general overview of the project, along with hardware realization ideas and some design calculations.

DYNAMIKA TRÓJFAZOWEGO NAPROWADZANIA RAKIET DO CELU

RYSZARD VOGT

Wydział MEiL Politechniki Warszawskiej

Celem badań było opracowanie koncepcji ataku z górnej sfery celów opancerzonych przy użyciu raketowych przeciwpancernych pocisków kierowanych. Większość stosowanych układów sterowania raketami przeciwpancernymi, niezależnie od stopnia automatyzacji sterowania, umożliwia naprowadzanie raket do celu według tzw. metody trzech punktów tj. w taki sposób, aby raketa podczas całego sterowanego lotu znajdowała się na linii stanowisko sterowania i celu.

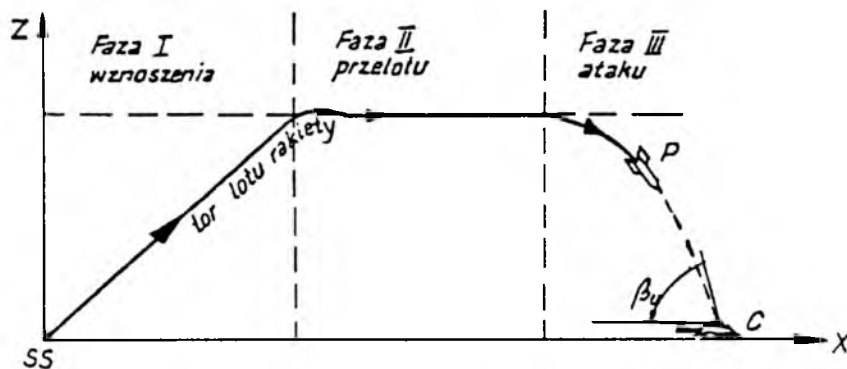
Taka metoda sterowania charakteryzuje się bardzo prostym algorytmem nawigacji, a do jej realizacji wymagana jest tylko informacja o kątowym odchyleniu rakiety od celu mierzonym na stanowisku sterowania. Nie zachodzi zatem potrzeba pomiaru odległości rakiety od celu.

Wadą tej metody w zastosowaniu do zwalczania czołgów z ziemi jest fakt, że lot rakiety jest płaski. W związku z tym biorąc pod uwagę sytuację na polu walki, najbardziej prawdopodobne jest trafienie czołgu od czoła. Ze względu na bardzo silne opancerzenie tej części taki atak współczesnych czołgów staje się coraz mniej skuteczny. Stąd powstała koncepcja, aby czołgi zwalczać w taki sposób, aby raketa trafiała go w górną stosunkowo najmniej opancerzoną powierzchnię, co umownie nazwano *atakami z górnej sfery*.

1. Koncepcja naprowadzania przeciwpancernych pocisków kierowanych z górnej sfery

Przedstawiona koncepcja zakłada, że proces naprowadzania podczas ataku z górnej sfery nie wymaga zmian w konstrukcji pokładowej aparatury sterującej istniejących rakiet. Tak więc zmiana funkcji sterujących podczas ataku z górnej sfery dotyczyć będzie zmian aparatury naziemnej układu sterowania. Jednocześnie należy zachować możliwość ataku według dotychczasowej metody "trzech punktów".

Warunkiem skuteczności ataku z górnej sfery obok trafienia, jest zapewnienie dostatecznie dużego kąta uderzenia β_u (rys.1).



Rys. 1. Schemat procesu naprowadzania pocisku podczas ataku z górnej sfery

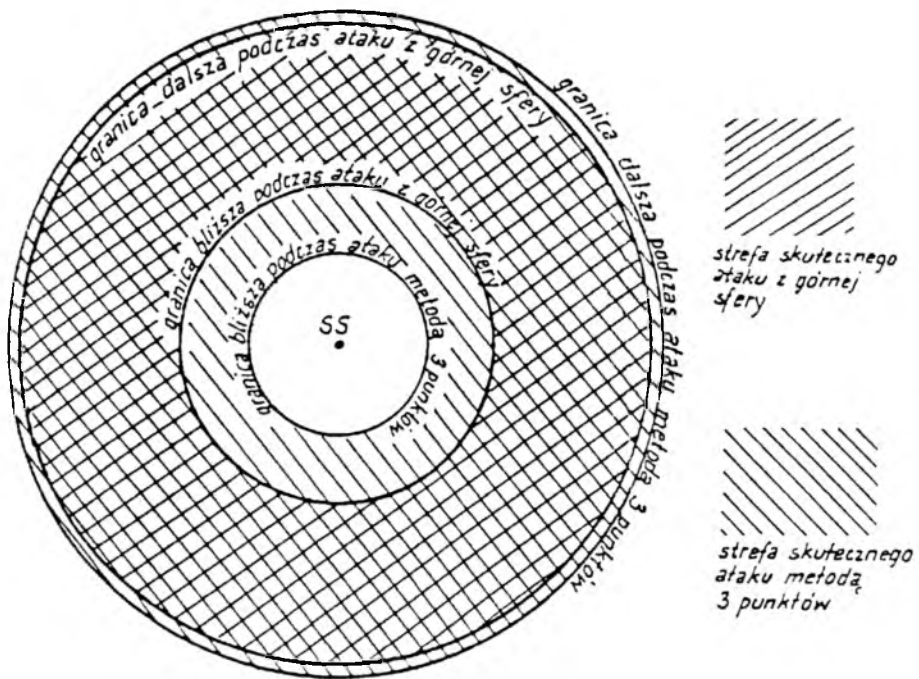
Tak więc przy określonych dla danego typu rakiety właściwościach dynamicznych systemu naprowadzania, atak zapewniający odpowiednio duży kąt uderzenia β_u musi się odbyć z dostatecznie dużej wysokości. Zatem dla zapewnienia możliwie małej minimalnej odległości ataku z górnej sfery, rakietę po starcie powinna w możliwie krótkim czasie nabrać odpowiedniej wysokości. Następnie po uzyskaniu pułapu wymaganego dla ataku z górnej sfery, odbywa się przelot na stałej wysokości do punktu, w którym nastąpi atak umożliwiając trafienie celu w górną jego powierzchnię.

Stąd w całym procesie naprowadzania rakiety umożliwiającym atak z górnej sfery, można wydzielić trzy fazy: fazę wznoszenia, fazę przelotową i fazę ataku (rys.1).

1.1. Start i faza wznoszenia

Start rakiety i wybór ataku z górnej sfery powinien się odbyć po wykryciu celu i ocenie, że atak z górnej sfery jest możliwy, tj. że cel znajduje się w strefie skutecznego ataku. Strefa ta ograniczona jest: granicą *dalszą* i granicą *bliższą* (rys.2).

Granica dalsza wynika z maksymalnego zasięgu np. w przypadku przeciwpancernych pocisków kierowanych sterowanych przewodowo zasięg ten będzie zależał od długości przewodów. Granica bliższa to minimalna odległość przy której możliwy jest atak z górnej sfery, a więc odległość niezbędna dla wzniesienia się rakiety na *pułap skutecznego* H_{sk} , a następnie wykonanie z tego pułapu ataku z pominięciem fazy przelotu (rys.2).



Rys. 2. Strefy skutecznego ataku podczas naprowadzania z górnej sfery oraz metodą trzech punktów

Granica bliższa podczas ataku z górnej sfery jest większa (znajduje się dalej od wyrzutni) niż odpowiednia granica podczas konwencjonalnego naprowadzania według metody trzech punktów. Tak więc strefa skutecznego ataku z górnej sfery jest mniejsza niż dla strzelań konwencjonalnych, przede wszystkim w zakresie małych odległości do celu. Może więc być taka sytuacja, że cel znajduje się bliżej od granicy bliższej umożliwiającej atak z górnej sfery, ale jeszcze w granicach skutecznego ataku według metody trzech punktów. W takiej sytuacji oczywiście należy zrezygnować z ataku z górnej sfery i wybrać atak metodą trzech punktów. W związku z tym, że decyzja taka wymaga pomiaru odległości do celu i odpowiedniej oceny, funkcje te należy realizować w sposób automatyczny i odpowiednim sygnałem informować operatora o decyzji co do celowości startu i wyboru sposobu naprowadzania.

2. Cel i metody badań

W wyniku przeprowadzonych badań należało m.in.:

- wyznaczyć struktury i parametry sterowania we wszystkich fazach lotu zapewniających wymaganą skuteczność naprowadzania pocisku do celów ruchomych w całym możliwym zakresie warunków strzelań;
- sprawdzić skuteczność opracowanej koncepcji przy zastosowaniu do istniejących pocisków przeciwpancernych.

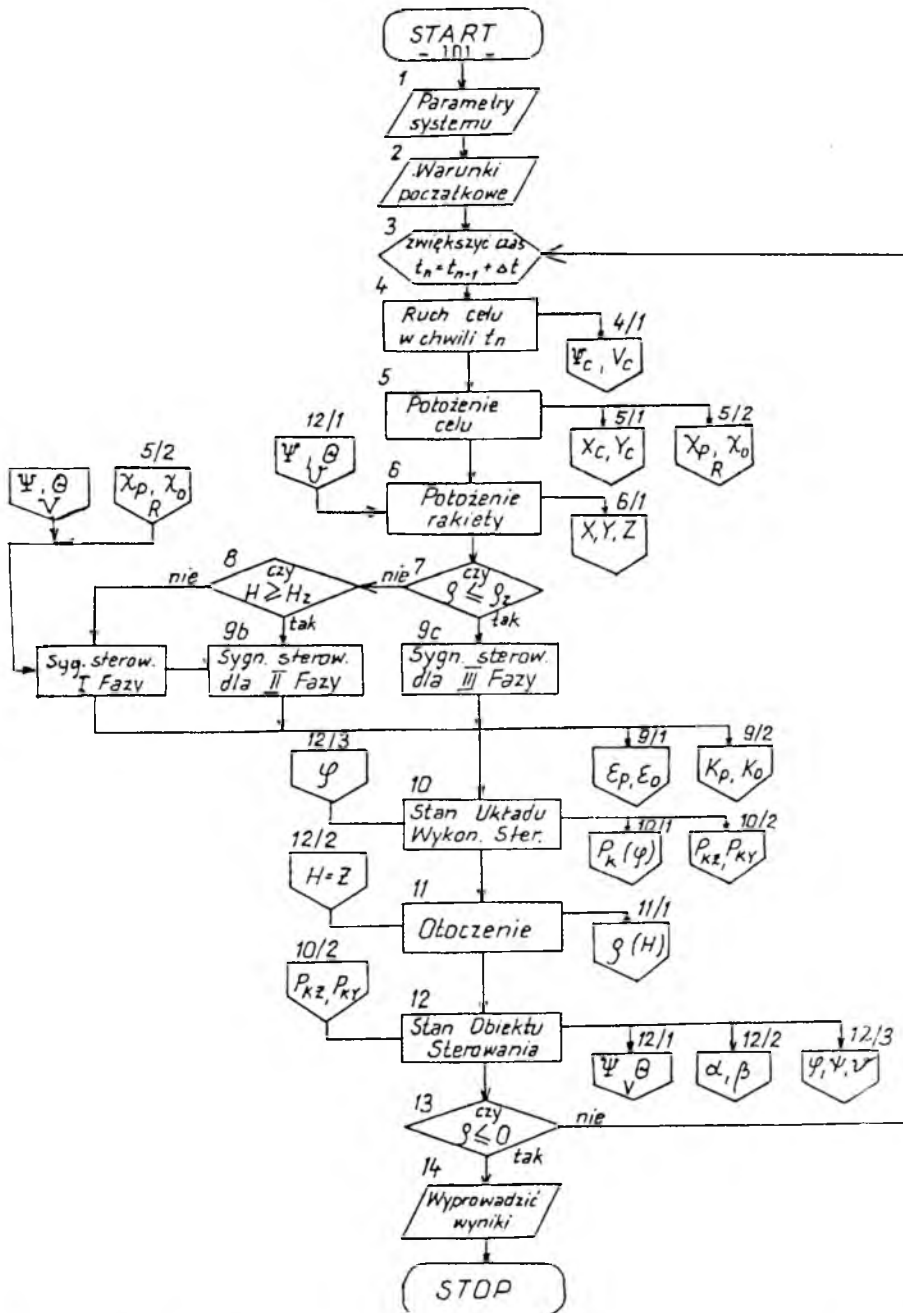
Rozwiązanie tych zadań wymagało zbudowania odpowiedniego modelu cybernetycznego umożliwiającego przebadanie całościowych – systemowych – właściwości procesu naprowadzania rakiety według przyjętej koncepcji z uwzględnieniem różnych warunków strzelań. Dokładność badań cyfrowych zależy od dokładności modelowania. Zbudowany model systemu opisywał możliwie dokładnie wszystkie relacje zachodzące między elementami systemu naprowadzania w różnych jego fazach, uwzględniał złożoność strukturalną elementów w tym szczególnie nieliniowość i niestacjonarność (od zmiany masy) rakiety jako obiektu sterowania, a także wpływ na cały system otoczenia w tym atmosfery.

Obok opisu struktury, na wyniki badań istotny wpływ mają parametry, a więc wartości liczbowe opisujące system. Niezbędnym warunkiem uzyskania dokładnych wyników badań jest wprowadzenie do modelu kompletnych i wiarygodnych wartości parametrów systemu w tym charakterystyk aerodynamicznych i masowych rakiety, zmiany ciągu w czasie i w różnych temperaturach otoczenia. Warunek ten w tych badaniach udało się spełnić dzięki odpowiedniej analizie wyników badań kontrolnych badanych rakiet.

Na rys.3 przedstawiono schemat logicznej sieci działań programu symulacji trójfazowego systemu naprowadzania rakiety do celu z uwzględnieniem możliwości jego ruchu w dowolnie zadanym kierunku ψ_c i V_c .

3. Algorytmy sterowania

W przyjętej koncepcji sterowania wyodrębniono trzy fazy: fazę wznoszenia, fazę przelotową i fazę ataku (rys.1). W fazie wznoszenia sterowanie wysokością powinno umożliwić wejście rakiety na zadany pułap, a w fazie przelotowej – lot rakiety na zadanej wysokości do punktu toru, zapewniającego najlepsze warunki ataku. Cel sterowania kierunkiem lotu rakiety (w kanale



Rys. 3. Schemat logicznej sieci działań symulacji systemu naprowadzania rakiety do celu

odchylenia) w obu fazach jest jednakowy, mianowicie zapewnienie lotu w płaszczyźnie kursowej pokrywającej się z linią stanowisko sterowania – cel. Sterowanie w fazie ataku powinno zapewnić trafienie rakieta do celu w jego górną powierzchnię przy możliwie największym kącie uderzenia β_u .

Realizacja tych celów wymaga zastosowania algorytmów i wartości parametrów sterowania różnych nie tylko dla poszczególnych faz, ale również kanałów sterowania. Tak więc niezbędne jest zastosowanie sterowania adaptacyjnego zarówno w odniesieniu do parametrów, jak i struktur.

3.1. Algorytmy i parametry sterowania w kanale pochylenia w fazie wznoszenia (I)

Podczas fazy wznoszenia trwającej od startu do osiągnięcia przez rakieta zadanej wysokości H_z , rozwiązanie zadań związanych ze sterowaniem sprowadzono do wyznaczenia odpowiednich warunków początków tj. początkowego kąta Θ_0 pochylenia trajektorii lotu dzięki odpowiednim nastawom prowadnicy wyrzutni, a następnie sterowaniem lotem wnoszącym rakiety do zadanej wysokości H_z po trajektorii minimalizującej czas i odległość lub minimalizującej straty energii. Dodatkowo na kształt trajektorii wznoszenia warunków, aby zadaną wysokość uzyskała rakieta przy kącie pochylenia $\Theta = 0$, a więc na wierzchołkowej toru wznoszenia. Spełnienie tego warunku umożliwia przejście do fazy przelotowej bez zakłóceń i związanych z tym przeregulowań wysokości.

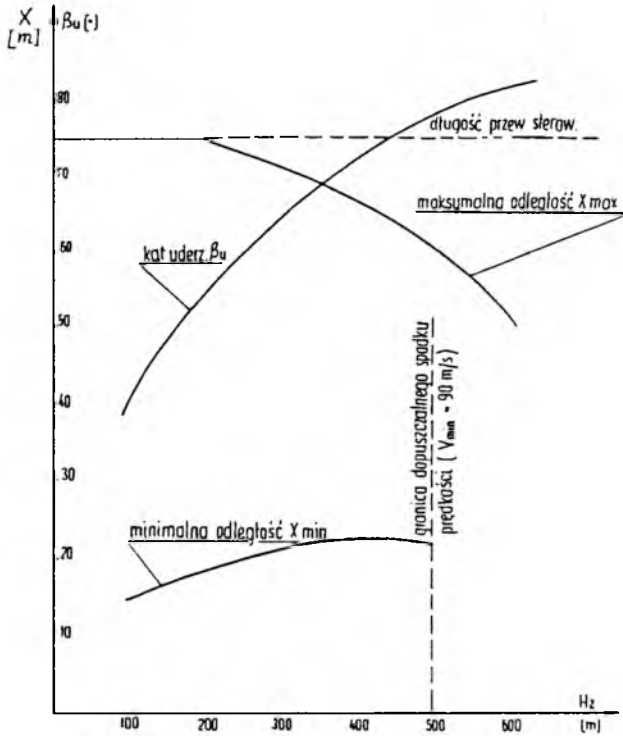
Minimalizacja czasu i odległości wznoszenia jest niezbędna podczas strzelań do celów znajdujących się w małych odległościach od wyrzutni w chwili spotkania rakiety z celem. Minimalizację odległości strzelania uzyskuje się w warunkach, w których rakieta startuje pod dużym kątem Θ_0 , a następnie pod działaniem sterowań w dół powodujących maksymalne zakrzywienie toru, wchodzi na wierzchołkową w minimalnym czasie. Zależność między kątem Θ_0 , a wysokością H_z przy maksymalnych sterowaniach przedstawiono na rys.4.

Uzyskanie maksymalnej odległości strzelania wymaga wejście na zadaną wysokość H_z pokrywającą się z wierzchołkową przy minimalnych sterowaniach, a więc po torze zbliżonym do batalistycznego.

