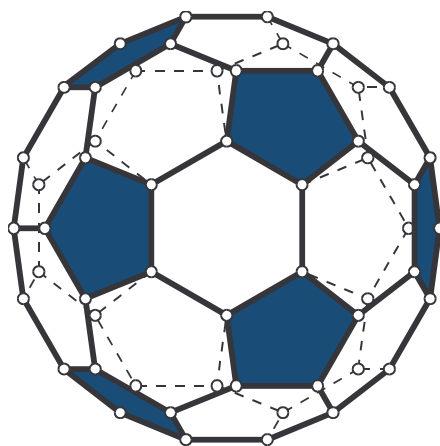


Paweł Drożdziel Leszek Krzywonos  
Zbigniew Kudasiewicz Andrzej Zniszczyński

---

# GRAFIKA INŻYNIERSKA ZBIÓR ZADAŃ DLA MECHANIKÓW

CZĘŚĆ I  
Metoda Monge'a i aksonometria



---

LUBLIN 2005

**Opiniodawcy:**

Prof. dr hab. inż. **Józef Jonak**  
Dr hab. inż. **Jerzy Nowakowski**

Copyright by  
Paweł Drożdziel, Leszek Krzywonos,  
Zbigniew Kudasiewicz, Andrzej Zniszczyński

## Spis treści

<b>Od autorów</b> .....	<b>5</b>
<b>Wiadomości wstępne</b> .....	<b>7</b>
W.1. System oznaczeń .....	7
W.2. Układ współrzędnych w przestrzeni .....	9
W.3. Zalecenia dotyczące formy graficznej rozwiązań .....	10
<b>1. Aproksymowanie elips</b> .....	<b>15</b>
1.1. Konstrukcja wyznaczania kierunków i długości osi elipsy w oparciu o dane średnice sprzężone .....	15
1.2. Konstrukcja owalu .....	16
1.3. Treść problemu .....	17
1.4. Przykładowe rozwiązanie .....	17
1.5. Zadania .....	20
<b>2. Rzut równoległy</b> .....	<b>21</b>
2.1. Rzut równoległy – definicja i podstawowe własności .....	21
2.2. Treść problemu .....	22
2.3. Przykładowe rozwiązanie .....	23
2.4. Zadania .....	25
<b>3. Rzuty prostokątne w układzie Monge’a</b> .....	<b>27</b>
3.1. Układ rzutni Monge’a .....	27
3.2. Treść problemu .....	29
3.3. Przykładowe rozwiązanie .....	34
3.4. Zadania .....	36
<b>4. Podstawowe konstrukcje w rzutach Monge’a</b> .....	<b>39</b>
4.1. Elementy wspólne .....	39
4.2. Równoległość, prostopadłość, długość odcinka, ustalenie widoczności .....	40
4.3. Treść problemów .....	41
4.4. Przykładowe rozwiązania .....	42
4.5. Zadania .....	46
<b>5. Transformacje układu odniesienia</b> .....	<b>49</b>
5.1. Podstawowe zasady wprowadzania nowych rzutni .....	49
5.2. Treść problemu .....	50
5.3. Przykładowe rozwiązanie .....	51
5.4. Zadania .....	53

<b>6. Wielościany</b> .....	<b>55</b>
6.1. Podstawowe definicje i klasyfikacje .....	55
6.2. Rzuty wielościanów .....	56
6.3. Wielościany foremne .....	57
6.4. Wielościany foremne – treść problemów .....	58
6.5. Przykłady .....	59
6.6. Zadania .....	65
<b>7. Przekroje wielościanów wypukłych</b> .....	<b>67</b>
7.1. Treść problemów .....	67
7.2. Przykłady .....	69
7.3. Zadania .....	76
<b>8. Powierzchnie i bryły obrotowe</b> .....	<b>79</b>
8.1. Powierzchnie obrotowe – podstawowe pojęcia .....	79
8.2. Przekroje powierzchni i brył obrotowych .....	80
8.3. Treść problemów .....	81
8.4. Przykłady .....	82
8.5. Zadania .....	86
<b>9. Przenikania brył</b> .....	<b>89</b>
9.1. Modelowanie brył .....	89
9.2. Przenikania brył – metody wykreślne .....	90
9.3. Treść problemu .....	91
9.4. Przykładowe rozwiązanie .....	92
9.5. Zadania .....	95
<b>10. Wybór problemów</b> .....	<b>97</b>
10.1. Treść problemów .....	97
10.2. Zadania .....	100

## Od autorów

Niniejsze opracowanie jest zbiorem zadań do ćwiczeń projektowych z grafiki inżynierskiej dla studentów wydziałów mechanicznych wyższych szkół technicznych. Jego treść została dostosowana do obowiązującego minimum programowego tego przedmiotu i liczby godzin przewidzianych do jego realizacji. Zbiór oferuje liczbę zadań pozwalającą na ćwiczenia metodą praktyczną oraz zindywidualizowanie pracy studentów na zajęciach. Zamierzeniem autorów było bowiem opracowanie zestawu zadań do każdego ćwiczenia tak, aby poszczególne zadania miały porównywalny stopień trudności oraz mogły być w całości rozwiązywane w trakcie dwugodzinnych zajęć.

Autorzy preferują rozwiązania zadań metodą Monge'a z uwagi na powszechność jej stosowania w projektowaniu części maszyn. Nie jest to jednak ograniczenie obligatoryjne. Zadania zgromadzone w tym zbiorze można również z powodzeniem rozwiązywać przy pomocy rzutów aksonometrycznych.

Zbiór zadań rozpoczyna rozdział zatytułowany *Wiadomości wstępne*, który zawiera informacje dotyczące stosowanych oznaczeń, sposobu zadawania sytuacji początkowych oraz zaleceń dotyczących formy graficznej rozwiązań. Rozdziały 1–9 zawierają zwięzłe omówienie teorii dotyczącej poruszanej w nich tematyki, treści problemów, rozwiązanie przykładowego zadania oraz zestawu zadań do każdego problemu. Rozdział 10 zawiera wybór problemów do samodzielnego rozwiązania. Zadania umieszczone w niniejszym zbiorze zostały przetestowane na ćwiczeniach projektowych, prowadzonych w latach 2002–2005 przez autorów opracowania na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lubelskiej.

Autorem rozdziałów 1–3 jest Leszek Krzywonos, rozdziałów 4 i 5 — Andrzej Zniszczyński, rozdziału 6 — Zbigniew Kudasiewicz, rozdziału 7 — Zbigniew Kudasiewicz i Paweł Drożdziel, rozdziału 8 — Andrzej Zniszczyński i Leszek Krzywonos, rozdziałów 9 i 10 — Leszek Krzywonos. Opracowanie redakcyjne wykonał Leszek Krzywonos.

Lublin, wrzesień 2005 r.



## Wiadomości wstępne

### W.1. System oznaczeń

W niniejszej pracy zakłada się, że Czytelnik zna aksjomaty geometrii euklidesowej, zwłaszcza te, które mówią o wzajemnych związkach w przestrzeni trójwymiarowej między punktami, prostymi oraz płaszczyznami. Inne figury (podzbiory tej przestrzeni) są wyrażane przy pomocy punktów, prostych i płaszczyzn oraz relacji zachodzących pomiędzy nimi. Opis figur jest tworzony według następujących reguł:

- **punkty** przestrzeni euklidesowej są opisywane dużymi literami alfabetu łacińskiego:  $A, B, C, \dots$ , cyframi i liczbami arabskimi pisanymi kursywą:  $1, 2, \dots, 10, 11, \dots$  lub liczbami rzymskimi:  $I, II, \dots, IV, \dots$  ;
- **proste** opisywane są małymi literami alfabetu łacińskiego:  $a, b, c, \dots$ , przy czym litery  $x, y, z$  zarezerwowane są do opisu osi kartezjańskiego układu współrzędnych, osi rzutów i osi transformacji układu odniesienia;
- **płaszczyzny** opisywane są małymi literami alfabetu greckiego:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ; wyjątek stanowią:  $\rho$  – miara odległości,  $\sigma$  – miara rozwartości kąta; litera  $\pi$  zawsze oznacza rzutnię;
- **inne podzbiory** przestrzeni euklidesowej (bryły, powierzchnie, figury płaskie) są opisywane dużymi literami alfabetu greckiego:  $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$

Symbole  $\in, \subset, \cap$  oznaczają odpowiednio: relację przynależności elementu do zbioru, relację inkluzji (zawierania się), operację mnożenia zbiorów.

Jeśli dany podzbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez inne, stosowana jest konwencja

$$\textit{nazwa\_podzbioru} = \{el\_1, \dots, el\_n\},$$

gdzie:  $el\_1, \dots, el\_n$  są nazwami obiektów definiujących podzbiór, bądź

$$\textit{nazwa\_podzbioru} = el\_1 \cap \dots \cap el\_n,$$

gdzie:  $el\_1, \dots, el\_n$  są nazwami obiektów zawierających dany podzbiór.

#### Przykłady:

$a = \{A, B\}$  — prosta  $a$  jest wyznaczona przez punkty  $A$  oraz  $B$ ;

$\alpha = \{c, d\}$  — płaszczyzna  $\alpha$  jest określona przez parę prostych  $c$  i  $d$ ;

$\gamma = \{1, f\}$  — punkt  $1$  i prosta  $f$  wyznaczają płaszczyznę  $\gamma$ ;

$\varepsilon = \{I, II, III\}$  — płaszczyzna  $\varepsilon$  jest zadana trójką punktów  $I, II, III$ ;

$2 = b \cap \delta$  — punkt  $2$  jest punktem przecięcia płaszczyzny  $\delta$  prostą  $b$ .

**Odcinki** prostych są opisywane przez podanie punktów będących ich końcami, zaś **wielokąty płaskie** przez podanie wierzchołków w kolejności zgodnej z ich połączeniami, przy czym jeśli wierzchołek jest opisany liczbą arabską, jego nazwę oddziela się znakiem "–".

**Przykłady:**

$CZ$  — odcinek o końcach w punktach  $C$  i  $Z$ ;  
 $3-8$  — odcinek o końcach w punktach 3 i 8;  
 $ABC$  — trójkąt o wierzchołkach  $A, B, C$ ;  
 $A-7-12-Z$  — czworokąt o wierzchołkach  $A, 7, 12, Z$ .

Przy opisie wzajemnego położenia punktów, prostych i płaszczyzn stosuje się oznaczenia: prostopadłości figur  $\perp$ , równoległości  $\parallel$ , odległości zbiorów  $\rho(\cdot, \cdot)$ , miary rozwartości kąta  $\sigma(\cdot, \cdot)$ .

**Przykłady:**

$a \perp \alpha$  — prosta  $a$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$ ;  
 $b \parallel c$  — proste  $b, c$  są równoległe;  
 $\rho(3, \varphi) = 50$  — odległość punktu 3 od płaszczyzny  $\varphi$  wynosi 50 mm;  
 $\sigma(a, \alpha) = 45^\circ$  — kąt pomiędzy prostą  $a$  i płaszczyzną  $\alpha$  wynosi  $45^\circ$ .

Oznaczenie rzutu dowolnego podzbioru składa się z **nazwy** tego podzbioru utworzonej zgodnie z podanymi wcześniej zasadami oraz **górnego indeksu** (liczby rzymskiej) informującego o numerze rzutni. Ponieważ podstawowy układ Monge'a tworzą wzajemnie prostopadłe rzutnie  $\pi_1$  (**pozioma**) oraz  $\pi_2$  (**pionowa**), to rzuty figur na te płaszczyzny noszą odpowiednio nazwy rzutu poziomego i rzutu pionowego.

**Przykłady:**

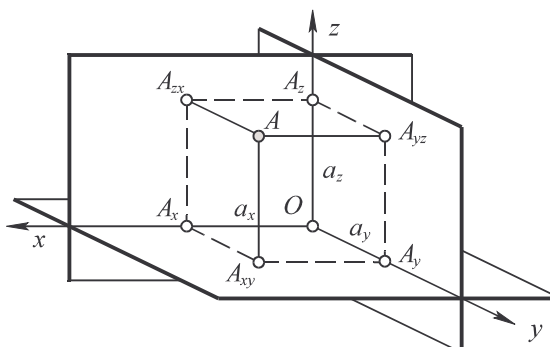
$A^I$  — rzut poziomy (albo pierwszy) punktu  $A$ ;  
 $m^{II}$  — rzut pionowy (albo drugi) prostej  $m$ ;  
 $\alpha^I$  — rzut poziomy płaszczyzny  $\alpha$  ( $\alpha \perp \pi_1$ );  
 $M^{III}$  — trzeci rzut punktu  $M$ , będący obrazem tego punktu na rzutni  $\pi_3$ ;  
 $e^{IV}$  — czwarty rzut prostej  $e$ , jako jej obraz na  $\pi_4$ ;  
 $\kappa^V$  — piąty rzut płaszczyzny  $\kappa$  ( $\kappa \perp \pi_5$ ).

Pozostałe oznaczenia użyte w tekście objaśniane są w miejscu ich wystąpienia.



## W.2. Układ współrzędnych w przestrzeni

Do opisu położenia figur geometrycznych w przestrzeni, w niniejszym opracowaniu wykorzystujemy **kartezjański prostokątny prawoskrętny układ współrzędnych** (rys. W.1.).



Rys. W.1. Kartezjański prostokątny układ współrzędnych

Wybierając w przestrzeni trzy proste  $x, y, z$  przecinające się w jednym punkcie  $O$  (zwanym **punktem zerowym** lub **początkiem układu współrzędnych**), ustalając na nich pewien zwrot (zwany zwrotem dodatnim, symbolicznie zaznaczanym grotem strzałki) i przyjmując jednakową jednostkę długości (równą jednostce miary długości w przestrzeni, np. jednemu milimetrowi), otrzymuje się z każdej z tych prostych oś liczbową, zwaną **osią współrzędną**. **Kartezjański układ współrzędnych** tworzy każda uporządkowana trójka  $(x, y, z)$  osi współrzędnych. (Zamiast symbolu  $(x, y, z)$  używa się także oznaczenia  $Oxyz$ .) Kartezjański układ współrzędnych nazywa się **prostokątnym**, jeśli osie  $x, y$  i  $z$  są **wzajemnie prostopadłe**. Każde dwie osie układu wyznaczają **płaszczyzny układu współrzędnych**.

Mając dany kartezjański prostokątny układ współrzędnych  $Oxyz$ , położenie w przestrzeni dowolnego punktu  $A$  można w sposób jednoznaczny scharakteryzować poprzez podanie uporządkowanej **trójki**  $(a_x; a_y; a_z)$  jego **współrzędnych**, co wyrażamy równością

$$A = (a_x; a_y; a_z).$$

Należy zauważyć, że współrzędne punktu są co do wartości bezwzględnych równe jego odległościom od poszczególnych płaszczyzn układu ( $|a_x| = \rho(A, A_{yz})$ ,  $|a_y| = \rho(A, A_{xz})$ ,  $|a_z| = \rho(A, A_{xy})$ ).

Kartezjański układ jest **prawoskrętny**, gdy dodatnie zwroty osi układu spełniają tzw. regułę **śruby prawoskrętnej**.

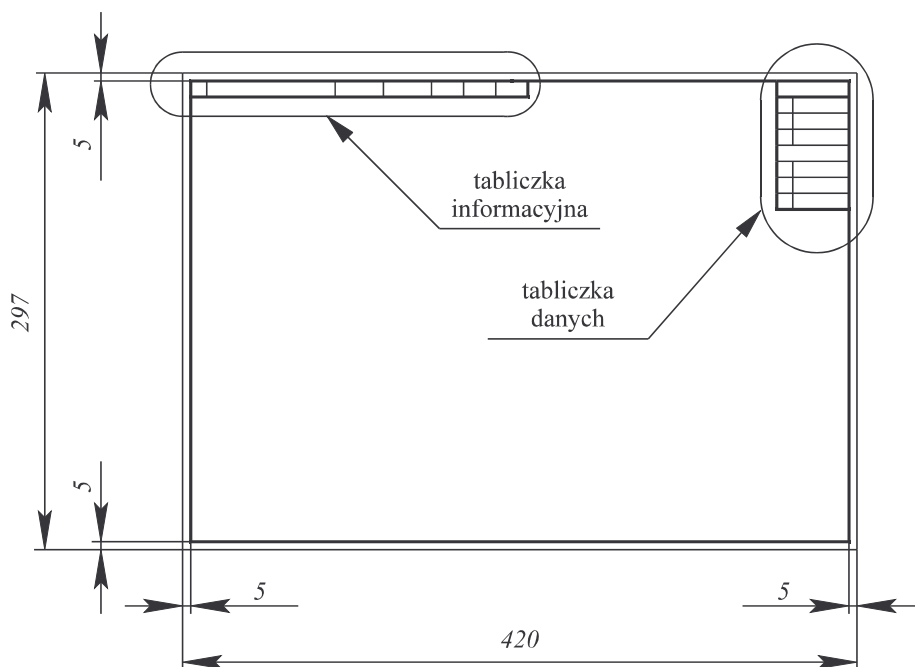
### W.3. Zalecenia dotyczące formy graficznej rozwiązań

#### Arkusz rysunkowy

Rozwiązania zadań należy wykonywać na arkuszach rysunkowych formatu A3, wykorzystywanych **jednostronnie** w tzw. układzie **poziomym** (wymiary arkusza A3: 420 × 297 mm). Na stronie zawierającej rozwiązanie znajdują się (rys. W.2.):

- **ramka rysunku**,
- **tabliczka informacyjna**,
- **tabliczka danych do zadania** (tabliczka danych).

**Ramka rysunku** znajduje się wewnątrz arkusza, jej krawędzie są oddalone o 5 mm od brzegów arkusza i jest rysowana linią ciągłą grubą (grubość linii — 0,70 mm). Ramka rysunku ogranicza **pole rysunku** — prostokąt o wymiarach 410 × 287 mm.

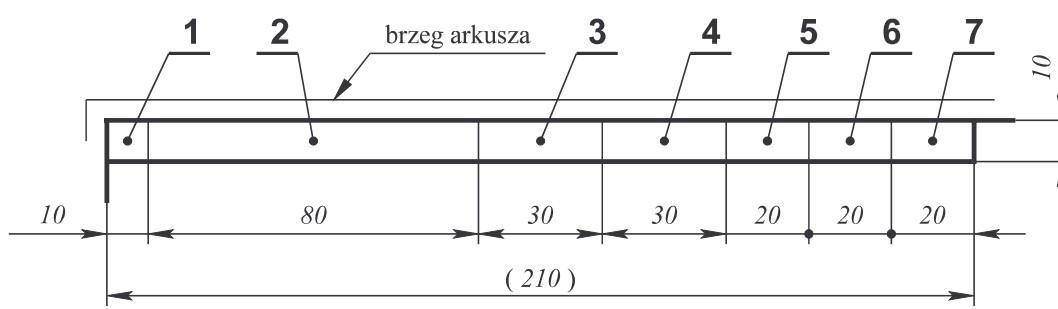


Rys. W.2. Arkusz rysunkowy formatu A3 do prac bieżących

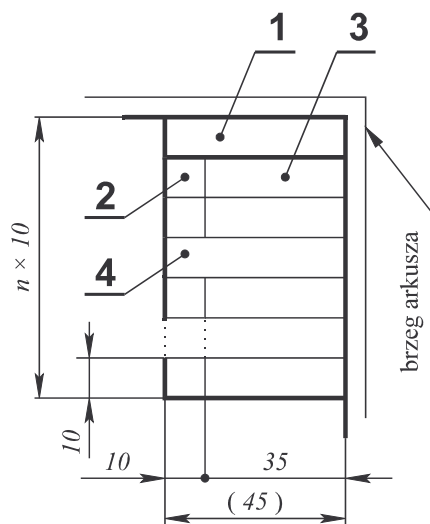
**Tabliczka informacyjna** (rys. W.3.) znajduje się w lewym górnym rogu arkusza, przylegając lewym i górnym bokiem do ramki rysunku. Składa się z jednego (poziomego) wiersza podzielonego na 7 pól. Szerokość wiersza wynosi 10 mm, długość tabliczki — 210 mm. Szerokości kolejnych pól wynoszą odpowiednio: 10; 80; 30; 30; 20; 20 i 20 mm. **Zewnętrzne krawędzie** tabliczki należy wykreślić **linią ciągłą grubą** (grubość linii — 0,70 mm). **Krawędzie podziału pól** wewnątrz tabliczki należy wykreślić **linią ciągłą cienką** (grubość linii — 0,25 mm).

W tabliczce umieszczane są następujące informacje:

- pole nr 1 — **identyfikator studenta** przydzielony przez prowadzącego ćwiczenia,
- pole nr 2 — **nazwisko i imię** studenta (**kolejność jest istotna!**),
- pole nr 3 — **pełny symbol grupy dziekańskiej** (np. MD 101.1a ),
- pole nr 4 — **data wykonania arkusza** (w formacie dd.mm.rrrr),
- pole nr 5 — **symbol ćwiczenia** (zgodnie z otrzymanym zestawem),
- pole nr 6 — **numer problemu** (zgodnie z otrzymanym zestawem),
- pole nr 7 — **numer zadania** (zgodnie z otrzymanym zestawem).



Rys. W.3. Tabliczka informacyjna



Rys. W.4. Tabliczka danych

**Tabliczka danych** do zadania (rys. W.4.) leży w prawym górnym rogu arkusza, jej górny i prawy brzeg przylega do ramki rysunku. Tabliczka danych zawiera kilka lub kilkanaście poziomych wierszy (liczba wierszy zależy od liczby danych do zadania)

o szerokości 10 mm i długości 45 mm. Pierwszy wiersz (1) zawiera słowo „Dane”. W kolejnych wierszach umieszczane są informacje definiujące temat pracy.

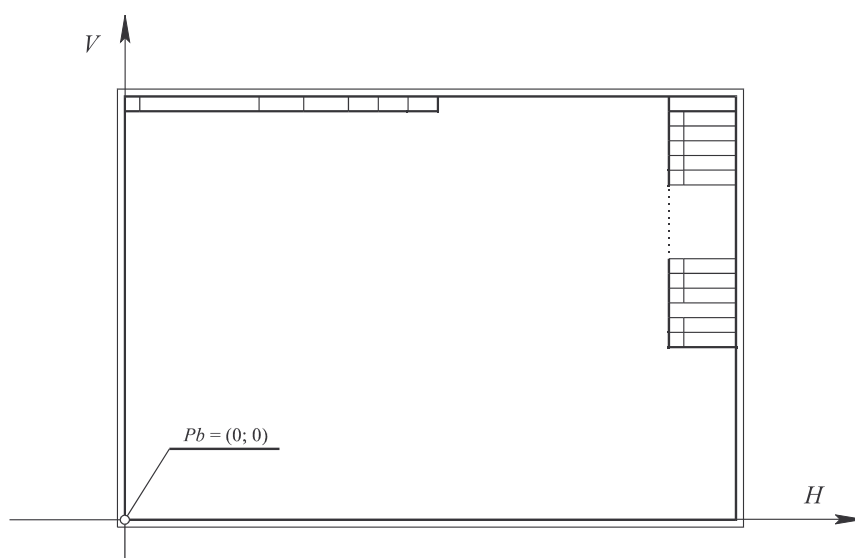
Wiersze zawierające dane są podzielone na 2 pola. Szerokości tych pól wynoszą odpowiednio 10 oraz 35 mm. W pierwszym polu (2) umieszcza się nazwę punktu lub zmiennej tekstowej definiującej temat, zaś w następnym (3) — współrzędne punktu bądź wartość zmiennej tekstowej. W celu zachowania przejrzystości, dane grupuje się tematycznie, rozdzielając poszczególne grupy „pustym” wierszem bez podziału na pola (4). Zewnętrzne krawędzie tabliczki danych oraz dolną krawędź pierwszego wiersza wykreśla się linią ciągłą grubą (0,75 mm), pozostałe — linią cienką ciągłą (0,25 mm). Tabliczkę danych wypełnia się na ćwiczeniach, po otrzymaniu danych do zadania.

### Układ współrzędnych na arkuszu rysunkowym

W celu jednoznacznego zdefiniowania położenia sytuacji początkowej zadań na arkuszu rysunkowym wprowadza się płaski prostokątny kartezjański **układ współrzędnych rysunkowych** (rys. W.5.).

Zakładając, że arkusz rysunkowy jest wykorzystywany poziomo, **początek układu współrzędnych**  $P_b = (0; 0)$ , zwany **punktem bazowym arkusza**, znajduje się w **lewym dolnym rogu ramki** rysunku. **Oś pozioma  $H$**  układu przebiega wzdłuż poziomego boku ramki rysunku i ma zwrot **od lewej strony do prawej**. **Oś pionowa  $V$**  przebiega wzdłuż „pionowego” boku ramki rysunku i ma zwrot z „dołu” do „góry”. Odcinki jednostkowe na obu osiach są równe i mają długość **1 mm**.

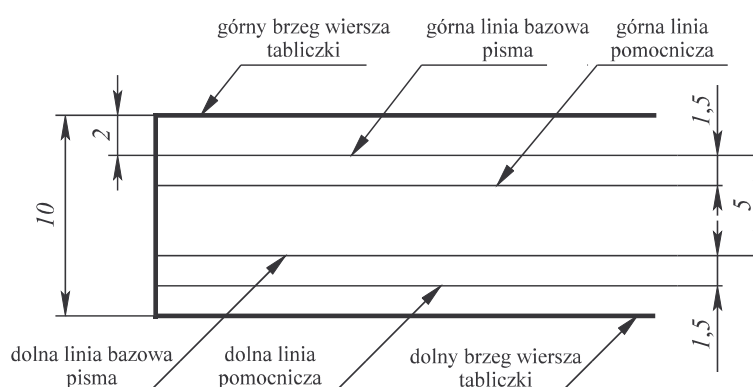
W układzie współrzędnych rysunkowych są definiowane tzw. **punkty początkowe**  $P_p$ , charakteryzujące położenie na arkuszu sytuacji początkowych rozwiązywanych problemów. Przy wykreślaniu rozwiązań zadań nie należy zaznaczać ani położenia osi  $H$ ,  $V$ , ani położenia punktu  $P_b$ .



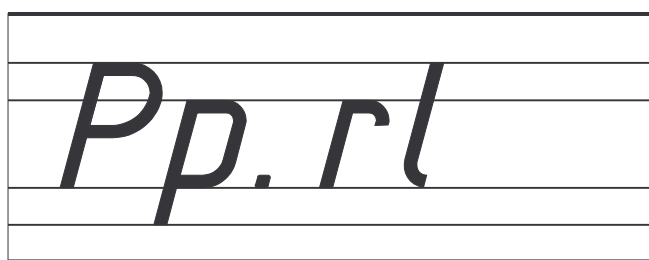
Rys. W.5. Układ współrzędnych rysunkowych

## Opisy odręczne

Odręczne opisy na rysunkach należy wykonywać **pismem technicznym** zgodnym z normą **PN-EN ISO 3098-0: 2002**. Obowiązuje **pismo rodzaju B, pochyłe (typ S)**, o wysokości **5 mm**. W tabliczkach rysunkowych (**informacyjnej i danych**) należy **obligatoryjnie** rysować **cztery linie bazowe** pisma, przestrzegając rozmieszczenia linii w wierszu pokazanego na rys. W.6. Sposób korzystania z linii bazowych przy pisaniu pokazuje rys. W.7.



Rys. W.6. Rozmieszczenie linii bazowych pisma w wierszu tabliczki



Rys. W.7. Sposób korzystania z linii bazowych przy pisaniu pismem technicznym

**Linie rysunkowe.** Wszystkie linie rysunkowe winny być zgodne z normą **PN-ISO 128-24**. Rzuty punktów oznacza się okręgami o średnicy 2,0 mm, kreślonymi linią ciągłą cienką. Nie należy przekreślać ani zaczerniać ich wnętrza. Za rzut prostej umownie przyjmuje się fragment linii prostej, który nie zaczyna się ani nie kończy na rzucie punktu leżącym na niej.

Rzuty prostych, krzywych, odcinków i brzegu brył stanowiące rozwiązanie zadania należy wykreślać:

- linią ciągłą grubą (0,70 mm), jeśli te elementy są widoczne,
- linią kreskową cienką (0,25), gdy elementy te są niewidoczne w danym rzucie.

Rzuty prostych i krzywych pomocniczych należy kreślić linią ciągłą cienką. Linie odnoszące są liniami pomocniczymi. W celu poprawy czytelności rozwiązania odnosząca może nie być kreślona na pewnym odcinku swej długości.

**Opis konstrukcji** należy wykonywać pismem technicznym zgodnym z normą **PN-EN ISO 3098-0: 2002, rodzaju B, pochyłym (typ S)**, o wysokości **5 mm**, stosując następujące zasady:

- każdy punkt, prosta i płaszczyzna użyte w konstrukcji muszą być opisane,
- wszystkie opisy należy wykonywać poziomo i umieszczać w miejscu zapewniającym ich jednoznaczne odczytanie,
- c) w przypadku jednoczenia się rzutów punktów, obowiązuje kolejność opisu zgodna z ich widocznością w danym rzucie oraz tzw. **zapis zblokowany**:  $el\_1 = el\_2 = \dots = el\_n$ , np:  $R^I = A^I$ ,  $A^{II} = B^{II}$ ,  $^{IV}IV = 5^{IV} = 8^{IV}$ ,
- w przypadku jednoczenia się rzutów innych elementów rozwiązania w opisie należy stosować zapis zblokowany, np:  $m^{II} = \alpha^{II} = k^{II}$ , przy czym o kolejności zapisu decyduje kolejność wprowadzania elementów do konstrukcji,
- żadna linia rysunkowa nie może przekreślać opisu.

**Kąt prosty** użyty w konstrukcji należy oznaczać ćwiartką łuku okręgu o środku w wierzchołku kąta i promieniu długości  $5 \div 8$  mm łączącego ramiona kąta oraz kropką o średnicy ok. 0,2 mm umieszczoną centralnie wewnątrz obszaru ograniczonego łukiem i ramionami kąta.

**Kąty równe** należy oznaczać łukami okręgów o środkach w wierzchołkach kątów i łączących ramiona tych kątów. Równa liczba łuków oznacza równość miary kątów.