Na podstawie badań kilku wersji algorytmów stwierdzono, że takie warunki lotu zapewniają funkcje opisujące:

— sygnał uchybu

$$\varepsilon_p = \Theta_z - \Theta$$



Rys. 4. Wpływ wysokości H_z na kąt uderzenia β_u oraz minimalną H_{\min} i maksymalną X_{\max} odległość strzelania

– sygnał sterujący

$$K_p = k_p \left(\varepsilon_p + T_{pf} \frac{d\varepsilon_p}{dt} \right)$$

gdzie:

$\Theta_z = 0$ – zadana wartość kąta lotu,

k_p, T_{pf} – parametry regulatora typu PD.

3.1.1. Algorytmy i parametry sterowania w kanale pochylenia w fazie przelotowej

Sterowanie w tej fazie w kanale pochylenia spełnia proste funkcje stabilizujące wysokości lotu H na zadanej wartości H_z . Stąd algorytmy sterowania mają postać:

$$\varepsilon_p = H_z - H$$

$$K_p = k_p \left(\varepsilon_p + T_{pf} \frac{d\varepsilon_p}{dt} \right) + k_c$$

a parametry regulatora PD z kompensacją ciężaru przyjmują wartości:

$$k_p = 0.05 \div 0.1 \quad T_{pf} = 1 \div 2 \text{ s} \quad k_c = 0.4 \div 0.6$$

3.1.2. Algorytmy i parametry sterowania w kanale odchylenia w fazach wznoszenia i przelotowej

Zadaniem sterowania pociskiem w obu tych fazach jest zapewnienie lotu pociskiem w płaszczyźnie celowania tj. płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez stanowisko sterowania i cel. Zapewniają to algorytmy sterowania:

$$\varepsilon_o = \chi_o r - Y_g$$

$$K_o = k_o \left(\varepsilon_o + T_{of} \frac{d\varepsilon_o}{dt} \right)$$

gdzie:

- χ_o – kąt sferyczny opisujący odchylenie płaszczyzny celowania od osi X_g układu ziemskiego,
- r – odległość rakiety od stanowiska sterowania,
- Y_g – współrzędna położenia pocisku w układzie ziemskim,
- k_o, T_{of} – parametry regulatora, $k_o = 0.05 \div 0.1$, $T_{of} = 0.5 \div 1 \text{ s}$.

3.1.3. Algorytmy i parametry sterowania w fazie ataku w kanałach pochylenia i odchylenia

W fazie ataku realizowane są główne założenia problemu spotkania z celem. Prowadzone badania wykazały, że najbardziej skuteczne naprowadzanie rakiety do ruchomego celu uzyskuje się przy algorytmach sterowania realizujących w przybliżeniu zasadę tzw. proporcjonalnego zbliżania:

– w kanale pochylenia

$$K_p = k_a \left(K \frac{d\mu_p}{dt} - \frac{d\Theta}{dt} \right)$$

– w kanale odchylenia

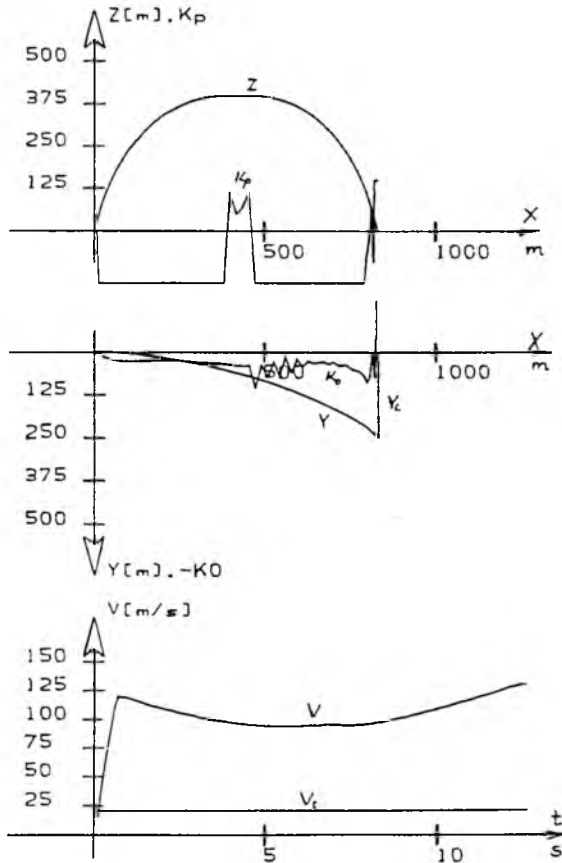
$$K_o = k_a \left(K \frac{d\mu_o}{dt} - \frac{d\Theta}{dt} \right)$$

gdzie:

- k_a – wzmacnienie sterowania, $k_a = 2$,
- K – współczynnik proporcjonalności, $K = 10 \div 20$,
- μ_p, μ_o – kąty pochylenia i odchylenia linii rakiet-cel,
- Θ, Ψ – kąty pochylenia i odchylenia wektora prędkości V rakiety.

4. Ważniejsze wnioski z badań

1. Właściwości dynamiczne i techniczne klasycznych przeciwpancernych pocisków kierowanych naprowadzanych metodą 3 punktów, przy zapewnieniu odpowiednich sterowań, umożliwiającą zwalczanie celów opancerzonych z górnej sfery, w całym możliwym zakresie ich ruchu.

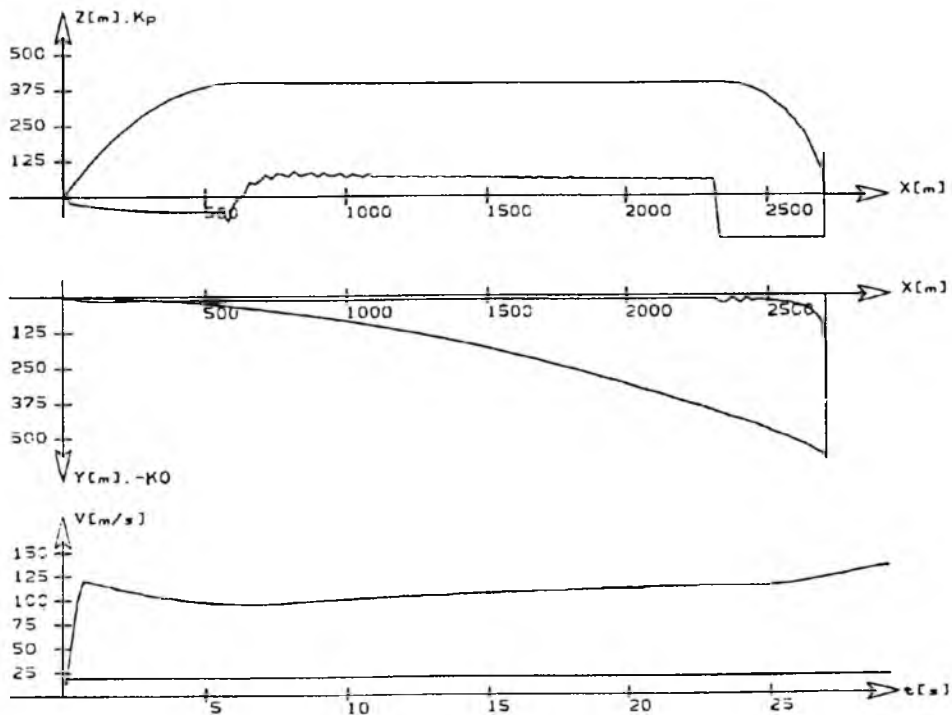


Rys. 5. Naprowadzanie rakiety do celu ruchomego ($V_c = 72$ km/h, $\psi_c = -90^\circ$) z wysokości $H_z = 400$ m (temperatura otoczenia $T_o = +15^\circ\text{C}$)

2. Opracowana koncepcja naprowadzania zakłada, że konstrukcja pocisku oraz pokładowej aparatury sterującej pozostaje bez zmiany. Realizacja zdalnego naprowadzania pocisku do celu z górnej sfery wymaga:
 - pomiaru położenia celu oraz sterowanej rakiety,

– wytworzenia i przesłania do pokładowej aparatury sterującej sygnałów sterujących lot pociskiem w kolejnych fazach sterownia.

- Skuteczność rażenia celu po jego trafieniu w górną powierzchnię zależy m.in. od kąta uderzenia β_u , który jest równy kątowi pochylenia θ_k trajektorii w momencie trafienia. Kąt θ_k , a więc i kąt uderzenia β_u dla danej rakiety, zależy od sterowań w fazie ataku oraz wysokości H_z , z której rozpoczęto atak (rys.4).



Rys. 6. Naprowadzanie rakiety do celu ruchomego ($V_c = 72$ km/h, $\psi_c = -90^\circ$) z wysokości $H_z = 400$ m (temperatura otoczenia $T_o = -40^\circ\text{C}$)

- Minimalna odległość zwalczania celów X_{\min} podczas strzelań z górnej sfery jest większa od minimalnej odległości możliwej do uzyskania podczas strzelań konwencjonalnych, tj. naprowadzania rakiety do celu metodą trzech punktów. Odległość ta podczas strzelań z górnej sfery zależy od zadanego pułapu H_z (rys.4,5,6). Wpływ temperatury otoczenia na minimalną odległość X_{\min} jest mały.
- Maksymalna odległość strzelania X_{\max} z górnej sfery, do pewnej wyso-

kości jest ograniczona tylko długością przewodów. Można więc przyjąć, że jest taka, jak podczas strzelań konwencjonalnych.

Przy większych wysokościach straty energii spowodowane wejściem rakiety na zadany pułap H_z wyraźnie zmniejszają maksymalny zasięg X_{\max} (rys.4).

Wpływ temperatury otoczenia na maksymalną odległość strzelania jest mały – praktycznie do pominięcia.

Dynamics of Three-Phase Rocket Guidance

Summary

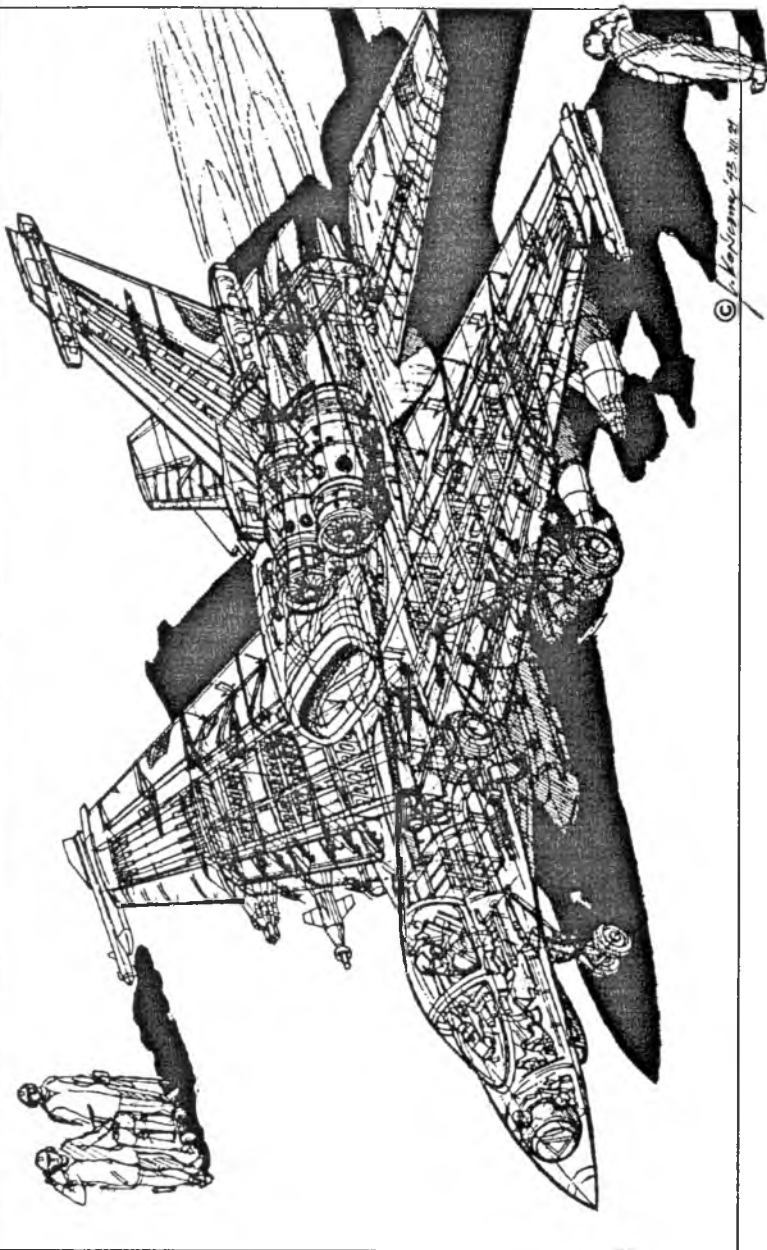
Papers deals with the concept of ground-to-ground attack of shielded target, by means of rockets guided from the upper hemisphere.

A majority of the presently applied guidance systems, regardless of the level of automatization, make use of the so called three-point method, in which a rocket moves along the line between a control stand and an aim. The disadvantage of this method is that an aim (for instance a tank), is usually attacked from the front side, where it is well shielded and the attack is less effective. It is assumed that the aim is attacked from the upper, less protected side.

INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1995



KOBRA 2000



MODELOWANIE EPOKSYDOWO-WĘGLOWEJ LOTKI SAMOŁOTU PZL-110 "ORLIK" PRZY POMOCY METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

TADEUSZ WIĄCEK

PIOTR CZARNOCKI

*Institut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Politechnika Warszawska*

Analizę sztywnościową, w zakresie liniowym, węglowo-epoksydowej lotki samolotu PZL 130 "ORLIK" wykonano w oparciu o jej numeryczny model uzyskany przy pomocy pakietu programów MES firmy ALGOR. Otrzymane wyniki poddano weryfikacji eksperymentalnej i stwierdzono, że obiekt rzeczywisty ulega większym deformacjom niż wskazują na to rezultaty obliczeń. Przypuszcza się, że jednym z powodów rozbieżności są wartości stałych sprężystych materiałów użytych do budowy badanej struktury. Zostały one wyznaczone w sposób uproszczony oraz na podstawie próbek nie pochodzących od producenta lotki, a więc mogą być niemiarodajne.

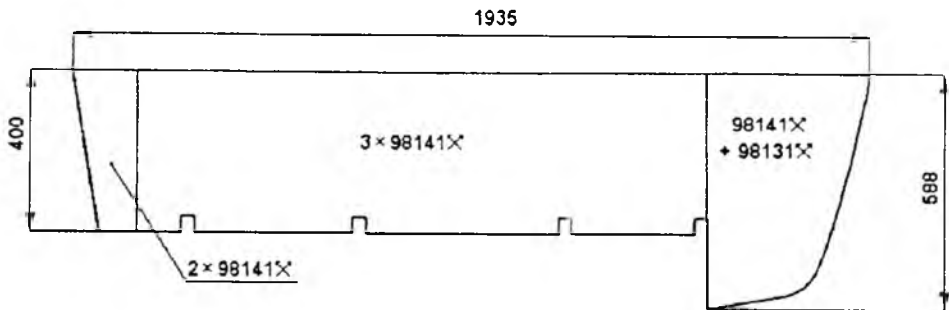
1. Wstęp

Przy wykorzystaniu tradycyjnych metod obliczeniowych, analiza sztywnościowo-wytrzymałościowa kompozytowych konstrukcji półskorupowych wymaga znacznego nakładu pracy i często jest znacznie uproszczona co, ze względów bezpieczeństwa, prowadzi do "przewymiarowania" konstrukcji. Według wiedzy autorów krajowy przemysł lotniczy nie korzystał do tej pory z pomocy MES przy konstruowaniu kompozytowych zespołów płatowcowych. Zastosowanie MES usprawnia analizę, jednakże jej jakość zależy od posiadanych danych materiałowych oraz doświadczenia w modelowaniu złożonych struktur kompozytowych. Dostępne odnośnie publikacje zawierające weryfikację eksperymentalną obliczeń, dotyczą zwykle stosunkowo prostych struktur i nie oferują możliwości zaznajomienia się z doświadczeniem innych ośrodków w tym zakresie. Poniżej przedstawiono analizę sztywnościową węglowej lotki samolotu PZL-110 "ORLIK", wykonaną przy użyciu oprogramowania firmy

ALGOR. Uzyskane rezultaty porównano z wynikami pomiarów dokonanych na rzeczywistym obiekcie. Model do obliczeń numerycznych został sporządzony w oparciu o dokumentację techniczną dostarczoną przez wytwórcę (DWLKK).

2. Badany obiekt

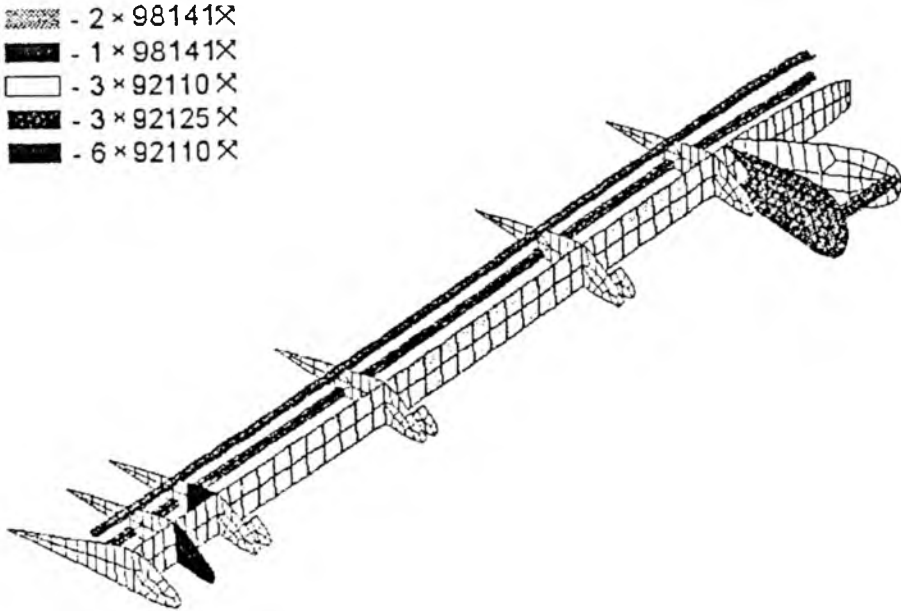
Lotka została wykonana z kompozytu węglowo-epoksydowego (powłoki i dźwigar) oraz szklano-epoksydowego (żebra), przy użyciu metody kontaktowej według dokumentacji [1]. Gabaryty lotki, oraz istotne informacje dotyczące struktury, są zawarte na rys.1 i 2. Zbrojenie stanowiły tkaniny symetryczne firmy Interglas 92141 (węglowa) i 92110 oraz 92125 (szklane), a spoiwo żywica epoksydowa L160 utwardzana utwardzaczem 260S według zalecanego cyklu cieplnego [2].