**Odcinki o równej długości** użyte w konstrukcji należy oznaczać ukośnymi kreseczkami o długości  $2 \div 3$  mm przecinającymi te odcinki. Równość liczby kresiek oznacza równość długości.

**Równoległość prostych** wykorzystywaną w konstrukcji należy oznaczać analogicznie jak równość długości odcinków, przy czym jeśli w jednym rysunku używa się zarówno oznaczeń równości odcinków jak i równoległości prostych, nie używać tej samej liczby kresiek w obu oznaczeniach.

## 1. Aproksymowanie elips

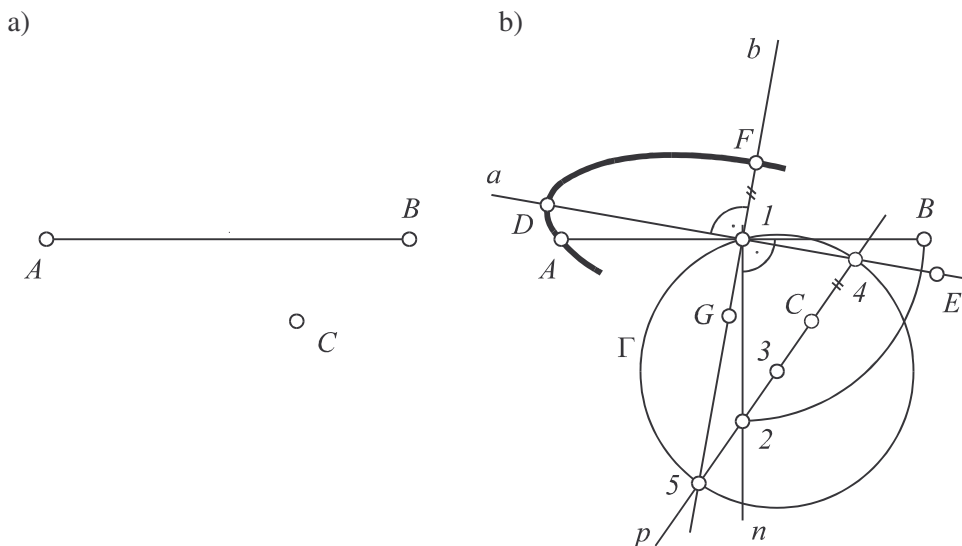
### 1.1. Konstrukcja wyznaczania kierunków i długości osi elipsy w oparciu o dane średnice sprzężone

#### Zadanie:

Dany jest odcinek  $AB$  i punkt  $C$  (rys. 1.1a). Odcinek  $AB$  jest średnicą pewnej elipsy, zaś punkt  $C$  jest końcem średnicy z nią sprzężonej. Wyznaczyć kierunki i długości osi tej elipsy.

#### Rozwiązanie:

Przez środek  $I$  odcinka  $AB$  prowadzimy prostą  $n$  do niego prostopadłą (rys. 1.1b). Na prostej  $n$  odkładamy odcinek  $I-2$ , którego długość jest równa połowie długości średnicy  $AB$ . Następnie prowadzimy prostą  $p = \{C, 2\}$  i znajdujemy punkt  $3$  — środek odcinka  $C-2$ . Konstruujemy okrąg  $\Gamma$  o środku w punkcie  $3$  i długości promienia równej  $\rho(I, 3)$ . Okrąg  $\Gamma$  przecina prostą  $p$  w punktach  $4$  i  $5$ . Proste  $a = (I, 4)$  i  $b = (I, 5)$  są szukanymi kierunkami osi, zaś odcinki  $C-4$  oraz  $C-5$  mają długości odpowiednio równe połowom długości małej i dużej osi elipsy. Nietrudno zauważyć, że zachodzą także równości:  $\rho(C, 4) = \rho(2, 5)$  oraz  $\rho(C, 5) = \rho(2, 4)$ .



Rys. 1.1. Konstrukcja wyznaczania kierunków i długości osi elipsy

**Uwaga:** Symbolem  $\rho(\Delta, \Xi)$  oznaczamy odległość figur  $\Delta$  i  $\Xi$ . **Odległością** dwóch figur geometrycznych nazywamy **długość najkrótszego odcinka**, którego jednym końcem jest punkt należący do jednej figury, a drugim punkt należący do drugiej figury, albo **kres dolny zbioru długości** odcinków o wymienionej własności.

## 1.2. Konstrukcja owalu

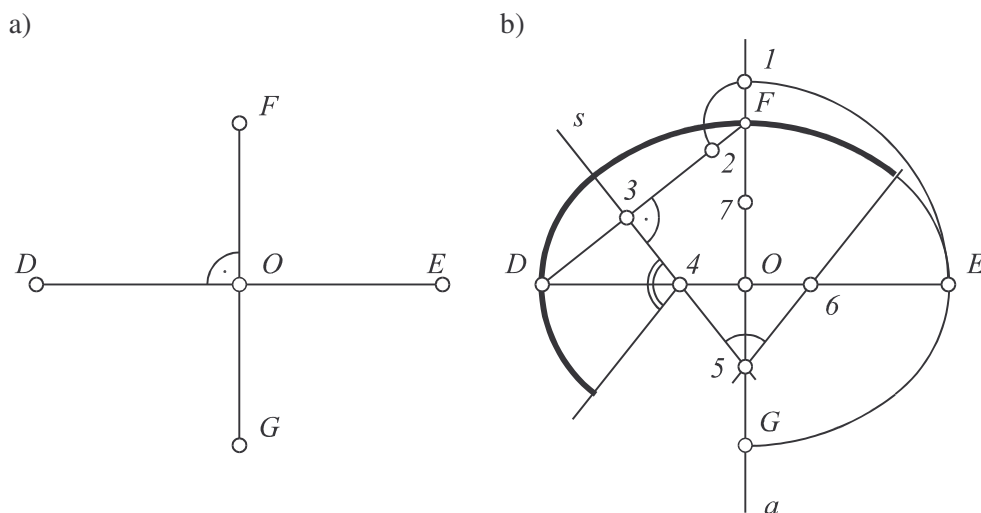
### Zadanie:

Dane są osie elipsy  $DE$  i  $FG$ , przecinające się w punkcie  $O$  (rys. 1.2a). Skonstruować owal będący aproksymacją tej elipsy.

### Rozwiązanie:

Łączymy dwa sąsiednie wierzchołki elipsy (np.  $D$  i  $F$ ). Przez krótszą oś (odcinek  $FG$ ) prowadzimy prostą  $a$  (rys. 1.2b). Na tej prostej odkładamy z punktu  $O$  w stronę punktu  $F$  odcinek  $O-1$  o długości równej połowie długości dużej osi elipsy. Na odcinku  $DF$  znajdujemy punkt  $2$  taki, że  $\rho(F, 2) = \rho(F, 1)$  (połowa różnicy długości osi elipsy). Następnie wykreślamy symetralną  $s$  odcinka  $D-2$ . Prosta  $s$  przecina oś elipsy  $DE$  w punkcie  $4$ , a prostą  $a$  — w punkcie  $5$ . Punkt  $6$  otrzymujemy jako symetryczny do punktu  $4$  względem środka elipsy, a punkt  $7$  jako symetryczny do punktu  $5$ . Zakreślamy teraz łuk okręgu o środku  $4$  i długości promienia  $\rho(D, 4)$  począwszy od punktu  $D$  do prostej  $s$ , a dalej kreślimy łuk o środku w punkcie  $5$  i długości promienia  $\rho(F, 5)$ , aż do punktu  $F$ . Otrzymujemy w ten sposób czwartą część owalu. Pozostałe fragmenty krzywej kreśli się w sposób analogiczny, wykorzystując znalezione uprzednio punkty  $6$  i  $7$  oraz symetrię osiową.

**Uwaga.** Opisany owal jest szczególnie dobrą aproksymacją, gdy mała oś elipsy jest dłuższa niż połowa osi dużej.



Rys. 1.2. Konstrukcja owalu o zadanych osiach



### 1.3. Treść problemu

#### Problem I. Aproxymowanie elipsy

Na płaszczyźnie dany jest kartezjański prostokątny układ współrzędnych  $Oxy$ , w którym odcinki jednostkowe na obu osiach mają długość 1 mm, oraz punkty  $A, B, C$ . Odcinek  $AB$  jest średnicą elipsy zawartej w tej płaszczyźnie, zaś punkt  $C$  jest końcem średnicy sprzężonej z  $AB$ . (Średnicę sprzężoną elipsy tworzą środki cięciw równoległych do średnicy danej.)

1. Wyznaczyć kierunki i długości osi elipsy.
2. Wykreślić owal aproksymujący daną elipsę.

Przyjąć, że początek układu współrzędnych (punkt  $O$ ) znajduje się w punkcie początkowym  $Pp$ . Oś  $x$  przyjąć na arkuszu **poziomo** i nadać jej zwrot „**w prawo**”, oś  $y$  przyjąć **pionowo** i nadać jej zwrot „**do góry**”. **Oznaczyć i opisać** punkty dane w treści problemu —  $O, A, B, C$  oraz końce osi elipsy (założyć, że dużą osią elipsy jest odcinek  $DE$ , zaś małą — odcinek  $FG$ ).

#### Informacje pomocnicze:

- nie oznaczać środków „sklejanych” łuków,
- punkty wskazane w treści problemu oznaczać okręgami o średnicy 2 mm; **nie zaczerpnąć** ani **nie przekreślać ich wnętrza**,
- nie opisywać punktów pomocniczych oraz prostych użytych w konstrukcji,
- **owal** aproksymujący elipsę wykreślić linią **ciągłą grubą**; wszystkie **konstrukcje pomocnicze** wykreślać linią  **cienką ciągłą**.

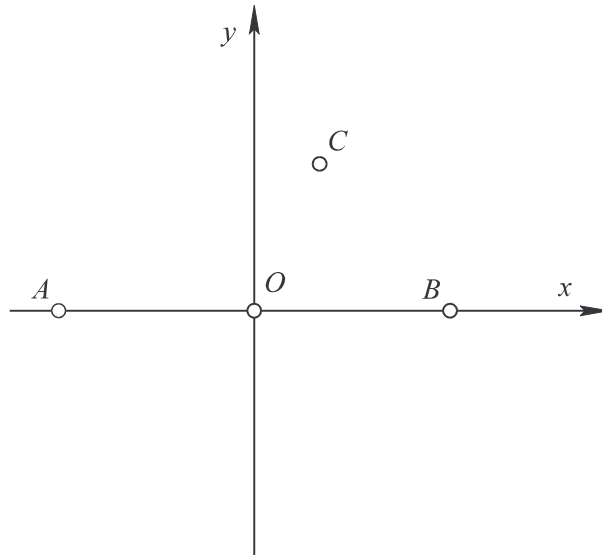
### 1.4. Przykładowe rozwiązanie

**Przykład.** Zadanie **P1.01.** Problem I.

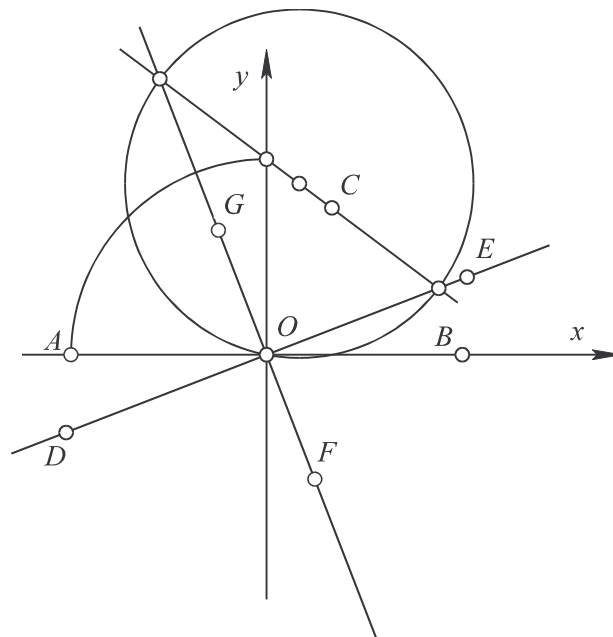
Dane	
$Pp$	(205; 145)
$A$	(-60; 0)
$B$	(60; 0)
$C$	(20; 45)

#### Rozwiązanie:

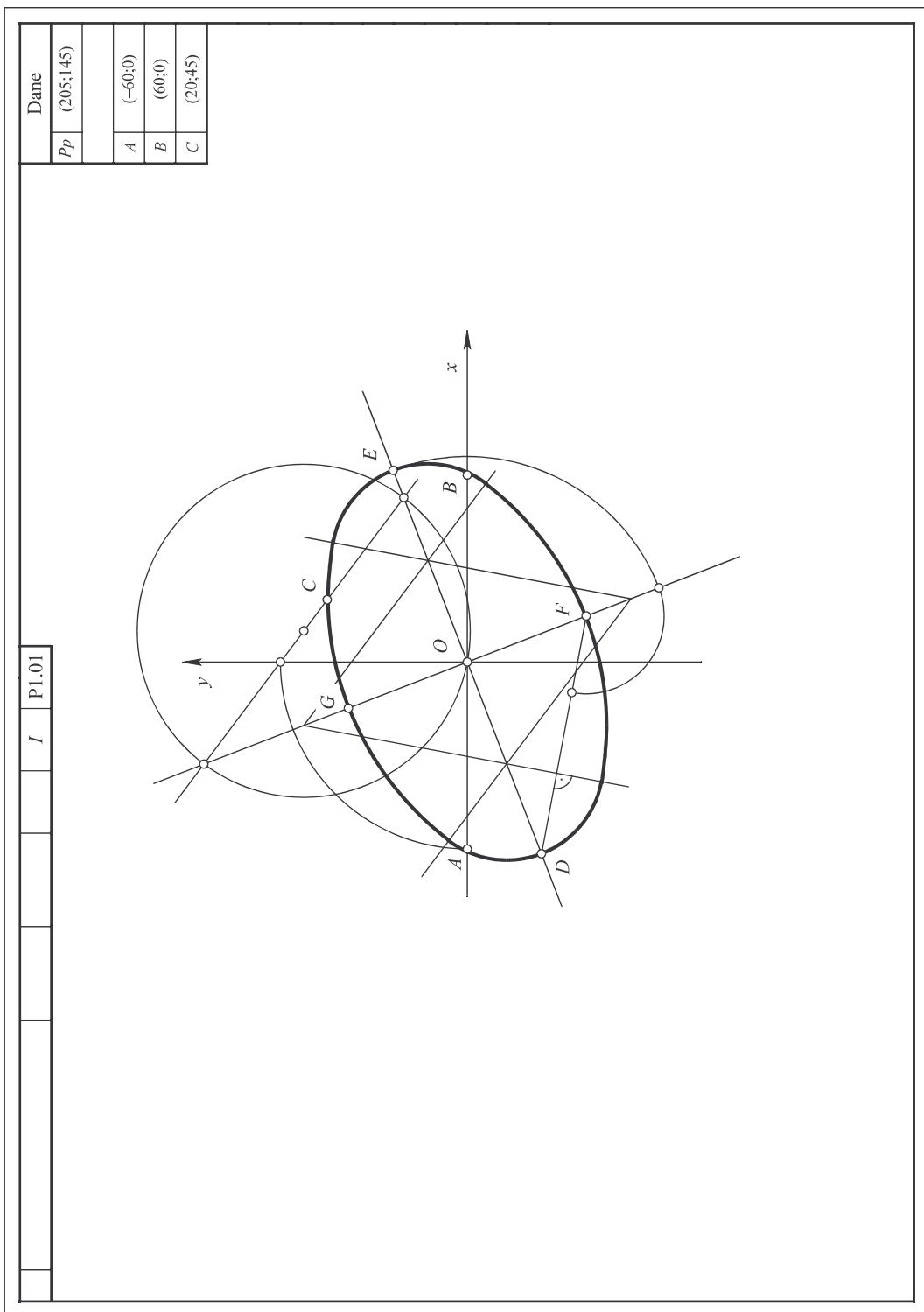
Rozwiązanie rozpoczynamy od narysowania sytuacji danej w zadaniu, uwzględniając dyspozycje zamieszczone w treści problemu (rys. 1.3). Wykorzystując konstrukcję znajdowania kierunków i długości osi elipsy w oparciu o dane średnice sprzężone (patrz: rozdział 1.1.), znajdujemy osie  $DE$  i  $FG$  (rys. 1.4). Następnie wykonujemy konstrukcję owalu (patrz: rozdział 1.2.). Ostateczne rozwiązanie problemu pokazuje rys. 1.5.



Rys. 1.3. Sytuacja początkowa do problemu I



Rys. 1.4. Wyznaczanie kierunków i długości osi danej elipsy



Rys. 1.5. Rozwiązanie zadania P1.01

## 1.5. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (30; -60)$ .
2.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-40; 55)$ .
3.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-35; -50)$ .
4.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-40; 45)$ .
5.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-35; 50)$ .
6.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-40; 50)$ .
7.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-35; 45)$ .
8.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-30; 55)$ .
9.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-25; 60)$ .
10.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (30; 50)$ .
11.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (25; 55)$ .
12.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (30; 60)$ .
13.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (20; 55)$ .
14.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (20; 60)$ .
15.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (35; 50)$ .
16.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-35; -55)$ .
17.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-30; -45)$ .
18.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-30; -55)$ .
19.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-30; -60)$ .
20.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (25; -60)$ .
21.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (20; -50)$ .
22.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (40; -50)$ .
23.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (20; -60)$ .
24.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (30; -45)$ .
25.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (30; -45)$ .
26.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (25; -50)$ .
27.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (35; -50)$ .
28.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (-35; -45)$ .
29.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (40; 45)$ .
30.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (-60; 0)$ ,  $B = (60; 0)$ ,  $C = (30; -50)$ .

## 2. Rzut równoległy

### 2.1. Rzut równoległy – definicja i podstawowe własności

Rzut równoległy na płaszczyznę jest odwzorowaniem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w pewną płaszczyznę, zawartą w tej przestrzeni. Rzut równoległy definiuje się w następujący sposób.

W przestrzeni trójwymiarowej wyróżniona jest płaszczyzna  $\pi$ , zwana **płaszczyzną rzutowania** albo **rzutnią**, oraz prosta  $k$  (nierównoległa do  $\pi$ ), która wyznacza **kierunek rzutowania**. **Obrazem** (rzutem) **punktu**  $P$  rozważanej przestrzeni w rzucie równoległym o kierunku  $k$  na płaszczyznę  $\pi$  jest **punkt**  $P'$ , będący punktem wspólnym rzutni  $\pi$  oraz prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $P$ , równoległej do prostej  $k$ . **Rzutem równoległym** dowolnej **figury** geometrycznej  $\Gamma$  jest **figura**  $\Gamma'$ , stanowiąca **zbiór rzutów** wszystkich punktów figury  $\Gamma$ .

Gdy prosta  $k$  jest prostopadła do rzutni  $\pi$ , to rzut równoległy nazywany jest wówczas **rzutem prostokątnym**. Natomiast gdy prosta  $k$  nie jest prostopadła do rzutni, to rzut nazywany jest **ukośnym**.

Rzut równoległy posiada wiele charakterystycznych własności ułatwiających znajdowanie obrazów figur geometrycznych w tym odwzorowaniu. W szczególności dotyczy to rzutowania prostych i okręgów. Z geometrii rzutowej<sup>1)</sup> wiadomo, że:

- rzutem prostej mającej kierunek rzutowania jest punkt, rzutem prostej nierównoległej do kierunku rzutowania jest zawsze prosta,
- rzut równoległy zachowuje uporządkowanie punktów na prostej (jeśli na prostej  $a$  różne punkty  $A, B, C$  leżą tak, że punkt  $B$  znajduje się pomiędzy punktami  $A$  i  $C$ , to na rzucie prostej  $a$  rzut punktu  $B$  leży również pomiędzy rzutami punktów  $A$  i  $C$ ),
- jeśli różne punkty  $A, B, C$  leżą na prostej nierównoległej do kierunku rzutowania, to ich rzuty  $A', B', C'$  leżą w taki sposób, że zachodzi równość stosunków odległości  $\rho(A, B) : \rho(B, C) = \rho(A', B') : \rho(B', C')$ ,
- rzutem **prostych równoległych** (nierównoległych do kierunku rzutowania) są **proste równoległe**,
- rzutem **figury wypukłej** jest **figura wypukła**,
- rzutem **figury płaskiej** równoległej do rzutni jest **figura** do niej **przystająca**,

---

<sup>1)</sup> Geometria rzutowa – dział matematyki poświęcony badaniu tych własności figur geometrycznych, które nie ulegają zmianie w przekształceniach rzutowych.

- jeśli figury płaskie  $\Gamma$  i  $\Delta$  leżą w tej samej płaszczyźnie (nierównoległej do kierunku rzutowania), to stosunek ich pól powierzchni zachowują figury  $\Gamma'$  i  $\Delta'$ , będące ich rzutami,
- rzutem **okręgu** jest: **odcinek** równy średnicy okręgu, gdy płaszczyzna okręgu jest równoległa do kierunku rzutowania; **okrąg przystający**, gdy płaszczyzna okręgu jest równoległa do rzutni; zaś w pozostałych przypadkach – **elipsa**, której jedna z osi jest równa średnicy okręgu,
- rzutem równoległym stożkowej (**elipsy**, **paraboli** lub **hiperboli**) jest stożkowa tego samego typu; rzuty **średnic sprzężonych** stożkowej  $\Sigma$  są **średnicami sprzężonymi** stożkowej  $\Sigma'$ , która jest jej rzutem.

## 2.2. Treść problemu

### Problem I. Rzut ukośny ostrosłupa

Dany jest kartezjański prostokątny, prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm. Ponadto dany jest **ostrosłup**, którego podstawą jest pięciokąt  $ABCDE$ , zaś wierzchołkiem punkt  $S$ .

1. Wykreślić rzut równoległy ostrosłupa  $ABCDES$  na płaszczyznę wyznaczoną przez osie  $x$  i  $z$  układu współrzędnych, jeśli kierunkiem rzutowania jest prosta  $k = \{O, P\}$ , gdzie  $O = (0; 0; 0)$ ,  $P = (60; 90; 30)$ .

Rzut równoległy punktu  $O$  (początku układu współrzędnych) przyjąć w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, zaś rzut osi  $z$  ma położenie pionowe i zwrot „w górę”.

2. Określić widoczność wszystkich krawędzi wielościanu przy założeniu, że bryła jest nieprzezroczysta, a obserwator spogląda przeciwnie do zwrotu wektora  $OP$ .

### Informacje pomocnicze:

- **krawędzie niewidoczne** wielościanu rysować linią **cienką kreskową**, **krawędzie widoczne** — linią **ciągłą grubą**,
- **punkty** oznaczać **okręgami** o średnicy 2 mm; **nie zaczerwiać** ani **nie przekreślać ich wnętrza**,
- **konstrukcje pomocnicze** wykreślać linią **cienką ciągłą**,
- punkty pomocnicze użyte w konstrukcji pozostawić bez opisu,
- w przypadku przecinania się rzutów krawędzi widocznych i niewidocznych należy krawędź niewidoczną przerwać na długości około 1,5 mm po obu stronach krawędzi widocznej.

### 2.3. Przykładowe rozwiązanie

Przykład. Zadanie P2.01. Problem I.

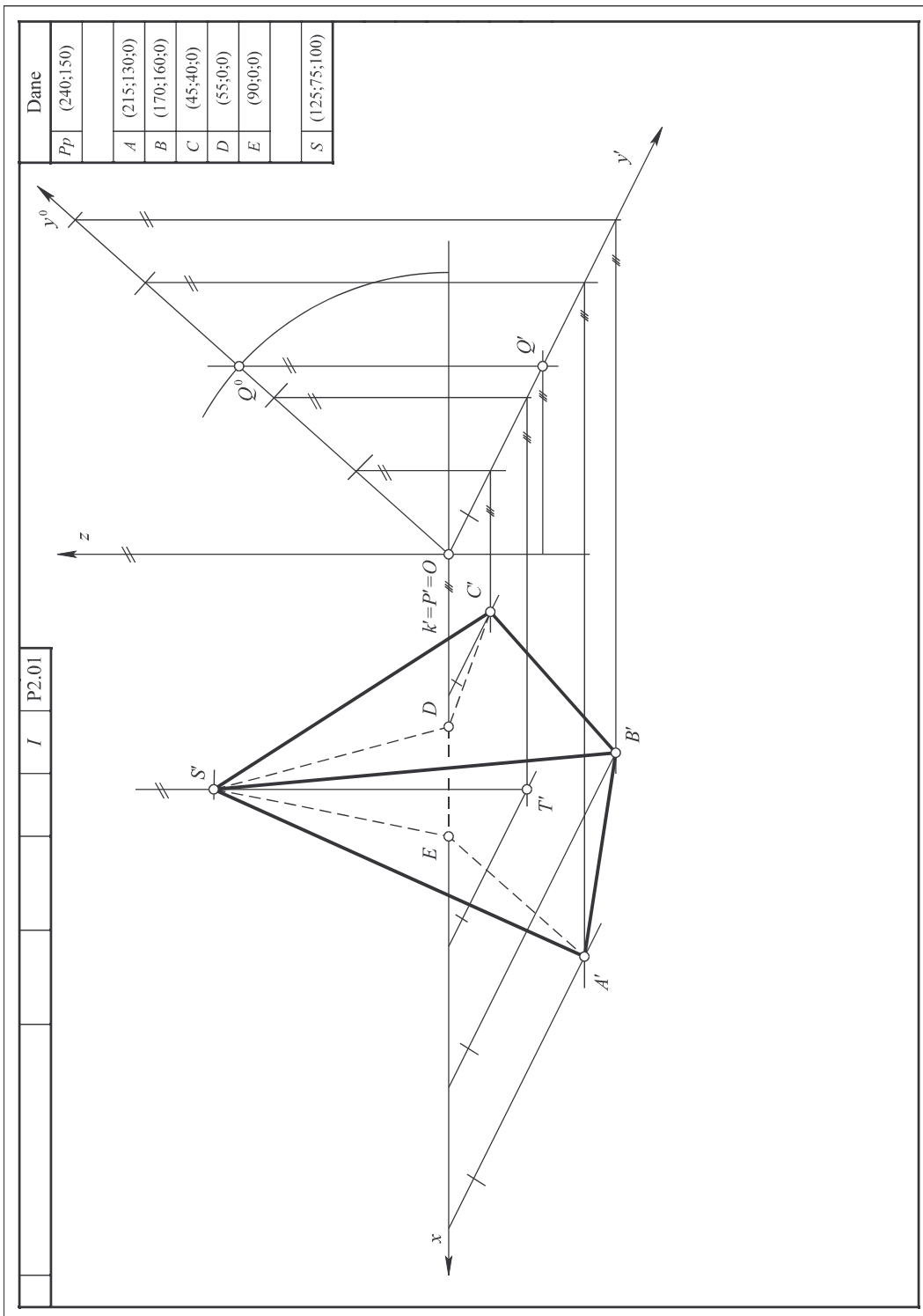
Dane	
$Pp$	(240; 150)
$A$	(215; 130; 0)
$B$	(170; 160; 0)
$C$	(45; 45; 0)
$D$	(55; 0; 0)
$E$	(90; 0; 0)
$S$	(125; 75; 100)

Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności rysujemy rzuty równoległe osi danego układu współrzędnych  $Oxyz$ . Ponieważ rzutnią jest płaszczyzna  $Oxz$ , więc osie  $x$  i  $z$  są swoimi obrazami w rzucie równoległym ( $x=x'$ ,  $z=z'$ ,  $O=O'$ ). Należy je narysować na arkuszu zgodnie z poleceniem podanym w treści zadania (rys. 2.1.). Do wyznaczenia rzutu równoległego osi  $y$  konieczne jest znalezienie rzutu jednego jej punktu (nazwijmy go  $Q$ ), różnego od punktu  $O$ . Punkt  $Q \in y$  może być obrany w sposób całkowicie dowolny, lecz w tym przypadku najwygodniej jest rozważyć punkt  $Q=(0; 90; 0)$ . Wówczas odcinek  $PQ$  jest równoległy do rzutni i zachodzi równość odcinków skierowanych (wektorów)  $PQ=P'Q'$ . Rzutem prostej równoległej do kierunku rzutowania jest punkt, zatem  $k'=P'=O=(0; 0; 0)$ . Stąd wynika, że  $PQ=[-60; 0; -30]$  oraz  $Q'=[-60; 0; -30]$ . Położenie punktu  $Q'$  na arkuszu znajdujemy odmierając jego współrzędne na osiach  $x$  i  $z$  (znak minus wskazuje, że należy odmierzać w przeciwną stronę niż zwrot osi). Punkty  $O$  i  $Q'$  wyznaczają rzut równoległy osi  $y$ , przy czym zwrot prostej  $y'$  jest taki sam jak zwrot wektora  $OQ'$ .

W celu szybkiego znajdowania rzutów innych punktów leżących na osi  $y$  konstruujemy **kąt skróceń proporcjonalnych** i wyznaczamy prostą  $y^0$ , na której zachowana jest miara długości. Wówczas rzuty punktów prostej  $y^0$  na prostą  $y'$  w kierunku równoległym do osi  $z$  są rzutami punktów osi  $y$  w rzucie równoległym w kierunku  $k$ , na płaszczyznę  $Oxz$  układu współrzędnych. Prosta  $y^0$  wyznaczają punkty  $O$  i  $Q^0$ , przy czym punkt  $Q^0$  otrzymuje się w przecięciu prostej równoległej do  $z$  przechodzącej przez  $Q'$  oraz okręgu o środku w punkcie  $O$  i promieniu o długości 90 jednostek. (Liczba 90 bierze się stąd, że przyjęliśmy  $Q=(0; 90; 0)$ .)