Rys. 1. Geometria lotki

3. Analiza numeryczna

Liniowa analiza numeryczna została przeprowadzona przy wykorzystaniu oprogramowania firmy ALGOR [3]. Do budowy modelu użyto 2236 tzw. elementów kompozytowych oznaczonych numerem 15 (5 stopni swobody w każdym węźle: przemieszczenia u, v, w oraz obroty wokół osi x i y) będących trój i czterowęzłowymi izoparametrycznymi elementami opracowanymi w oparciu o teorię płyt Kirchhoffa. Elementy te umożliwiają modelowanie ortotropowych struktur laminarnych (do 20 warstw) o dowolnie obranym kierunku zbrojenia każdej z warstw.



Rys. 2. Struktura wewnętrzna lotki

Przy budowie modelu wprowadzono następujące uproszczenia:

- pominięto lokalne zmiany grubości powłoki wynikające z konieczności łączenia tkanin (tzw. zakładki),
- zanedbano skleiny,
- założono idealne ułożenie tkanin pod względem kierunku zbrojenia,
- uproszczono połączenia metal-kompozyt przez sprowadzenie elementów metalowych do płaszczyzny żeber i zastąpienie ich płytkami o odpowiednio zmieniającej się grubości.

Do analizy przyjęto poniższe dane materiałowe:

- dla kompozytu węglowego:

$$E_x = E_y = 33380 \text{ MPa}$$

$$G_{xy} = 3300 \text{ MPa}$$

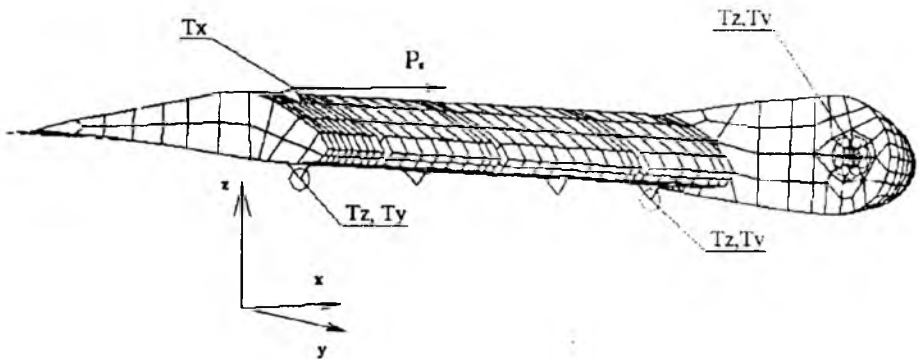
$$\nu_{xy} = 0.027$$

- dla kompozytu szklanego:

$$E_x = E_y = 22560 \text{ MPa}$$

$$G_{xy} = 4200 \text{ MPa} \quad \nu_{xy} = 0.029$$

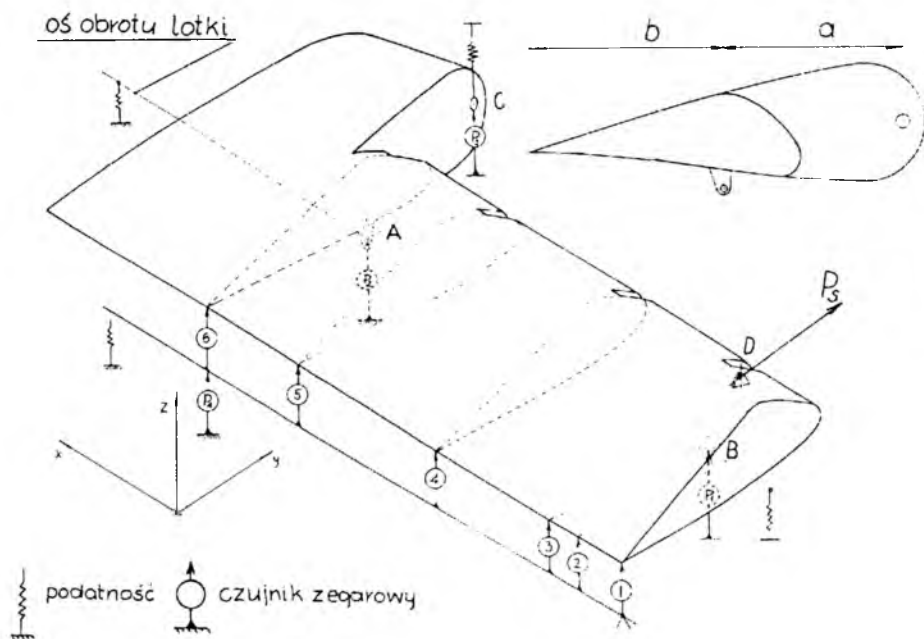
Przyjęty do analizy model, wraz z symbolicznie zaznaczonymi warunkami brzegowymi (obciążenie i dopuszczalne przemieszczenia), jest przedstawiony na rys.3.



Rys. 3. Model lotki do analizy MES

4. Próby sztywnościowe

Rysunek 4 przedstawia schematycznie sposób obciążenia, pomiaru przemieszczeń i utwierdzenia badanej lotki. Lotkę podparto w dwu skrajnych okuciach (zawiasach) oznaczonych symbolami A i B oraz okuciu C , przeznaczonym do mocowania wyważenia masowego lotki. Okucie D , by odkształcić lotkę, obciążono siłą P_s zmieniającą się od 0 do 160 daN. Jako miarę odkształcenia przyjęto przemieszczenia w punktów położonych na krawędzi splywu. Mierzono je w kierunku osi z czujnikami 1 ÷ 6. W celu późniejszej korekcji wyników wyznaczono, przy pomocy czujników oznaczonych symbolami P_1 , P_2 , P_3 i P_4 przemieszczenia podpór. Pomiaru przeprowadzano w temperaturze pokojowej.



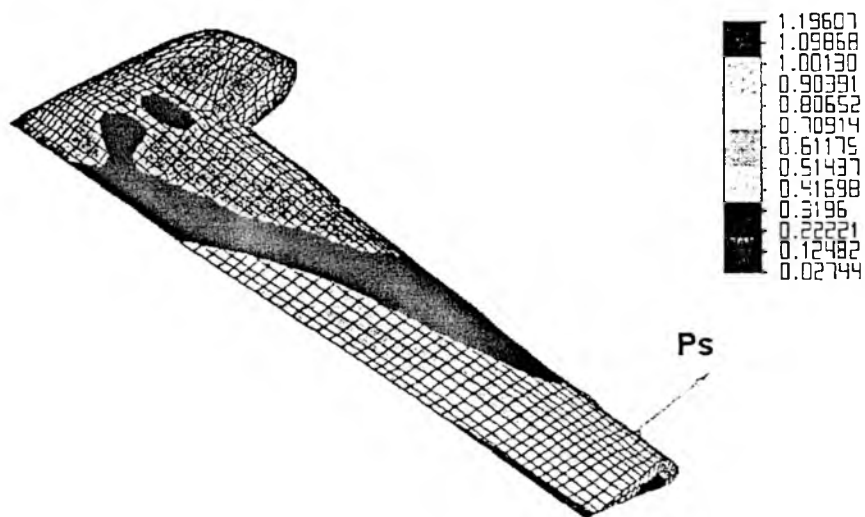
Rys. 4. Schemat utwierdzenia, obciążenia i pomiaru przemieszczeń

5. Wyniki

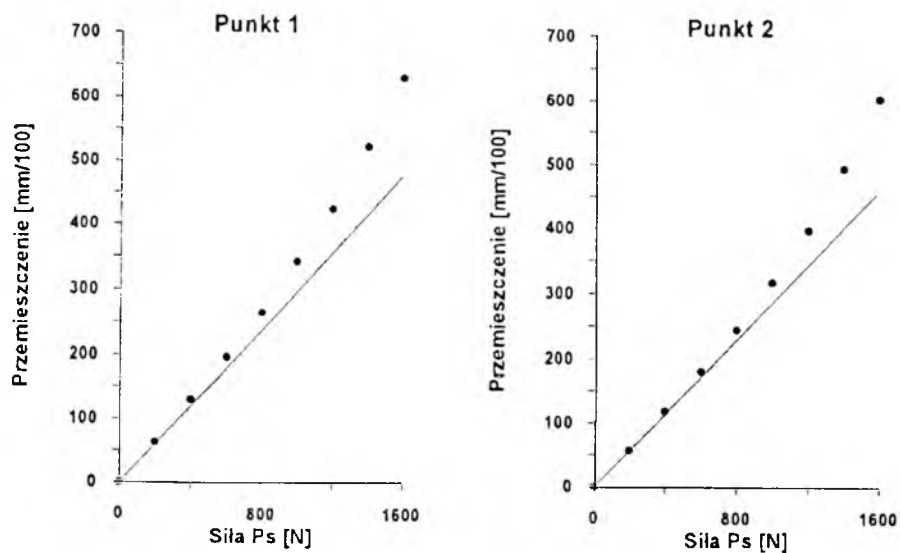
Obraz zdeformowanej lotki, obciążonej siłą $P_s = 80$ daN przedstawia rys.4. Wykresy na rysunkach 5÷7 obrazują obliczeniowe i zmierzone przemieszczenia w_i punktów pomiarowych 1 ÷ 6 w zakresie P_s zmieniającej się od 0 do 160 daN.

6. Dyskusja wyników

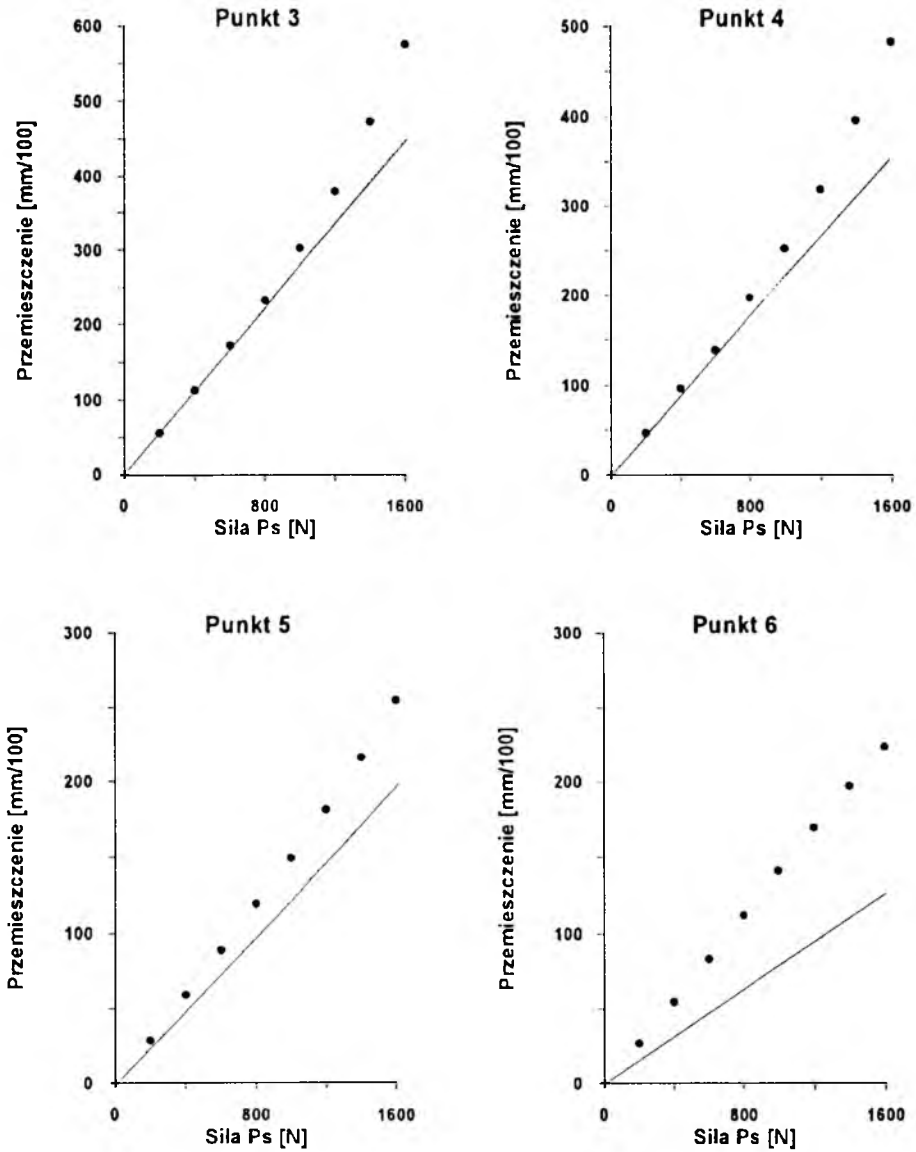
Wykresy $w_i = f(P_s)$ pokazane na rysunkach 5÷10, sporządzone w oparciu o wyniki pomiarów, uwidaczniają nieliniową charakterystykę sztywnościową lotki. Podatność jej od pewnej wartości obciążenia wzrasta. Jako wartość graniczną, we wszystkich przypadkach, można przyjąć siłę $P_s \approx 80$ daN poniżej której podatność jest w przybliżeniu stała. Przy tym poziomie obciążeń, po raz pierwszy, zaobserwowano na pokryciu pojawienie się obszaru w którym nastąpiła utrata stateczność i wystąpiło pole ciągnięć. Wraz ze



Rys. 5. Deformacja lotki pod obciążeniem 80 dN



Rys. 6. Przemieszczenia punktów 1 i 2



Rys. 7. Przemieszczenia punktów 3, 4, 5 i 6

wzrostem siły P_s obszarów takich przybywało, co powodowało zakrzywienie wykresów $w_i = f(P_s)$.

Rozbieżność pomiędzy wynikami obliczeń i pomiarów, występująca w zakresie obciążeń $0 \div 80$ daN, wynika przypuszczalnie z przyjętej metody wyznaczania stałych sprężystych kompozytu oraz ograniczeń możliwości wykorzystania ich przez użyty program MES.

Stałe sprężyste, za wyjątkiem G_{12} , wyznaczono w oparciu o normy ASTM stosując bazę pomiarową 10 mm. Z badań [3] wynika że ze względu na specyfikę kompozytów powinny być one większe. W przypadku krótkich baz otrzymywane wyniki są zawyżone (nawet do ok. 20%). Materiały kompozytowe zbrojone włóknem ciągłym, obciążone w kierunku zbrojenia, wykazują asymetrię sztywności ze względu na rozciąganie i ściskanie. Sztywność przy ścisaniu jest niższa, a użyte dane materiałowe nie były wyznaczane w próbie ściskania.

Rozbieżność wyników występująca w obszarze 6-ego punktu pomiarowego jest znacznie większa niż w pozostałych przypadkach. Obszar ten wymaga przypuszczalnie remodelowania.

W celu usunięcia powyższych wątpliwości należałoby, w pierwszym rzędzie, wyznaczyć stałe sprężyste E i η (w oparciu o próby ściskania przeprowadzone na próbkach wykonanych przez producenta lotki oraz charakteryzujących się większymi bazami pomiarowymi niż zalecane przez ASTM a następnie powtórzyć obliczenia.

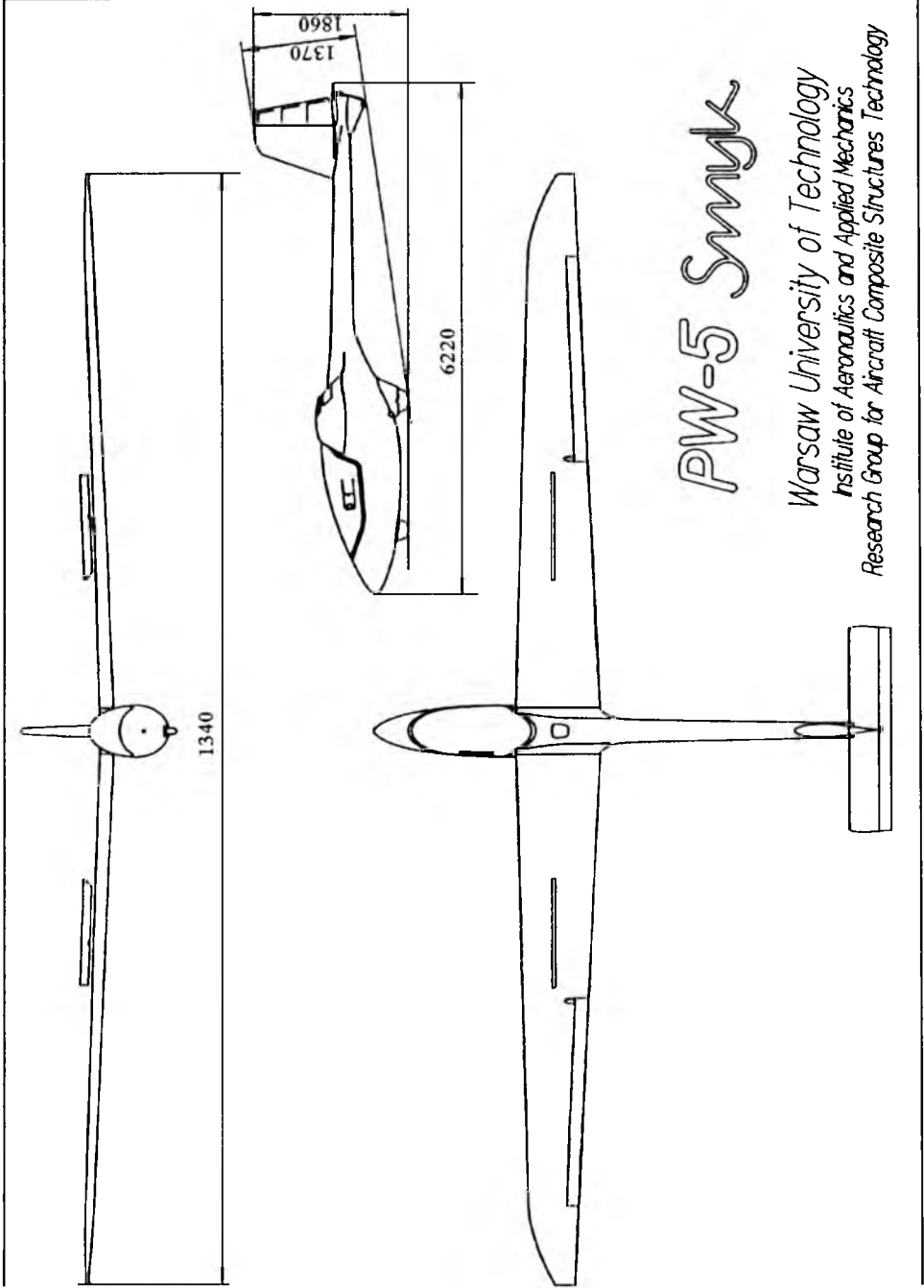
Literatura

1. *Dokumentacja konstrukcyjna kompozytowej lotki samolotu PZL-110 "ORLIK"*
2. *Laminating Resin Systems Approved for Use in Aeronautics*, Technical Information, M.G. Scheufler
3. *Composite Decoder and Element Release Notes*, Algor Inc., 1990
4. JANCELEWICZ B., DANILECKI ST., *Sprawozdanie z pracy "Badania kontrolne urządzeń i metod do pomiaru modułów sprężystości tworzywa sztucznego zbrojonego"*, KBS-9/B/75, ITLiMS-PW, 1976
5. *Dane materiałowe według Interglas T.L.iA.*, 3/1973
6. RODZEWICZ M., *Sprawozdanie z pracy FPB*, Inż. Mat., PW, 1993

**Finite Element Modelling of the Carbon/Epoxy Aileron for PZL 110
"ORLIK"**

Summary

Linear modelling of the carbon/epoxy aileron focusing on torque rigidity was performed with the ALGOR finite element code. The numerical results were verified experimentally. It has been found out that the numerical results are not conservative and that for certain regions of the aileron a large discrepancy between both the results occurs. It can be due to modelling or/and the material input data used.



PW-5 Smyk

Warsaw University of Technology
Institute of Aeronautics and Applied Mechanics
Research Group for Aircraft Composite Structures Technology

DOBÓR PODSTAWOWYCH PARAMETRÓW LEKKIEGO SAMOLOTU

JACEK WINIECKI

Instytut Lotnictwa, Warszawa

W pracy zaproponowano metodę doboru podstawowych parametrów lekkiego samolotu. Proces projektowania prowadzono drogą modyfikacji "zerowej" wersji samolotu. Wersję "zerową" projektu może stanowić istniejący samolot o podobnym przeznaczeniu, lub projekt powstały w oparciu o analizę trendów. Projekt zerowy został opisany przy użyciu kilku zastępczych, prostych form geometrycznych. Parametry tych form oraz ich kombinacje zostały skojarzone ze zmiennymi występującymi w modelach obliczeniowych z zakresu aerodynamiki, analizy masowej konstrukcji i mechaniki lotu. Wybrano kryteria jakości (np. minimalne koszty eksploatacji). Na podstawie informacji zawartej w bazie danych przeprowadzono wstępny dobór zespołu napędowego. Po każdej modyfikacji monitorowano stan projektu, tzn. analizowano bezwzględne wartości i przyrosty funkcji kryterialnych. Dzięki ciągłej ingerencji w proces modyfikacji projektu można uzyskać w efekcie końcowym samolot technologiczny w wytwarzaniu i obsłudze (a więc tani), estetyczny i o dobrych parametrach taktyczno technicznych.

1. Wstęp. Cel pracy

W literaturze (np. [8,10]) proponowanych jest wiele schematów procesu projektowego jako sekwencje czynności, które w efekcie mają prowadzić do powstania nowego samolotu. Część z nich uwzględnia nawet gradację modeli obliczeniowych dla poszczególnych zagadnień, lecz autorowi nie są znane propozycje struktury procesu projektowego zaplanowane celowo w taki sposób, aby eliminować konieczność wprowadzania poważnych zmian w zaawansowanej fazie projektu. Unikanie tego typu zdarzeń jest bardzo pożądane ze względu na czas i koszty przygotowywania projektu. Wiadomo o istnieniu pakietów kompleksowo wspomagających projektowanie samolotów, ale trudno określić ich poziom i zasadę działania, ponieważ są one tworzone na potrzeby konkretnych wytwórni lotniczych, stanowią ich kapitał podlegający ochronie.

Z powyższych względów uznano za celowe podjęcie próby utworzenia algorytmu i opartego na nim systemu programów wspomagających projektowanie samolotów, którego zadaniem byłoby:

- ułatwienie dopasowania projektu do potrzeb rynku i możliwości wytwórczych drogą możliwie wczesnego przewidywania konsekwencji (cech użytkowych) wynikłych z poszczególnych decyzji projektanta,
- przyspieszenie prac nad projektem wstępnym przez zautomatyzowanie rutynowych działań oraz ułatwianie zapisu i analizy projektu.

2. Metoda projektowania

2.1. Uwagi ogólne

Dla realizacji wymienionych wyżej zadań zaproponowano metodę komputerowo wspomaganego projektowania inicjującego polegającą na zalgorytmizowaniu tych etapów projektowania, które są już doskonale opanowane i praktycznie nie zależą od danego projektu. Wspomaganie komputerowe przewidziano w formie modułowego systemu programów.

Ze względu na to, iż w praktyce biur projektowo-konstrukcyjnych ok. 20% zadań dotyczy konstrukcji oryginalnych, a pozostałe 80% dotyczy konstrukcji przystosowanych i wariantowych [1], przewidziano konieczność prowadzenia projektów tych trzech typów w ramach jednego systemu służącego do edycji, obliczeń i zapamiętywania parametrów projektowanego statku powietrznego.

W pracy zaproponowano metodę doboru podstawowych parametrów lekkiego samolotu drogą modyfikacji "zerowej" wersji samolotu. Wersję "zerową" projektu może stanowić istniejący samolot o podobnym przeznaczeniu, lub projekt powstały w oparciu o analizę trendów.

Oczekuje się, że stosowanie przedstawionej niżej metody w praktyce inżynierskiej, bądź w dydaktyce pozwoli na przeniesienie punktu ciężkości prac nad projektem na problemy dla niego specyficzne.

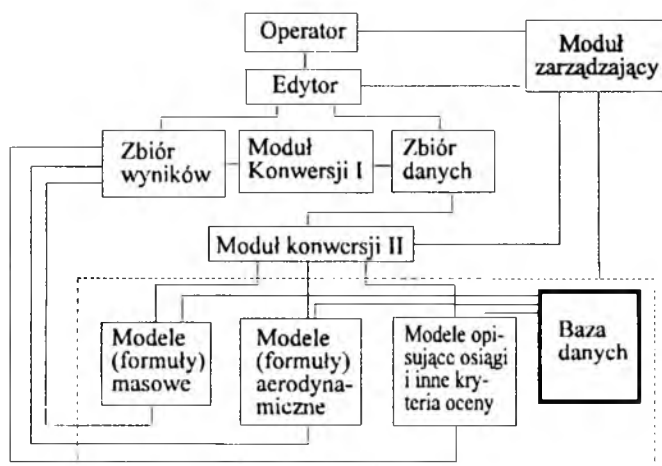
2.2. System programów

Istnienie wspomnianych trzech rodzajów zadań będzie miało swe odbicie głównie w przebiegu początkowej fazy procesu projektowego (tj. w zmianie

sekwencji przeprowadzanych operacji), zawartości bazy danych, lecz nie powinno wpłynąć na strukturę danych ze względu na ich oczekiwaną uniwersalność. Innymi słowy: oczekuje się, że proponowana metoda projektowania okaże się właściwą dla wszystkich wymienionych rodzajów zadań.

System ma tworzyć środowisko projektowe tj. musi zapewniać możliwość tworzenia w nim koncepcji, jej stopniowe uszczegółowianie, zapis w postaci wygodnej do analizy za pomocą programów obliczeniowych, optymalizację oraz tworzenie dokumentacji papierowej stanowiącej podstawę do prowadzenia działalności marketingowej i dalszych prac związanych z wytwarzaniem samolotu.

2.3. Struktura systemu



Rys. 1. Schemat stworzonego systemu wspomaganego projektowania

Dla spełnienia powyższych wymagań w systemie programów wspomagających projektowanie umieszczono (niekoniecznie w ostatecznej postaci) następujące moduły:

- edytor projektu – program wymuszający i ułatwiający zapis koncepcji projektanta w sposób umożliwiający jej analizę przez inne programy. Edytor będzie też interfejsem tych programów z użytkownikiem (edycja propozycji zmian wygenerowanych przez podsystemy optymalizacyjne, edycja aktualnie obliczonych charakterystyk itp.);

- modyfikowalne bazy danych zawierające: informacje o konstrukcjach już istniejących, katalogi dostępnych zespołów napędowych, materiałów, półfabrykatów, elementów gotowych (których produkcja jest opanowana) i znormalizowanych. Zakodowane tam też będą przepisy budowy statków powietrznych oraz wybrane wyniki pracy samego systemu (poszerzanie wiedzy w oparciu o własne doświadczenia);
- systemy obliczeniowe i optymalizacyjne wyznaczające charakterystyki bieżącego stadium projektu i jego wariacji (rodzaj metody gradientowej), używające algorytmów o stopniu złożoności (koszcie obliczeniowym) adekwatnym do stopnia zaawansowania projektu.

2.4. Dane i modele obliczeniowe

W czasie projektowania konieczne jest przewidywanie własności użytkowych samolotu. Ze względu na brak pełnej informacji o samolocie w początkowej fazie projektowania, do analizy projektu stosuje się modele o różnym stopniu zaawansowania. Przejście od modelu uproszczonego do bardziej złożonego może mieć miejsce, gdy:

- a) w toku prac nad projektem zostały zdefiniowane wszystkie parametry, jakimi operuje model dokładniejszy,
- b) zdefiniowano już taką liczbę parametrów projektu, że pozostałe wielkości niezbędne do uruchomienia bardziej zaawansowanego modelu mogą być wyznaczone za pomocą zależności półempirycznych, lub wprost na podstawie statystyk opracowanych dla samolotów danej klasy.

Wprowadzanie zmian w projekcie jest tym kosztowniejsze, im jest on bardziej zaawansowany. Należy zatem w możliwie wczesnym stadium prac rozpocząć analizę jak największej części kryteriów spośród przewidzianych do oceny jakości tworzonego samolotu.

Niemal dla każdego z kryteriów inny jest moment, w którym należy zmienić model obliczeniowy na kolejny. Różne bywają też poziomy informacji potrzebne do rozpoczęcia rozważania poszczególnych kryteriów. Jednoczesna praca z modelami operującymi na zbiorach danych o różnym stopniu uszczegółowienia realizowana jest dzięki wykorzystaniu modułów konwersji danych. Moduł taki realizuje wspomniane wyżej obliczenia statystyczne oraz przeliczenia parametrów szczegółowych, w przypadku, gdy model jest na nie nieczuły, na bardziej globalne (np. oblicza skos linii 1/4 cięciw zastępczego płata

prostokątnego na podstawie skosów krawędzi natarcia zastępczych elementów postaciowych reprezentujących skrzydło).

Przy budowaniu systemu obliczeniowego, który ma pracować na maszynie cyfrowej, należy zwrócić uwagę na następujące problemy:

- projekt powinien być zapisany w pamięci maszyny w taki sposób, aby zajmował możliwie mało miejsca,
- dla zapewnienia zadowalającej szybkości działania, częściej wykorzystywane dane pochodne (tj. będące kombinacją danych z minimalnego, jednoznacznie opisującego projekt zbioru) powinny być podane w postaci jawnej,
- aby ujednoczyć sposób dostępu różnych modułów systemu do zbioru danych proponuje się ustalenie stałej struktury danych, zaplanowanej nadmiarowo. Strukturę taką proponuje się tworzyć z elementarnych modułów, które w czasie rozbudowywania konstrukcji byłyby łączone i wypełniane parametrami o niezerowych wartościach. Taki sposób konstruowania zbioru danych pozwala na ewentualne zastosowanie procedur optymalizacyjnych – wtedy, w wyniku optymalizacji projekt może zostać automatycznie poszerzony o pewne elementy o standardowej strukturze, lub pewne elementy mogą być wyzerowane. Nadmiarowość struktury należy utrzymać na poziomie nie większym niż wynika to z możliwości najbardziej zaawansowanego z wykorzystywanych modeli obliczeniowych.

2.5. Istniejące oprogramowanie

Utworzono działający, logicznie zamknięty rdzeń systemu wspomaganie projektowania inicjującego.

Obejmuje on edytor pozwalający opisywać geometrię projektowanego statku powietrznego, program pozwalający na oszacowanie jego masy [14,15,16], momentów bezwładności i położenia środka ciężkości w oparciu o geometrię zaczerpniętą z edytora, program "AERO", "szacujący numerycznie" charakterystyki aerodynamiczne samolotu głównie na zasadzie aproksymacji arkuszy inżynierskich (DVL, ESDU), zawierających wyniki badań w tunelach aerodynamicznych oraz zestaw programów do obliczania podstawowych charakterystyk taktyczno-technicznych samolotu [9,10,11,12,13] (osiągi, zasięg i długotrwałość lotu, długość startu na przeszkodę o wys 15m, poziom hałasu emitowanego przez śmigło, zużycie paliwa na 100km lotu itp).

Do obliczeń osiągowych wykorzystywana jest baza danych zawierająca charakterystyki silników lotniczych i śmigiel, obsługiwana automatycznie przez programy wymagające uwzględnienia podczas obliczeń konkretnego zespołu napędowego.

Istniejący system programów pozwala prześledzić i celowo kształtować, drogą iteracji i wariantowania, najistotniejsze powiązania – tj. powiązania między geometrią, charakterystykami aerodynamicznymi, wielkością i rozkładem mas, a charakterystykami zespołów napędowych.

Aby proces ten przebiegał możliwie efektywnie przyjęto następujący sposób postępowania. Spośród parametrów opisujących projekt wyróżniono te, które muszą zachować określoną wartość w procesie modyfikacji oraz te, przy użyciu których projekt będzie modyfikowany, czyli tzw. parametry aktywne. Wybór parametrów aktywnych może dotyczyć tylko jednego przebiegu pętli iteracyjnej, w czasie którego zostaną wyznaczone wartości wszystkich funkcji kryterialnych przyjętych do oceny danego samolotu. Jeżeli wyniki uzyskane dla modeli różniących się wartością jednego z parametrów zostaną ze sobą zestawione, to będzie to stanowić elementarną analizę wrażliwości funkcji kryterialnych na zmiany tego parametru wspierającą typowanie parametrów aktywnych. Na opisaną wyżej zasadzie można zrealizować algorytm gradientów sprzężonych z funkcją kary, który będzie mógł działać automatycznie w sytuacji, gdy w kolejnych iteracjach, zbiór parametrów aktywnych będzie pozostawał niezmienny. Należy ograniczać moc tego zbioru, w przeciwnym razie istnieje duże prawdopodobieństwo, że otrzymane wyniki okażą się bezwartościowymi pod względem technicznym – projekt zrealizowany z niewielkimi nawet odchyłkami parametrów od wartości optymalnych, wykaże drastycznie niskie własności użytkowe. Może się tak zdarzyć wskutek kryzysu wrażliwości funkcji kryterialnych względem parametrów projektu, który, jak uczy doświadczenie, występuje zwykle przy próbie optymalizacji systemów o dużej liczbie parametrów.

Pomimo daleko idącej automatyzacji poszczególnych elementów procesu, zasadniczy wpływ na jego przebieg ma projektant obsługujący system, gdyż w jego gestii znajdują się wszystkie decyzje związane z ryzykiem. Szeroko rozumiane ryzyko dotyczy tu zarówno konstrukcji, jak i samego procesu projektowego (np. ze względu na koszty dalszego prowadzenia bezużytecznych wariantów, lub odrzucenia potencjalnie dobrych).

Wszystkie operacje, począwszy od wyboru zmiennych aktywnych, powtarzane są tak długo, jak projektant uzna to za stosowne.

Dzięki ciągłej ingerencji w proces modyfikacji projektu można uzyskać w efekcie końcowym samolot technologiczny w wytwarzaniu i obsłudze (a więc tani), estetyczny i o dobrych parametrach taktyczno technicznych.

2.6. Sposób modelowania bryły samolotu

Wymagane jest, aby geometria samolotu opisana była parametrycznie, w sposób zapewniający jednoznaczność, wystarczającą ogólność (tj. metoda opisu nie powinna stanowić ograniczenia w samym projektowaniu) i oszczędność pamięci.

Dla rozwiązania tego problemu posłużono się kilkoma bryłami i powierzchniami nieplaskimi jako podstawowymi elementami postaciowymi, z których składać się może statek powietrzny.

W przedstawionym poniżej rozwiązaniu postulat ogólności nie został w pełni spełniony – przyjęty zestaw elementów postaciowych dostępny przy projektowaniu został zorientowany na konstrukcje typowe.

Stało się tak dlatego, że wszystkie algorytmy wykorzystane do wstępnej oceny mas elementów samolotów oraz ich charakterystyk aerodynamicznych opracowane zostały w oparciu o już istniejące konstrukcje. Dlatego nie przystawalyby one do układów znacznie od nich odbiegających.

Ze względu na ograniczenia danych zawartych w bazie przyjęto następujące założenia:

- bryła samolotu składa się z następujących elementów (zespołów):
 - skrzydło,
 - usterzenie wysokości,
 - usterzenie kierunku,
 - dodatkowa powierzchnia pozioma,
 - kadłub,
- wszystkie elementy służące do wytwarzania sił aerodynamicznych mogą być opisane przy użyciu jednej struktury danych,
- układ jest symetryczny względem płaszczyzny pionowej, zawierającej linię kierunku lotu.