Z analizy danych do zadania wynika, że podstawa ostrosłupa  $ABCDE$  leży w płaszczyźnie  $Oxy$  układu współrzędnych, a ponadto wierzchołki  $D$  i  $E$  leżą na osi  $x$ . Punkty  $D=D'$  oraz  $E=E'$  znajdujemy więc bezpośrednio, odmierając na osi  $x$  odległości równe wartościom pierwszych współrzędnych. Punkty  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  wyznaczamy budując odpowiednie równoległoboki o bokach równoległych do osi  $x$  i  $y'$ . Aby wyznaczyć rzut wierzchołka ostrosłupa —  $S'$ , znajdujemy rzut punktu  $T=(125; 75; 0)$  i odmierzamy na kierunku równoległym do osi  $z$  wartość trzeciej współrzędnej punktu  $S$ .



Rys. 2.1. Rozwiązanie zadania P2.01



(Istnieje także nieco inny sposób wyznaczenia punktów  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  i  $S'$ . Aby znaleźć np. punkt  $S'$  wyznaczamy najpierw na osi  $y'$  odcinek o początku w punkcie  $O$  i długości równej długości skrócenia współrzędnej punktu  $S$  mierzonej na osi  $y$ . Przez koniec tego odcinka prowadzimy prostą równoległą do osi  $x$  i od tego punktu odmierzymy współrzędną  $x$ -ową punktu  $S$ . Przez tak otrzymany punkt prowadzimy teraz prostą równoległą do osi  $z$  i odmierzymy od niego współrzędną  $z$ -ową punktu  $S$ .)

Mając wyznaczone rzuty wszystkich wierzchołków ostrosłupa możemy narysować jego krawędzie. Brzeg rzutu jest zawsze widoczny, dlatego rzuty krawędzi  $AB$ ,  $AS$ ,  $BC$  oraz  $CS$  rysujemy linią grubą. Ponadto widoczna jest krawędź  $BS$ , zatem jej rzut rysujemy również linią grubą. Pozostałe krawędzie:  $CD$ ,  $DE$ ,  $AE$ ,  $ES$  i  $DS$  są w tym rzucie niewidoczne, dlatego ich rzuty rysujemy linią kreskową.

## 2.4. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (230; 165; 10)$ ,  $B = (140; 165; 10)$ ,  $C = (70; 75; 10)$ ,  $D = (90; 30; 10)$ ,  
 $E = (140; 30; 10)$ ;  $S = (150; 90; 110)$ .
2.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (135; 15; 110)$ ,  $B = (215; 105; 110)$ ,  $C = (180; 150; 110)$ ,  
 $D = (130; 150; 110)$ ,  $E = (40; 15; 110)$ ;  $S = (130; 90; 10)$ .
3.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (225; 165; 110)$ ,  $B = (120; 165; 110)$ ,  $C = (30; 30; 110)$ ,  $D = (80; 30; 110)$ ,  
 $E = (150; 75; 110)$ ;  $S = (110; 90; 10)$ .
4.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (220; 75; 10)$ ,  $B = (235; 150; 10)$ ,  $C = (160; 120; 10)$ ,  $D = (80; 15; 10)$ ,  
 $E = (135; 0; 10)$ ;  $S = (125; 45; 110)$ .
5.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (220; 120; 10)$ ,  $B = (185; 150; 10)$ ,  $C = (100; 75; 10)$ ,  $D = (85; 0; 10)$ ,  
 $E = (160; 15; 10)$ ;  $S = (155; 45; 110)$ .
6.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (235; 150; 110)$ ,  $B = (195; 180; 110)$ ,  $C = (125; 135; 110)$ ,  
 $D = (80; 45; 110)$ ,  $E = (160; 60; 110)$ ;  $S = (135; 90; 10)$ .
7.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (215; 135; 10)$ ,  $B = (165; 165; 10)$ ,  $C = (40; 45; 10)$ ,  $D = (50; 0; 10)$ ,  
 $E = (100; 15; 10)$ ;  $S = (120; 75; 110)$ .
8.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (145; 30; 10)$ ,  $B = (190; 150; 10)$ ,  $C = (165; 165; 10)$ ,  $D = (90; 120; 10)$ ,  
 $E = (50; 0; 10)$ ;  $S = (130; 90; 110)$ .
9.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (60; 90; 110)$ ,  $B = (40; 15; 110)$ ,  $C = (120; 30; 110)$ ,  $D = (210; 120; 110)$ ,  
 $E = (180; 165; 110)$ ;  $S = (130; 90; 10)$ .
10.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (80; 15; 10)$ ,  $B = (170; 60; 10)$ ,  $C = (200; 150; 10)$ ,  $D = (140; 165; 10)$ ,  
 $E = (60; 90; 10)$ ;  $S = (130; 90; 110)$ .
11.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (230; 150; 110)$ ,  $B = (180; 150; 110)$ ,  $C = (95; 105; 110)$ ,  $D = (50; 15; 110)$ ,  
 $E = (140; 15; 110)$ ;  $S = (150; 90; 10)$ .
12.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (230; 135; 10)$ ,  $B = (185; 150; 10)$ ,  $C = (100; 75; 10)$ ,  $D = (85; 0; 10)$ ,  
 $E = (175; 30; 10)$ ;  $S = (195; 105; 110)$ .
13.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (220; 75; 10)$ ,  $B = (235; 150; 10)$ ,  $C = (160; 135; 10)$ ,  $D = (115; 30; 10)$ ,  
 $E = (135; 0; 10)$ ;  $S = (165; 105; 110)$ .

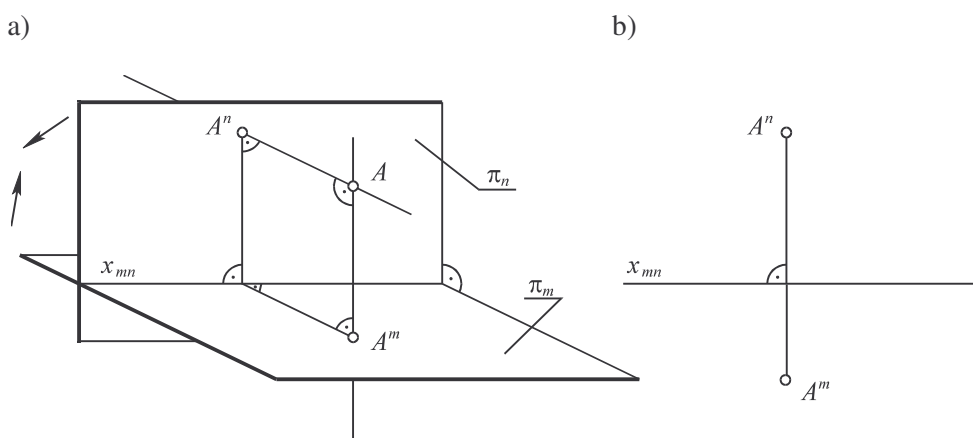
14.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (205; 120; 110)$ ,  $B = (185; 150; 110)$ ,  $C = (100; 75; 110)$ ,  $D = (85; 0; 110)$ ,  
 $E = (160; 15; 110)$ ;  $S = (155; 45; 10)$ .
15.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (220; 75; 110)$ ,  $B = (235; 150; 110)$ ,  $C = (140; 120; 110)$ ,  $D = (80; 15; 110)$ ,  
 $E = (135; 0; 110)$ ;  $S = (125; 45; 10)$ .
16.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (215; 135; 110)$ ,  $B = (160; 165; 110)$ ,  $C = (40; 45; 110)$ ,  $D = (50; 0; 110)$ ,  
 $E = (100; 15; 110)$ ;  $S = (120; 75; 10)$ .
17.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (160; 45; 10)$ ,  $B = (195; 165; 10)$ ,  $C = (105; 135; 10)$ ,  $D = (60; 15; 10)$ ,  
 $E = (90; 0; 10)$ ;  $S = (120; 75; 110)$ .
18.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (210; 120; 10)$ ,  $B = (200; 165; 10)$ ,  $C = (150; 150; 10)$ ,  $D = (35; 30; 10)$ ,  
 $E = (105; 15; 10)$ ;  $S = (130; 90; 110)$ .
19.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (210; 120; 10)$ ,  $B = (200; 165; 110)$ ,  $C = (150; 150; 110)$ ,  $D = (35; 30; 110)$ ,  
 $E = (70; 0; 110)$ ;  $S = (130; 90; 10)$ .
20.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (160; 45; 110)$ ,  $B = (195; 165; 110)$ ,  $C = (105; 135; 110)$ ,  $D = (65; 30; 110)$ ,  
 $E = (85; 0; 110)$ ;  $S = (135; 75; 10)$ .
21.  $Pp = (240; 150)$ ,  $A = (35; 30; 10)$ ,  $B = (80; 0; 10)$ ,  $C = (205; 105; 10)$ ,  $D = (195; 160; 10)$ ,  
 $E = (160; 160; 10)$ ;  $S = (125; 85; 110)$ .
22.  $Pp = (240; 150)$ ,  $A = (195; 155; 10)$ ,  $B = (95; 165; 10)$ ,  $C = (50; 30; 10)$ ,  $D = (60; 5; 10)$ ,  
 $E = (85; 5; 10)$ ;  $S = (150; 125; 110)$ .
23.  $Pp = (240; 150)$ ,  $A = (55; 15; 10)$ ,  $B = (155; 35; 10)$ ,  $C = (200; 140; 10)$ ,  $D = (190; 165; 10)$ ,  
 $E = (165; 165; 10)$ ;  $S = (100; 45; 110)$ .
24.  $Pp = (230; 140)$ ,  $A = (200; 90; 10)$ ,  $B = (220; 165; 10)$ ,  $C = (140; 150; 10)$ ,  $D = (50; 60; 10)$ ,  
 $E = (80; 15; 10)$ ;  $S = (130; 90; 110)$ .
25.  $Pp = (230; 120)$ ,  $A = (80; 15; 110)$ ,  $B = (170; 60; 110)$ ,  $C = (200; 150; 110)$ ,  $D = (150; 165; 110)$ ,  
 $E = (60; 90; 110)$ ;  $S = (130; 90; 10)$ .

### 3. Rzuty prostokątne w układzie Monge'a

#### 3.1. Układ rzutni Monge'a

Kształt geometryczny dowolnego elementu maszyny bądź mechanizmu jest pewną bryłą (przestrzenną figurą geometryczną). Istnieją różne metody przedstawiania takich obiektów przy pomocy rysunków płaskich (dwuwymiarowych). Jednak każdy opis dwuwymiarowy prowadzi do zniekształcenia pierwowzoru na skutek deformacji odległości liniowej i miary kąta. Aby istniała możliwość jednoznacznego odczytania pierwotnego kształtu na podstawie rysunku płaskiego, muszą one być sporządzane według ściśle określonych reguł. W projektowaniu części maszyn ważną rolę odgrywa zapis sytuacji przestrzennej **metodą Monge'a**. Jest to metoda wykorzystująca rzutowanie prostokątne na dwie rzutnie.

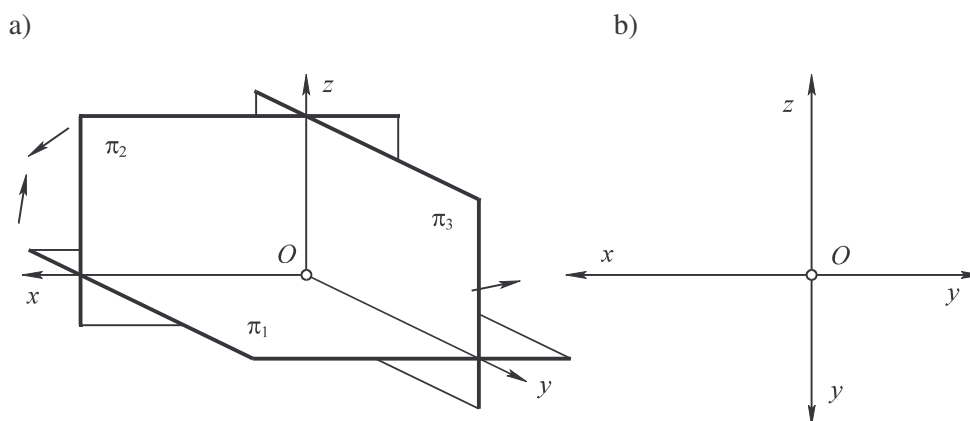
W przestrzeni **układ rzutni Monge'a** tworzą dowolne dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny  $\pi_m$  i  $\pi_n$  ( $m, n$  są numerami rzutni). Rzutnie te posiadają wspólną krawędź — prostą nazywaną **osią rzutów**. (Mocą umowy oznacza się krawędź rzutni  $\pi_m$  i  $\pi_n$  przez  $x_{mn}$ .) Aby uzyskać tzw. **rzuty Monge'a** dowolnej figury należy ustalić jej położenie w przestrzeni, sporządzić rzuty prostokątne oddzielnie na każdą z rzutni, zaś uzyskany efekt sprowadzić do jednej płaszczyzny. Realizuje się to poprzez obrócenie obu rzutni wokół osi rzutów do wybranego położenia w sposób pokazany „strzałkami” na rys. 3.1a. W praktyce rzuty Monge'a sporządza się od razu na płaszczyźnie rysunku w oparciu o własne wyobrażenia rzutowanej sytuacji przestrzennej (rys. 3.1b).



Rys. 3.1. Układ rzutni Monge'a (a) i rzuty Monge'a punktu (b)

Jeśli w przestrzeni wyróżniono **globalny** kartezjański prostokątny prawoskrętny układ współrzędnych  $Oxyz$ , to jego płaszczyzny wyznaczają **podstawowy układ rzutni Monge'a** ( $\pi_1, \pi_2$ ). Przyjmuje się wówczas, że  $\pi_1 = \{x, y\}$  i  $\pi_2 = \{x, z\}$ . Oś rzutów jest oś  $x$  układu  $Oxyz$  i tym samym  $x = x_{12}$  (jeśli nie budzi to nieporozumień, oś rzutów w tym układzie rzutni nazywana jest krótko **osią  $x$** ). Ponadto przyjmuje się, że rzutnia  $\pi_1$  ma położenie poziome dla obserwatora, zaś rzutnia  $\pi_2$  — czołowe (tzn. równoległe do „płaszczyzny czoła” obserwatora), przy czym rzutnie te nazywane są odpowiednio **poziomą** i **pionową**. Rzut figury na rzutnię poziomą nazywa się jej rzutem **poziomym** figury, zaś rzut na rzutnię pionową — rzutem **pionowym**.

Osie  $y$  i  $z$  układu globalnego wyznaczają dodatkowo rzutnię trzecią  $\pi_3$ , nazywaną rzutnią **boczną**, przy czym układy  $(\pi_1, \pi_3)$  oraz  $(\pi_2, \pi_3)$  są również układami rzutni Monge'a. Rzutnie  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  tworzą tzw. **rozszerzony układ rzutni**. Krawędzie tych płaszczyzn nazywają się **osiami układu** i (w tym przypadku) są oznaczane:  $x_{12} = x$ ,  $x_{13} = y$ ,  $x_{23} = z$ . Złożenie trzech rzutni do jednej płaszczyzny dokonuje się w sposób pokazany strzałkami na rys. 3.2a, zaś osie układu zajmują wtedy położenie pokazane na rys. 3.2b.



Rys. 3.2. Rozszerzony układ rzutni Monge'a

W celu uzyskiwania rozłącznych rzutów na dwie i więcej rzutni przyjęto zasadę umieszczania obiektu rzutowanego w tych oktantach przestrzeni, których punkty mają wszystkie współrzędne jednakowego znaku (tzn. wszystkie współrzędne są dodatnie albo wszystkie współrzędne są ujemne). Położenie obserwatora umiejscawia się w taki sposób, aby wszystkie współrzędne punktu wspólnego płaszczyzn obserwacji miały wartości dodatnie i były większe od największych wartości współrzędnych punktów figury rzutowanej. Jeśli punkty figury mają wszystkie współrzędne dodatnie, to po „złożeniu” rzutni do płaszczyzny rysunku uzyskamy układ rzutów według **metody pierwszego kąta** (potocznie określanej jako układ rzutów metodą **europejską**), natomiast gdy punkty figury mają wszystkie współrzędne ujemne, taka procedura pozwala otrzymać układ rzutów według **metody trzeciego kąta** (metodą **amerykańską**)<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> W niniejszym opracowaniu sporządzamy rzuty jedynie metodą europejską!

W metodzie europejskiej oś  $x_{12}$  ma na arkuszu rysunkowym zawsze położenie poziome, rzut poziomy znajduje się „pod” osią rzutów, rzut pionowy — „nad” osią i oba rzuty są rozłączne (nie mają punktów wspólnych). Ponieważ element rzutowany tą metodą znajduje się zawsze pomiędzy obserwatorem a rzutnią, można tę zasadę interpretować, że przy sporządzaniu rzutu poziomego obserwator patrzy na rzutowany element „z góry”, zaś przy sporządzaniu rzutu pionowego — „z przodu”. Powstały w opisany sposób układ dwu rzutów prostokątnych nazywa się **podstawowym układem rzutów Monge'a**, natomiast układ trzech rzutów (z rzutem bocznym) jest układem **rozszerzonym**. Ponieważ rzutnia boczna znajduje się po prawej stronie obserwatora, rzuty metodą europejską w rozszerzonym układzie rzutów Monge'a można interpretować jako widoki:

- poziomy (widok z góry w kierunku osi  $z$ ),
- pionowy (widok z przodu w kierunku osi  $y$ ),
- boczny (widok boczny prawy w kierunku osi  $x$ ).

Odległość punktu od rzutni pionowej nazywa się jego **głębokością**, odległość punktu od rzutni poziomej — **wysokością**, zaś odległość od rzutni bocznej — **szerokością** punktu. Przyjmuje się, że współrzędna punktu jest dodatnia jeśli punkt znajduje się pomiędzy obserwatorem a rozważaną rzutnią, oraz że jest ujemna, gdy rzutnia znajduje się pomiędzy punktem i obserwatorem. Głębokość punktu można odczytać z układu rzutów Monge'a jako odległość rzutu poziomego punktu od osi rzutów. Podobnie wysokość punktu jest równa odległości od osi rzutów rzutu pionowego tego punktu. Pozwala to nadać interpretację współrzędnym opisującym położenie punktu w globalnym układzie współrzędnych  $Oxyz$ . Głębokość punktu jest równa współrzędnej mierzonej na osi  $y$ , zaś wysokość jest równa współrzędnej mierzonej na osi  $z$ .

## 2.2. Treść problemu

### Problem I. Rzuty prostokątne modelu

Dana jest **bryła płaskościenna** (1) (patrz: rysunki w tabelach 3.1a i 3.1b), otrzymana w wyniku „obróbki” sześcianu o krawędzi długości 90 mm. „Obróbka” polegała na ścinaniu naroży, obcinaniu i wycinaniu fragmentów bryły itp. Płaszczyzny cięć poprowadzono w ten sposób, że powstała bryła ma wszystkie wierzchołki usytuowane w **wierzchołkach, środkach ścian, środkach krawędzi** lub w **środku symetrii** sześcianu.

Ponadto dany jest kartezjański prostokątny prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$  (2) (tabela 3.2), w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm. Obrabiany sześcian jest ustawiony w taki sposób, że współrzędne jego wierzchołków w układzie (2) są liczbami nieujemnymi, zaś krawędzie sześcianu są odpowiednio równoległe do osi tego układu.

**1.** Przerysować rysunek poglądowy danej bryły (1), rysując obok zadany układ osi (2). Oznaczyć i opisać **literą A** wierzchołek obrabianego sześcianu położony najbliżej początku układu współrzędnych (2). **Oznaczyć** ponadto **wszystkie wierzchołki bryły** i **opisać** je kolejnymi liczbami arabskimi w sposób przyjęty według własnego uznania.

(Jeśli punkt  $A$  jest jednocześnie wierzchołkiem bryły, to nie należy opisywać go ponownie – por. rys. 3.3.)

Rysunki brył w tabelach 3.1a i 3.1b oraz rysunki układów współrzędnych w tabeli 3.2 wykonano jako rzuty równoległe na płaszczyznę równoległą do jednej ze ścian sześciianu. Kierunek rzutowania w układzie współrzędnych związanym z bryłą jest prostą określoną przez punkty  $(0; 0; 0)$  i  $(60; 90; 30)$ .

Rysunek poglądowy bryły wykonać w podziałce 1:2, umiejscawiając **tylny dolny prawy** wierzchołek obrabianego sześciianu w punkcie  $Pp_1$  arkusza rysunkowego.

2. Skonstruować w układzie Monge'a rzuty prostokątne bryły (1) na rzutnie  $\pi_1 = \{x, y\}$ ,  $\pi_2 = \{x, z\}$ ,  $\pi_3 = \{y, z\}$  wyznaczone przez płaszczyzny układu (2). Zachować uprzednio przyjęty opis wierzchołków. Określić widoczność wszystkich krawędzi, przy założeniu, że bryła znajduje się zawsze pomiędzy rzutnią a obserwatorem.

Rzuty wykonać w podziałce 1:1. Założyć, że początek układu współrzędnych znajduje się w punkcie  $Pp_2$  arkusza, oś  $x$  przyjąć na arkuszu poziomo, zaś jej zwrot — w lewą stronę.

3. Narysować rzut równoległy bryły (1) na płaszczyznę  $\pi_2 = \{x, z\}$  układu (2), zakładając, że kierunkiem rzutowania jest prosta  $k = \{O, P\}$ , gdzie  $O = (0; 0; 0)$ ,  $P = (60; 90; 30)$ . Określić w tym rzucie widoczność wszystkich krawędzi, zakładając, że obserwator spogląda zgodnie ze zwrotem wektora  $PO$ .

Rysunek sporządzić w podziałce 1:2, przyjmując początek układu współrzędnych w punkcie  $Pp_3$ . Przyjąć, że oś  $x$  ma położenie poziome i zwrot „w lewo”, zaś oś  $z$  ma położenie pionowe i zwrot „w górę” arkusza.

### Informacje pomocnicze:

- założyć, że „obrabiany” sześciian „stoi” na płaszczyźnie  $\{x, y\}$  i jest odległy o 30 mm od płaszczyzny  $\{x, z\}$  oraz o 30 mm od płaszczyzny  $\{y, z\}$ , układu współrzędnych (2) (oznacza to, że  $A = (30; 30; 0)$ ),
- jednoczące się rzuty wierzchołków bryły opisać **zgodnie z kolejnością ich widzenia w danym rzucie**, stosując konwencję: *opis\_punktu\_1 = ... = opis\_punktu\_n*; jeśli opis koliduje z rysunkiem, należy przenieść opis na wolne pole arkusza i umieścić nad linią odniesienia (por. przykładowe rozwiązanie — rys. 3.3.),
- punkty oznaczać okręgami o średnicy 2,0 mm, rysowanymi linią cienką; **nie zacierać ani nie przekreślać wewnątrz tych okręgów**,
- na wszystkich rysunkach uwzględniać **krawędzie niewidoczne**, rysując je **linią kreskową średniej grubości**, **krawędzie widoczne** rysować linią **grubą**,
- w przypadku przecinania się rzutów krawędzi widocznych i niewidocznych należy krawędź niewidoczną przerwać na długości około 1,5 mm po obu stronach krawędzi widocznej,
- w przypadku przecinania się rzutów krawędzi niewidocznych należących do kierunków skośnych, krawędź dalszą obserwatorowi należy przerwać na długości około 1,5 mm po obu stronach krawędzi bliższej obserwatorowi.

Tabela 3.1a. Rysunki brył

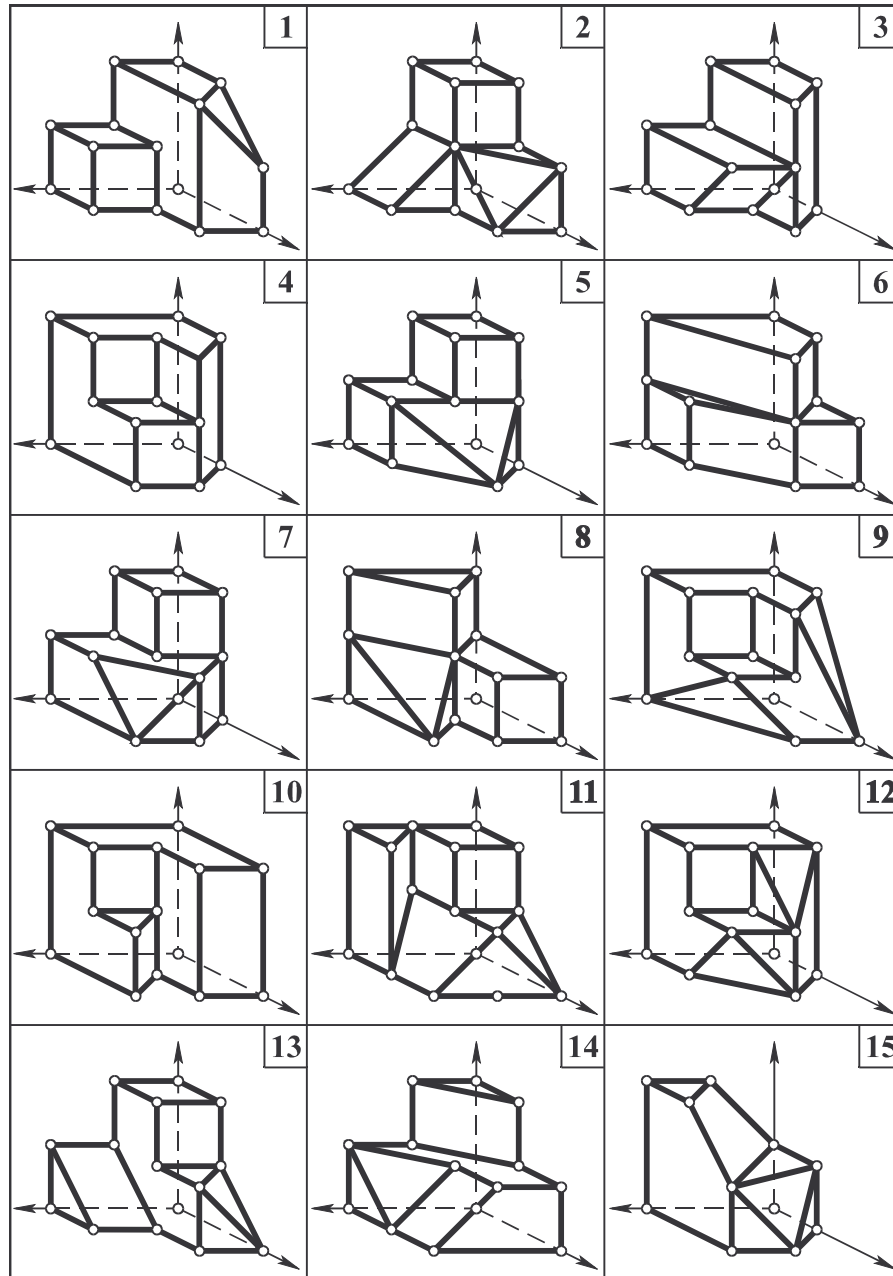


Tabela 3.1b. Rysunki brył cd.