2.6.1. Model geometrii płata

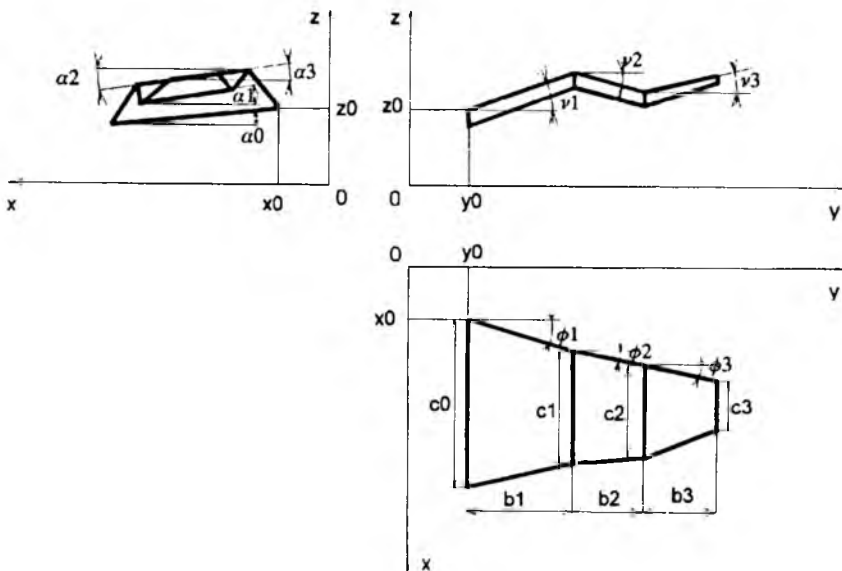
Wszystkie powierzchnie służące do wytwarzania sił aerodynamicznych składają się z max. trzech elementów trapezoidalnych (trapezowych, gdy płat jest płaski), zmiany grubości i skrzywienia wzdłuż rozpiętości takiego elementu interpolowane są liniowo na podstawie parametrów jego przekrojów skrajnych; skos i wznios są stałe w elemencie.

Informacje dotyczące profili płata wprowadzane są i przechowywane w osobnym zbiorze danych do obliczeń aerodynamicznych.

Rozwiązanie takie podyktowane zostało oszczędnością pamięci i wygodą wprowadzania danych przy wariantowaniu konstrukcji.

W zbiorze danych zapamiętywane są następujące wielkości opisujące geometrię płata (patrz rys.2):

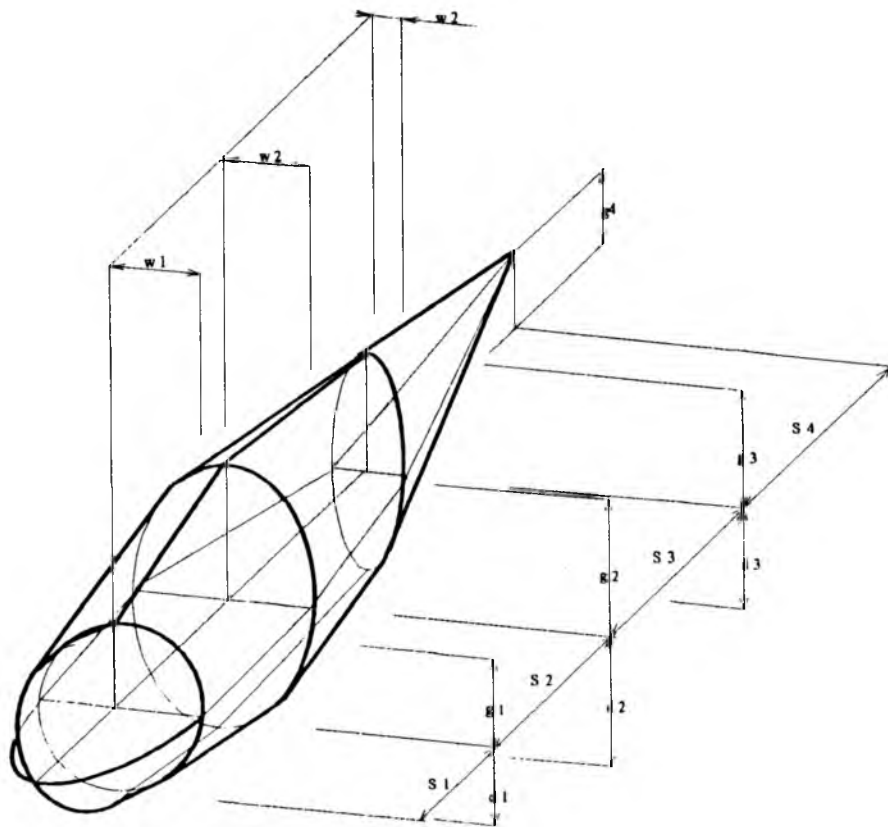
- współrzędne noska cięciwy przykadłubowej x_0, y_0, z_0 , [m]
- kąt zaklinowania cięciwy przykadłubowej α_0 , [°]
- długości cięciwy przykadłubowej i trzech cięciw końcowych kolejnych elementów trapezoidalnych c_0, c_1, c_2, c_3 , [m]
- skosy krawędzi natarcia trzech elementów ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , [°]
- wzniosy krawędzi natarcia elementów trapezoidalnych ν_1, ν_2, ν_3 , [°]
- kąty skręcenia cięciw końcowych elementów względem ich cięciw przykadłubowych: $\varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_0$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, $\varepsilon_3 = \alpha_3 - \alpha_2$, [°].



Rys. 2. Model płata

2.6.2. Model geometrii kadłuba

Kadłub opisano przy użyciu trzech rodzajów elementów postaciowych: wycinków elipsoidy, wycinków ściętego stożka o podstawie eliptycznej oraz wycinków stożka eliptycznego. Została przy tym narzucona ilość i kolejność elementów, z których budowany może być kadłub. Istnieje możliwość pominięcia któregoś z elementów przez zredukowanie jego objętości do zera.



Rys. 3. Model kadłuba

Pierwszy element kadłuba (jego nos) jest opisany przez dwie ćwiartki elipsoidy przylegające do siebie płaszczyznami symetrii (patrz rys.3).

Środkową część kadłuba stanowią cztery połówki stożków ściętych o podstawach eliptycznych. Elipsy ich podstaw mają wspólne osie o długościach $2 \cdot w_1$, $2 \cdot w_2$ i $2 \cdot w_3$ w płaszczyźnie styku.

Bryła kadłuba zamknięta jest dwiema połówkami stożków eliptycznych

o półosiach podstaw w_3, g_3 i w_3, d_3 .

W zbiorze danych geometrycznych kadłuba zakodowane są wysokości jego brył składowych oraz długości półosi elips stanowiących ich podstawy.

Porządek parametrów jest następujący (oznaczenia jak na rys.3):

g_1	g_2	g_3	g_4
d_1	d_2	d_3	
w_1	w_2	w_3	
s_1	s_2	s_3	s_4

2.6.3. Model geometrii całego samolotu

Samolot jest złożeniem elementów (zespołów głównych) opisanych w osobnych zbiorach danych. Informację o tym, które ze zbiorów znajdujących się na dysku opisują elementy wybranego samolotu zawiera jego lista nadrzędna, stanowi ona wykaz zawierający numery odpowiednich list podrzędnych reprezentujących zespoły główne samolotu.

Przytoczony poniżej przykład takiej listy zawiera linię komentarza dotyczącego całego samolotu, a następnie numery list podrzędnych poprzedzone informacją czego dotyczy dany numer.

Przykładowa lista nadrzędna (opisuje samolot, którego bryła składa się ze skrzydła zakodowanego w zbiorze nr 1, usterzenia poziomego zakodowanego w zbiorze nr 1 itd.):

```

samolot TESTOWY
  numer skrzydła
001
  numer usterzenia poziomego
001
  numer usterzenia pionowego
001
  numer powierzchni dodatkowej
001
  numer kadłuba
001

```

Zaproponowana struktura danych pozwala na bardzo łatwe tworzenie konstrukcji wariantowych. Przykładem jej wykorzystania niech będzie sytuacja, kiedy na podstawie przesłanek funkcjonalnych mamy ustaloną bryłę kadłuba i należy dobrać do niej możliwie najdogodniejsze skrzydło z punktu widzenia aerodynamiki i masy konstrukcji (patrz przykład obliczeniowy poniżej).

Tworzymy wtedy szereg list zawierających ten sam numer zbioru danych kadłuba i różne numery list podrzędnych opisujących skrzydło.

Możliwe jest przy tym zarówno wykorzystanie skrzydeł istniejących już w bazie danych, jak i tworzenie nowych przy użyciu specjalnego edytora geometrii, bądź za pomocą dowolnego edytora tekstów.

Na podstawie parametrów form geometrycznych wykorzystanych do tworzenia bryły samolotu przygotowywane są dane do obliczeń aerodynamicznych i masowych.

Tak pomyślana organizacja danych pozwala na prowadzenie automatycznych działań optymalizacyjnych tworzonej konstrukcji.

3. Przykład

3.1. Założenia

Przeprowadzono analizę potrzeb rynkowych, z której wynika, iż w najbliższych latach będzie zapewniony popyt na samoloty turystyczne, które mogłyby być również wykorzystywane jako patrolowe, lub szkolne. Ze względu na to, że budowana jest już obecnie duża różnorodność typów samolotów tej klasy, dla pozyskania rynku należy zaoferować samolot konkurencyjny pod względem ekonomiki użytkowania.

Minimalne koszty użytkownika będą zatem przyjęte jako główne kryterium efektywności konstrukcji.

Stwierdzono też, że część użytkowników wykorzystuje samoloty przez siebie zakupione, a część (np. wojsko) używa w ramach przydzielonych środków finansowych samolotów zakupionych dla nich z budżetu państwa (zakup taki jest zwykle opiniowany przez przyszłego użytkownika).

Użytkownik kupujący samolot z własnego funduszu koszty będzie rozumiał np. jako sumę bezpośredniego kosztu eksploatacji i ceny zakupu przeliczonej na godzinę lotu, przy planowanym okresie użytkowania. Użytkownicy drugiej grupy mogą koszt użytkowania rozumieć jako bezpośrednie koszty eksploatacji.

Problem stosowania wspólnych kryteriów do oceny samolotów przez twórców i użytkowników został już dawno zauważony, czego dowodem są na przykład cykle kursów na temat ekonomiki transportu lotniczego organizowane przez firmę Boeing dla potencjalnych nabywców samolotów produkowanych przez tą firmę.

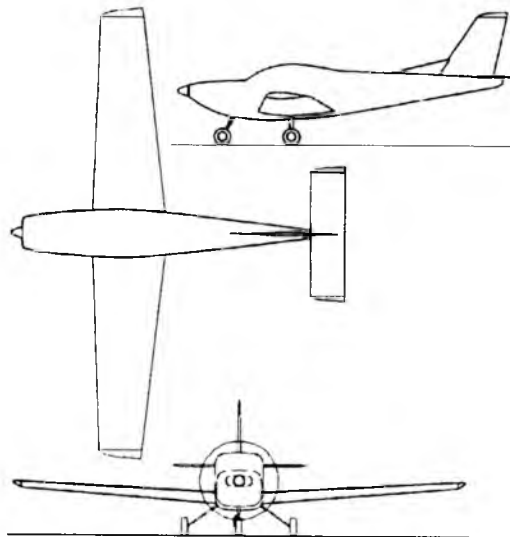
W przypadku samolotów lekkich, większość kupujących, swoje oceny ekonomiczne opiera na prostych wskaźnikach takich, jak cena zakupu i kilometrowe zużycie paliwa (osiągi analizowane są oddzielnie).

Dodatkowo ustalono następujące wymagania wobec nowego samolotu:

- masa płatna powinna wynosić 320 kg,
- zasięg powinien wynosić ok. 800 km przy przelocie na wys. 2000 m,
- samolot musi być zbudowany wg przepisów FAR 23 (wynika z nich między innymi dopuszczalna wartość prędkości minimalnej).

3.2. "Zerowy" wariant projektu

Opracowanie tzw. "zerowego" wariantu projektu, stanowiącego jego wyjściową wersję, która później będzie modyfikowana z wykorzystaniem wspomaganego komputerowego stanowi pierwszy etap realizacji proponowanej metody projektowania.



Rys. 4. Wyjściowa wersja samolotu

Sylwetkę zerowej wersji samolotu w trzech rzutach pokazano na rysunku 4. Jest to dolnopłat wolnonośny konstrukcji kompozytowej w układzie klasycznym z podwoziem trójkołowym z kołem przednim.

Projekt wyjściowy opracowywany jest na bazie analizy parametrów wybranych samolotów o podobnym przeznaczeniu.

Na potrzeby niniejszego przykładu wykorzystano informacje o samolotach Beech 23 Musketeer, Beagle B121 Pup, Slingsby T67 Fire Fly i Socata GY 80 Horizon.

Główne parametry tego samolotu zebrano w Tabeli 1.

Tablica 1

Parametr	Symbol	Wartość
powierzchnia nośna	S [m ²]	14.15
rozpiętość	b [m]	10.4
średnia cięciwa płata	c [m]	1.375
wydłużenie płata	Λ [-]	7.64
zbieżność płata	λ [-]	0.571
długość kadłuba	L_k [m]	7.66
wysokość	h [m]	3.1
cecha objętościowa usterz. wysokości	κ_H [-]	0.43
wydłużenie usterz. wysokości	Λ_H [-]	3.75
cecha objętościowa usterz. kierunku	κ_V [-]	0.4
wydłużenie usterz. kierunku	Λ_V [-]	3.75

3.3. Modyfikowanie wariantu zerowego

Dla uzyskania przejrzystości przykładu założono, że jedynymi parametrami, jakie mogą być modyfikowane w dalszej części projektowania są: średnia cięciwa i rozpiętość płata głównego.

Cięciwa będzie modyfikowana w taki sposób, aby zachowana została zbieżność płata.

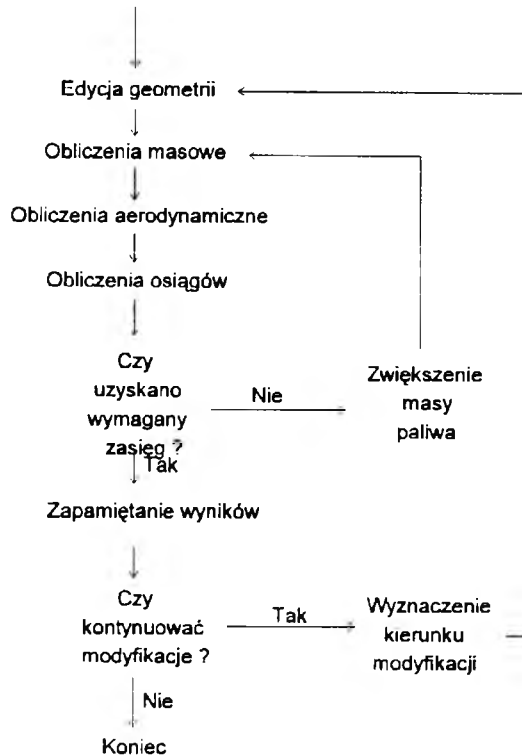
Usterzenia nie podlegają modyfikacji – założono, że zmiany cech objętościowych κ_H i κ_V zmieniają się w dopuszczalnym zakresie (słuszność takiego założenia zostanie zweryfikowana przy analizie wyników modyfikacji).

Projekt zerowy został opisany przy użyciu przedstawionego wyżej modelu geometrii. Na podstawie informacji zawartej w bazie danych przeprowadzono wstępny dobór zespołu napędowego.

Jako podstawowe kryterium jakości wybrano minimalne kilometrowe zużycie paliwa. Kryteria drugiego rodzaju, uwzględniające cenę samolotu, obliczane są drogą wnoszenia poprawek do podstawowej funkcji kryterialnej.

Obliczenia prowadzono w sposób przedstawiony na schemacie (rys.5). Edycja geometrii sprowadzała się do zmiany wartości parametrów aktywnych (cięciwy i rozpiętości) oraz obliczeniu nowych wartości parametrów od nich zależnych.

W oparciu o zależności statystyczne [16] obliczono maksymalną masę startową samolotu w rozbiu na jego zespoły główne. Obliczono biegunowe

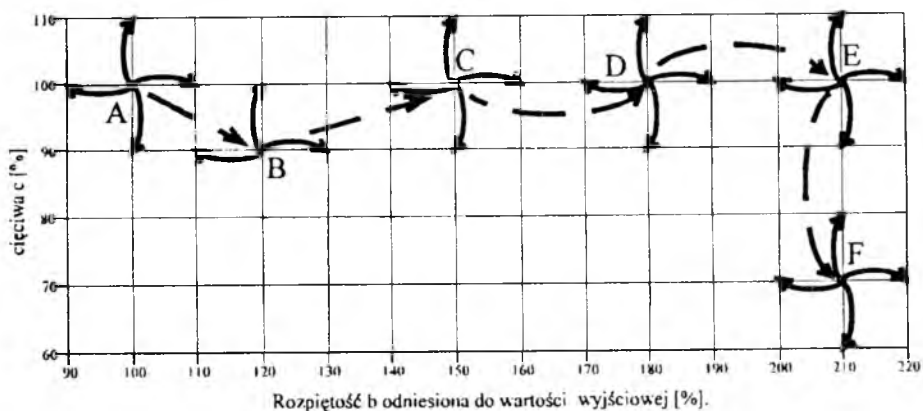


Rys. 5. Organizacja przebiegu obliczeń w zadaniu testowym

równowagi samolotu w konfiguracji gładkiej, startowej i do lądowania przy użyciu programu opartego na arkuszach inżynierskich ESDU i DVL. Kolejnym krokiem były klasyczne obliczenia osiągow, w wyniku których otrzymywano między innymi wartości prędkości charakterystycznych (minimalna, maksymalna, największego wznoszenia itp.) w zależności od wysokości lotu, zasięg, długotrwałość lotu i kilometrowe zużycie paliwa. Gdy obliczony zasięg nie odpowiadał wymaganiom modyfikowano ilość paliwa o wartość obliczaną na podstawie różnicy zasięgu zakładanego i uzyskanego z obliczeń oraz obliczonego kilometrowego zużycia paliwa. Zmiana masy paliwa pociąga za sobą zmiany pozostałych mas, zatem dalsze obliczenia należy rozpocząć od ponownego przeprowadzenia obliczeń masowych. Parametry samolotu, który uzyskał żądany zasięg są zapamiętywane wraz ze wszystkimi wynikami wykonanych dla niego obliczeń. O kontynuowaniu modyfikacji samolotu każdorazowo decyduje projektant. Widząc kierunek zmian może uznać że dalsze ich wprowadzanie pogarsza jakość samolotu względem kryteriów trudno poddających się algo-

rytmizacji, takich jak: technologiczność wykonania, estetyka bryły, wygoda eksploatacji itp.. W przypadku, podjęcia decyzji o kontynuowaniu modyfikacji wyznaczany jest na podstawie wcześniej zapamiętanych wyników, najkorzystniejszy kierunek zmian parametrów aktywnych. Zmiany te wprowadzane są podczas kolejnej edycji geometrii projektu i cały proces powtarza się od początku.