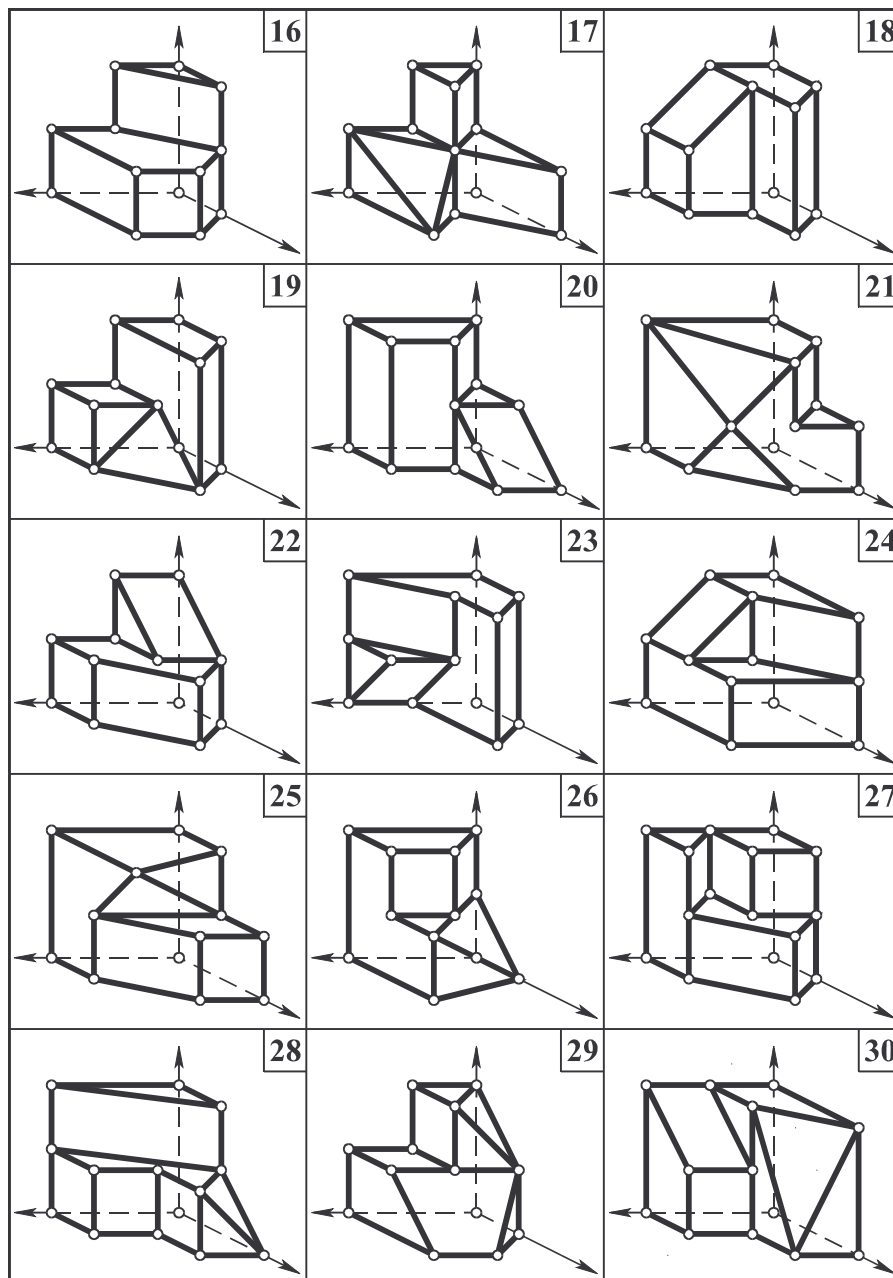
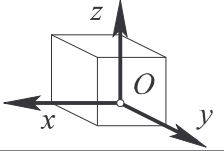
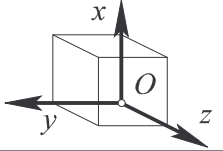
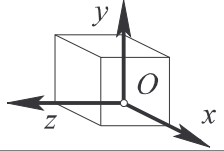
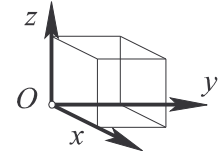
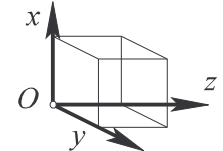
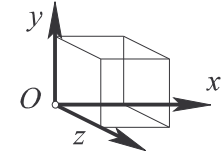
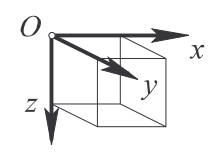
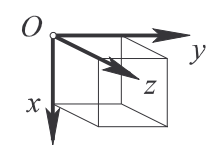
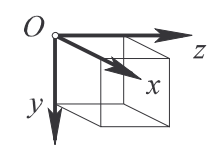
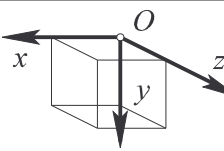
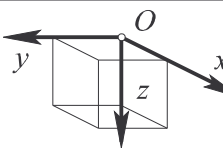
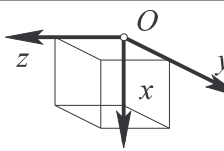
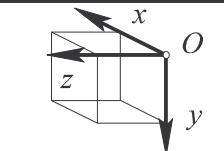
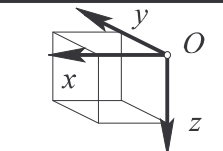
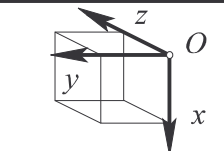
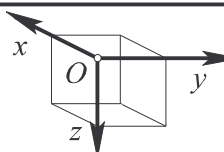
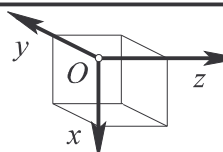
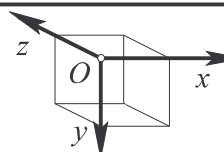
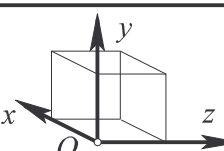
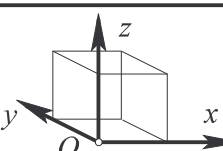
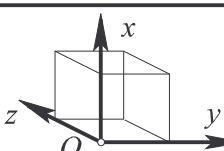
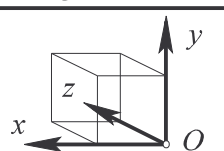
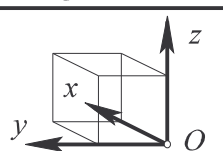
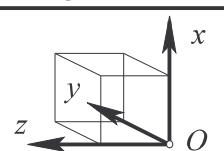




Tabela 3.2. Układy współrzędnych

 1	 2	 3
 4	 5	 6
 7	 8	 9
 10	 11	 12
 13	 14	 15
 16	 17	 18
 19	 20	 21
 22	 23	 24

### 3.3. Przykładowe rozwiązanie

**Przykład. Zadanie P3.01. Problem I.**

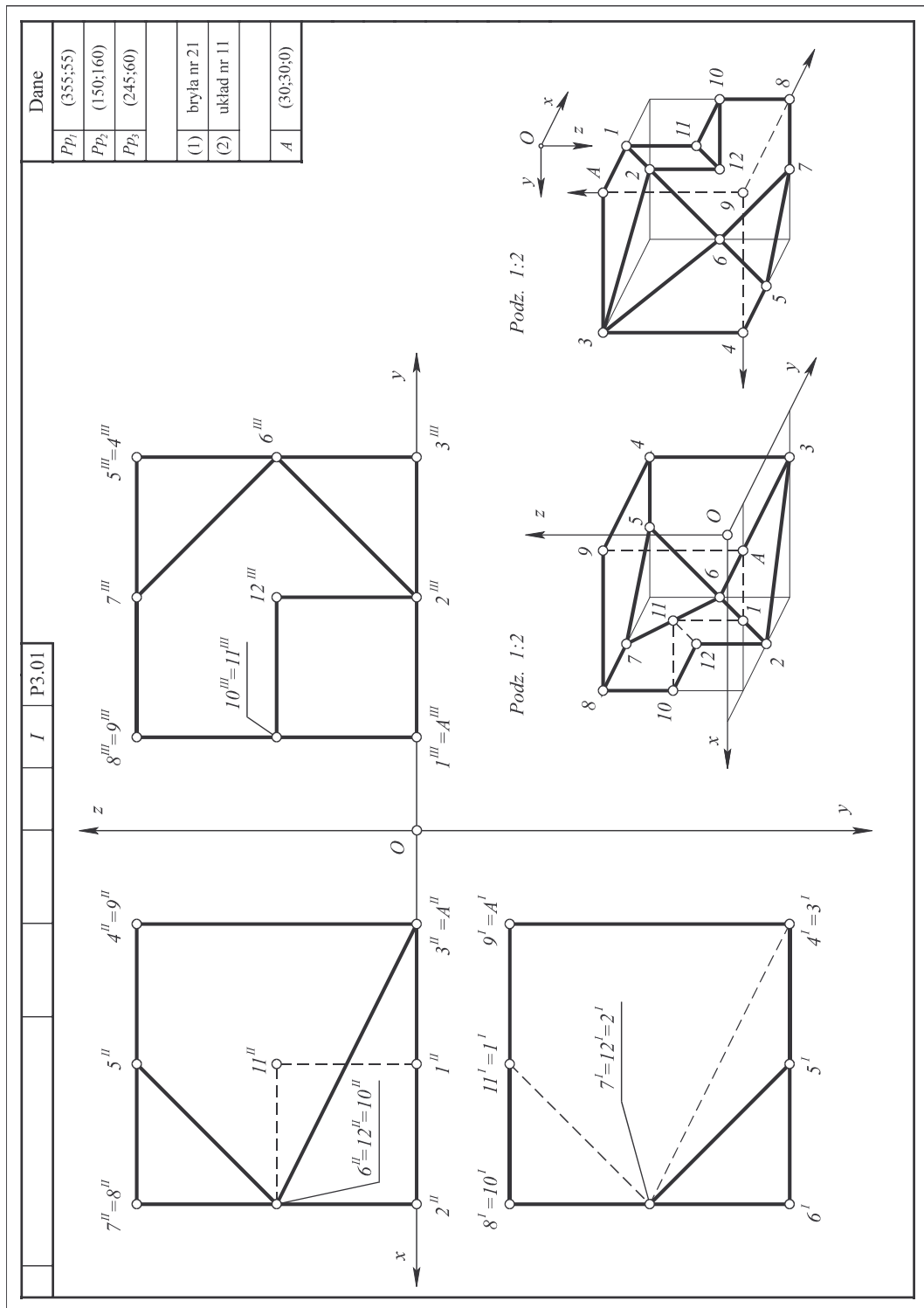
Dane	
$Pp_1$	(355; 55)
$Pp_2$	(150; 160)
$Pp_3$	(245; 60)
(1)	bryła nr 21
(2)	układ nr 11
A	(30; 30; 0)

Szkic rozwiązania:

Rozwiązywanie zadania należy rozpocząć od przerysowania tematu zgodnie treścią zadania (podziałka 1 : 2). Wygodnie jest najpierw narysować cienką linią sześcián, który poddano „obróbce”. Sześcián rysujemy w taki sposób, aby jego tylny dolny prawy wierzchołek znajdował się w punkcie  $Pp_1$  arkusza rysunkowego. Następnie należy wrysować wierzchołki danej bryły, oznaczając je okręgami o średnicy 2,0 mm, oraz jej krawędzie, ustalając ich widoczność w rzucie. Przed rozpoczęciem opisywania wierzchołków bryły trzeba zidentyfikować punkt  $A$  — położony najbliżej początku układu współrzędnych wierzchołek obrabianego sześciánu. Jeśli punkt  $A$  jest wierzchołkiem bryły, to nie opisujemy go po raz drugi (rys. 3.3.). Pozostałe wierzchołki bryły opisujemy w dowolnej kolejności kolejnymi liczbami arabskimi 1, 2, ... Obok rysunku bryły umieszczamy rysunek danego układu współrzędnych, pamiętając, że osie tego układu są równoległe do odpowiednich krawędzi sześciánu. Wygodnie jest umieścić rysunek układu w pobliżu wierzchołka  $A$  tak, aby można było łatwiej wyobrazić sobie położenie danej bryły względem układzie.

Sporządzamy teraz rzuty prostokątne bryły na odpowiednie płaszczyzny układu. Najpierw odwzorowujemy osie układu w rzutach Monge’a, a następnie wrysowujemy rzuty prostokątne obrabianego sześciánu (rzutami sześciánu będą kwadraty o boku długości 90 mm). Ułatwia to znalezienie rzutów prostokątnych wierzchołków bryły. Po znalezieniu rzutów wierzchołków rysujemy rzuty krawędzi, kontrolując prawidłowość rysowanych połączeń na rysunku poglądowym. Jednocześnie się w rzutach wierzchołki opisujemy zgodnie z ich kolejnością widzenia w przestrzeni (bryła rzutowana znajduje się pomiędzy obserwatorem a rzutnią). Opis punktów w rzutach prostokątnych musi być zgodny z opisem na rysunku poglądowym. Następnie należy ustalić widoczność krawędzi bryły w rzutach prostokątnych.

W celu sporządzenia żądanego rzutu równoległego bryły odwzorowujemy osie układu współrzędnych, umieszczając początek układu w punkcie  $Pp_3$  arkusza. Następnie należy znaleźć rzut równoległy punktu  $A$ , pamiętając o zachowaniu podziałki 1 : 2. Punkt  $A$  będzie w tym rzucie prawym tylnym dolnym wierzchołkiem „obrabianego” sześciánu. Wrysowując (cienkimi liniami) rzut równoległy tego sześciánu, można szybko odwzorować rzuty wierzchołków bryły. Identyfikację wierzchołków przeprowadza się w oparciu o rysunek poglądowy, bądź też rzuty prostokątne. Po znalezieniu rzutów wszystkich wierzchołków rysuje się rzuty krawędzi i ustala ich widoczność.



Rys. 3.3. Rozwiązanie zadania P3.01

### 3.4. Zadania

#### Problem I

1.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 30, (2) = układ nr 24,  $A = (30; 30; 0)$ .
2.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 29, (2) = układ nr 18,  $A = (30; 30; 0)$ .
3.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 28, (2) = układ nr 8,  $A = (30; 30; 0)$ .
4.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 27, (2) = układ nr 4,  $A = (30; 30; 0)$ .
5.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 26, (2) = układ nr 5,  $A = (30; 30; 0)$ .
6.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 25, (2) = układ nr 10,  $A = (30; 30; 0)$ .
7.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 24, (2) = układ nr 12,  $A = (30; 30; 0)$ .
8.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 23, (2) = układ nr 22,  $A = (30; 30; 0)$ .
9.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 22, (2) = układ nr 23,  $A = (30; 30; 0)$ .
10.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 21, (2) = układ nr 4,  $A = (30; 30; 0)$ .
11.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 20, (2) = układ nr 5,  $A = (30; 30; 0)$ .
12.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 19, (2) = układ nr 10,  $A = (30; 30; 0)$ .
13.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 18, (2) = układ nr 12,  $A = (30; 30; 0)$ .
14.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 17, (2) = układ nr 22,  $A = (30; 30; 0)$ .
15.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 16, (2) = układ nr 23,  $A = (30; 30; 0)$ .
16.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 15, (2) = układ nr 4,  $A = (30; 30; 0)$ .
17.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 14, (2) = układ nr 5,  $A = (30; 30; 0)$ .
18.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 13, (2) = układ nr 10,  $A = (30; 30; 0)$ .
19.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 12, (2) = układ nr 12,  $A = (30; 30; 0)$ .
20.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 11, (2) = układ nr 22,  $A = (30; 30; 0)$ .

21.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 10, (2) = układ nr 23,  $A = (30; 30; 0)$ .
22.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 9, (2) = układ nr 4,  $A = (30; 30; 0)$ .
23.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 8, (2) = układ nr 5,  $A = (30; 30; 0)$ .
24.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 7, (2) = układ nr 10,  $A = (30; 30; 0)$ .
25.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 6, (2) = układ nr 12,  $A = (30; 30; 0)$ .
26.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 5, (2) = układ nr 22,  $A = (30; 30; 0)$ .
27.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 4, (2) = układ nr 23,  $A = (30; 30; 0)$ .
28.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 3, (2) = układ nr 4,  $A = (30; 30; 0)$ .
29.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 2, (2) = układ nr 5,  $A = (30; 30; 0)$ .
30.  $Pp_1 = (355; 55)$ ,  $Pp_2 = (150; 160)$ ,  $Pp_3 = (245; 60)$ , (1) = bryła nr 1, (2) = układ nr 10,  $A = (30; 30; 0)$ .



## 4. Podstawowe konstrukcje w rzutach Monge'a

### 4.1. Elementy wspólne

**Elementem wspólnym** (iloczynem) dwóch figur geometrycznych nazywamy zbiór punktów, które należą zarówno do jednego jak i drugiego obiektu. Element wspólny dwu prostych nazywa się ich **punktem przecięcia** (o ile proste te się przecinają). Element wspólny prostej i płaszczyzny nosi nazwę **punktu przebiccia** płaszczyzny prostą (o ile prosta nie jest równoległa do płaszczyzny). Elementem wspólnym dwu płaszczyzn przecinających się jest prosta zwana **krawędzią** płaszczyzn.

Punkt przecięcia prostych jest **niezmiennikiem rzutowania** równoległego. Oznacza to, rzuty punktu przecięcia są punktami przecięcia rzutów prostych i znajdują się w sposób natychmiastowy. Jeśli płaszczyzna jest prostopadła do jednej z rzutni układu Monge'a (jest **rzutuująca**), to jeden z rzutów punktu przebiccia takiej płaszczyzny prostą znajduje się w punkcie przecięcia rzutu prostej i tego rzutu płaszczyzny, który jest prostą. Drugi rzut punktu przebiccia określa się z **warunku przynależności** punktu do prostej przebijającej. W przypadku wyznaczania krawędzi płaszczyzny rzutuującej i płaszczyzny zajmującej **dowolne** (tj. położenie nierównoległe ani nieprostopadłe) względem rzutni układu Monge'a, jeden z rzutów szukanej prostej jednoczy się z rzutem płaszczyzny rzutuującej, a drugi wyznacza się znajdując rzuty punktów przebiccia tej płaszczyzny dwóch dowolnych prostych zawartych w drugiej płaszczyźnie.

Aby wyznaczyć punkt przebiccia płaszczyzny  $\alpha$  mającej położenie dowolne prostą  $a$  o położeniu dowolnym należy zastosować następujący algorytm postępowania:

- przeprowadzić przez prostą  $a$  dowolną płaszczyznę rzutuującą  $\beta$ ,
- wyznaczyć krawędź  $k$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ ,
- wyznaczyć punkt przecięcia prostych  $a$  i  $k$ .

Punkt przecięcia prostych  $a$  i  $k$  jest szukanym punktem przebiccia.

Aby wyznaczyć krawędź płaszczyzn mających dowolne położenie względem układu rzutni Monge'a wystarczy wyznaczyć rzuty dwóch różnych punktów należących do tej krawędzi. Określenie dwu różnych punktów prostej jest bowiem równoważne określeniu całej prostej. Każdy punkt przebiccia jednej płaszczyzny prostą zawartą w drugiej, należy jednocześnie do obu płaszczyzn, więc należy również do ich krawędzi. Wybierając dwie dowolne proste zawarte w jednej lub drugiej płaszczyźnie i wykorzystując podany wcześniej algorytm, można określić punkty, w których te proste wbijają się w drugą płaszczyznę. Znalezione punkty przebiccia wyznaczają szukaną krawędź.

## 4.2 Równoległość, prostopadłość, długość odcinka, ustalanie widoczności

**Równoległość prostych** jest niezmiennikiem rzutowania równoległego. Oznacza to, że jeśli w przestrzeni dwie proste są równoległe, to ich rzuty są prostymi równoległymi (o ile proste nie mają kierunku rzutowania).

Natomiast **miara rozwartości kąta** pomiędzy prostymi nie jest niezmiennikiem rzutowania. W przypadku dowolnego położenia prostych względem rzutni, kąt pomiędzy rzutami tych prostych jest różny od kąta pomiędzy tymi prostymi w przestrzeni. Miara kąta zachowuje się wówczas, gdy obie proste są równoległe do rzutni. W przypadku kąta prostego warunek ten ulega osłabieniu. Kąt prosty pomiędzy dwoma prostymi zachowany jest, gdy jedna z prostych ma położenie równoległe do rzutni.

Prosta jest **prostopadła** do płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do dwóch prostych przecinających się leżących w tej płaszczyźnie. Konstrukcja prostej prostopadłej do płaszczyzny albo płaszczyzny prostopadłej do prostej w rzutowaniu metodą Monge'a jest oparta na przytoczonych wcześniej spostrzeżeniach.

Aby skonstruować prostą prostopadłą do płaszczyzny i przechodzącą przez dany punkt, należy w płaszczyźnie wybrać parę prostych przecinających się: **poziomą** ( $\parallel \pi_1$ ) oraz **czołową** ( $\parallel \pi_2$ ). Rzut poziomy prostej prostopadłej przechodzi przez rzut poziomy punktu i jest prostopadły do rzutu poziomego prostej poziomej. Rzut pionowy przechodzi przez rzut pionowy punktu i jest prostopadły do rzutu pionowego prostej czołowej.

W celu wyznaczenia płaszczyzny prostopadłej do prostej i przechodzącej przez zadany punkt, należy określić ją przy pomocy odpowiednich prostych poziomej i czołowej, przecinających się w zadanym punkcie.

**Miara odległości punktów** leżących na jednej prostej jest zachowana w rzutach Monge'a w przypadku, gdy prosta jest równoległa do jednej z rzutni układu. Wynika to z własności rzutowania równoległego. Jeśli prosta ma położenie dowolne, w celu sprowadzenia jej do położenia równoległego do wybranej rzutni należy wykonać tzw. **kład prostokątny** płaszczyzny przechodzącej przez prostą i prostopadłej do tej rzutni.

Jeśli dwa punkty leżą na prostej prostopadłej do rzutni poziomej, to w rzucie poziomym **widoczny** jest ten, który ma większą wysokość (leżący wyżej). Tej informacji należy szukać w rzucie pionowym. Z dwu punktów leżących na prostej prostopadłej do rzutni pionowej, w rzucie pionowym widoczny jest ten, który ma większą głębokość (leżący bliżej obserwatora). Głębokości tych punktów są zachowane w rzucie na rzutnię poziomą. Określenie widoczności dwu (i więcej) figur jest równoważne z określeniem widoczności ich każdego punktu



### 4.3. Treść problemów

#### Problem I. Przenikanie trójkątów

Dany jest kartezjański prostokątny, prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm. Ponadto dane są dwa **trójkąty**:  $ABC$  i  $KLM$ .

1. Wykreślić rzuty Monge'a punktów  $A, B, C$  i  $K, L, M$  przyjmując, że rzutnią poziomą jest płaszczyzna  $\pi_1 = \{x, y\}$ , a rzutnią pionową płaszczyzna  $\pi_2 = \{z, x\}$ .

Punkt  $O$  (początek układu współrzędnych) przyjąć w punkcie  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę.

2. Skonstruować rzuty Monge'a prostej  $k$  będącej **krawędzią** płaszczyzn  $\alpha = \{A, B, C\}$  i  $\beta = \{K, L, M\}$  (opisać wszystkie figury geometryczne użyte w konstrukcji).

3. Ustalić **widoczność** układu trójkątów  $ABC$  i  $KLM$  przy założeniu, że ściany trójkątów są nieprzezroczyste.

#### Problem II. Prostopadłość, punkt przebicia

W przestrzeni dany jest kartezjański prostokątny prawoskrętny układ współrzędnych  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm. Ponadto dany jest **trójkąt**  $KLM$  oraz **punkt**  $P$  nie leżący w płaszczyźnie tego trójkąta. Metodą konstrukcji podstawowych:

1. Skonstruować rzuty Monge'a na rzutnie  $\pi_1 = \{x, y\}$  i  $\pi_2 = \{x, z\}$  **prostej**  $a$ , przechodzącej przez dany punkt, **prostopadłej** do płaszczyzny trójkąta,

2. Wyznaczyć **punkt przebicia**  $S$  płaszczyzny trójkąta prostą  $a$  i **określić widoczność** prostej na tle trójkąta.

Przyjąć, że początek układu współrzędnych (punkt  $O$ ) znajduje się w punkcie początkowym  $Pp$ . Oś  $x$  przyjąć na arkuszu **poziomo** i nadać jej zwrot „w lewo”, oś  $y$  przyjąć **pionowo** i nadać jej zwrot „w dół”, oś  $z$  przyjąć **pionowo** i nadać zwrot „do góry”.

#### Informacje pomocnicze:

- krawędzie **niewidoczne** rysować linią **cienką kreskową**, krawędzie **widoczne** linią **ciągłą grubą**, punkty oznaczać okręgami o średnicy 2 mm; **nie zaczerniać** ani **nie przekreślać ich wewnątrz**,
- punkty pomocnicze numerować kolejnymi liczbami, zapisując je cyframi arabskimi,
- **konstrukcje pomocnicze** wykreślać linią **cienką ciągłą**,
- w przypadku przecinania się rzutów krawędzi widocznych i niewidocznych należy krawędź niewidoczną przerwać na długości około 1,5 mm po obu stronach krawędzi widocznej.

#### 4.4. Przykładowe rozwiązania

##### Przykład 1. Zadanie P4.01. Problem I.

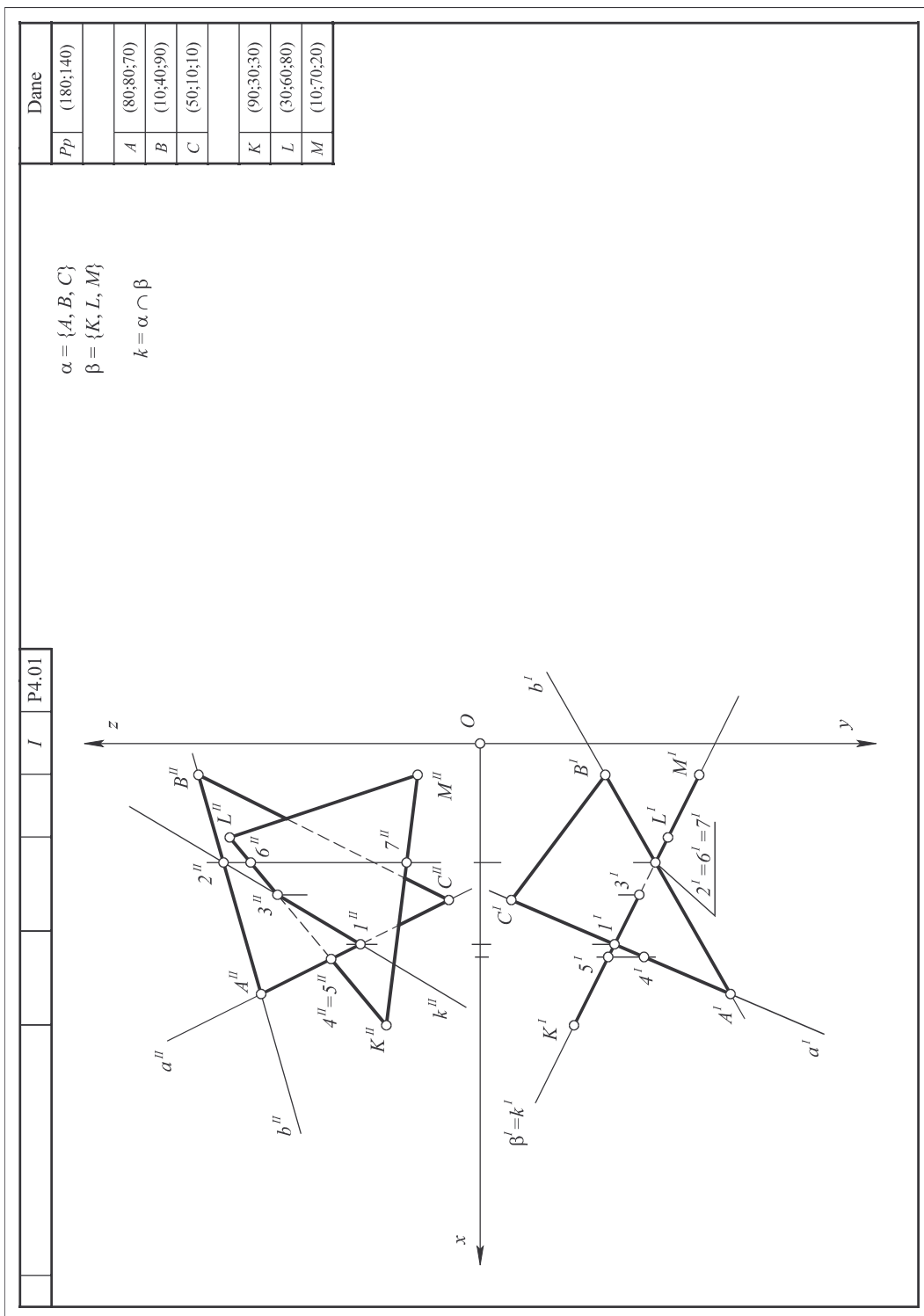
Dane	
$Pp$	(180; 140)
$A$	(80; 80; 70)
$B$	(10; 40; 90)
$C$	(50; 10; 10)
$K$	(90; 30; 30)
$L$	(30; 60; 80)
$M$	(10; 70; 20)

##### Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności należy nanieść na arkusz rysunkowy rzuty osi układu współrzędnych, przestrzegając dyspozycji wymiarowych zawartych w treści problemu. Następnie znaleźć rzuty poziome i pionowe wierzchołków obu danych trójkątów.

Jeżeli dwie płaszczyzny posiadają wspólną krawędź  $k$ , to każda prosta zawarta w jednej płaszczyźnie przebija drugą płaszczyznę w punkcie należącym do krawędzi  $k$ . Aby wyznaczyć prostą  $k$  w sposób jednoznaczny, wystarczy skonstruować punkty przebicia dwóch różnych prostych, przy czym proste te mogą być wybrane w sposób dowolny. W rozważanym zadaniu rzuty poziome wierzchołków  $K, L, M$  są współliniowe. Oznacza to, że płaszczyzna  $\beta = \{K, L, M\}$  jest płaszczyzną poziomorzutującą (prostopadłą do rzutni poziomej). Punkty przebicia tej płaszczyzny prostymi zawartymi w płaszczyźnie  $\alpha = \{A, B, C\}$  można więc wyznaczyć w sposób bezpośredni z rzutu poziomego. Rzuty poziome punktów przebicia są punktami przecięcia rzutów poziomych wybranych prostych oraz rzutu poziomego płaszczyzny  $\beta$ , zaś rzuty pionowe leżą w punktach przecięcia rzutów pionowych wybranych prostych i odpowiednich prostych odnoszących. W omawianym rozwiązaniu wybrano w płaszczyźnie  $\alpha$  proste  $a = \{A, C\}$  i  $b = \{A, B\}$ . (Najwygodniej jest wykorzystać proste zawierające boki trójkąta  $ABC$ .) Prosta  $a$  przebija płaszczyznę  $\beta$  w punkcie 1, prosta  $b$  przebija płaszczyznę  $\beta$  w punkcie 2. Prosta przebiegająca przez punkty 1 i 2 jest poszukiwaną krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , tzn.  $k = \{1, 2\}$ .

W dalszej kolejności należy ustalić widoczność układu przenikających się trójkątów. W tym celu należy narysować boki trójkątów  $ABC$  i  $KLM$  oraz wyznaczyć fragment krawędzi  $k$ , będący częścią wspólną tych trójkątów. Poszukiwana część wspólna jest odcinkiem, którego oba rzuty leżą wewnątrz rzutów części wspólne rzutów trójkątów. W danym rozwiązaniu jest to odcinek 1–3.



Rys. 4.1. Rozwiązanie zadania P4.01

- Przy ustalaniu widoczności układu wielokątów płaskich należy zauważyć, że:
- punkt przebicia płaszczyzny prostą jest punktem zmiany widoczności prostej,
  - krawędź dwóch wielokątów jest zawsze widoczna,
  - brzeg rzutu układu wielokątów jest zawsze widoczny,
  - określenie w rzucie widoczności jednego punktu należącego do części wspólnej rzutów obu figur, pozwala na określenie widoczności we wszystkich pozostałych punktach.

Widoczność figur w rzucie pionowym określono analizując położenie punktów  $4 \in AC$  i  $5 \in KL$ . Punkty te wyznaczają pewną prostą celową. Ponieważ **głębokość** punktu 4 jest większa o głębokości punktu 5, więc w rzucie pionowym widoczny jest punkt 4, a zarazem odcinek  $A-I$ . Stąd wynika, że niewidoczne są: odcinek  $3-5$  i fragmenty odcinków  $I-C$  oraz  $BC$ .

Widoczność w rzucie poziomym ustalono analogicznie, analizując położenie punktów  $2 \in AB$ ,  $6 \in KL$  i  $7 \in KM$ .