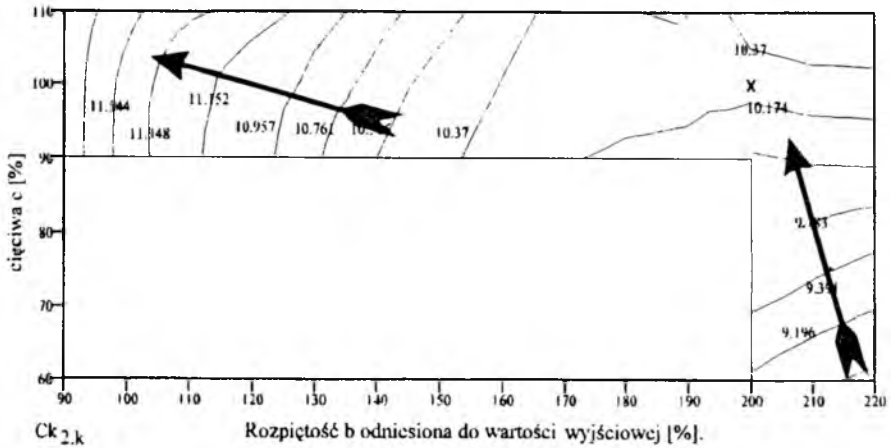
Zmiany cięciwy i rozpiętości płata samolotu testowego podczas modyfikacji przedstawia rys.6. Wersja wyjściowa samolotu reprezentowana jest na tym rysunku przez punkt *A* (100% wyjściowej rozpiętości, 100% wyjściowej cięciwy). Aby znaleźć kierunek największego spadku funkcji celu (minimalizacja zużycia paliwa) próbkowano obszar decyzji dopuszczalnych w okolicy punktu *A* zmniejszając i zwiększając oba parametry o 10%. W wyniku tej operacji wyznaczono punkt *B*, wokół którego ponowiono próbkowanie charakteru zmian funkcji celu. W punkcie *F* projektant zakończył modyfikacje, stwierdzając, że dalsze zmiany prowadzą do uzyskania konstrukcji nietechnologicznej, a ponadto wydłużenie płata uzyskane w tym punkcie na tyle odbiega od wydłużeń płatów znanych samolotów podobnej klasy, że wątpliwym staje się przyjęty statystyczny model masowy (przewiduje się szybszy wzrost masy samolotu ze wzrostem wydłużeń niż wynikałoby to z użytego modelu).



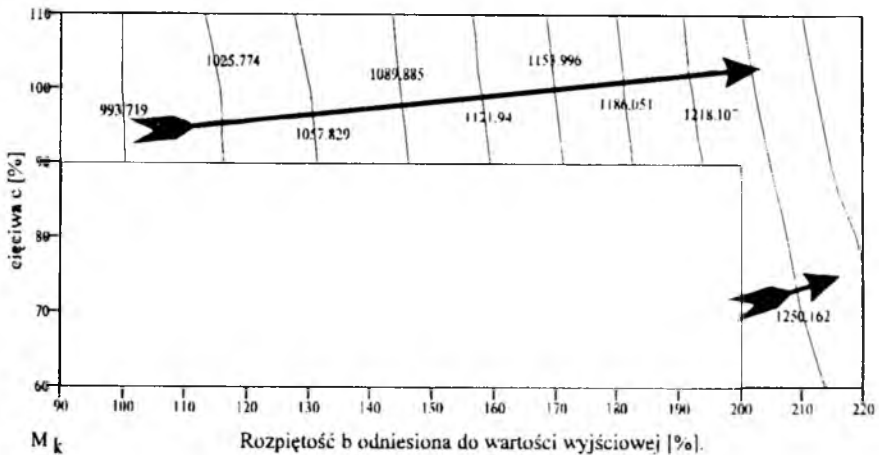
Rys. 6. Schemat poszukiwań

Na rys.7 prześledzić można otrzymane zmiany kilometrowego zużycia paliwa. Wynika z niego, że zużycie paliwa maleje ze wzrostem rozpiętości płata aż do momentu, gdy osiągnie ona ok. 200% swojej wartości wyjściowej (znak "x" na rysunku).

Dalsze zmniejszenie zużycia paliwa można osiągnąć zmniejszając cięciwę



Rys. 7. Kilometrowe zużycie paliwa na wys. 2000m [$\text{dm}^3/100\text{km}$]



Rys. 8. Maksymalna masa startowa [kg]

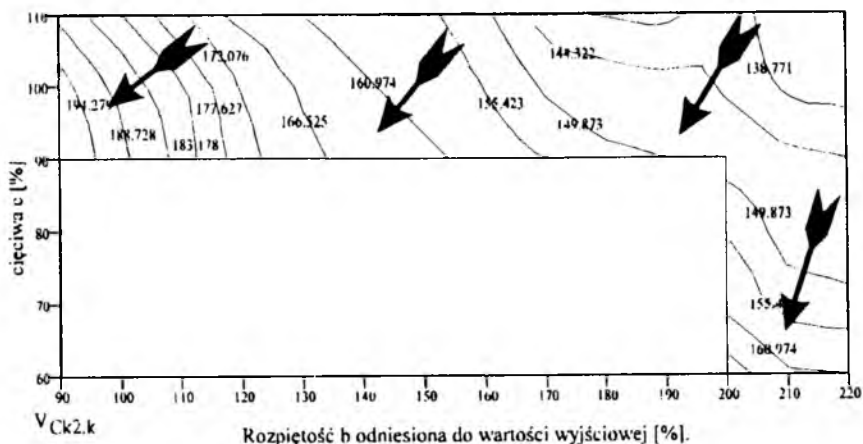
plata, prowadzić to jednak będzie do wspomnianych już wyżej trudności wykonawczych.

Poza badaniem zmienności podstawowej funkcji celu monitorowano (systematycznie przeglądano) wartości innych wielkości ważnych z punktu widzenia własności użytkowych projektu. Monitorowanie pozwala między innymi określić, czy nie zostały przekroczone ograniczenia nałożone na niektóre z charakterystyk samolotu. Przykłady zawierają rys.8 ÷ rys.11.

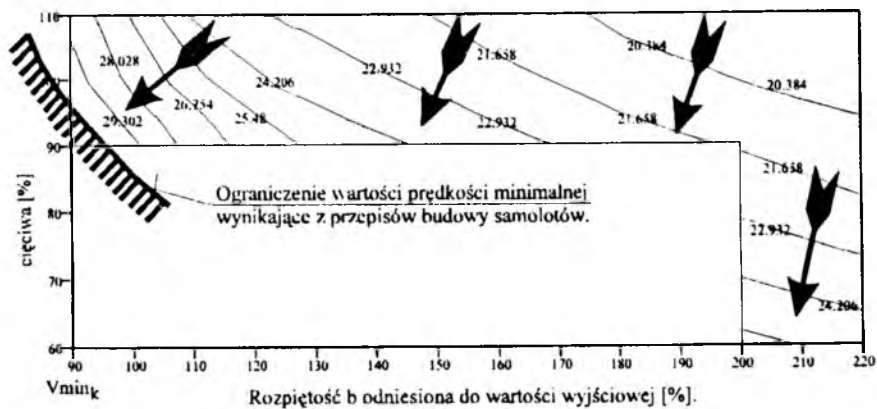
Rys.8 przedstawia wpływ modyfikacji plata na całkowitą masę startową

samolotu. Zgodnie z oczekiwaniami masa rośnie w miarę wydłużania skrzydła i należy sprawdzać czy nie przekroczyła wartości dopuszczalnej, przewidzianej przepisami dla danej klasy samolotów.

Rys.9 pokazuje, że o wartości prędkości największego zasięgu decyduje pole powierzchni płata (jednoczesny wzrost cięciwy i rozpiętości powoduje spadek tej prędkości).



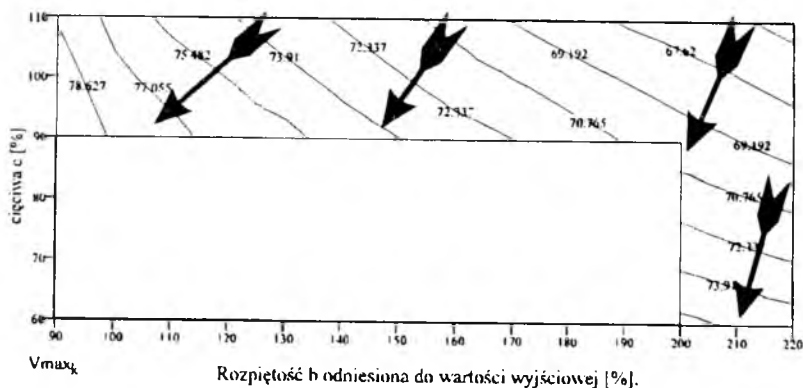
Rys. 9. Prędkość maksymalnego zasięgu na wys. 2000 m [km/h]



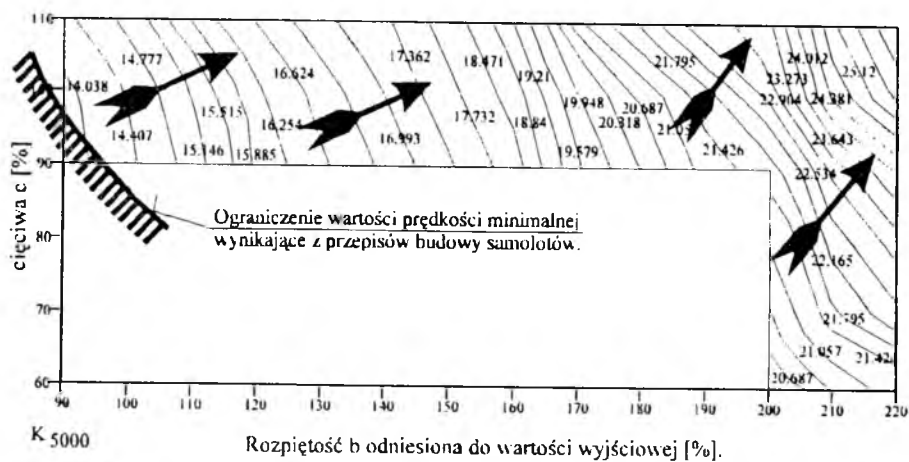
Rys. 10. Prędkość minimalna samolotu na poziomie morza [m/s]

Przy analizie zmian prędkości minimalnej (rys.10) napotkano przekroczenie ograniczenia wynikającego z przepisów budowy statków powietrznych. Wartość prędkości minimalnej zależy od powierzchni płata oraz liczby Rey-

nolds, gdyż od niej silnie zależy wartość maksymalnego współczynnika siły nośnej płata. Wartość liczby Reynoldsa jest natomiast wprost proporcjonalna do cięciwy. Z rys.11 wnioskujemy, że wzrost powierzchni płata wpływa również na zmniejszenie prędkości maksymalnej samolotu.



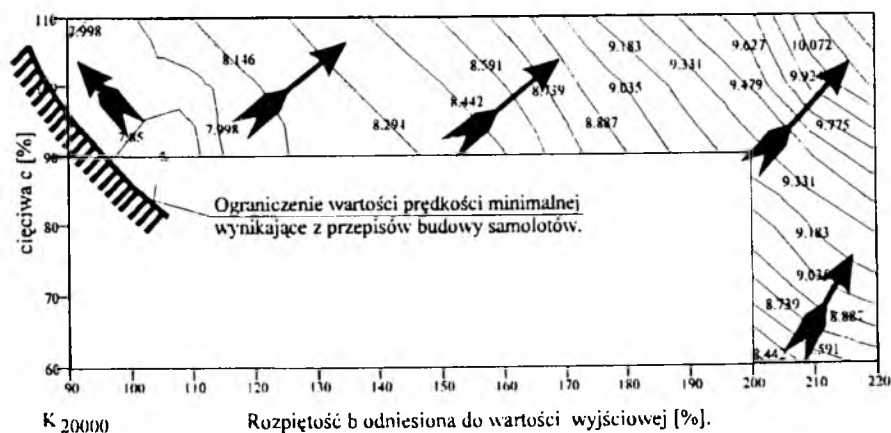
Rys. 11. Maksymalna prędkość lotu na poziomie morza [m/s]



Rys. 12. Koszt 100 kilometrowego przelotu na pułapie 2000m samolotu o resursie 5000 godzin [USD]

Na podstawie znajomości wymienionych wielkości można budować pochodne wskaźniki efektywności samolotu, odpowiadające różnym, przewidywanym dla danego samolotu, misjom. Ze względu na przyjęte wcześniej założenia (patrz p.3.1) zbudowano pochodne funkcje kryterialne wiążące ze sobą koszt eksploatacji (tu koszt paliwa) z ceną samolotu rozłożoną na prze-

widywany okres jego eksploatacji. Dla obliczenia oczekiwanej ceny rynkowej samolotu posłużono się zależnością statystyczną, zaczerpniętą z [7]. Wiąże ona cenę samolotu z jego maksymalną masą startową. Rys.12 i 13 przedstawiają zmienność tak obliczonych kosztów przelotu na dystans 100 km nad zbadaną częścią obszaru decyzji dopuszczalnych. W przypadku samolotu przewidzianego na 5000 godzin użytkowania dominującym okazał się udział ceny samolotu, co spowodowało, że rozwiązanie optymalne ze względu na wyżej zdefiniowane koszty znalazło się na granicy obszaru decyzji dopuszczalnych. Wpływ ceny zużytego paliwa na charakter zmian kosztów eksploatacji uwidacznia się dopiero, gdy cena samolotu rozkłada się na 20 000 godzin lotu (rys.13). Należy mieć tu na względzie, że przedłużenie okresu użytkowania samolotu może wiązać się z koniecznością obniżenia poziomów naprężeń w elementach silnie obciążonych, a więc z kolejnym wzrostem masy konstrukcji. Efekt ten nie został uwzględniony w przykładzie z powodu braku dla niego wiarygodnego modelu obliczeniowego.



Rys. 13. Koszt 100 kilometrowego przelotu na pułapie 2000m samolotu o resursie 20000 godzin [USD]

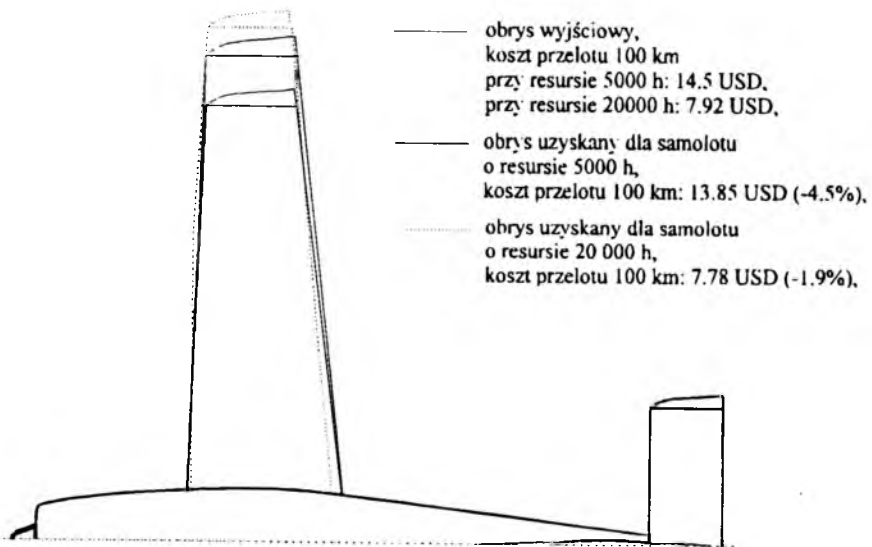
Główne parametry samolotów o resursie 5000 i 20000 godzin, otrzymanych w wyniku modyfikacji, zestawiono w tabeli (Tabela 2). Koszt przelotu 100 km samolotu zmalał w efekcie z 14.5 USD do 13.85 USD (o 4.5%), przy założeniu krótszego resursu i z 7.92 USD do 7.78 USD (o 1.9%), przy założeniu dłuższego resursu.

Tabela 2

Parametr	Symbol	Wartość przy resursie 5000h	Wartość przy resursie 20000h
powierzchnia nośna	S [m ²]	12.35 (87.3%)	13.5 (95.4%)
rozpiętość	b [m]	9.36 (90%)	11.024 (106%)
średnia cięciwa płata	c [m]	1.334 (97%)	1.238 (90%)
wydłużenie płata	Λ [-]	7.09 (92.9%)	9.0 (117.8%)
zbieżność płata	λ [-]	0.571 (100%)	0.571 (100%)
długość kadłuba	L_k [m]	7.66 (100%)	7.66 (100%)
wysokość	h [m]	3.1 (100%)	3.1 (100%)
cecha objętości usterz. wysok.	κ_H [-]	0.49 (115%)	0.45 (105%)
wydłuż. usterz. wysokości	Λ_H [-]	3.75 (100%)	3.75 (100%)
cecha objętości usterz. kierunku	κ_V [-]	0.458 (115%)	0.419 (105%)
wydłuż. usterz. kierunku	Λ_V [-]	3.75 (100%)	3.75 (100%)

Powyższe wyniki w formie graficznej przedstawia rys.14.

Uzyskane wyniki świadczą o tym, że dla zadanego modelu eksploatacji i preferencji ekonomicznych użytkownika można znaleźć optymalny poziom doskonałości aerodynamicznej samolotu.



Rys. 14. Porównanie wyjściowego obrysu samolotu z obrysami uzyskanymi drogą modyfikacji

4. Podsumowanie i wnioski

Zaproponowana w pracy filozofia budowy systemu wspomaganie pozwala w kolejnych iteracjach uszczegóławiać projekt i zastępować w razie potrzeby algorytmy uproszczone metodami bardziej zaawansowanymi, a kontrolowanie pracy systemu przez projektanta we wszystkich stadiach obliczeń pozwala sprawnie i ekonomicznie tworzyć warianty projektu i oceniać ich przydatność, co znacznie powinno przyspieszyć zbieżność iteracyjnego procesu projektowania.

System ten jest systemem otwartym i łatwo uzupełnić go o kolejne moduły – na przykład badający stateczność lub obliczający charakterystyki aerodynamiczne w oparciu o metody panelowe.