**Przykład 2. Zadanie P4.02. Problem II.**

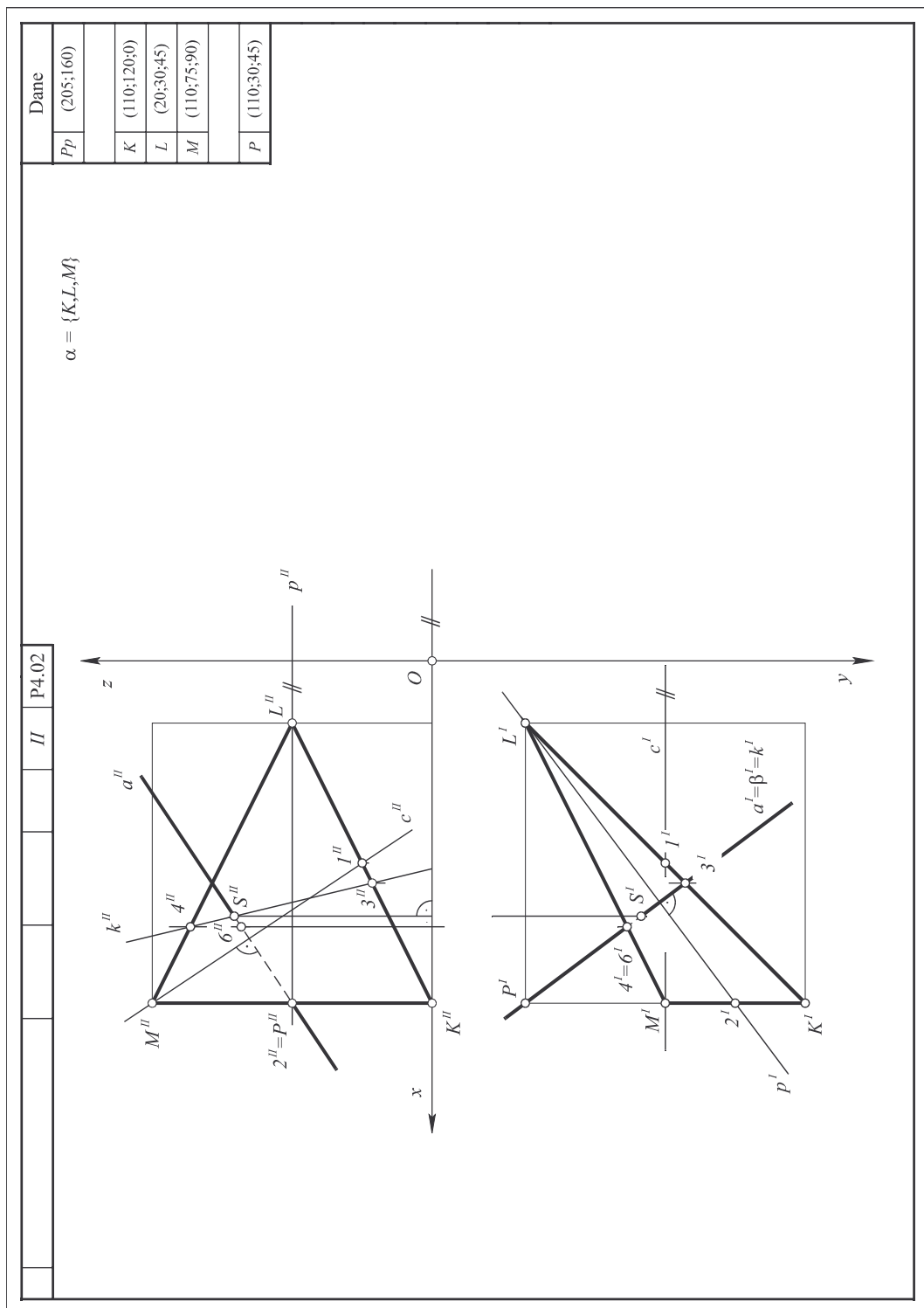
Dane	
$Pp$	(205; 160)
$K$	(110; 120; 0)
$L$	(20; 30; 45)
$M$	(110; 75; 90)
$P$	(110; 30; 45)

Rozwiązanie:

Rozwiązywanie problemu rozpoczynamy od wyznaczenia rzutów prostokątnych zadanej sytuacji. Niewspółliniowe punkty  $K, L, M$  (wierzchołki trójkąta) wyznaczają w przestrzeni pewną płaszczyznę  $\alpha$ . Aby skonstruować rzuty prostej  $a$ , prostopadłej do  $\alpha$ , należy w tej płaszczyźnie określić kierunki prostych poziomych i czołowych. W tym celu znaleźliśmy parę prostych: prostą czołową  $c = \{1, M\}$  i prostą poziomą  $p = \{2, L\}$  (rys. 4.2). (Uwaga:  $c \perp p \parallel x$ .) Rzut poziomy  $a'$  szukanej prostej  $a$  ( $a \perp \alpha$ ) jest prostą przechodzącą przez rzut poziomy punktu  $P$  i prostopadłą do rzutu poziomego prostej  $p$ , zaś jej rzut pionowy  $a''$  przechodzi przez rzut pionowy punktu  $P$  i jest prostopadły do  $c''$ .

Punkt przebicia  $S$  płaszczyzny  $\alpha = \{K, L, M\}$  prostą  $a$  wyznaczyliśmy prowadząc pomocniczą płaszczyznę  $\beta \perp \pi_1$ , przechodzącą przez  $a$ . Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  mają wspólną krawędź  $k$ , a szukany punkt przebicia  $S$  jest punktem przecięcia prostych  $a$  i  $k$  ( $a \cap k = S$ ).

Aby określić widoczność tych figur wystarczy zauważyć, że punkt  $2 \in KM$  ma większą głębokość niż punkt  $P \in a$ , a punkt  $4 \in LM$  ma większą wysokość niż punkt  $6 \in a$ . Zatem prosta  $a$  na odcinku  $P''S''$  jest niewidoczna w rzucie pionowym i na odcinku  $S'I'6'$  w rzucie poziomym. Punkt przebicia  $S$  jest punktem zmiany widoczności prostej na tle płaszczyzny.



Rys. 4.2. Rozwiązanie zadania P4.02

## 4.5. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 70; 20)$ ,  $B = (60; 20; 90)$ ,  $C = (10; 90; 10)$ ,  $K = (90; 40; 90)$ ,  
 $L = (10; 80; 60)$ ,  $M = (50; 60; 10)$ .
2.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 10; 10)$ ,  $B = (60; 90; 90)$ ,  $C = (90; 50; 20)$ ,  $K = (10; 70; 30)$ ,  
 $L = (90; 30; 40)$ ,  $M = (30; 60; 90)$ .
3.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 80; 90)$ ,  $B = (90; 50; 80)$ ,  $C = (40; 30; 10)$ ,  $K = (30; 90; 80)$ ,  
 $L = (90; 70; 20)$ ,  $M = (60; 10; 50)$ .
4.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (80; 20; 30)$ ,  $B = (50; 80; 90)$ ,  $C = (20; 10; 10)$ ,  $K = (90; 90; 40)$ ,  
 $L = (10; 50; 80)$ ,  $M = (50; 20; 60)$ .
5.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 40; 70)$ ,  $B = (20; 20; 60)$ ,  $C = (50; 90; 10)$ ,  $K = (80; 80; 20)$ ,  
 $L = (70; 10; 30)$ ,  $M = (10; 70; 90)$ .
6.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 70; 20)$ ,  $B = (40; 10; 90)$ ,  $C = (20; 90; 10)$ ,  $K = (90; 10; 70)$ ,  
 $L = (10; 60; 30)$ ,  $M = (70; 90; 60)$ .
7.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 10; 70)$ ,  $B = (10; 60; 50)$ ,  $C = (40; 90; 10)$ ,  $K = (90; 70; 30)$ ,  
 $L = (30; 40; 90)$ ,  $M = (10; 30; 20)$ .
8.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 20; 90)$ ,  $B = (10; 10; 50)$ ,  $C = (40; 90; 20)$ ,  $K = (90; 40; 10)$ ,  
 $L = (50; 30; 90)$ ,  $M = (10; 20; 20)$ .
9.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 10; 80)$ ,  $B = (10; 20; 50)$ ,  $C = (60; 90; 30)$ ,  $K = (70; 20; 90)$ ,  
 $L = (10; 80; 70)$ ,  $M = (40; 50; 10)$ .
10.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (20; 30; 20)$ ,  $B = (50; 90; 80)$ ,  $C = (80; 10; 10)$ ,  $K = (10; 40; 90)$ ,  
 $L = (90; 80; 50)$ ,  $M = (50; 60; 20)$ .
11.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 70; 40)$ ,  $B = (80; 60; 20)$ ,  $C = (50; 10; 90)$ ,  $K = (20; 20; 80)$ ,  
 $L = (30; 30; 10)$ ,  $M = (90; 90; 70)$ .
12.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 20; 70)$ ,  $B = (60; 90; 10)$ ,  $C = (80; 10; 90)$ ,  $K = (10; 70; 10)$ ,  
 $L = (90; 30; 60)$ ,  $M = (30; 60; 90)$ .
13.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 70; 10)$ ,  $B = (90; 50; 60)$ ,  $C = (60; 10; 90)$ ,  $K = (10; 30; 70)$ ,  
 $L = (70; 90; 40)$ ,  $M = (90; 20; 30)$ .
14.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 90; 20)$ ,  $B = (90; 50; 10)$ ,  $C = (60; 20; 90)$ ,  $K = (10; 10; 40)$ ,  
 $L = (50; 90; 30)$ ,  $M = (90; 20; 20)$ .
15.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 80; 10)$ ,  $B = (90; 50; 20)$ ,  $C = (40; 30; 90)$ ,  $K = (30; 90; 20)$ ,  
 $L = (90; 70; 80)$ ,  $M = (60; 10; 50)$ .
16.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (80; 30; 20)$ ,  $B = (50; 90; 80)$ ,  $C = (20; 10; 10)$ ,  $K = (90; 40; 90)$ ,  
 $L = (10; 80; 50)$ ,  $M = (50; 60; 20)$ .
17.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 70; 40)$ ,  $B = (20; 60; 20)$ ,  $C = (50; 10; 90)$ ,  $K = (80; 20; 80)$ ,  
 $L = (70; 30; 10)$ ,  $M = (10; 90; 70)$ .
18.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 20; 70)$ ,  $B = (40; 90; 10)$ ,  $C = (20; 10; 90)$ ,  $K = (90; 70; 10)$ ,  
 $L = (10; 30; 60)$ ,  $M = (70; 60; 90)$ .
19.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 70; 10)$ ,  $B = (10; 50; 60)$ ,  $C = (40; 10; 90)$ ,  $K = (90; 30; 70)$ ,  
 $L = (30; 90; 40)$ ,  $M = (10; 20; 30)$ .
20.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 90; 20)$ ,  $B = (10; 50; 10)$ ,  $C = (40; 20; 90)$ ,  $K = (90; 10; 40)$ ,  
 $L = (50; 90; 30)$ ,  $M = (10; 20; 20)$ .

21.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (90; 80; 10)$ ,  $B = (10; 50; 20)$ ,  $C = (60; 30; 90)$ ,  $K = (70; 90; 20)$ ,  
 $L = (10; 70; 80)$ ,  $M = (40; 10; 50)$ .
22.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (20; 20; 30)$ ,  $B = (50; 80; 90)$ ,  $C = (80; 10; 10)$ ,  $K = (10; 90; 40)$ ,  
 $L = (90; 50; 80)$ ,  $M = (50; 20; 60)$ .
23.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 40; 70)$ ,  $B = (80; 20; 60)$ ,  $C = (50; 90; 10)$ ,  $K = (20; 80; 20)$ ,  
 $L = (30; 10; 30)$ ,  $M = (90; 70; 90)$ .
24.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 70; 20)$ ,  $B = (60; 10; 90)$ ,  $C = (80; 90; 10)$ ,  $K = (10; 10; 70)$ ,  
 $L = (90; 60; 30)$ ,  $M = (30; 90; 60)$ .
25.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 10; 70)$ ,  $B = (90; 60; 50)$ ,  $C = (60; 90; 10)$ ,  $K = (10; 70; 30)$ ,  
 $L = (70; 40; 90)$ ,  $M = (90; 30; 20)$ .

### Problem II

1.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (20; 75; 0)$ ,  $L = (110; 30; 45)$ ,  $M = (110; 120; 90)$ ,  $P = (20; 30; 90)$ .
2.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 120; 0)$ ,  $L = (120; 30; 90)$ ,  $M = (20; 75; 90)$ ,  $P = (20; 30; 0)$ .
3.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (20; 30; 0)$ ,  $L = (110; 120; 45)$ ,  $M = (20; 75; 90)$ ,  $P = (65; 120; 45)$ .
4.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 120; 0)$ ,  $L = (20; 120; 45)$ ,  $M = (65; 30; 90)$ ,  $P = (20; 30; 0)$ .
5.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 0)$ ,  $L = (110; 75; 90)$ ,  $M = (20; 120; 90)$ ,  $P = (110; 120; 0)$ .
6.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 30; 0)$ ,  $L = (20; 30; 45)$ ,  $M = (65; 120; 90)$ ,  $P = (20; 120; 0)$ .
7.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (20; 30; 0)$ ,  $L = (110; 30; 45)$ ,  $M = (65; 120; 90)$ ,  $P = (110; 120; 0)$ .
8.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 0)$ ,  $L = (110; 120; 45)$ ,  $M = (20; 120; 90)$ ,  $P = (110; 30; 90)$ .
9.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 120; 45)$ ,  $L = (110; 30; 90)$ ,  $M = (20; 75; 90)$ ,  $P = (20; 30; 0)$ .
10.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 75; 0)$ ,  $L = (20; 120; 45)$ ,  $M = (110; 120; 90)$ ,  $P = (20; 30; 90)$ .
11.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 120; 45)$ ,  $L = (110; 75; 90)$ ,  $M = (20; 30; 90)$ ,  $P = (110; 30; 0)$ .
12.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 30; 0)$ ,  $L = (20; 75; 0)$ ,  $M = (65; 120; 45)$ ,  $P = (20; 30; 90)$ .
13.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 75; 0)$ ,  $L = (20; 30; 0)$ ,  $M = (65; 120; 45)$ ,  $P = (110; 30; 90)$ .
14.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 0)$ ,  $L = (110; 75; 45)$ ,  $M = (20; 75; 90)$ ,  $P = (65; 120; 0)$ .
15.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 0)$ ,  $L = (20; 75; 45)$ ,  $M = (110; 75; 90)$ ,  $P = (65; 120; 0)$ .
16.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 0)$ ,  $L = (20; 120; 45)$ ,  $M = (110; 120; 90)$ ,  $P = (20; 30; 90)$ .
17.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 75; 0)$ ,  $L = (20; 30; 0)$ ,  $M = (65; 120; 90)$ ,  $P = (110; 30; 90)$ .
18.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 30; 0)$ ,  $L = (20; 75; 0)$ ,  $M = (65; 120; 90)$ ,  $P = (20; 30; 90)$ .
19.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 0)$ ,  $L = (110; 120; 90)$ ,  $M = (20; 75; 90)$ ,  $P = (20; 120; 0)$ .
20.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 45)$ ,  $L = (110; 75; 90)$ ,  $M = (20; 120; 90)$ ,  $P = (110; 120; 0)$ .
21.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 120; 0)$ ,  $L = (20; 120; 45)$ ,  $M = (65; 75; 90)$ ,  $P = (20; 30; 0)$ .
22.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (110; 30; 0)$ ,  $L = (20; 30; 45)$ ,  $M = (65; 75; 90)$ ,  $P = (20; 120; 0)$ .
23.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 30; 0)$ ,  $L = (110; 120; 45)$ ,  $M = (20; 75; 45)$ ,  $P = (65; 30; 90)$ .
24.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (20; 75; 0)$ ,  $L = (110; 75; 45)$ ,  $M = (65; 120; 90)$ ,  $P = (65; 30; 90)$ .
25.  $Pp = (200; 150)$ ,  $K = (65; 120; 0)$ ,  $L = (110; 30; 45)$ ,  $M = (20; 75; 45)$ ,  $P = (65; 120; 90)$ .





## 5. Transformacje układu odniesienia

### 5.1. Podstawowe zasady wprowadzania nowych rzutni

**Transformacja układu odniesienia** jest przekształceniem polegającym na wprowadzeniu do istniejącego układu rzutni Monge'a  $(\pi_i, \pi_j)$  rzutni pomocniczej  $\pi_k$ , prostopadłej do jednej z rzutni układu. (Indeksy  $i, j, k$  oznaczają numery rzutni.) Rzutnią pomocniczą może być dowolna płaszczyzna, która w rozważanym układzie jest rzutująca. Istnieją więc dwie możliwości przyjęcia nowej rzutni:  $\pi_k \perp \pi_i$  lub  $\pi_k \perp \pi_j$ . O wyborze decyduje rozplanowanie arkusza rysunkowego (rzut transformowanej sytuacji musi być rozłączny z rzutami podstawowymi i mieścić się w kadrze rysunku). W zależności od podjętej decyzji otrzymuje wtedy się nowy układ rzutni Monge'a  $(\pi_i, \pi_k)$  lub  $(\pi_j, \pi_k)$ .

Krawędzie pomiędzy rzutniami tworzącymi układy Monge'a nazywane są **osiąmi transformacji** i z definicji oznaczane jako  $x_{ij} = \pi_i \cap \pi_j$ , gdzie  $i, j$  są numerami rzutni.

Zasada transformacji układu rzutni Monge'a  $(\pi_i, \pi_j)$  do układu  $(\pi_j, \pi_k)$  wyraża się oczywistą równością

$$\rho(P^i, x_{ij}) = \rho(P^k, x_{jk}) = \rho(P, \pi_j),$$

mającą miejsce dla dowolnego punktu  $P$  przestrzeni trójwymiarowej. Wynika stąd konstrukcja geometryczna pozwalająca wyznaczyć rzut punktu na nową rzutnię w oparciu o znajomość położenia rzutów punktu w układzie pierwotnym.

Liczba możliwych transformacji dowolnego układu odniesienia jest nieograniczona. Każdy nowy układ rzutni może również podlegać transformacji. W praktyce celem przekształcenia jest dobranie nowego układu odniesienia tak, by sytuacja określana w układzie pierwotnym jako ogólna, stała się (po jednej lub kilku transformacjach) szczególną, w której mają zastosowanie niezmienniki rzutowania równoległego dotyczące zachowania miary długości i kąta.

Dobór nowych rzutni pomocniczych zależy od postawionego zadania, niemniej można wyróżnić **cztery podstawowe typy transformacji** układu odniesienia.

**T1(e)** — transformacja prowadząca do uzyskania **równoległego** położenia wybranej prostej  $e$  względem nowej rzutni pomocniczej  $\pi_k$ . Rzutnię tę należy przyjąć **równoległe** do prostej  $e$  i jednocześnie **prostopadle** do jednej z rzutni układu pierwotnego  $(\pi_i, \pi_j)$ . W rzutach Monge'a realizuje się to poprzez przyjęcie osi  $x_{jk} \parallel e^j$ .

**T2(e)** — transformacja prowadząca do uzyskania **prostopadłego** położenia wybranej prostej  $e$  względem nowej rzutni pomocniczej  $\pi_l$ . W przypadku gdy rozważana prosta  $e$  ma położenie ogólne w układzie  $(\pi_i, \pi_j)$ , wymaga to wprowadzenia dwu rzutni dodatkowych. Wprowadzenie rzutni  $\pi_k$  wg zasady **T1(e)** daje nowy układ Monge'a  $(\pi_j, \pi_k)$ , w którym  $e \parallel \pi_k$ . Następną rzutnię  $\pi_l$  należy przyjąć **prostopadle** do prostej  $e$  i jednocześnie **prostopadle** do  $\pi_k$  ( $x_{kl} \perp e^k$ ). Jeśli zaś prosta  $e$  jest równoległa do jednej

z rzutni układu pierwotnego i nie jest prostopadła do żadnej z nich, to nową rzutnię pomocniczą przyjmuje się od razu jako prostopadłą do prostej  $e$  i jednocześnie prostopadłą do jednej z rzutni pierwotnych.

**T3( $\varphi$ )** — transformacja prowadząca do uzyskania **prostopadłego** położenia wybranej płaszczyzny  $\varphi$  względem nowej rzutni pomocniczej  $\pi_k$ , gdy w układzie rzutni  $(\pi_i, \pi_j)$   $\varphi$  ma położenie ogólne. Do realizacji tego zadania wystarcza wprowadzenie jednej rzutni. Rzutnię tę należy przyjąć **prostopadłą** do prostej zawartej w płaszczyźnie  $\varphi$ , która ma położenie szczególne w układzie  $(\pi_i, \pi_j)$ . Gdy wybrana prosta szczególna  $p$ ,  $p \subset \varphi$ , jest równoległa do  $\pi_j$ , to  $x_{jk} \perp p^j$ . (Ponieważ proste szczególne płaszczyzny wyznacza się z zasady przynależności, więc nie ma tu zastosowania przypadek **T2( $p$ )**).

**T4( $\varphi$ )** — transformacja prowadząca do uzyskania **równoległego** położenia wybranej płaszczyzny  $\varphi$  względem nowej rzutni pomocniczej. Jeśli płaszczyzna  $\varphi$  ma położenie ogólne w układzie rzutni  $(\pi_i, \pi_j)$ , przekształcenie wymaga wprowadzenia dwóch nowych rzutni: pierwszej ( $\pi_k$ ) w oparciu o przekształcenie **T3( $\varphi$ )**, i następczej ( $\pi_l$ ) równoległej do  $\varphi$  i jednocześnie prostopadłej do  $\pi_k$ . Realizuje się to poprzez obrócenie osi  $x_{kl} \parallel \varphi^k$ .

## 5.2. Treść problemu

### Problem I. Krawędź płaszczyzn i kąt

Dany jest kartezjański prostokątny, prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm. Ponadto dane są dwa **trójkąty**:  $ABC$  i  $KLM$ .

1. Wykreślić podstawowe rzuty Monge'a trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ , przyjmując, że rzutnią poziomą jest płaszczyzna  $\pi_1 = \{x, y\}$ , a rzutnią pionową — płaszczyzna  $\pi_2 = \{z, x\}$ .

Punkt  $O$  (początek układu współrzędnych) przyjąć w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x=x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

2. **Metodą transformacji układu odniesienia** wyznaczyć rzuty prostej  $k$  będącej **krawędzią** płaszczyzn  $\alpha = \{A, B, C\}$  i  $\beta = \{K, L, M\}$  (opisać wszystkie elementy użyte w konstrukcji).

3. **Ustalić widoczność** układu trójkątów  $ABC$  i  $KLM$  **we wszystkich konstruowanych rzutach** przy założeniu, że oba trójkąty są nieprzezroczyste.

4. **Metodą transformacji układu odniesienia** skonstruować rzut, w którym zachowana jest **miara rozwartości kąta** pomiędzy płaszczyznami  $\alpha = \{A, B, C\}$  i  $\beta = \{K, L, M\}$ .

#### Informacje pomocnicze:

- **wszystkie konstruowane rzuty winny być rozłączne!**
- krawędzie **niewidoczne** rysować linią **cienką kreskową**, krawędzie **widoczne** linią **ciągłą grubą**, punkty oznaczać okręgami o średnicy 2 mm; **nie zaczerniać** ani **nie przekreślać ich wewnątrz**,
- **konstrukcje pomocnicze** wykreślać linią **cienką ciągłą**,
- punkty pomocnicze numerować kolejnymi liczbami, zapisując je cyframi arabskimi.

### 5.3. Przykładowe rozwiązanie

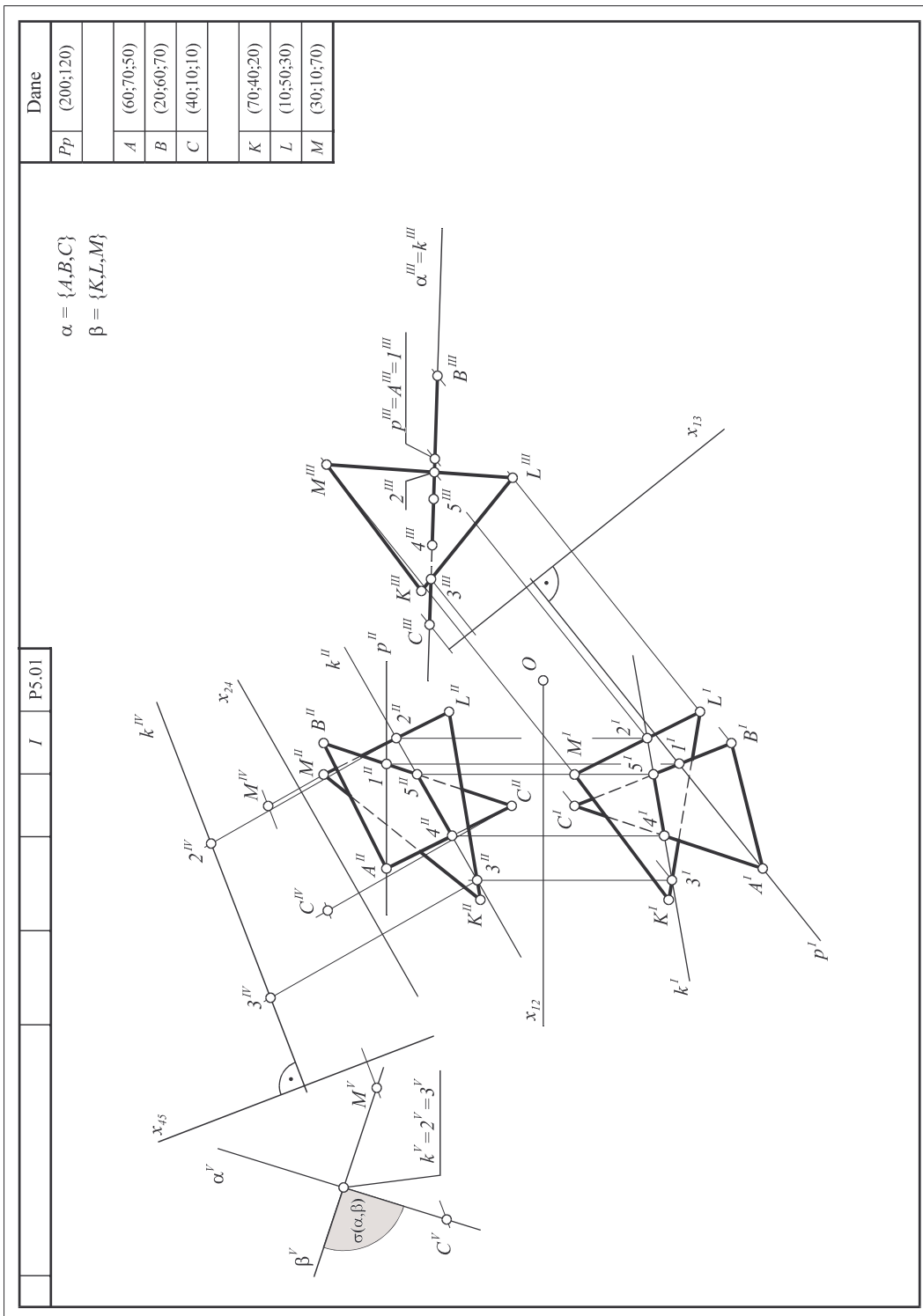
Przykład. Zadanie P5.01. Problem I.

Dane	
$Pp$	(200; 120)
$A$	(60; 70; 50)
$B$	(20; 60; 70)
$C$	(40; 10; 10)
$K$	(70; 40; 20)
$L$	(10; 50; 30)
$M$	(30; 10; 70)

Rozwiązanie:

Ponieważ płaszczyzny  $\alpha = \{A, B, C\}$  i  $\beta = \{K, L, M\}$  mają w podstawowym układzie rzutni Monge'a położenie ogólne, należy wprowadzić rzutnię  $\pi_3$  tak, aby jedna z płaszczyzn była do niej prostopadła. (Zachodzi tu przypadek **T3** stosowania transformacji.) W prezentowanym rozwiązaniu (rys. 5.1.) przyjęto, że  $\pi_3 \perp \alpha$  oraz  $\pi_3 \perp \pi_1$  (płaszczyzny  $\pi_1$  i  $\pi_3$  tworzą nowy układ rzutni Monge'a). W tym celu wyznaczono prostą poziomą  $p = \{A, I\}$ , gdzie  $I \in BC$ , leżącą w płaszczyźnie  $\alpha$  i skonstruowano oś  $x_{13}$  tak, by było  $x_{13} \perp p^I$  ( $\pi_3 \perp p$ ). Korzystając z rzutów: pierwszego i trzeciego, wyznaczono rzuty pierwszy i trzeci szukanej krawędzi  $k = \{2, 3\}$  oraz rzuty odcinka 4–5, będącego elementem wspólnym trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ . Następnie znaleziono rzuty pionowe prostej  $k$  i odcinka 4–5, po czym ustalono widoczność układu przenikających się figur w rzutach: pionowym, poziomym oraz trzecim.

Miara rozwartości kąta pomiędzy płaszczyznami zachowuje się w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do krawędzi płaszczyzn. Ponieważ prosta  $k$  ma w układach rzutni  $(\pi_1, \pi_2)$  oraz  $(\pi_1, \pi_3)$  położenie ogólne, w celu znalezienia rzutni prostopadłej  $k$  należy najpierw skonstruować rzutnię  $\pi_4 \parallel k$ , a następnie wprowadzić rzutnię  $\pi_5$  tak, by było  $\pi_5 \perp k$  i  $\pi_5 \perp \pi_4$  (przypadek transformacji **T2(k)**). W omawianym rozwiązaniu przyjęto  $\pi_4 \perp \pi_2$  ( $x_{24} \parallel k^{II}$ ). W celu znalezienia czwartego rzutu prostej  $k$  odwzorowano punkty 2 i 3 krawędzi, gdyż odcinek 2–3 jest najdłuższy spośród odcinków, które można utworzyć przyjmując końce w punktach 2, 3, 4 i 5. Ponieważ w poleceniu w punkcie 4. treści problemu jest mowa o **kącie pomiędzy płaszczyznami**, nie ma potrzeby odwzorowywania wszystkich wierzchołków danych trójkątów. Płaszczyznę  $\alpha$  wyznaczają bowiem jednoznacznie np. punkty 2, 3 i A, zaś płaszczyznę  $\beta$  — punkty 2, 3, L. Zatem wyznaczono czwarte rzuty jedynie tych punktów. Przyjmując  $x_{45} \perp k^{IV}$ , skonstruowano rzut piąty, w którym jest  $\pi_5 \perp \alpha$ ,  $\pi_5 \perp \beta$  i zachodzi równość miar  $\sigma(\alpha, \beta) = \sigma(\alpha^V, \beta^V)$ .



Rys. 5.1. Rozwiązanie zadania P5.01

## 5.4. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 70; 10)$ ,  $B = (60; 10; 40)$ ,  $C = (10; 50; 50)$ ,  $K = (70; 40; 40)$ ,  
 $L = (10; 10; 10)$ ,  $M = (40; 70; 70)$ .
2.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (40; 10; 10)$ ,  $B = (70; 70; 50)$ ,  $C = (20; 50; 70)$ ,  $K = (10; 30; 40)$ ,  
 $L = (70; 60; 10)$ ,  $M = (60; 10; 70)$ .
3.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 10; 20)$ ,  $B = (40; 70; 70)$ ,  $C = (70; 20; 10)$ ,  $K = (20; 20; 70)$ ,  
 $L = (40; 50; 20)$ ,  $M = (70; 10; 40)$ .
4.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 70; 50)$ ,  $B = (20; 50; 70)$ ,  $C = (40; 10; 20)$ ,  $K = (70; 60; 10)$ ,  
 $L = (60; 10; 70)$ ,  $M = (10; 30; 40)$ .
5.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 60; 10)$ ,  $B = (40; 10; 70)$ ,  $C = (10; 70; 20)$ ,  $K = (60; 10; 20)$ ,  
 $L = (40; 60; 50)$ ,  $M = (10; 40; 10)$ .
6.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 10; 20)$ ,  $B = (30; 50; 50)$ ,  $C = (60; 30; 10)$ ,  $K = (20; 60; 10)$ ,  
 $L = (70; 70; 30)$ ,  $M = (40; 10; 50)$ .
7.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 50; 70)$ ,  $B = (20; 70; 50)$ ,  $C = (40; 20; 10)$ ,  $K = (70; 10; 60)$ ,  
 $L = (60; 70; 10)$ ,  $M = (10; 40; 30)$ .
8.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 10; 60)$ ,  $B = (40; 70; 10)$ ,  $C = (10; 20; 70)$ ,  $K = (60; 20; 10)$ ,  
 $L = (40; 50; 60)$ ,  $M = (10; 10; 40)$ .
9.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 20; 10)$ ,  $B = (30; 50; 50)$ ,  $C = (60; 10; 30)$ ,  $K = (20; 10; 60)$ ,  
 $L = (70; 30; 70)$ ,  $M = (40; 50; 10)$ .
10.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 10; 50)$ ,  $B = (20; 30; 70)$ ,  $C = (40; 70; 20)$ ,  $K = (70; 20; 10)$ ,  
 $L = (60; 70; 70)$ ,  $M = (10; 50; 40)$ .
11.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 20; 10)$ ,  $B = (40; 70; 70)$ ,  $C = (10; 10; 20)$ ,  $K = (60; 70; 20)$ ,  
 $L = (40; 20; 50)$ ,  $M = (10; 40; 10)$ .
12.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 20; 70)$ ,  $B = (50; 50; 30)$ ,  $C = (20; 10; 50)$ ,  $K = (60; 10; 20)$ ,  
 $L = (10; 30; 10)$ ,  $M = (40; 50; 70)$ .
13.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 10; 30)$ ,  $B = (60; 30; 10)$ ,  $C = (40; 70; 60)$ ,  $K = (10; 20; 70)$ ,  
 $L = (20; 70; 10)$ ,  $M = (70; 50; 40)$ .
14.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 60; 70)$ ,  $B = (30; 30; 30)$ ,  $C = (60; 70; 50)$ ,  $K = (20; 70; 20)$ ,  
 $L = (70; 50; 10)$ ,  $M = (40; 30; 70)$ .
15.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 10; 30)$ ,  $B = (20; 30; 10)$ ,  $C = (40; 70; 60)$ ,  $K = (70; 20; 70)$ ,  
 $L = (60; 70; 10)$ ,  $M = (10; 50; 40)$ .
16.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 20; 70)$ ,  $B = (40; 70; 10)$ ,  $C = (10; 10; 60)$ ,  $K = (60; 70; 60)$ ,  
 $L = (40; 20; 30)$ ,  $M = (10; 40; 70)$ .
17.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 10; 50)$ ,  $B = (60; 30; 70)$ ,  $C = (40; 70; 20)$ ,  $K = (10; 20; 10)$ ,  
 $L = (20; 70; 70)$ ,  $M = (70; 50; 40)$ .
18.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 20; 10)$ ,  $B = (40; 70; 70)$ ,  $C = (70; 10; 20)$ ,  $K = (20; 70; 20)$ ,  
 $L = (40; 20; 50)$ ,  $M = (70; 40; 10)$ .
19.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 70; 30)$ ,  $B = (60; 50; 10)$ ,  $C = (40; 10; 60)$ ,  $K = (10; 60; 70)$ ,  
 $L = (20; 10; 10)$ ,  $M = (70; 30; 40)$ .
20.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 20; 70)$ ,  $B = (30; 50; 30)$ ,  $C = (60; 10; 50)$ ,  $K = (20; 10; 20)$ ,  
 $L = (70; 30; 10)$ ,  $M = (40; 50; 70)$ .

21.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (10; 60; 70)$ ,  $B = (40; 10; 10)$ ,  $C = (70; 70; 60)$ ,  $K = (20; 10; 60)$ ,  
 $L = (40; 60; 30)$ ,  $M = (70; 40; 70)$ .
22.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 70; 20)$ ,  $B = (50; 30; 50)$ ,  $C = (20; 50; 10)$ ,  $K = (60; 20; 10)$ ,  
 $L = (10; 10; 30)$ ,  $M = (40; 70; 50)$ .
23.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 50; 10)$ ,  $B = (20; 70; 30)$ ,  $C = (40; 20; 70)$ ,  $K = (70; 10; 20)$ ,  
 $L = (60; 70; 70)$ ,  $M = (10; 40; 50)$ .
24.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 10; 20)$ ,  $B = (40; 70; 70)$ ,  $C = (10; 20; 10)$ ,  $K = (60; 20; 70)$ ,  
 $L = (40; 50; 20)$ ,  $M = (10; 10; 40)$ .
25.  $Pp = (200; 120)$ ,  $A = (70; 70; 20)$ ,  $B = (40; 10; 70)$ ,  $C = (10; 60; 10)$ ,  $K = (60; 60; 70)$ ,  
 $L = (40; 30; 20)$ ,  $M = (10; 70; 40)$ .

## 6. Wielościany

### 6.1. Podstawowe definicje i klasyfikacje

W grafice inżynierskiej pod pojęciem **wielościanu** rozumiemy **figurę geometryczną** (zbiór punktów przestrzeni trójwymiarowej) ograniczoną tzw. **powierzchnią wielościenną**. **Powierzchnią wielościenną** nazywamy zbiór skończonej liczby wielokątów płaskich, spełniających następujące warunki:

- każde dwa wielokąty mają wspólny bok lub wierzchołek, albo nie mają żadnego punktu wspólnego,
- każdy bok wielokąta jest wspólnym bokiem dokładnie dwóch wielokątów,
- każdy wierzchołek wielokąta jest wspólnym wierzchołkiem co najmniej trzech wielokątów.

(Zakładamy, że wielokąt płaski to zbiór punktów płaszczyzny ograniczony łamaną zamkniętą zawartą w tej płaszczyźnie.)

Wielokąty tworzące powierzchnię wielościenną nazywamy **ścianami**, ich boki — **krawędziami**, a ich wierzchołki — **wierzchołkami** wielościanu (powierzchni wielościennej). Odcinki łączące dwa wierzchołki wielościanu i nieleżące na jednej ścianie nazywamy **przekątnymi** wielościanu. Dwie ściany są **przyległe**, gdy mają wspólną krawędź, **przeciwległe** — jeśli leżą w płaszczyznach do siebie równoległych.

Wiele części maszyn ma kształt wielościanów bądź kształt, który powstał w wyniku geometrycznej modyfikacji takich brył. Znajomość podstawowych własności wielościanów ułatwia projektowanie i wytwarzanie elementów maszyn.

Istnieje wiele różnych klasyfikacji wielościanów. Do podstawowych należą klasyfikacje ze względu na **liczbę ścian**, **wypukłość** i **foremność**. Według pierwszego kryterium mamy podział wielościanów na **czworościany**, **pięciościany**, **sześciościany**, ... i ogólnie na  **$n$ -ściany**, gdzie  $n$  jest liczbą ścian wielościanu. Według kryterium wypukłości wielościany dzielą się na **wypukłe** i **wklęsłe**. (Figurę geometryczną nazywamy wypukłą, jeśli odcinek o końcach należących do figury jest cały w niej zawarty.) Wielościany wklęsłe, to wielościany, które nie są wypukłe. Charakterystyczną cechą wielościanu wypukłego jest to, że w przestrzeni wszystkie jego punkty leżą zawsze po jednej stronie płaszczyzny przechodzącej przez dowolną jego ścianę. Kryterium foremności pozwala podzielić wielościany na **foremne**, **półforemne** oraz **nieforemne** (patrz: rozdział 3.).

Dla wielościanów wypukłych zachodzi tzw. **wzór Eulera**:

$$w + s - k = 2,$$

gdzie  $w$  jest liczbą wierzchołków,  $s$  — liczbą ścian, zaś  $k$  — liczbą krawędzi wielościanu wypukłego. Wzór ten jest użyteczny przy konstruowaniu wielościanów opisanych niejawnie na podstawie zestawu pewnych cech geometrycznych.

Wielościany można również podzielić na **ostrosłupy**, **graniastosłupy** i **wielościany dowolne**.

**Ostrosłup** jest wielościanem, w którym można wyróżnić ścianę (**podstawę**) mającą wspólną krawędź z każdą z pozostałych ścian (**bocznych**), które z kolei są trójkątami posiadającymi jeden wspólny wierzchołek (**wierzchołek ostrosłupa**). Wspólne krawędzie ścian bocznych nazywamy **krawędziami bocznymi** ostrosłupa, zaś ściany boczne — **poboczną**. Ostrosłup jest  $n$ -**ścienny**, jeśli podstawa ma  $n$  boków.

Rozróżnia się ostrosłupy:

- **proste**, których krawędzie boczne są jednakowej długości,
- **prawidłowe** (ostrosłupy proste, których podstawy są wielokątami foremnymi),
- **pochyłe** (ostrosłupy, które nie są ostrosłupami prostymi).

Podstawa ostrosłupa prostego jest wielokątem, na którym można opisać okrąg. Rzut prostokątny wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy (**spodek wysokości**) leży w środku tego okręgu.

**Graniastosłup** jest wielościanem, którego wszystkie wierzchołki leżą w dwu płaszczyznach do siebie równoległych, ściany zawarte w tych płaszczyznach (**podstawy**) są przystającymi wielokątami, które można nałożyć na siebie poprzez przesunięcie równoległe, a pozostałe ściany (**boczne**) są równoległobokami. Wspólne krawędzie ścian bocznych nazywamy **krawędziami bocznymi** graniastosłupa, ściany boczne — jego **poboczną**.

Rozróżnia się graniastosłupy:

- **proste**, których krawędzie boczne są prostopadłe płaszczyzn podstaw,
- **prawidłowe** (graniastosłupy proste, których podstawy są wielokątami foremnymi),
- **pochyłe** (graniastosłupy, które nie są graniastosłupami prostymi).

Wielościany niebędące graniastosłupami ani ostrosłupami są wielościanami **dowolnymi**.

## 6.2. Rzuty wielościanów

**Rzutem wielościanu** nazywamy zbiór rzutów jego punktów. Rzutem równoległym wielościanu jest wielokąt płaski, którego brzeg nazywamy **zarysem**. Zarys wielościanu wypukłego jest zawsze **figurą wypukłą**. W celu „uplastycznienia” rysunku wyróżnia się rzuty wszystkich wierzchołków i krawędzi wielościanu oraz określa się w umowny sposób ich **widoczność** na tle widocznej dla obserwatora części jego powierzchni. Najczęściej krawędzie widoczne rysuje się linią grubą o intensywnej barwie, krawędzie niewidoczne — linią cienką kreskową o mniejszej intensywności zabarwienia. Jeśli krawędź widoczna jednoczy się w rzucie z krawędzią niewidoczną, rysuje się jedynie krawędź widoczną. Jeśli przecinają się rzuty krawędzi widocznej i niewidocznej, to w okolicy punktu przecięcia nie rysuje się krawędzi niewidocznej. Podobnie postępuje



się przy analizie położenia dwu krawędzi niewidocznych. Jednocześnie się w rzucie wierzchołki opisuje się w kolejności zgodnej z ich widocznością.

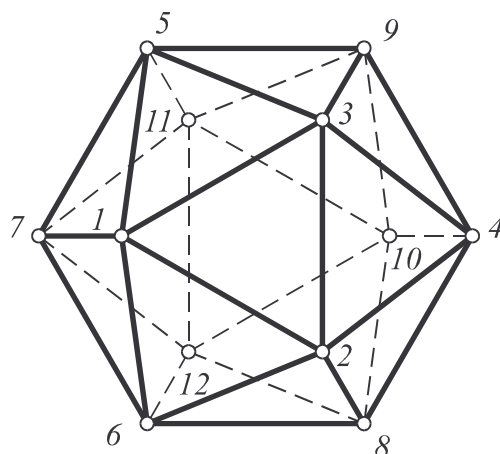
Rzuty wielościanów sporządza się w oparciu o tzw. **cechy wielościanów**. Cechy są to związki geometryczne opisujące wzajemne położenie jego ścian, krawędzi oraz wierzchołków, określające ten wielościan w sposób jednoznaczny. Skonstruowanie rzutów wielościanu jest możliwe wówczas, gdy znane są jego cechy oraz położenie w przestrzeni względem przyjętego układu odniesienia (bazy).

### 6.3. Wielościany foremne

**Wielościany foremne** to wielościany, których powierzchnię stanowią przystające wielokąty foremne, a sąsiednie pary ścian tworzą jednakowe kąty dwuścienne. Wielościany **półforemne** mają powierzchnię złożoną z różnych wielokątów foremnych. Wielościany niebędące foremnymi nazywamy wielościanami **nieforemnymi**.

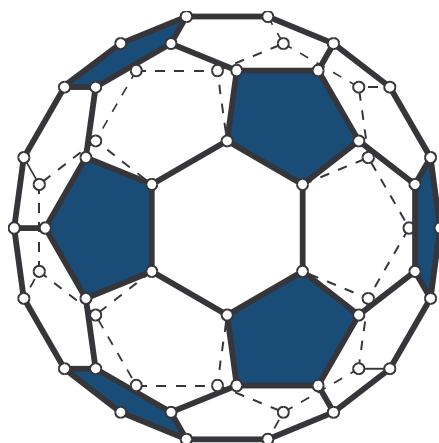
Istnieje pięć wielościanów foremnych różniących się liczbą ścian:

- **czworościan foremny**, którego powierzchnię tworzą cztery trójkąty równoboczne, mający 6 krawędzi i 4 wierzchołki (rys. 6.3.),
- **sześcian**, którego powierzchnię tworzy sześć kwadratów, mający 12 krawędzi i 8 wierzchołków,
- **ośmiościan foremny**, którego powierzchnię tworzy osiem trójkątów równobocznych, mający 12 krawędzi i 6 wierzchołków (rys. 6.5.),
- **dwunastościan foremny**, którego powierzchnię tworzy dwanaście pięciokątów foremnych, mający 30 krawędzi i 20 wierzchołków,
- **dwudziestościan foremny**, którego powierzchnię tworzy dwadzieścia trójkątów równobocznych, mający 30 krawędzi i 12 wierzchołków (rys. 6.1.).



Rys. 6.1. Dwudziestościan foremny

Istnieje 14 różnych wielościanów półforemnych. Wśród nich jest wielościan półforemny o 32 ścianach, którego powierzchnia składa się z dwudziestu sześciokątów foremnych oraz dwunastu pięciokątów foremnych (rys. 6.2). W oparciu o **siatkę** tego wielościanu (rozwiniecie powierzchni wielościanu na płaszczyźnie) wytwarzane są zewnętrzne powłoki piłek do gry w piłkę nożną.



Rys. 6.2. Półforemny wielościan o 32 ścianach

#### 6.4. Wielościany foremne – treść problemów

##### Problem I. Czworoscian foremny

Dany jest kartezjański prostokątny, prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm. Ponadto dany jest **punkt**  $A$  oraz **prosta**  $m = \{M, N\}$ .

1. Metodą transformacji układu odniesienia skonstruować rzuty Monge'a **czworoscianu foremnego**  $ABCD$ , w którym wierzchołek  $A$  jest punktem danym, wierzchołki  $B, C$  leżą na prostej  $m$  i głębokość punktu  $B$  jest **niemniejsza** niż głębokość punktu  $C$ , zaś wierzchołek  $D$  leży **(1)** płaszczyzną  $\varphi = \{A, m\}$ .

Przyjąć, że rzutnią poziomą jest płaszczyzna  $\pi_1 = \{x, y\}$ , rzutnią pionową — płaszczyzna  $\pi_2 = \{z, x\}$ . Punkt  $O$  (początek układu współrzędnych) przyjąć w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x = x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

2. Ustalić **widoczność** czworoscianu foremnego  $ABCD$  **we wszystkich konstruowanych rzutach** przy założeniu, że wielościan jest wykonany z materiału nieprzezroczystego.

## Problem II. Ośmiościan foremny

Dany jest kartezjański prostokątny, prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm, oraz związany z nim **układ rzutni Monge'a**  $(\pi_1, \pi_2)$ , gdzie  $\pi_1 = \{x, y\}$  jest rzutnią poziomą, zaś  $\pi_2 = \{x, z\}$  — rzutnią pionową. Ponadto dany jest **punkt**  $A$  oraz **prosta**  $a = \{M, N\}$ .

1. Metodą transformacji układu odniesienia skonstruować rzuty Monge'a **ośmiościanu foremnego**  $ABCDEF$  o przekątnych  $AB, CD, EF$ , mając dany **wierzchołek**  $A$  i wiedząc, że prosta  $a = \{M, N\}$  jest **osią symetrii ośmiościanu** zawierającą wierzchołki  $E$  i  $F$ , wierzchołek  $C$  ma **głębokość niemniejszą** niż wierzchołek  $D$ , zaś wierzchołek  $E$  **wysokość niemniejszą** niż wierzchołek  $F$ .

Początek układu współrzędnych (punkt  $O$ ) przyjąć w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x=x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

2. Ustalić **widoczność** ośmiościanu foremnego **we wszystkich konstruowanych rzutach** przy założeniu, że jest wykonany z materiału nieprzezroczystego.

### Informacje pomocnicze:

- **wszystkie konstruowane rzuty winny być rozłączne!**
- krawędzie **niewidoczne** rysować linią **cienką kreskową**, krawędzie **widoczne** linią **ciągłą grubą**, punkty oznaczać okręgami o średnicy 2 mm; **nie zaczerniać** ani **nie przekreślać ich wewnątrz**,
- **konstrukcje pomocnicze** wykreślać linią **cienką ciągłą**,
- punkty pomocnicze numerować kolejnymi liczbami, zapisując je cyframi arabskimi.

## 6.5. Przykłady

### Przykład 1. Zadanie P6.01. Problem I.

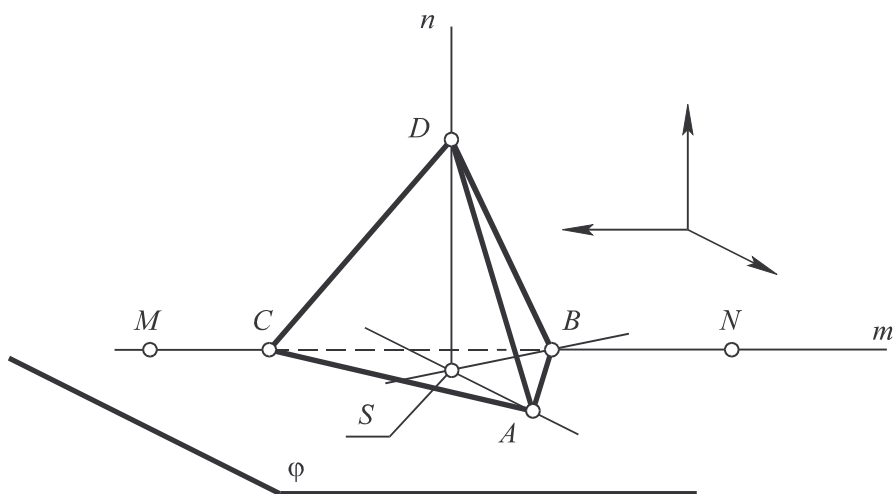
Dane	
$Pp$	(150; 140)
$A$	(100; 80; 60)
$M$	(120; 20; 0)
$N$	(0; 80; 60)
(1)	$D$ za $\varphi$

Rozwiązanie:

Z treści problemu wynika, że ściana  $ABC$  leży w płaszczyźnie  $\varphi = \{A, m\}$  i jest trójkątem równobocznym, natomiast wierzchołek  $D$  leży na prostej  $n$  prostopadłej do  $\varphi$ , przechodzącej przez środek  $S$  okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  (patrz: rys. 6.3.).

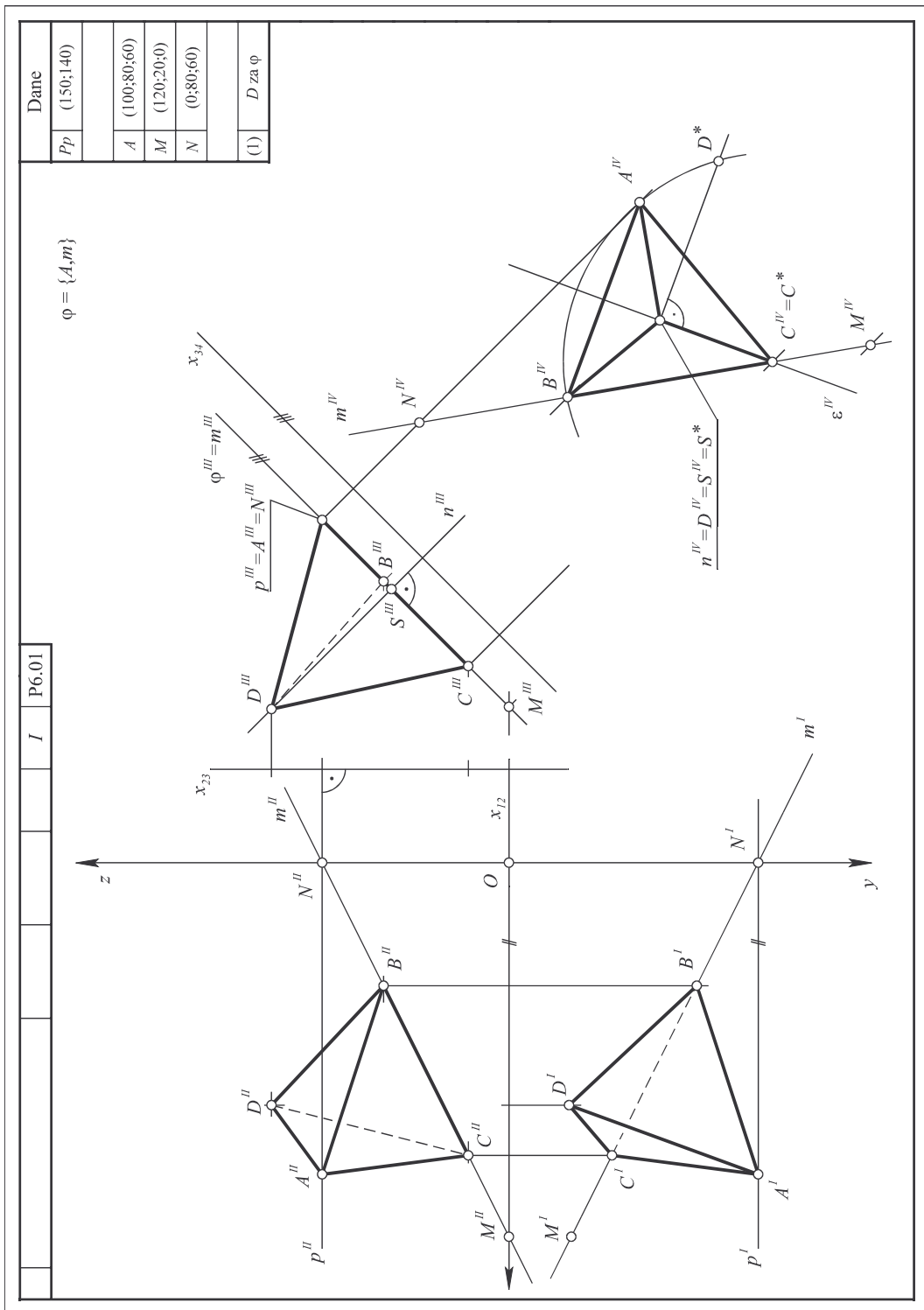
Rzuty danego czworościanu można więc wykreślić w układzie rzutni Monge'a, w którym jedna z rzutni jest równoległa do płaszczyzny  $\varphi$ . W tym celu najpierw należy wprowadzić rzutnię  $\pi_3 \perp \varphi$ , a następnie rzutnię  $\pi_4 \parallel \varphi$  i rozpocząć konstruowanie rzutów wielościanu w układzie rzutni  $(\pi_3, \pi_4)$ .

W omawianym przykładzie płaszczyzna  $\varphi$  jest równoległa do osi rzutów (prosta  $p = \{A, N\}$  jest równoległa do osi  $x_{12}$ ), co pozwala na przyjęcie zarówno  $\pi_3 \perp \pi_1$  jak i  $\pi_3 \perp \pi_2$ . Zdecydowano się na wariant  $\pi_3 \perp \pi_2$  ( $x_{23} \perp p''$ ). Oś  $x_{34}$  wprowadzono równoległe do  $\varphi'''$ . Po wykreśleniu rzutów elementów danych znaleziono rzuty trzecie i czwarte wierzchołków  $B$  i  $C$ . Ściana  $ABC$  jest równoległa do rzutni  $\pi_4$ , więc jej rzut czwarty jest trójkątem równobocznym do niej przystającym, co pozwala na znalezienie rzutów  $B^{IV}$  i  $C^{IV}$ . Trzecie rzuty wierzchołków  $B$  i  $C$  znajdują się na  $m'''$ . Punkty  $B$  i  $C$  opisano tak, by było  $\rho(B''', x_{23}) \geq \rho(C''', x_{23})$ , zgodnie z warunkiem sformułowanym w treści problemu.



Rys. 6.3. Idea rozwiązania problemu I

Z geometrii czworościanu foremnego wynika, że  $D^{IV}$  jednoczy się z rzutem środka  $S$  okręgu opisanego na trójkącie  $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ , zaś odcinek  $D''S'''$  ma długość równą wysokości czworościanu. Wysokość tę znaleziono wykonując kład prostokątny płaszczyzny  $\varepsilon = \{C, D, S\}$ . Zachodzi bowiem równość  $\rho(D''', S''') = \rho(D^*, S^*)$ . Spośród możliwych dwóch położenia punktu  $D$  względem płaszczyzny  $\varphi$  wybrano, zgodnie z treścią problemu, położenie „za  $\varphi$ ”, co odpowiada nierówności  $\rho(D''', x_{23}) < \rho(S''', x_{23})$ . Położenie rzutów poziomych oraz pionowych wierzchołków  $B, C, D$  wynika z zasady transformacji układu odniesienia. Sprawdzeniem poprawności wykonania konstrukcji jest przynależność rzutów wierzchołków  $B$  i  $C$  do odpowiednich rzutów prostej  $m$ .



Rys. 6.4. Rozwiązanie zadania P6.01

Przy ustalaniu widoczności należy zauważyć, że brzeg rzutu (zarys) wielościanu jest zawsze widoczny, a następnie określić widoczność pozostałych krawędzi. W omawianym przykładzie niewidoczne są odcinki  $B''D''$ ,  $C''D''$  i  $B'C'$  (rys. 6.4.).

**Przykład 2. Zadanie P6.02. Problem II.**

Dane	
$Pp$	(350; 160)
$A$	(60; 45; 30)
$M$	(100; 115; 50)
$N$	(40; 55; 70)

Rozwiązanie:

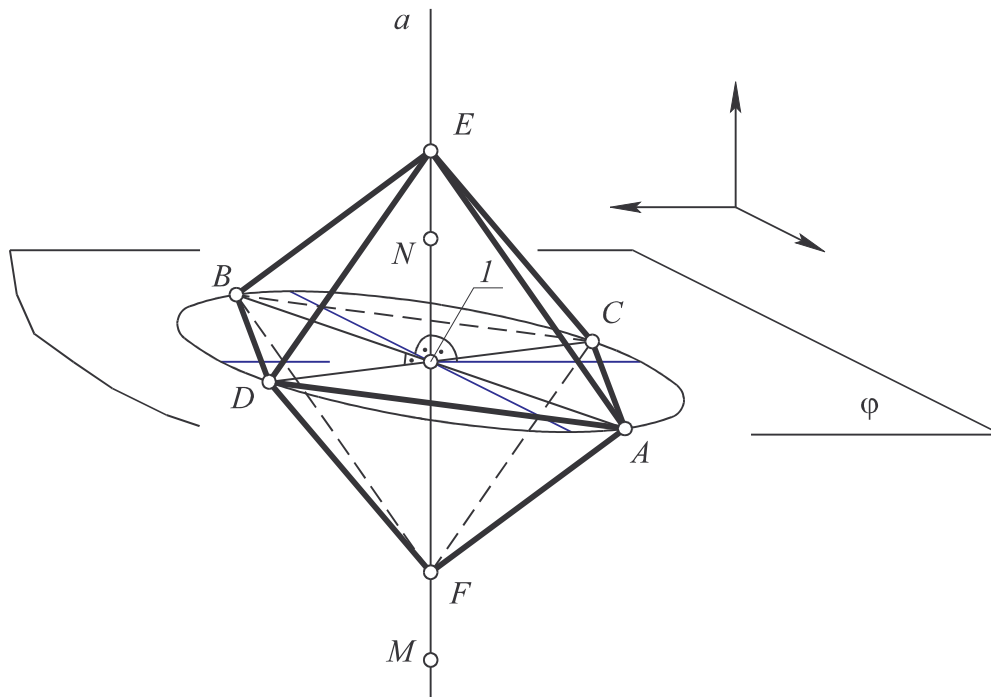
Przekątne ośmiościanu foremego są odcinkami o **równej długości, parami prostopadłymi**, przecinającymi się w jednym punkcie (środku symetrii ośmiościanu) i dzielącymi się na połowy, natomiast ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi. Proste przechodzące przez przekątne są osiami symetrii ośmiościanu foremego. Wierzchołki ośmiościanu nieleżące na ustalonej przekątnej leżą w tej samej płaszczyźnie (prostopadłej do osi symetrii), są równo od tej przekątnej odległe, a ponadto są równo oddalone od siebie. Rzutem prostokątnym ośmiościanu foremego na płaszczyznę prostopadłą do przekątnej jest kwadrat, którego przekątne są dwiema pozostałymi przekątnymi ośmiościanu.