W dalszym ciągu prac nad metodami wspomaganie projektowania wstępnie przewiduje się wykorzystanie metod numerycznych w obliczeniach aerodynamicznych, odstąpienie od metod czysto statystycznych w obliczeniach masowych oraz przystosowanie modułu zarządzającego systemem programów wspomagających do automatycznego rozwiązywania podstawowych typów zadań optymalizacyjnych.

Stosowanie i rozwijanie metod projektowania wspomaganego komputerowo daje szansę szybszego, dokładniejszego i tańszego dostosowania oferty wytwórni lotniczej do potrzeb potencjalnych użytkowników. W szczególności dotyczy to zaprezentowanej wyżej metody, której istota leży w możliwie wczesnym przewidywaniu konsekwencji poszczególnych decyzji projektanta, a tym samym w obniżeniu nakładów na dostosowanie samolotu do konkretnych wymagań.

Literatura

1. DIETRICH J., *System i konstrukcja*, PWN Warszawa 1984
2. DIETRICH J., *Projektowanie i konstruowanie*, PWN Warszawa 1986
3. *An SAE Publication*, Aerospace Engineering nr 6,1991, Warrendale, USA
4. KULICKI P., LASEK M., WINIECKI J., *A short range passenger/freighter canard – some problems of a preliminary aerodynamic concept*, SAE Technical Paper No921012
5. MISZTAŁ F., *Założenia konstrukcyjne i obliczenia w budowie samolotów*, PWN, Warszawa 1952
6. PATURSKI Z., *Przewodnik po zadaniach domowych z mechaniki lotu*, Politechnika Warszawska ITLiMS, 1981 niepublikowana

7. ROSKAM J., *Airplane Design*, Roskam Aviation and Engineering Corp, Ottawa 1985
8. RAYMER D.P., *Aircraft Design: A Conceptual Approach.*, AIAA Education Series, Washington 1989
9. STINTON D., *The anatomy of the airplane*, Foulis Co. Ltd. London 1966
10. TORENBECK E., *Synthesis of subsonic airplane design*, Delft Univ. Press, Delft 1982
11. WINKLER T., *Komputerowy zapis konstrukcji*, WNT, Warszawa 1987
12. MAIR W.A., BIRDSALL D.L., *Aircraft performance*, Cambridge University Press 1992
13. KOTIK, *Dinamika vzliota i posadki samoliotov*, Mašinstroenie, Moskwa 1984
14. STATON R., *Statistical Weight Estimation Methods for Fighter/Attack Aircraft*, Vought Aircraft Report 2-59320/8R-50475, 1968
15. STATON R., *Cargo/Transport Statistical Weight Estimation Equations*, Vought Aircraft Report 2-59320/9R-50549, 1969
16. JACKSON A., *Preliminary Design Weight Estimation Program*, AeroCommander Div. Report 511-009, 1971

Selection of Main Design Parameters of a Light Aircraft

Summary

A method of selection of the main design parameters for light aircraft has been developed. The design process has been started from the so-called "initial configuration" which is usually selected on the basis of statistics of the factors aircraft and includes future development insight as well. A mathematical model for estimation of economical versus the mission parameters (as loading carrying capacity, range, cruising speed) and the aircraft geometry has been presented. The model was applied to the preliminary Computer Aided Design. Different objective functions and aircraft manufacturing regulations have been imposed. Main geometrical parameters, optimal in respect of user economy, have been found. Due to the interaction between the designer and user-friendly numerical package (made by the author) it is possible to obtain the aircraft easy and cheap to produce, esthetic (nice in shape), with good performances and others technical parameters.

PARAMETRYCZNA WRAŻLIWOŚĆ KORKOCIĄGU USTALONEGO

MARIA A. ZŁOCKA

Politechnika Warszawska

Korkociąg ustalony ze standardowo wychylonymi powierzchniami sterowymi na ogół jest niestateczny. Badanie wpływu zmiany położenia powierzchni sterowych na korkociąg ustalony i na stateczność ruchu zaburzonego jest przedmiotem niniejszej pracy. Do badania tego zastosowano teorię wrażliwości. Wyznaczono współczynniki wrażliwości pierwszego rodzaju liczone względem kątów wychyleń powierzchni sterowych. Przykładowe obliczenia wykonano dla samolotu klasy szkolno-treningowej.

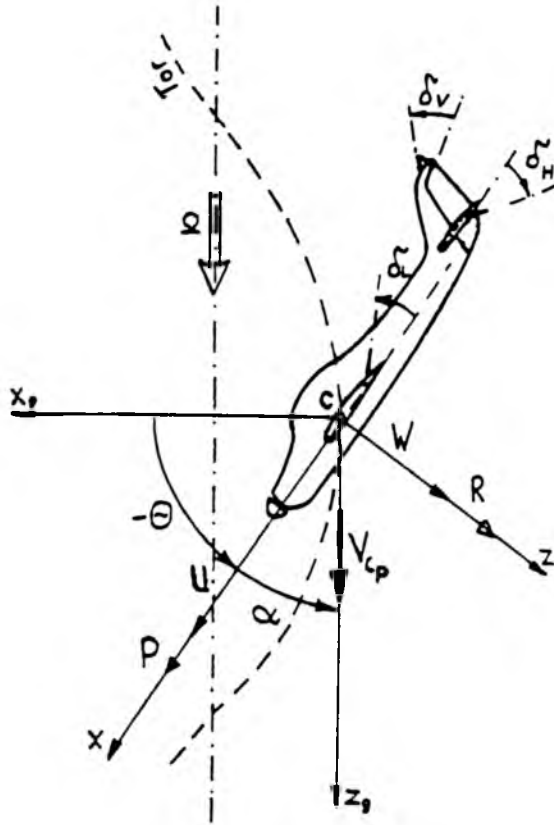
1. Wstęp

Ruch samolotu na pozakrytycznych kątach natarcia charakteryzuje częściowa utrata sterowności i stateczności. Dlatego też ważnym badaniem projektu wstępnego jest ocena własności dynamicznych korkociągu samolotu. Korkociąg jest figurą akrobacyjną, w której można wyróżnić trzy fazy. Pierwsza wprowadzenie i trzecia wyprowadzenie z korkociągu są ruchami nieustalonymi. Charakteryzują je duże zmiany parametrów lotu. Druga faza, wykonanie zwitek, może mieć charakter ustalony. Wówczas samolot obraca się wokół pionowej osi linii spiralnej, po której porusza się środek masy [1]. Parametry lotu w tej fazie nie zmieniają się. W klasycznie wykonywanym korkociągu ustalonym ster kierunku jest maksymalnie wychylony w stronę wykonywanego obrotu, ster wysokości jest wychylony maksymalnie do góry, a lotki są niewychylone. Badanie tej fazy ruchu sprowadza się najczęściej do wyznaczenia parametrów korkociągu ustalonego [2] i do badania stateczności ruchu zaburzonego [4].

Na samolotach szkolno-treningowych pilot musi wykonać określoną liczbę regularnych zwitek i niestateczność ruchu zaburzonego może ten manewr utrudnić lub uniemożliwić. Zmiana położenia powierzchni sterowych w różny sposób może wpłynąć na własności ruchu. W skrajnym przypadku, gdy wpływa

ustateczniająco, opóźnia wyprowadzenie samolotu z korkociągu i tym samym zmniejsza bezpieczeństwo lotu.

Badanie wpływu zmiany położenia powierzchni sterowych na korkociąg ustalony i na stateczność ruchu zaburzonego jest przedmiotem niniejszej pracy. Do tego badania proponuje się zastosowanie teorii wrażliwości i wyznaczenie współczynników wrażliwości pierwszego rodzaju liczonych względem kątów wychyleń powierzchni sterowych [6].



Rys. 1. Układy współrzędnych związanych z samolotem

2. Model ruchu samolotu w korkociągu

W pracy przyjęto standardowe założenia stosowane dla przestrzennego ru-

chu samolotu [2,3,4,7,8]:

- samolot jest nieodkształcalny,
- masa i momenty bezwładności są stałe,
- samolot posiada płaszczyznę symetrii geometrycznej i masowej,
- wychylenie powierzchni sterowych jest ograniczone,
- wychylenie powierzchni sterowych nie zmienia momentów bezwładności samolotu i położenia środka masy,
- w korkociągu ustalonym kąty wychyleń sterów są traktowane jako parametry wpływające jedynie na siły aerodynamiczne,
- obowiązuje aerodynamika quasi-stacjonarna,
- efekty giroskopowe są pominięte,
- układ współrzędnych, w którym opisano ruch samolotu ma początek w środku masy samolotu i jest sztywno związany z ciałem.

Równania ruchu samolotu wyprowadzone w układzie współrzędnych $Cxyz$ (rys.1), po uwzględnieniu powyższych założeń są nieliniowe i można je przedstawić w postaci wektorowej:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & \mathbf{x} &= [U, V, W, P, Q, R, \Theta, \Phi]^T \\ \mathbf{u} &= [\delta_H, \delta_L, \delta_V]^T \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie:

\mathbf{x} jest wektorem stanu, w którym znajdujemy:

- prędkość środka masy $\mathbf{V}_c = [U, V, W]^T$,
- prędkość kątową $\boldsymbol{\Omega} = [P, Q, R]^T$,
- kąty Eulera: Θ pochylenia, Φ przechylenia;

\mathbf{u} jest wektorem wychyleń powierzchni sterowych:

- steru wysokości δ_H ,
- lotek δ_L ,

– steru kierunku δ_V .

Składowe wektora prawych stron są określone wzorami:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x - mg \sin \Theta + T_x \\ F_y + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ F_z + mg \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} - \mathbf{J}_\Omega \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \\ [f_4, f_5, f_6]^\top &= \mathbf{J}_B^{-1} \mathbf{M} + \mathbf{J}_B^{-1} \mathbf{M}_T - \mathbf{J}_B^{-1} \mathbf{J}_\Omega \mathbf{J}_B \\ f_7 &= Q \cos \Phi - R \sin \Phi \\ f_8 &= P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \Theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie:

- \mathbf{F} – siła aerodynamiczna,
- \mathbf{M} – moment aerodynamiczny,
- \mathbf{T} – siła ciągu (w korkociągu stała lub równa zero),
- \mathbf{M}_T – moment pochodzący od układu napędowego,
- \mathbf{J}_B – macierz momentów bezwładności,
- m – masa samolotu,
- g – przyspieszenie ziemskie,

oraz:

$$\mathbf{J}_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}$$

Jak widać z powyższego prawe strony są nieliniowymi funkcjami współrzędnych wektora stanu \mathbf{x} , wektora kątów wychyleń sterów \mathbf{u} , masy i momentów bezwładności.

Siła \mathbf{F} i moment aerodynamiczny \mathbf{M} , w przypadku przestrzennego ruchu samolotu, szczególnie na dużych kątach natarcia, w sposób skomplikowany zależą od kształtu samolotu, jego prędkości środka masy, prędkości kątowej, kątów natarcia α i ślizgu β , oraz kątów wychyleń powierzchni sterowych \mathbf{u} . Do tej pory nie opracowano metody dokładnego ich wyznaczania. Określenie tych sił wymaga wprowadzenia uproszczeń modelu i analizy ich wpływu na badany ruch [9].

W pracy siłę \mathbf{F} i moment \mathbf{M} określono na podstawie tunelowych charakterystyk aerodynamicznych i charakterystyk otrzymanych z badań w locie przy założeniu opływu quasi-stacjonarnego.

Wymienione wyżej kąty: natarcia α i ślizgu β , są określone związkami:

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{arctg}(W/U) & -\pi \leq \alpha \leq \pi \\ \beta &= \operatorname{arcsin}(V/V_c) & -\pi \leq \beta \leq \pi\end{aligned}\quad (2.3)$$

Równania ruchu samolotu w korkociągu (2.1) są nieliniowe. W związku z powyższym parametry korkociągu ustalonego są rozwiązaniem układu nieliniowych równań algebraicznych:

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0 \quad (2.4)$$

Dla typowych w zwitkach wychyleń sterów \mathbf{u}_0 może istnieć więcej niż jedno rozwiązanie układu (2.4). Samolot wówczas może wykonywać różne korkociągi ustalone np. stromy i płaski. Może również istnieć rozwiązanie układu równań (2.4) dla nietypowych wychyleń powierzchni sterowych.

3. Analiza wrażliwości

Badanie korkociągu ustalonego sprowadza się najczęściej do wyznaczenia parametrów lotu ustalonego i do badania stateczności ruchu zaburzonego. Własności dynamiczne zaburzonego korkociągu ustalonego samolotu wyznaczone są przez obliczenie wartości własnych i wektorów własnych macierzy stanu \mathbf{B} układu równań (3.1) otrzymanego w wyniku linearyzacji układu równań (2.1) dla parametrów ruchu ustalonego:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad (3.1)$$

w którym:

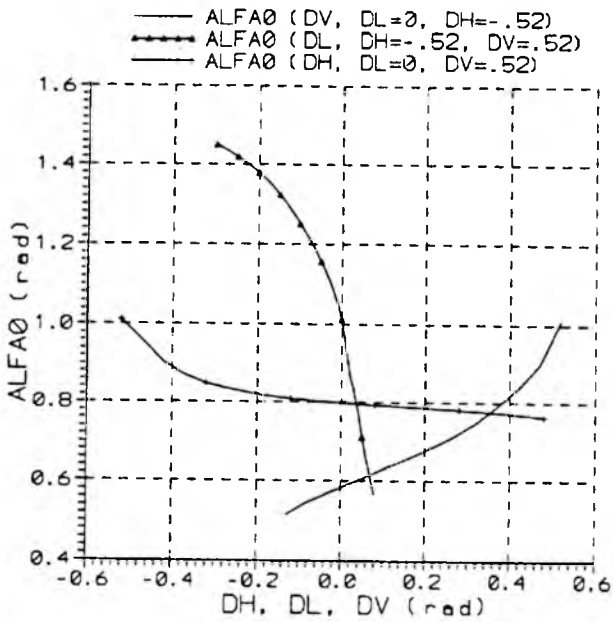
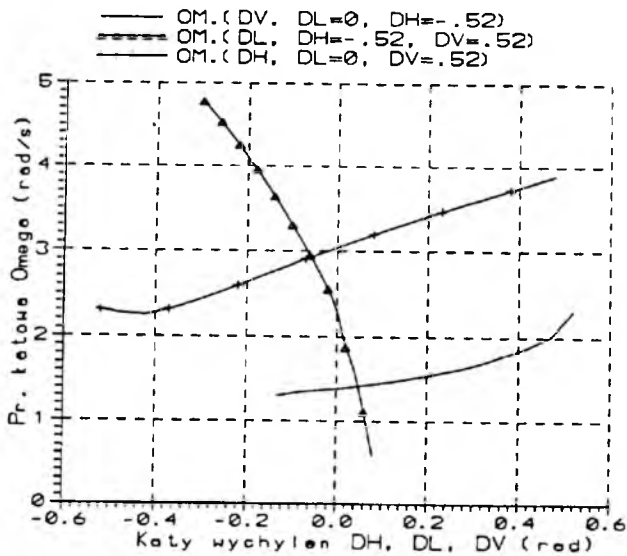
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{x}}$$

Wpływ zmiany położenia powierzchni sterowych na stateczność zaburzonego korkociągu ustalonego samolotu określono za pomocą następujących współczynników wrażliwości pierwszego rodzaju [6,7]:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \delta_n} = \sum_{k=1}^8 \sum_{l=1}^8 v_i^k w_i^l \frac{\partial b_{kl}}{\partial \delta_n} \quad n = H, L, V \quad i = 1, \dots, 8 \quad (3.2)$$

gdzie:

- λ_i - i -ta wartość własna macierzy stanu \mathbf{B} ,
- v_i^k - k -ty element wektora własnego \mathbf{v}_i macierzy \mathbf{B}^\top ,
- w_i^l - l -ty element wektora własnego \mathbf{w}_i macierzy stanu \mathbf{B} .

Rys. 2. Kąt natarcia α korkociągu ustalonegoRys. 3. Prędkość kątowna Ω korkociągu ustalonego

Dla wektorów własnych współczynniki wrażliwości mają postać [5,6]:

$$\frac{\partial w_i}{\partial a_n} = \sum_{k=1}^8 \sum_{l=1}^8 \sum_{j=1}^8 h_{ji} w_j \frac{\partial b_{kl}}{\partial a_n} \quad n = H, L, V \quad i = 1, \dots, 8 \quad (3.3)$$

gdzie:

$$h_{ij} = \frac{v_j^k w_i^l}{\lambda_i - \lambda_j}$$

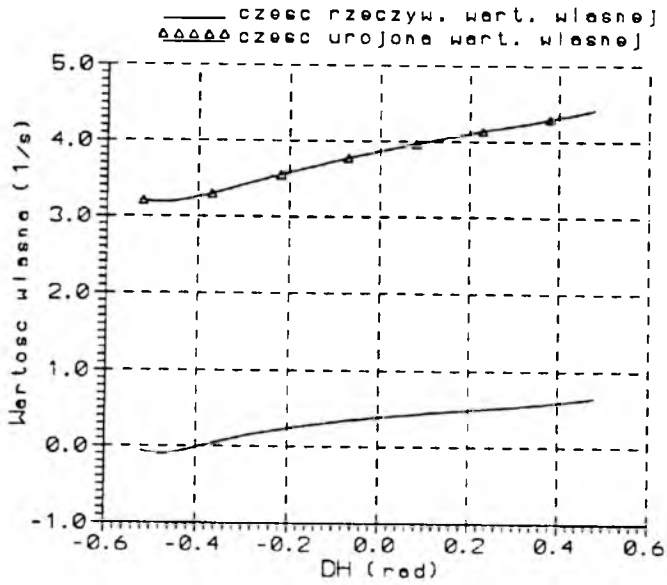
W koniecznych przypadkach mogą być wyznaczone pochodne wyższego rzędu.