Wykorzystując tę informację można rozwiązać postawiony problem wprowadzając pomocniczą rzutnię prostopadłą do danej prostej  $a = \{M, N\}$ . W takim rzucie zachowa się odległość danego wierzchołka  $A$  od prostej  $a$ , równa połowie długości przekątnych ośmiościanu (rys. 6.5.). Zachodzą przy tym zależności  $\rho(A, B) = 2\rho(A, I) = 2\rho(A, a) = \rho(C, D)$ , gdzie punkt  $I$  jest środkiem symetrii ośmiościanu.

Ponieważ dana w zadaniu prosta  $a$  ma położenie ogólne w układzie rzutni  $(\pi_1, \pi_2)$ , więc wprowadzenie rzutni prostopadłej do  $a$  odbywa się w dwóch etapach: najpierw wprowadza się rzutnię  $\pi_3 \parallel a$ , a następnie  $\pi_4 \perp a$ . Rzutnię  $\pi_3$  można wprowadzić na dwa sposoby: przyjmując oś  $x_{13}$  równoległą do  $a'$  lub oś  $x_{23}$  równoległą do  $a''$ . W prezentowanym rozwiązaniu wybrano możliwość pierwszą. Wyznaczono rzuty punktu  $A$  i prostej  $a$  na  $\pi_3$ , wprowadzono oś transformacji  $x_{34}$  prostopadłą do  $a'''$  i znaleziono rzuty  $A^{IV}$  oraz  $a^{IV} = M^{IV} = N^{IV}$ .

Konstruowanie rzutów ośmiościanu foremego przeprowadzono w układzie rzutni  $(\pi_3, \pi_4)$  (patrz: rys. 6.5.). Rzutem tego ośmiościanu na rzutnię  $\pi_4$  jest kwadrat, którego jednym z wierzchołków jest punkt  $A^{IV}$ , a pozostałymi rzuty wierzchołków  $B, C, D$ . Rzuty wierzchołków  $E$  i  $F$  jednoczą się z rzutem środka symetrii  $I$  oraz rzutem prostej  $a$ . Aby skonstruować rzut ośmiościanu na  $\pi_3$  wystarczy zauważyć, że wierzchołki  $B, C, D$  leżą w płaszczyźnie  $\varphi$  prostopadłej do  $a$ , przechodzącej przez punkt  $A$ , która jest prostopadłą do  $\pi_3$ . Położenie rzutów punktów  $B, C, D$  oraz  $I$  wynika z zasady przynależności. (Opisu wierzchołków  $C$  i  $D$  można dokonać dopiero po sporządzeniu ich rzutów poziomych. Zgodnie z treścią zadania wierzchołek  $C$  ma mieć niemniejszą głębokość niż wierzchołek

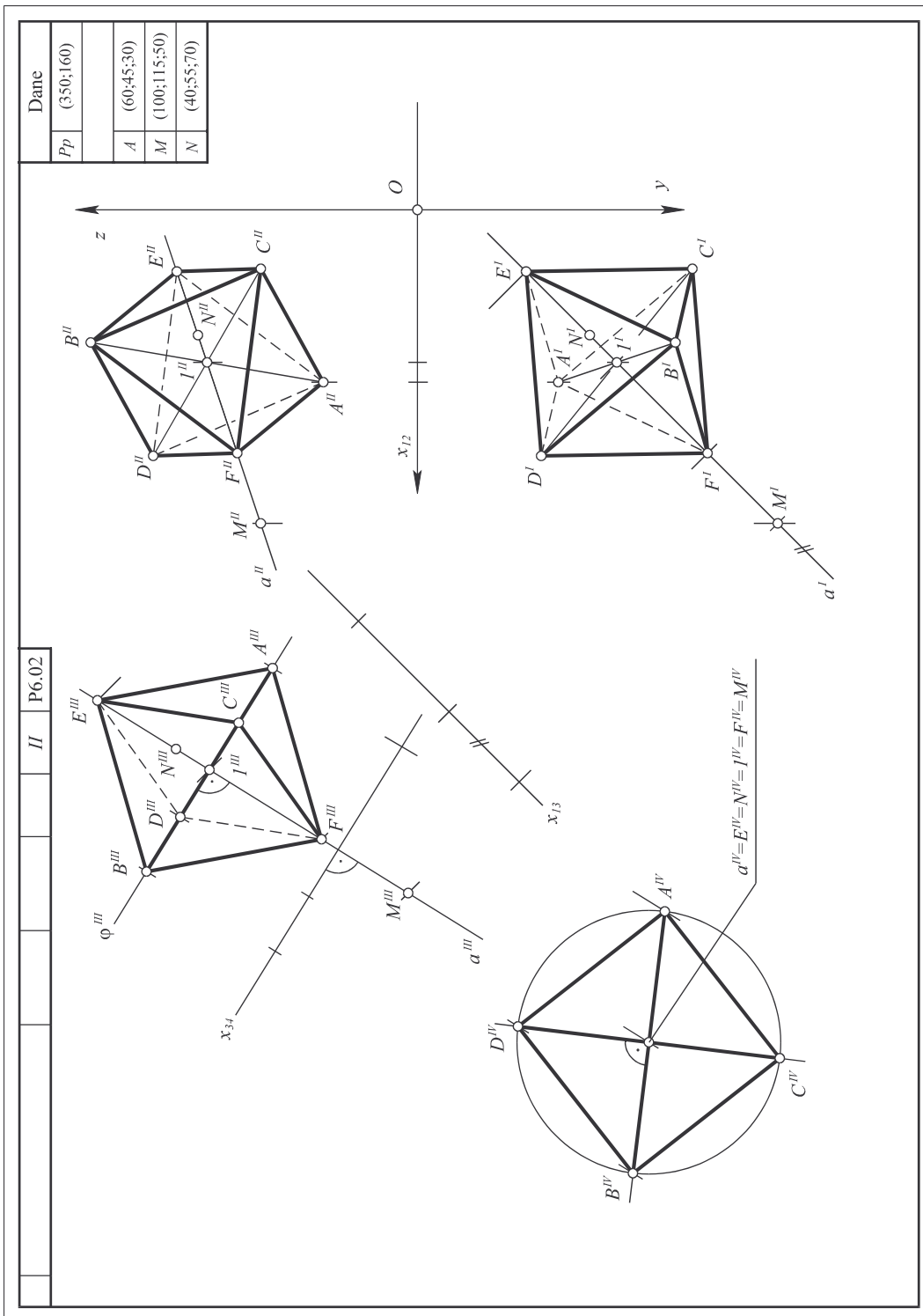
$D$ , co ma miejsce, gdy  $\rho(C^I, x_{12}) \geq \rho(D^I, x_{12})$ .) Rzuty wierzchołków  $E$  i  $F$  na rzutnię  $\pi_3$  wynikają z zasady przynależności do prostej  $a$  oraz zależności  $\rho(E, \varphi) = \rho(F, \varphi) = \rho(A, a)$ . Poprawny opis tych wierzchołków można wykonać już w rzucie trzecim, gdyż z nierówności  $\rho(E^{III}, x_{13}) \geq \rho(F^{III}, x_{13})$  wynika, że punkt  $E$  ma nie mniejszą wysokość niż punkt  $F$ . Rzutem ośmiościanu na rzutnię  $\pi_3$  jest równoległobok  $A^{III}E^{III}B^{III}F^{III}$ . Skonstruowana para rzutów pozwala na wyznaczenie rzutów podstawowych (na  $\pi_1$  i  $\pi_2$ )



Rys. 6.5. Idea rozwiązania problemu II

Rzuty poziomy i pionowy wierzchołków ośmiościanu znaleziono korzystając z zasady transformacji układu odniesienia, zasady przynależności punktów do prostej oraz z symetrii środkowej względem punktu  $I$ . Rzutem poziomym ośmiościanu jest równoległobok  $C^I E^I D^I F^I$ , zaś rzutem pionowym — sześciokąt  $A^{II} C^{II} E^{II} B^{II} D^{II} F^{II}$ .

Analizę widoczności ośmiościanu można rozpocząć w dowolnym układzie rzutów Monge'a. W rzucie czwartym widoczny jest zarys  $A^{IV} C^{IV} B^{IV} D^{IV}$  oraz krawędzie  $EA$ ,  $EB$ ,  $EC$  i  $ED$ . Krawędzie  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$  i  $FD$  są niewidoczne, a ich rzuty jednoczą się z rzutami odpowiednich krawędzi wychodzących z wierzchołka  $E$ . Opis rzutów punktów  $E$ ,  $N$ ,  $I$ ,  $F$ ,  $M$ , leżących na prostej  $a$ , został wykonany z uwzględnieniem kolejności ich położenia względem obserwatora. W rzucie trzecim widoczny jest zarys  $A^{III} E^{III} B^{III} F^{III}$  oraz krawędzie  $BC$ ,  $AC$ ,  $CE$ ,  $CF$  i ich rzuty narysowano linią grubą. Krawędzie  $AD$  i  $BD$  są niewidoczne, lecz ich rzuty jednoczą się z rzutami widocznych krawędzi  $AC$  i  $BC$ . Ponadto niewidoczne są krawędzie  $DE$  i  $DF$  — ich rzuty narysowano linią kreskową. Widoczność ustalono w oparciu o nierówność  $\rho(C^{IV}, x_{34}) > \rho(D^{IV}, x_{34})$ , z której wynika, że ściany  $ACE$ ,  $ACF$ ,  $BCE$  i  $BCF$  są widoczne w rzucie trzecim.



Rys. 6.6. Rozwiązanie zadania P6.02



W rzucie pierwszym widoczne są ściany  $BCE$ ,  $BDE$ ,  $BCF$ ,  $BDF$  (bo widoczny jest zarys  $C^I E^I D^I F^I$ , zaś  $\rho(B^{III}, x_{13}) > \rho(A^{III}, x_{13})$ ). Stąd rzuty krawędzi  $BC$ ,  $BD$ ,  $BE$ ,  $BF$ ,  $CE$ ,  $CF$ ,  $DE$  i  $DF$  wykreślono linią grubą, a rzuty krawędzi  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ ,  $AF$  — linią kreskową. Podobnie analizując brzeg rzutu pionowego oraz wzajemne położenie krawędzi  $CF$  i  $AD$  ustalono, że w rzucie pionowym widoczne są ściany  $ACF$ ,  $BCF$ ,  $BDF$  i  $BCE$ . Stąd wynika, że niewidoczne są tam krawędzie  $AD$ ,  $AE$  i  $DE$ .

## 6.6. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (400; 120)$ ,  $A = (130; 20; 75)$ ,  $M = (120; 70; 25)$ ,  $N = (15; 100; 75)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
2.  $Pp = (350; 100)$ ,  $A = (90; 40; 80)$ ,  $M = (100; 70; 20)$ ,  $N = (10; 20; 50)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
3.  $Pp = (150; 140)$ ,  $A = (20; 45; 90)$ ,  $M = (20; 90; 45)$ ,  $N = (110; 45; 90)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
4.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (85; 35; 10)$ ,  $M = (60; 40; 55)$ ,  $N = (0; 90; 10)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
5.  $Pp = (150; 180)$ ,  $A = (80; 120; 10)$ ,  $M = (80; 95; 50)$ ,  $N = (0; 70; 10)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
6.  $Pp = (350; 140)$ ,  $A = (30; 80; 40)$ ,  $M = (0; 40; 100)$ ,  $N = (120; 20; 40)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
7.  $Pp = (170; 160)$ ,  $A = (80; 10; 60)$ ,  $M = (10; 10; 30)$ ,  $N = (80; 80; 80)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
8.  $Pp = (130; 120)$ ,  $A = (50; 70; 10)$ ,  $M = (100; 60; 80)$ ,  $N = (10; 20; 10)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
9.  $Pp = (160; 150)$ ,  $A = (90; 30; 0)$ ,  $M = (0; 60; 60)$ ,  $N = (70; 60; 60)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
10.  $Pp = (350; 160)$ ,  $A = (40; 40; 80)$ ,  $M = (120; 40; 20)$ ,  $N = (10; 90; 60)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
11.  $Pp = (350; 120)$ ,  $A = (100; 0; 40)$ ,  $M = (100; 50; 90)$ ,  $N = (0; 0; 0)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
12.  $Pp = (150; 140)$ ,  $A = (30; 40; 80)$ ,  $M = (120; 100; 80)$ ,  $N = (10; 80; 20)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
13.  $Pp = (150; 140)$ ,  $A = (90; 80; 55)$ ,  $M = (95; 115; 0)$ ,  $N = (20; 20; 55)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
14.  $Pp = (360; 80)$ ,  $A = (80; 60; 70)$ ,  $M = (70; 20; 30)$ ,  $N = (0; 60; 20)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
15.  $Pp = (350; 160)$ ,  $A = (40; 20; 90)$ ,  $M = (50; 50; 40)$ ,  $N = (100; 20; 20)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
16.  $Pp = (350; 170)$ ,  $A = (20; 60; 20)$ ,  $M = (20; 90; 90)$ ,  $N = (90; 20; 20)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
17.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (40; 80; 80)$ ,  $M = (60; 0; 20)$ ,  $N = (110; 120; 80)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
18.  $Pp = (350; 120)$ ,  $A = (90; 30; 70)$ ,  $M = (20; 30; 60)$ ,  $N = (100; 110; 20)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
19.  $Pp = (150; 130)$ ,  $A = (80; 80; 40)$ ,  $M = (110; 30; 90)$ ,  $N = (0; 20; 40)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
20.  $Pp = (160; 140)$ ,  $A = (30; 20; 20)$ ,  $M = (130; 20; 70)$ ,  $N = (20; 70; 80)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
21.  $Pp = (350; 130)$ ,  $A = (90; 80; 40)$ ,  $M = (110; 20; 80)$ ,  $N = (0; 80; 100)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
22.  $Pp = (350; 110)$ ,  $A = (60; 70; 90)$ ,  $M = (0; 30; 20)$ ,  $N = (120; 20; 90)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
23.  $Pp = (360; 180)$ ,  $A = (90; 70; 30)$ ,  $M = (20; 90; 30)$ ,  $N = (60; 120; 90)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .
24.  $Pp = (350; 120)$ ,  $A = (115; 20; 75)$ ,  $M = (105; 70; 25)$ ,  $N = (0; 100; 75)$ ,  $(1) = D$  za  $\varphi$ .
25.  $Pp = (150; 140)$ ,  $A = (20; 45; 90)$ ,  $M = (20; 90; 45)$ ,  $N = (110; 45; 90)$ ,  $(1) = D$  przed  $\varphi$ .

## Problem II

1.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (80; 10; 70)$ ,  $M = (100; 90; 30)$ ,  $N = (40; 25; 55)$ .
2.  $Pp = (150; 170)$ ,  $A = (20; 60; 35)$ ,  $M = (110; 90; 30)$ ,  $N = (50; 30; 60)$ .
3.  $Pp = (150; 170)$ ,  $A = (70; 15; 15)$ ,  $M = (115; 95; 35)$ ,  $N = (55; 25; 55)$ .
4.  $Pp = (170; 120)$ ,  $A = (80; 90; 60)$ ,  $M = (80; 10; 100)$ ,  $N = (20; 100; 0)$ .
5.  $Pp = (340; 180)$ ,  $A = (20; 110; 60)$ ,  $M = (60; 130; 60)$ ,  $N = (20; 170; 20)$ .
6.  $Pp = (150; 170)$ ,  $A = (30; 60; 60)$ ,  $M = (10; 10; 10)$ ,  $N = (100; 60; 60)$ .
7.  $Pp = (350; 100)$ ,  $A = (80; 30; 90)$ ,  $M = (0; 0; 130)$ ,  $N = (70; 70; 10)$ .
8.  $Pp = (160; 100)$ ,  $A = (40; 90; 70)$ ,  $M = (30; 40; 30)$ ,  $N = (80; 70; 120)$ .
9.  $Pp = (120; 200)$ ,  $A = (20; 70; 30)$ ,  $M = (10; 150; 50)$ ,  $N = (60; 60; 0)$ .
10.  $Pp = (140; 170)$ ,  $A = (60; 50; 90)$ ,  $M = (0; 0; 90)$ ,  $N = (90; 90; 0)$ .
11.  $Pp = (160; 180)$ ,  $A = (70; 70; 10)$ ,  $M = (110; 60; 60)$ ,  $N = (20; 10; 10)$ .
12.  $Pp = (100; 130)$ ,  $A = (60; 40; 10)$ ,  $M = (60; 10; 100)$ ,  $N = (0; 100; 0)$ .
13.  $Pp = (350; 180)$ ,  $A = (80; 70; 30)$ ,  $M = (100; 10; 80)$ ,  $N = (0; 70; 20)$ .
14.  $Pp = (140; 160)$ ,  $A = (100; 60; 70)$ ,  $M = (50; 20; 80)$ ,  $N = (90; 90; 10)$ .
15.  $Pp = (160; 180)$ ,  $A = (60; 60; 10)$ ,  $M = (140; 70; 0)$ ,  $N = (20; 0; 70)$ .
16.  $Pp = (350; 170)$ ,  $A = (20; 140; 70)$ ,  $M = (90; 160; 90)$ ,  $N = (0; 70; 0)$ .
17.  $Pp = (300; 90)$ ,  $A = (40; 50; 0)$ ,  $M = (120; 0; 0)$ ,  $N = (0; 70; 70)$ .
18.  $Pp = (160; 100)$ ,  $A = (70; 20; 80)$ ,  $M = (80; 70; 120)$ ,  $N = (30; 40; 30)$ .
19.  $Pp = (120; 190)$ ,  $A = (20; 70; 40)$ ,  $M = (80; 40; 0)$ ,  $N = (20; 140; 60)$ .
20.  $Pp = (350; 130)$ ,  $A = (10; 90; 100)$ ,  $M = (80; 120; 120)$ ,  $N = (10; 0; 80)$ .
21.  $Pp = (350; 140)$ ,  $A = (20; 90; 90)$ ,  $M = (0; 100; 20)$ ,  $N = (40; 60; 60)$ .
22.  $Pp = (350; 110)$ ,  $A = (30; 90; 80)$ ,  $M = (0; 10; 120)$ ,  $N = (70; 80; 0)$ .
23.  $Pp = (150; 170)$ ,  $A = (70; 15; 15)$ ,  $M = (115; 85; 35)$ ,  $N = (55; 25; 55)$ .
24.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (80; 10; 70)$ ,  $M = (100; 90; 30)$ ,  $N = (40; 25; 55)$ .
25.  $Pp = (150; 170)$ ,  $A = (20; 60; 35)$ ,  $M = (110; 90; 30)$ ,  $N = (50; 30; 60)$ .

## 7. Przekroje wielościanów wypukłych

Zbiór punktów wspólnych bryły i płaszczyzny nazywa się **przekrojem** bryły płaszczyzną. Przekrój wielościanu jest zawartą w płaszczyźnie tnącej figurą, której kształt zależy od położenia płaszczyzny siecznej względem przecinanej bryły. W przypadku wielościanów **wypukłych** przekrojem może być:

- **zbiór pusty** (płaszczyzna tnąca nie posiada punktów wspólnych z wielościanem),
- **punkt** (płaszczyzna tnąca przechodzi przez wierzchołek wielościanu),
- **odcinek** (płaszczyzna tnąca jest styczna do krawędzi wielościanu),
- **wielokąt wypukły**, którego wierzchołkami są punkty przebicia płaszczyzny siecznej przez krawędzie wielościanu.

Praktyczne zastosowanie mają jedynie przekroje będące wielokątami. W wyniku takiego zabiegu wielościan wypukły zostaje rozcięty na dwie części, w których wielokąt przekroju staje się nową ścianą.

Przekroje wielościanów wklęsłych stanowią zagadnieniem złożone, które wykracza poza zakres niniejszego opracowania.

### 7.1. Treść problemów

#### Problem I. Przekroje sześciścianu

W kartezjańskim prostokątnym prawoskrętnym układzie współrzędnych  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm, dane są: **trójkąt prostokątny  $ABC$** , **odcinek  $DE$**  oraz **punkt  $P$** .

Trójkąt  $ABC$  jest ścianą, a odcinek  $DE$  — krawędzią **wypukłego** sześciścianu o trójkątnych ścianach. Wielościan ten obcięto dwiema płaszczyznami przechodzącymi przez punkt  $P$ : **płaszczyzną poziomą  $\alpha$**  i **płaszczyzną czołową  $\beta$** .

1. Narysować rysunek poglądowy sześciścianu  $ABCDE$ . Winien być to rzut równoległy na płaszczyznę  $Oxz$  układu współrzędnych, przy kierunku rzutowania  $k = \{O, Y\}$ , gdzie  $O = (0; 0; 0)$ ,  $Y = (60; 90; 30)$ . Ustalić widoczność bryły.

Rysunek sporządzić w podziałce 1:2. Założyć, że początek układu współrzędnych (punkt  $O$ ) znajduje się w punkcie początkowym  $Pp_1$  arkusza rysunkowego. Oś  $x$  przyjąć na arkuszu **poziomo** i nadać jej zwrot „w lewo”, oś  $z$  przyjąć  **pionowo** i nadać jej zwrot „do góry”.

2. Skonstruować rzuty Monge’a w układzie rzutni  $(\pi_1, \pi_2)$  wielościanu powstałego po przecięciu sześciścianu  $ABCDE$  danymi płaszczyznami i odrzuceniu części bryły leżących odpowiednio **nad** płaszczyzną  $\alpha$  oraz **przed** płaszczyzną  $\beta$ . Ustalić widoczność powstałej bryły we wszystkich rzutach.

Rzuty sporządzić w podziałce 1:1. Przyjąć, że rzutnią poziomą jest płaszczyzna  $\pi_1 = \{x, y\}$ , rzutnią pionową — płaszczyzna  $\pi_2 = \{z, x\}$ . Punkt  $O$  (początek układu współrzędnych) przyjąć w punkcie początkowym  $Pp_2$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x = x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

W rozwiązaniu **oznaczyć i opisać wszystkie wierzchołki** powstałego wielościanu; punkty będące końcami wspólnej krawędzi ścian przekrojów opisać odpowiednio  $F$  oraz  $G$ , pozostałe wierzchołki ścian przekrojów opisać kolejnymi liczbami arabskimi, w porządku zgodnym z kolejnością połączeń. Opis punktów pomocniczych (tzn. punktów niebędących wierzchołkami ostatecznej bryły) nie jest konieczny.

**Wskazówka:** Przy układaniu zadań punkty  $A, B, C, D, E$  wybierano ze zbioru wierzchołków, środków ścian i środków krawędzi pewnego sześciianu.

## Problem II. Przekrój ostrosłupa

W kartezjańskim prostokątnym prawoskrętnym układzie współrzędnych  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm, dany jest **ostrosłup**, którego podstawą jest **pięciokąt** wypukły  $ABCDE$ , a wierzchołkiem **punkt**  $W$ .

Ostrosłup ten rozcięto na dwie części płaszczyzną  $\varphi = \{K, L, M\}$ .

1. Metodą transformacji układu odniesienia skonstruować rzuty Monge'a tej części rozciętego ostrosłupa, która **nie zawiera** wierzchołka  $W$ .

Założyć, że początek układu współrzędnych (punkt  $O$ ) znajduje się w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć, że rzutnią poziomą jest płaszczyzna  $\pi_1 = \{x, y\}$ , rzutnią pionową — płaszczyzna  $\pi_2 = \{z, x\}$ . Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x = x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe oraz zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

2. Skonstruować rzut ściany przekroju, w którym zachowane są jej wszystkie wymiary.

3. Ustalić **widoczność** powstałej bryły we **wszystkich** konstruowanych rzutach. **Zakreskować** ścianę przekroju we wszystkich rzutach, w których jest ona **widoczna**.

Osie transformacji przyjmować w sposób zapewniający **rozlączność wszystkich rzutów**. **Oznaczyć i opisać wszystkie wierzchołki** ściany przekroju; o ile nie zostały opisane w treści problemu, opisać je liczbami w zapisie arabskim, zachowując kolejność zgodną z kolejnością połączeń wierzchołków.

### Informacje pomocnicze:

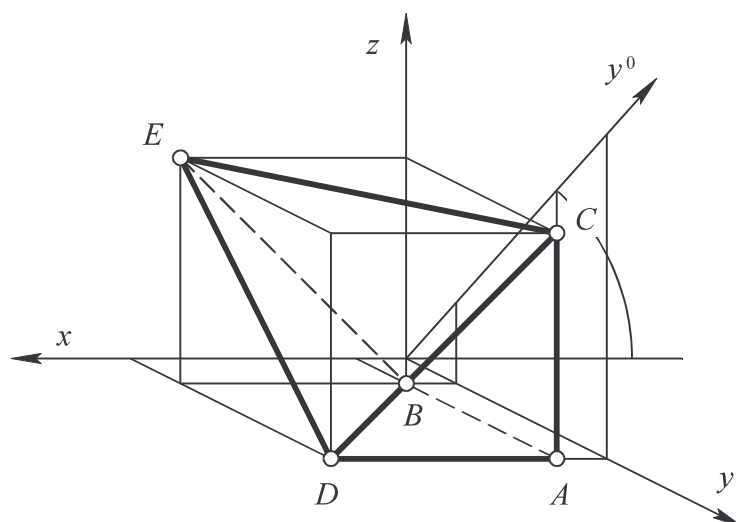
- **krawędzie niewidoczne** rysować **linią cienką kreskową**, **krawędzie widoczne** — **linią ciągłą grubą**; punkty oznaczać okręgami o średnicy 2 mm wykreślanymi **linią cienką ciągłą**; **nie zaczerniać** ani **nie przekreślać ich wnętrza**; **konstrukcje pomocnicze** wykreślać **linią cienką ciągłą**,
- widoczną w rzutach ścianę przekroju zakreskować ze stałą podziałką kreskowania 5 mm; zastosować we wszystkich rzutach ten sam kąt kreskowania równy  $45^\circ$  (ewentualnie  $135^\circ$ ); **kreskowanie wykonać linią ciągłą cienką!**

## 7.2. Przykłady

### Przykład 1. Zadanie P7.01. Problem I.

Dane	
$Pp_1$	(100; 160)
$Pp_2$	(340; 160)
$A$	(20; 120; 0)
$B$	(20; 30; 0)
$C$	(20; 120; 90)
$D$	(110; 120; 0)
$E$	(110; 30; 90)
$P$	(0; 100; 60)

Rozwiązanie:

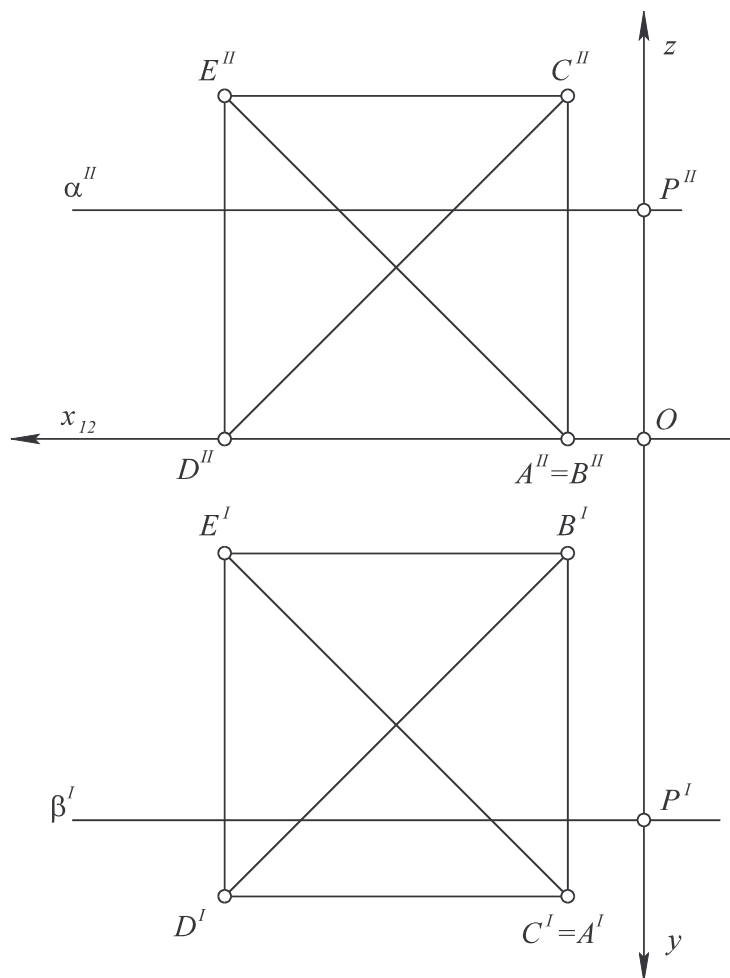


Rys. 7.1. Rysunek poglądowy sześciścianu ABCDE

Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od sporządzenia rysunku poglądowego danej bryły, zgodnie z treścią problemu i informacji pomocniczych. Najpierw znajdujemy rzuty równoległe wierzchołków sześciścianu:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  oraz  $E$ , a następnie wykreślamy rzuty krawędzi. Sześciścian o ścianach trójkątnych ma 9 krawędzi. Cztery z nich dane są w treści problemu — boki trójkąta:  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  oraz odcinek  $DE$ . Pięć punktów można połączyć parami na 10 sposobów, więc spośród pozostałych możliwości należy wykluczyć jedną. Ponieważ dowolny rzut równoległy wielościanu wypukłego jest wielokątem wypukłym, więc na podstawie rys.7.1. wnioskujemy, że rzutem sześciścianu jest czworokąt  $ACED$ , co daje nam dwie krawędzie sześciścianu:  $AD$  i  $CE$ . Dalsza analiza prowadzi do wniosku, że krawędzią nie może być odcinek  $AE$ . Stąd

otrzymujemy, że pozostałymi krawędziami są odcinki  $BD$ ,  $BE$  i  $CD$ . Ścianami wielościanu są więc trójkąty:  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $CDE$ ,  $BCE$ ,  $BDE$ . Krawędzie  $AB$ ,  $BC$ ,  $BD$ ,  $BE$  są niewidoczne, natomiast  $AC$ ,  $AD$ ,  $CD$ ,  $DE$  i  $CE$  są widoczne.