4. Przykłady obliczeniowe

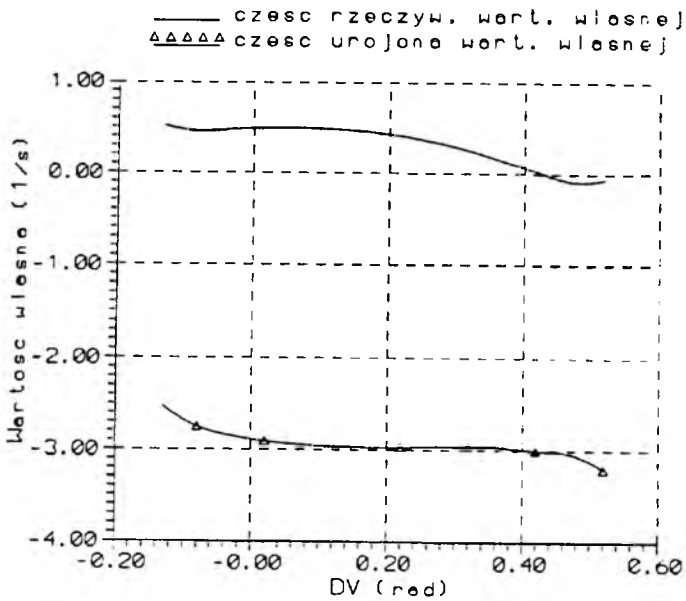
Obliczenia wykonano dla samolotu szkolno-treningowego o masie $m = 1100$ kg, polu powierzchni nośnej $S = 12.28$ m² i rozpiętości $b = 8$ m. Samolot ten, sterowany klasycznie wchodzi w korkociąg w 8 sekundzie od początku manewru wprowadzenia. Dla klasycznie wychylonych powierzchni sterowych ($\delta_H = -0.52$ rad, $\delta_L = 0$, $\delta_V = 0.52$ rad) samolot wykonuje korkociąg ustalony (rys.2 i rys.3), w którym czas zwitki wynosi około 3 s. Możliwy jest również korkociąg ustalony tego samolotu dla innych niestandardowych wychyleń powierzchni sterowych co zostało przedstawione na rys.2 i rys.3. Samolot może wykonywać korkociąg ustalony przy zerowych wychyleniach powierzchni sterowych jak również, przy standardowo wychylonych lotkach i sterze kierunku, a ze sterem wysokości maksymalnie wychylonym do dołu.

Badanie stateczności ruchu zaburzonego wykazało, że klasycznie sterowany korkociąg ustalony opisanego samolotu jest stateczny. Wszystkie wartości własne macierzy **B** mają części rzeczywiste ujemne. Wspomniany korkociąg niestandardowy, ze sterem wychylonym do dołu, jest niestateczny. Jedna z wartości własnych macierzy **B** ma dodatnią część rzeczywistą (rys.4). Zależność wspomnianej wartości własnej od wychylenia steru kierunku przedstawia rys.5. Niestateczny jest również korkociąg ustalony z zerowym wychyleniem powierzchni sterowych.

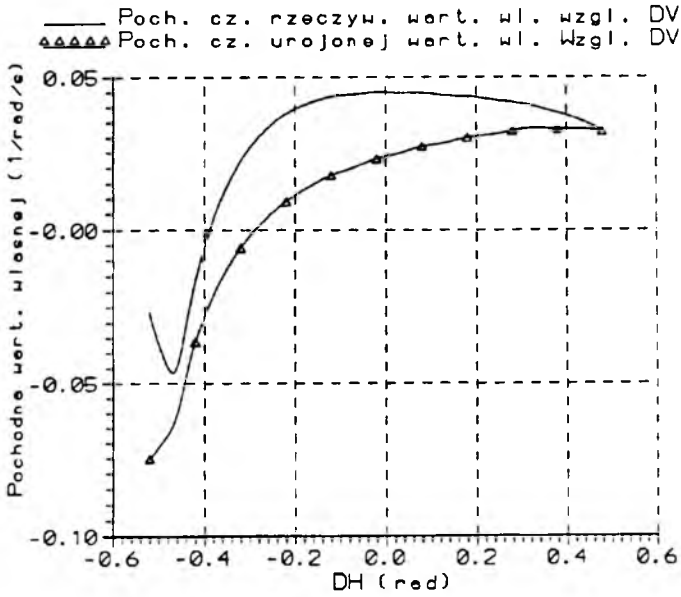
Na rysunkach 6 i 7 zostały przedstawione współczynniki wrażliwości omawianej wartości własnej. Są to pochodne wartości własnej liczone względem kąta wychylenia steru kierunku w funkcji kątów wychylenia steru wysokości i steru kierunku.



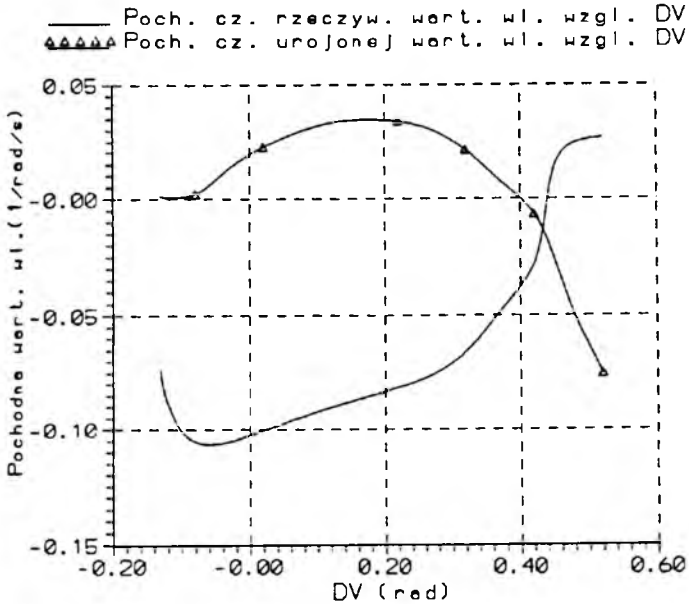
Rys. 4. Wartość własna macierzy stanu korkociągu ustalonego dla różnych kątów wychyleń δ_H



Rys. 5. Wartość własna macierzy stanu korkociągu ustalonego dla różnych kątów wychyleń δ_V



Rys. 6. Pochodna wartości własnej względem kąta wychylenia steru kierunku δ_V w funkcji kąta wychylenia steru wysokości δ_H



Rys. 7. Pochodna wartości własnej względem kąta wychylenia steru kierunku δ_V w funkcji kąta δ_V

Wyznaczone współczynniki wrażliwości pozwalają sprawdzić, że zmiana położenia wyżej wymienionych sterów w wybranym do obliczeń samolocie zwiększa niestateczność ruchu.

5. Wnioski

Przedstawione w pracy badania pozwalają stwierdzić czy dla danego samolotu istnieje możliwość wykonania korkociągu ustalonego i jakie będą jego własności dynamiczne. Przedstawione wyżej współczynniki wrażliwości informują jakie są kierunki zmian parametrów korkociągu ustalonego pod wpływem zmiany położenia powierzchni sterowych. Dają również informację czy możliwa jest taka kombinacja wychyleń aby wyznaczona wartość własna dla danych parametrów lotu ustalonego miała część rzeczywistą dodatnią czy też ujemną w zależności od potrzeby.

Opisane wyżej współczynniki wrażliwości obarczone będą błędem w zależności od dokładności wyznaczonych charakterystyk i pochodnych aerodynamicznych dla pozakrytycznych kątów natarcia. Dlatego też w przedstawionym przykładzie obliczeniowym mogą być one wykorzystywane raczej jakościowo, a nie ilościowo.

Badania zrealizowano w ramach projektu Nr 7S10105006 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w 1994 r.

Literatura

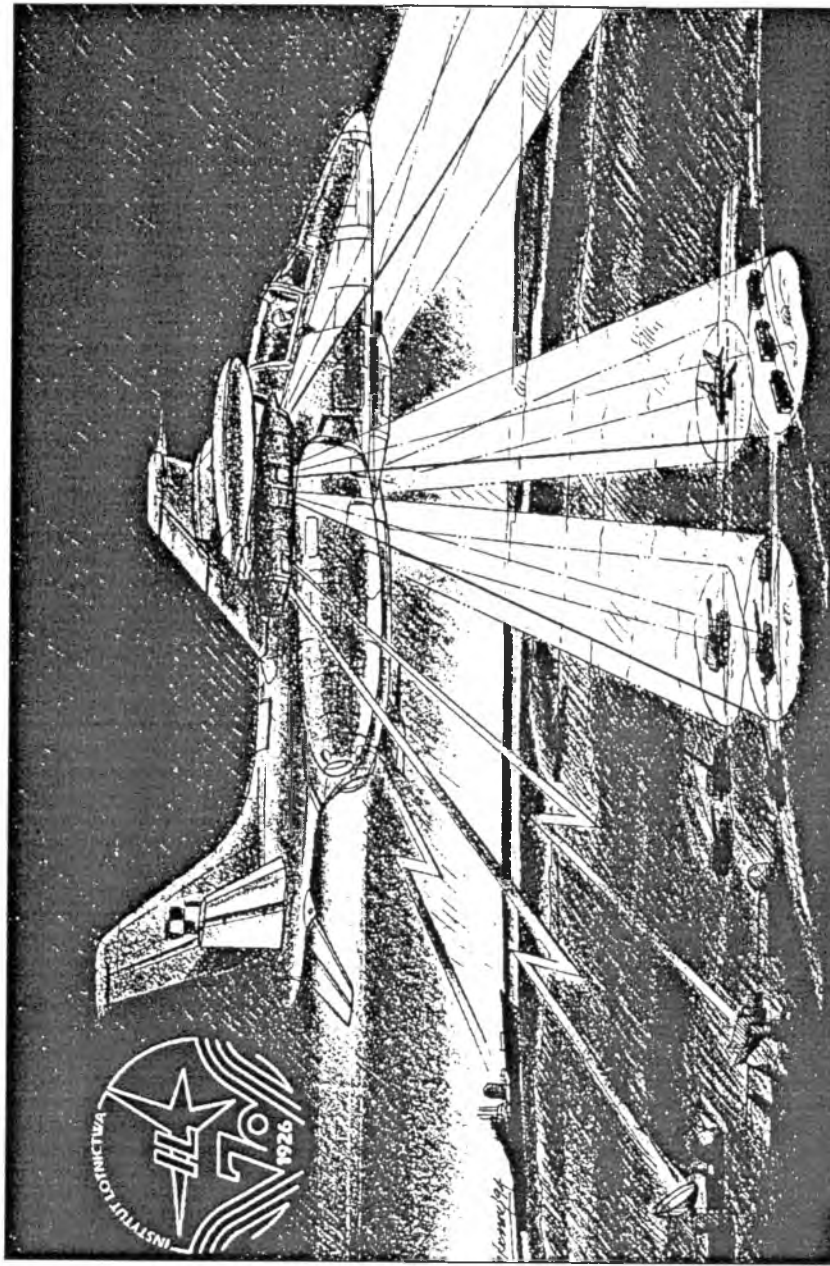
1. ABLAMOWICZ A., *Akrobacja, WK i L*, Warszawa 1979
2. ADAMS W., *Analytic Prediction of Airplane Equilibrium Spin Characteristics*, NASA, Washington 1972
3. ANGLIN E., *Recent Research on Aerodynamic Characteristics of Fighter Configurations During Spins*, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Florida 1977, 416-418
4. ETKIN B., *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley Sohns, Inc., New York, London, Sydney, Toronto 1972
5. MARYNIAK J., BLAJER W., *Numeryczna symulacja korkociągu samolotu*, Mech. Teoret. i Stos., 21, 2-3, PWN 1983, 481-492
6. PORTER B., CROSSLEY R., *Modal Control, Theory and Applications*, Taylor and Francis Ltd., London 1972

7. ZŁOCKA M., MARYNIAK J., *Wrażliwość stateczności integralnej nieodkształcalnego samolotu na zmiany wielkości parametrów konstrukcyjnych*, XXII Symp. "Modelowanie w Mechanice", Zbiór Referatów, Gliwice-Wisła 1983, 455-462
8. ZŁOCKA M., *Zastosowanie analizy wrażliwości do badania korkociągu samolotu*, ZN PŚ Seria: Mechanika, 103, XXX Symp. "Modelowanie w Mechanice", Gliwice 1991, 291-294
9. ZŁOCKA M.A., *O pewnej metodzie upraszczania modelu ruchu samolotu*, MTiS, "Mechanika w Lotnictwie" – Zbiór referatów, 1992, 39-52

Parametric Sensitivity of the Aircraft Steady-Spin

Summary

Steady-spin of the aircraft with standard control surfaces positions is unstable. Changes in control surfaces positions make the aircraft motions more stable and less controllable. In this paper the analysis of the influence of these changes on steady-spin is proposed. In the model the aircraft is regarded as a rigid body [4,5,7,8]. Aerodynamic forces acting on the aircraft are assumed in the form of sums. The differential equations of motion are non-linear. The sensitivity theory is applied to estimation of eigenpairs sensitivity in solutions to the linearized aircraft equations of motion [6,7]. The first-order sensitivity coefficients of the eigenvectors and the eigenvalues needed to the change of control surfaces positions are determined.



WERSJA ROZPOZNAWCZA SAMOLOTU IRYDA

INSTYTUT LOTNICTWA, WARSZAWA 1994



SPIS TREŚCI

- **Konferencje "MECHANIKA W LOTNICTWIE" 3**
- **Al Azab T., Maryniak J.** — Zastosowanie praw sterowania jako więzów nieholonomicznych w dynamice lotu samonaprowadzającej się rakiety na samolot-cel 5
- **Blajer W.** — Uwagi o realizacji programowego ruchu samolotu po założonej trajektorii 19
- **Błaszczak J.** — Analiza numeryczna drgań własnych współczesnego samolotu naddźwiękowego metodą elementów skończonych 33
- **Borowski J., Sobieraj W.** — Identyfikacja dynamiki samolotu metodą Kalmana i Corbina dla potrzeb adaptacyjnego układu sterowania lotem 65
- **Dubiel S.** — Przestrzenne naprowadzanie rakiet z nieruchomym biegunem obserwacji jako ruch złożony 75
- **Dubiel S.** — Równoległe zbliżanie jako graniczny przypadek minimalno-czasowego programu przechwytywania 91
- **Dubiel S.** — Efekty dynamiczne minimalno-czasowego sterowania rakieta 105
- **Dul F.** — Wyznaczanie postaci drgań złożonych konstrukcji lotniczych za pomocą nowej metody dwufazowej 115
- **Dźygadło Z., Kowaleczko G., Sibilski K.** — Analiza dynamiki przestrzennego ruchu samolotu ze skrzydłem pasmowym 133
- **Dźygadło Z., Warchulski J.** — Analiza drgań podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego 155
- **Gacek J., Machowski B., Mróz M.** — Modelowanie procesu naprowadzania obiektu latającego na cel manewrujący 179

- **Gosiewski Z., Ortyl A.** — Wyznaczanie orientacji przestrzennej statku powietrznego z wykorzystaniem pomiaru wektora prędkości kątownej **191**
- **Gosiewski Z., Rochala Z.** — Zastosowanie obserwatorów do diagnozowania wyposażenia pokładowego statków powietrznych **217**
- **Goszczyński J.A., Maryniak J.** — Symulacja numeryczna lotu sterowanego samolotu z odkształcalnym układem sterowania sterem wysokości **233**
- **Klepacki Z.** — Kryteria stateczności samolotu na etapie projektu koncepcyjnego **251**
- **Kowalczyk G.** — Model matematyczny astatecznego autopilota śmigłowca na bazie metody rozdzielania ruchów **259**
- **Kręt K.** — Wpływ odkształcalności skrzydła na symetryczne obciążenia manewrowe samolotu **277**
- **Krzymień W., Maryniak J.** — Wyznaczanie prędkości krytycznej flatteru samolotu na podstawie badań modelu flatterowego w tunelu aerodynamicznym **293**
- **Kulicki P., Lasek M.** — Obliczenia statycznej stateczności podłużnej samolotu przy wykorzystaniu metod panelowych niskiego rzędu z uwzględnieniem wpływu śmigła **299**
- **Kulicki P., Lasek M.** — Wyznaczanie gradientu siły nośnej układu skrzydło-kadłub za pomocą metod panelowych niskiego rzędu **311**
- **Lenort F.** — Wybrane problemy identyfikacji własności dynamicznych obiektów nieliniowych **321**
- **Leszczyńska Z.** — Instalacja odbiorników ciśnień powietrznych i jej badania **329**
- **Leśniak J.** — Wpływ wiatru na optymalną trajektorię przelotu **339**
- **Maryniak J., Al-Yousef Z.** — Analiza lotu przestrzennego sterowanej rakiety klasy ziemia-powietrze naprowadzanej wiązką na manewrujący samolot-cel **347**
- **Maryniak J., Bardakji S.** — Stateczność dynamiczna sterowanego szybowca z odkształcalnymi, sprężystymi skrzydłami **367**

- **Maryniak J., Maryniak A.** — Pilot-człowiek w systemie sterowania samolotem i w symulatorze lotu **387**
- **Mróz M., Machowski B., Sienicki K.** — Synteza pokładowego systemu sterowania rakieta przeciwpancerną **405**
- **Paturski Z., Ruciński R.** — Zagadnienia adaptacji parametrów modelu dynamicznego samolotu do wymagań symulatora lotu **415**
- **Pedro J.** — Analiza dynamiki samolotu po wejściu w podmuch przy uwzględnieniu wpływu strumienia zaśmigłowego **427**
- **Pietrucha J., Złocka M.** — Aspekty teoretyczne metody funkcji Lapunowa do syntezy nieliniowego prawa sterowania samolotem **441**
- **Rodzewicz M.** — Badanie zachowań dynamicznych motolotni w locie ślizgowym związanych ze sterowaniem podłużnym **459**
- **Rodzewicz M.** — Problematyka modelowania w badaniach trwałości zmęczeniowej węzła kadłubowego połączenia skrzydła-kadłub szybowca PW-5 **473**
- **Sługocki G.M.** — O weryfikacji parametrów kinematycznych i dynamicznych rejestrowanych na pokładzie samolotu **487**
- **Szafran K.** — Niektóre algorytmy obróbki danych eksperymentalnych uwzględniające związki pomiędzy mierzonymi sygnałami **501**
- **Szczepański C.** — Wybrane problemy symulacji lotu na symulatorze **513**
- **Tomczyk A.** — Projekt modyfikacji układu sterowania samolotem PZL M20 "Mewa" czyli dydaktyczne latające laboratorium mechaniki lotu i pokładowych systemów sterowania **523**
- **Vogt R.** — Dynamika trójfazowego naprowadzania rakiet do celu **541**
- **Wiącek T., Czarnocki P.** — Modelowanie epoksydowo-węglowej lotki samolotu PZL-110 "ORLIK" przy pomocy metody elementów skończonych **553**
- **Winiecki J.** — Dobór podstawowych parametrów lekkiego samolotu **563**
- **Złocka M.A.** — Parametryczna wrażliwość korkociągu ustalonego **585**