Wykorzystując te informacje można łatwo narysować rzuty Monge'a wierzchołków i krawędzi wypukłego sześciścianu  $ABCDE$  oraz rzuty płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 7.2.).



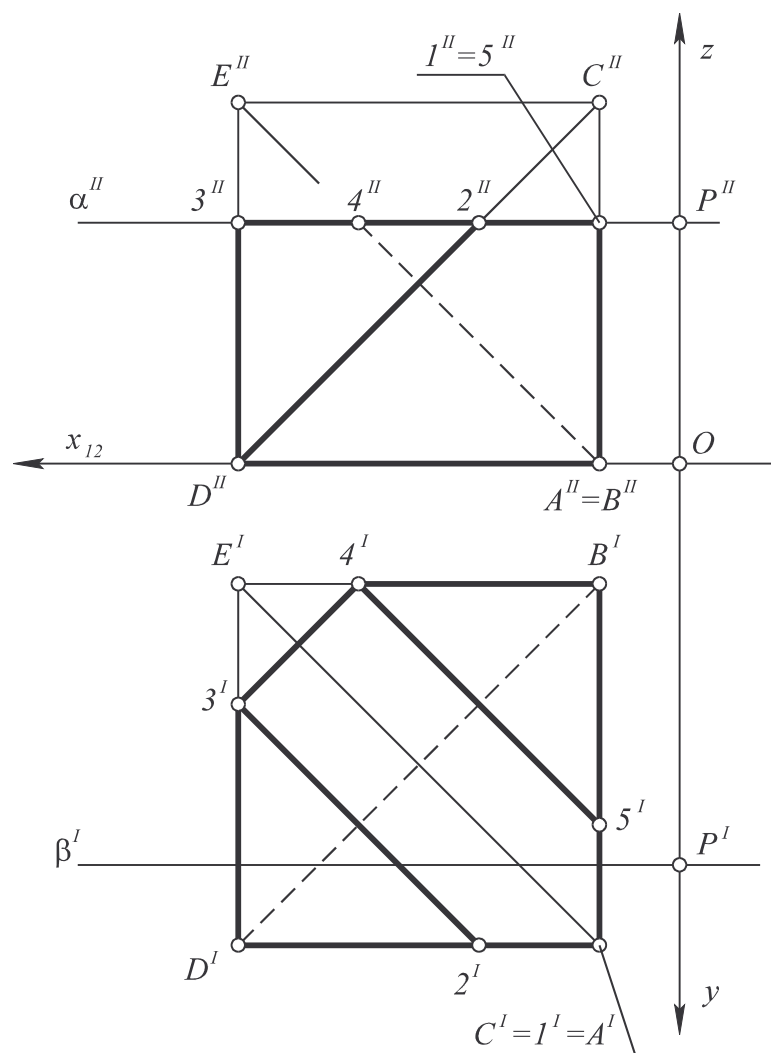
Rys. 7.2. Rzuty Monge'a wierzchołków i krawędzi sześciścianu oraz płaszczyzn tnących

Aby skonstruować wielościan powstały w wyniku „odkrojenia” fragmentów sześciścianu płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$ , można wykorzystać jedną z dwu narzucających się metod postępowania:

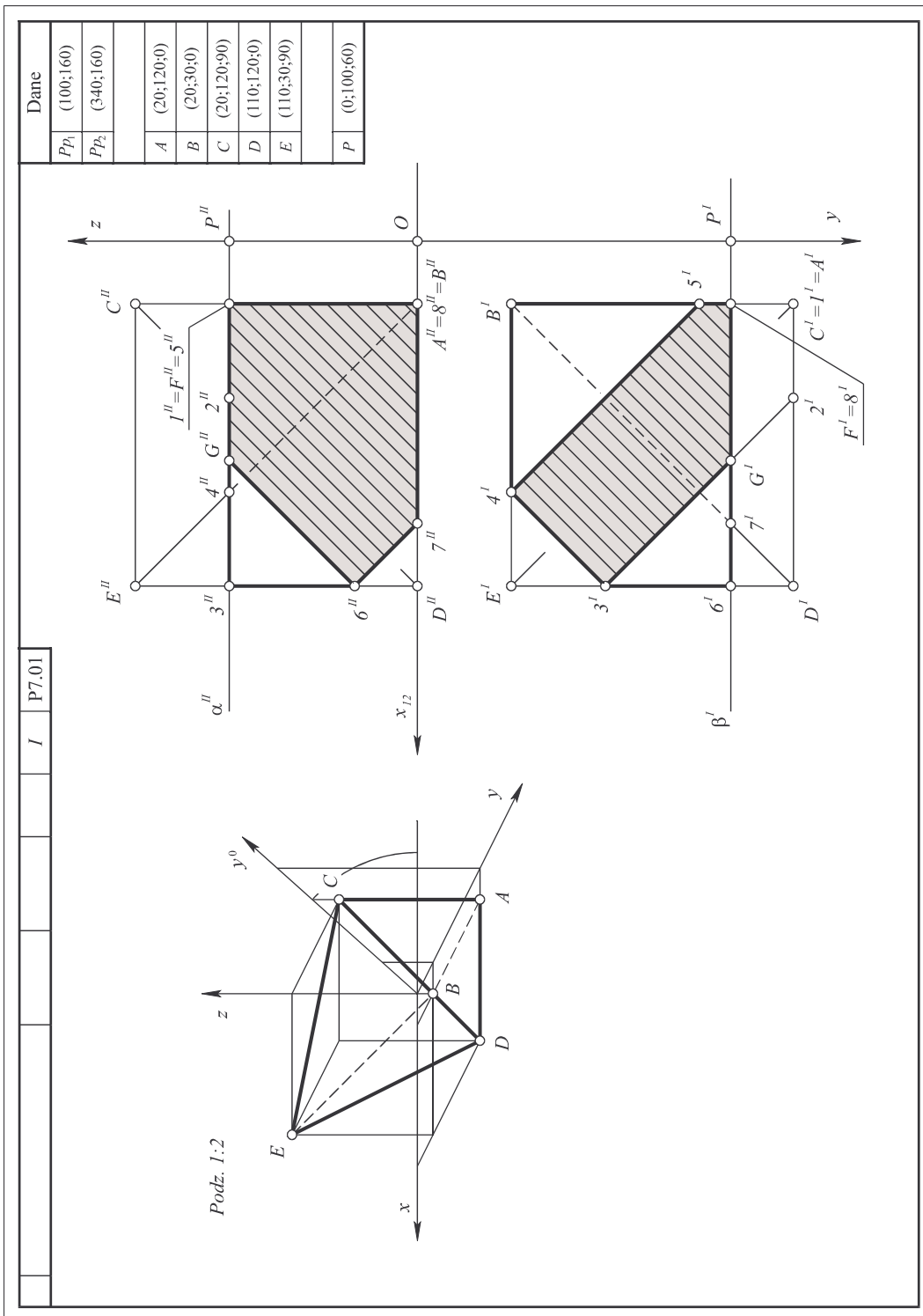
Metoda pierwsza polega na skonstruowaniu oddzielnie przekroju sześciścianu płaszczyzną  $\alpha$  i oddzielnie przekroju sześciścianu płaszczyzną  $\beta$ , a następnie wyznaczeniu krawędzi wspólnej obu przekrojów i „odrzucaeniu” „odkrojonych” fragmentów bryły.

Druga metoda polega na wykonaniu najpierw przekroju sześciścianu jedną z płaszczyzn tnących (dowolną) i „odrzuć” odpowiedniego fragmentu bryły, a następnie wykonania przekroju drugą płaszczyzną **wielościanu obciętego**.

W niniejszym rozwiązaniu zastosowano drugą metodę. Najpierw wykonano przekrój sześciścianu płaszczyzną  $\alpha$ . Płaszczyzna  $\alpha$  przecina krawędzie  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $BE$  i  $BC$  sześciścianu odpowiednio w punktach  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$ ,  $5$  (rys. 7.3.). Wierzchołki wielokąta przekroju wyznaczono w rzucie pionowym, a nazwano w rzucie poziomym, aby zachować zgodność opisu i kolejności połączeń. **(Opis należy rozpocząć od wierzchołków, które odpadną po drugim obcięciu.)** Ściana przekroju będzie widoczna w rzucie poziomym, po umownym odrzuceniu części wielościanu ograniczonej płaszczyzną przekroju i krawędzią  $CE$ .



Rys. 7.3. Przekrój sześciścianu płaszczyzną  $\alpha$



Rys. 7.4. Rozwiązanie zadania P7.01



Uzyskany wielościan należy teraz przekroić płaszczyzną  $\beta$ . Płaszczyzna  $\beta$  przecina krawędź 1–5 w punkcie  $F$ , krawędź 2–3 w punkcie  $G$ , zaś krawędzie  $D-3$ ,  $BD$  i  $AB$  odpowiednio w punktach 6, 7 i 8. Wierzchołki wielokąta przekroju wyznaczono w rzucie poziomym, a opisano w rzucie pionowym (gdzie widać kolejność połączeń). Aby odsłonić ścianę przekroju należy odrzucić część wielościanu ograniczoną tym przekrojem i ścianą  $A-1-2-D$ .

Przekrojenie wielościanu płaszczyzną  $\beta$  spowodowało zmianę kształtu ściany przekroju w płaszczyźnie  $\alpha$ . Ostatecznie ściana ta będzie pięciokątem o wierzchołkach 3, 4, 5,  $F$ ,  $G$  (rys. 7.4.).

**Uwaga 1.** Zadanie w części dotyczącej przekrojów można również rozwiązywać w kolejności odwrotnej do przedstawionej w przykładzie, tzn. najpierw dokonać przekroju sześciścianu płaszczyzną  $\beta$ , a następnie płaszczyzną  $\alpha$ .

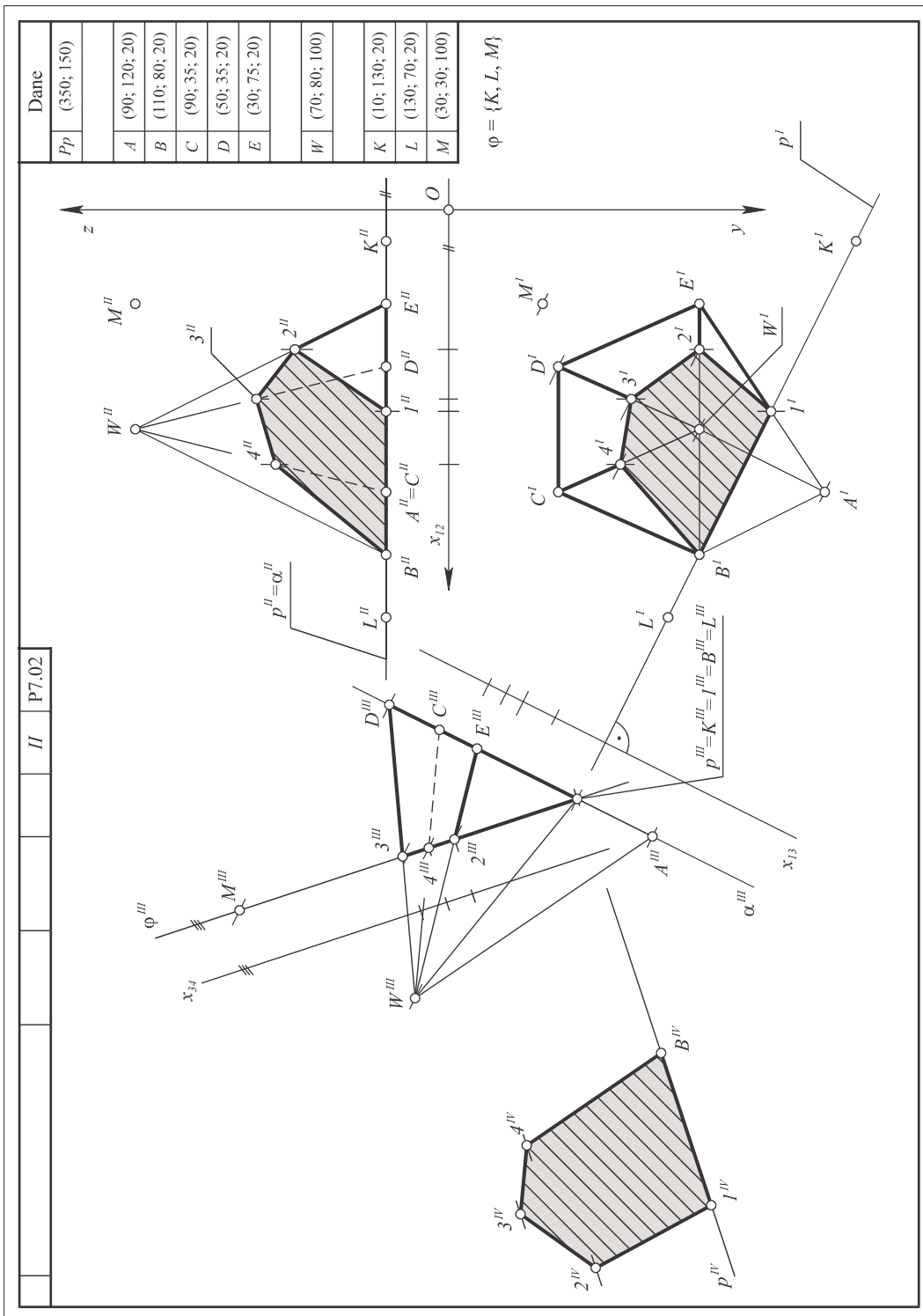
**Uwaga 2.** Ustalenia widoczności bryły, wykreślenia krawędzi odpowiednimi rodzajami i grubościami linii oraz kreskowania przekrojów należy dokonać dopiero po wyznaczeniu obu przekrojów (rys. 7.4.)!

**Przykład 2. Zadanie P7.02. Problem II.**

Dane	
$Pp$	(350; 150)
$A$	(90; 120; 20)
$B$	(110; 80; 20)
$C$	(90; 35; 20)
$D$	(50; 35; 20)
$E$	(30; 75; 20)
$W$	(70; 80; 100)
$K$	(10; 130; 20)
$L$	(130; 70; 20)
$M$	(30; 30; 100)

Rozwiązanie:

Rozwiązywanie zadania należy rozpocząć od odwzorowania sytuacji początkowej zgodnie z danymi do zadania i przeprowadzenia analizy jej położenia. W omawianym przykładzie podstawa ostrosłupa (pięciokąt  $ABCDE$ ) leży w płaszczyźnie poziomej (przyjmijmy, że jest to płaszczyzna  $\alpha$ ), wierzchołek  $W$  znajduje się **nad** podstawą, natomiast płaszczyzna sieczna  $\varphi$  ma położenie ogólne w podstawowym układzie rzutni Monge'a ( $\pi_1, \pi_2$ ). Ponadto (**w tym przykładzie**) prosta  $p = \{K, L\}$  jest krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\varphi$  oraz ma położenie poziome.



Rys. 7.5. Rozwiązanie zadania P7.02

W celu wyznaczenia rozwiązania należy przekształcić zadany układ odniesienia tak, aby płaszczyzna sieczna  $\varphi$  przyjęła położenie rzutujące (patrz: rys. 7.5.). Wówczas natychmiast znajduje się wszystkie wierzchołki wielokąta przekroju. Taką otrzymano sytuację w rzucie trzecim, wprowadzając rzutnię  $\pi_3$  prostopadłą jednocześnie do rzutni poziomej i prostej  $p = \{K, L\}$  (przyjęto oś transformacji  $x_{13} \perp p'$ ).

W układzie rzutni ( $\pi_1, \pi_3$ ) wyznaczono rzuty wielokąta przekroju. Jest nim pięciokąt, gdyż płaszczyzna sieczna  $\varphi$  przecina krawędzie boczne  $CW, DW, EW$ , krawędź podstawy  $AE$  i przechodzi przez wierzchołek podstawy  $B$ . Rzuty pionowe wierzchołków ściany przekroju skonstruowano w oparciu o warunek ich przynależności do rzutów odpowiednich krawędzi, kontrolując jednocześnie zgodność zasady transformacji punktów. Opisu wierzchołków dokonano w rzucie poziomym, gdyż zachowuje on kolejność połączeń. Punkty wspólne płaszczyzny  $\varphi$  i krawędzi  $AE, EW, DW, CW$  opisano odpowiednio jako  $1, 2, 3, 4$ , zaś punktu  $B$  nie opisywano już po raz drugi. W ten sposób otrzymano, że przekrojem rozważanego ostrosłupa płaszczyzną  $\varphi$  jest pięciokąt  $1-2-3-4-B$ .

Rzeczywistą wielkość ściany przekroju wyznaczono w rzucie czwartym, wprowadzając rzutnię  $\pi_4$  prostopadłą do  $\pi_3$  i równoległą do płaszczyzny  $\varphi$  (przyjęto  $x_{34} \parallel \varphi'''$ ).

W treści problemu żąda się wykreślenia rzutów fragmentu ostrosłupa niezawierającego wierzchołka  $W$ . W rzucie trzecim można zauważyć, że „odkrojenie” fragmentu z wierzchołkiem ostrosłupa odsłoni ścianę przekroju zarówno w rzucie poziomym, jak i w pionowym. Pozwala to szybko ustalić widoczność konstruowanej bryły we wszystkich rzutach.

W rzucie trzecim widoczne są krawędzie  $1-E, 1-2, 2-3, DE$  oraz  $2-E$ ; ich rzuty narysowano linią ciągłą grubą. Krawędź  $B-1$  jest w położeniu rzutującym, a pozostałe krawędzie bryły są w tym rzucie niewidoczne. Linią kreskową narysowano jedynie rzut krawędzi  $2-E$ , bo rzuty pozostałych krawędzi niewidocznych zjednoczyły się z rzutami krawędzi widocznych.

W rzucie poziomym widoczne są wszystkie krawędzie bryły, zaś w rzucie pionowym niewidoczne są krawędzie  $BC, CD, DE, 3-D$  i  $4-C$ , przy czym tylko dwie ostatnie nie są przesłanianie przez krawędzie widoczne.

Ściana przekroju jest widoczna w rzucie poziomym i w rzucie pionowym. Oba jej rzuty zostały więc zakreskowane zgodnie ze wskazówkami zawartymi w informacjach pomocniczych do problemu.

### 7.3. Zadania

#### Problem I

1.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (20; 30; 0)$ ,  
 $D = (110; 30; 90)$ ,  $E = (65; 75; 90)$ ,  $P = (0; 90; 45)$ .
2.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (110; 120; 90)$ ,  $C = (110; 30; 90)$ ,  
 $D = (20; 30; 0)$ ,  $E = (20; 75; 45)$ ,  $P = (0; 75; 60)$ .
3.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (110; 120; 90)$ ,  
 $D = (65; 30; 0)$ ,  $E = (110; 30; 90)$ ,  $P = (0; 105; 30)$ .
4.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (20; 30; 45)$ ,  $E = (110; 30; 90)$ ,  $P = (0; 90; 60)$ .
5.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (20; 120; 0)$ ,  $B = (110; 120; 90)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 0)$ ,  $E = (65; 30; 90)$ ,  $P = (0; 75; 60)$ .
6.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 90)$ ,  $B = (20; 120; 90)$ ,  $C = (20; 30; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 0)$ ,  $E = (65; 120; 0)$ ,  $P = (0; 90; 75)$ .
7.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 30; 90)$ ,  $B = (20; 120; 90)$ ,  $C = (20; 30; 90)$ ,  
 $D = (110; 120; 0)$ ,  $E = (20; 30; 0)$ ,  $P = (0; 75; 60)$ .
8.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (110; 120; 90)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (20; 30; 0)$ ,  $E = (110; 30; 45)$ ,  $P = (0; 90; 30)$ .
9.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (110; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 45)$ ,  $E = (20; 30; 90)$ ,  $P = (0; 90; 60)$ .
10.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 90)$ ,  $B = (110; 30; 90)$ ,  $C = (20; 30; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 0)$ ,  $E = (20; 75; 0)$ ,  $P = (0; 60; 60)$ .
11.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 90)$ ,  $B = (110; 30; 90)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 120; 0)$ ,  $E = (20; 75; 0)$ ,  $P = (0; 90; 60)$ .
12.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (20; 120; 0)$ ,  $B = (20; 30; 0)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 120; 0)$ ,  $E = (110; 30; 90)$ ,  $P = (0; 105; 30)$ .
13.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (20; 30; 0)$ ,  $E = (110; 30; 90)$ ,  $P = (0; 75; 60)$ .
14.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (20; 120; 0)$ ,  $B = (110; 120; 90)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 0)$ ,  $E = (20; 30; 90)$ ,  $P = (0; 75; 60)$ .
15.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 90)$ ,  $B = (20; 120; 90)$ ,  $C = (20; 30; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 0)$ ,  $E = (20; 120; 0)$ ,  $P = (0; 90; 45)$ .
16.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 30; 90)$ ,  $B = (20; 120; 90)$ ,  $C = (20; 30; 90)$ ,  
 $D = (20; 30; 0)$ ,  $E = (110; 120; 45)$ ,  $P = (0; 60; 60)$ .
17.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (20; 120; 0)$ ,  $B = (20; 30; 0)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 120; 0)$ ,  $E = (110; 75; 90)$ ,  $P = (0; 90; 45)$ .
18.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (110; 120; 90)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (65; 30; 0)$ ,  $E = (110; 30; 90)$ ,  $P = (0; 75; 75)$ .
19.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (20; 30; 0)$ ,  $E = (110; 30; 45)$ ,  $P = (0; 90; 30)$ .
20.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (110; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 0)$ ,  $E = (20; 30; 45)$ ,  $P = (0; 90; 30)$ .

21.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (20; 120; 0)$ ,  $B = (110; 120; 90)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 45)$ ,  $E = (20; 30; 90)$ ,  $P = (0; 90; 60)$ .
22.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 90)$ ,  $B = (20; 120; 90)$ ,  $C = (20; 30; 90)$ ,  
 $D = (110; 30; 0)$ ,  $E = (20; 75; 0)$ ,  $P = (0; 60; 60)$ .
23.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (20; 120; 0)$ ,  $B = (20; 30; 0)$ ,  $C = (20; 120; 90)$ ,  
 $D = (110; 75; 0)$ ,  $E = (110; 30; 90)$ ,  $P = (0; 60; 45)$ .
24.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 120; 0)$ ,  $B = (20; 120; 0)$ ,  $C = (20; 30; 0)$ ,  
 $D = (110; 30; 90)$ ,  $E = (65; 75; 90)$ ,  $P = (0; 90; 45)$ .
25.  $Pp_1 = (100; 160)$ ,  $Pp_2 = (340; 160)$ ,  $A = (110; 30; 90)$ ,  $B = (20; 30; 90)$ ,  $C = (20; 30; 0)$ ,  
 $D = (65; 120; 90)$ ,  $E = (110; 120; 0)$ ,  $P = (0; 90; 45)$ .

### Problem II

1.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 60; 20)$ ,  $B = (60; 20; 20)$ ,  $C = (20; 60; 20)$ ,  $D = (20; 100; 20)$ ,  
 $E = (60; 100; 20)$ ,  $W = (60; 60; 100)$ ,  $K = (110; 65; 20)$ ,  $L = (10; 15; 20)$ ,  $M = (60; 110; 60)$ .
2.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (75; 120; 20)$ ,  $B = (120; 75; 20)$ ,  $C = (120; 30; 20)$ ,  $D = (30; 20; 20)$ ,  
 $E = (30; 75; 20)$ ,  $W = (75; 75; 110)$ ,  $K = (20; 125; 20)$ ,  $L = (130; 75; 20)$ ,  $M = (30; 30; 110)$ .
3.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 100)$ ,  $B = (60; 20; 100)$ ,  $C = (20; 20; 60)$ ,  $D = (60; 20; 20)$ ,  
 $E = (100; 20; 60)$ ,  $W = (60; 100; 60)$ ,  $K = (110; 20; 65)$ ,  $L = (10; 20; 15)$ ,  $M = (60; 60; 110)$ .
4.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 20)$ ,  $B = (100; 100; 20)$ ,  $C = (60; 100; 20)$ ,  $D = (20; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (60; 60; 100)$ ,  $K = (110; 65; 20)$ ,  $L = (10; 15; 20)$ ,  $M = (20; 100; 90)$ .
5.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (20; 20; 20)$ ,  $B = (20; 100; 20)$ ,  $C = (60; 100; 20)$ ,  $D = (100; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (60; 60; 100)$ ,  $K = (10; 65; 20)$ ,  $L = (110; 15; 20)$ ,  $M = (110; 100; 70)$ .
6.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 20)$ ,  $B = (100; 20; 100)$ ,  $C = (60; 20; 100)$ ,  $D = (20; 20; 60)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (60; 100; 60)$ ,  $K = (110; 20; 65)$ ,  $L = (10; 20; 15)$ ,  $M = (10; 70; 100)$ .
7.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (60; 100; 20)$ ,  $B = (100; 60; 20)$ ,  $C = (60; 20; 20)$ ,  $D = (20; 20; 20)$ ,  
 $E = (20; 60; 20)$ ,  $W = (100; 60; 100)$ ,  $K = (110; 55; 20)$ ,  $L = (10; 105; 20)$ ,  $M = (60; 10; 100)$ .
8.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (60; 20; 20)$ ,  $B = (100; 20; 60)$ ,  $C = (60; 20; 90)$ ,  $D = (20; 20; 60)$ ,  
 $E = (20; 20; 20)$ ,  $W = (100; 100; 60)$ ,  $K = (110; 20; 55)$ ,  $L = (10; 20; 105)$ ,  $M = (60; 100; 10)$ .
9.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (60; 20; 20)$ ,  $B = (100; 60; 20)$ ,  $C = (60; 100; 20)$ ,  $D = (20; 100; 20)$ ,  
 $E = (20; 60; 20)$ ,  $W = (100; 60; 100)$ ,  $K = (110; 65; 20)$ ,  $L = (10; 15; 20)$ ,  $M = (60; 110; 100)$ .
10.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (60; 20; 20)$ ,  $B = (20; 20; 60)$ ,  $C = (60; 20; 100)$ ,  $D = (100; 20; 100)$ ,  
 $E = (100; 20; 60)$ ,  $W = (20; 100; 60)$ ,  $K = (10; 20; 65)$ ,  $L = (110; 20; 15)$ ,  $M = (60; 100; 110)$ .
11.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (100; 100; 20)$ ,  $B = (100; 20; 20)$ ,  $C = (60; 20; 20)$ ,  $D = (20; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 100; 20)$ ,  $W = (100; 60; 100)$ ,  $K = (110; 50; 20)$ ,  $L = (50; 110; 20)$ ,  $M = (60; 10; 100)$ .
12.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (20; 20; 100)$ ,  $B = (20; 20; 20)$ ,  $C = (60; 20; 20)$ ,  $D = (100; 20; 60)$ ,  
 $E = (60; 20; 100)$ ,  $W = (20; 100; 60)$ ,  $K = (70; 20; 110)$ ,  $L = (60; 100; 10)$ ,  $M = (10; 20; 50)$ .
13.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (100; 20; 100)$ ,  $B = (100; 20; 20)$ ,  $C = (60; 20; 20)$ ,  $D = (20; 20; 60)$ ,  
 $E = (60; 20; 100)$ ,  $W = (100; 100; 60)$ ,  $K = (110; 20; 50)$ ,  $L = (50; 20; 110)$ ,  $M = (60; 100; 10)$ .
14.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 20)$ ,  $B = (100; 100; 20)$ ,  $C = (60; 100; 20)$ ,  $D = (20; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (100; 60; 100)$ ,  $K = (110; 70; 20)$ ,  $L = (50; 10; 20)$ ,  $M = (60; 110; 100)$ .
15.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (20; 20; 20)$ ,  $B = (20; 100; 20)$ ,  $C = (60; 100; 20)$ ,  $D = (100; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (20; 60; 100)$ ,  $K = (10; 70; 20)$ ,  $L = (70; 10; 20)$ ,  $M = (60; 110; 100)$ .
16.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 60)$ ,  $B = (60; 20; 100)$ ,  $C = (20; 20; 60)$ ,  $D = (60; 20; 20)$ ,  
 $E = (100; 20; 20)$ ,  $W = (100; 100; 60)$ ,  $K = (110; 20; 60)$ ,  $L = (30; 20; 10)$ ,  $M = (60; 90; 110)$ .

17.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 60)$ ,  $B = (60; 20; 100)$ ,  $C = (20; 20; 100)$ ,  $D = (20; 20; 20)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (100; 100; 60)$ ,  $K = (110; 20; 80)$ ,  $L = (20; 20; 10)$ ,  $M = (60; 100; 110)$ .
18.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (100; 60; 20)$ ,  $B = (60; 20; 20)$ ,  $C = (20; 20; 20)$ ,  $D = (20; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 100; 20)$ ,  $W = (100; 100; 100)$ ,  $K = (110; 55; 20)$ ,  $L = (10; 105; 20)$ ,  $M = (10; 10; 100)$ .
19.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (100; 20; 60)$ ,  $B = (100; 20; 20)$ ,  $C = (60; 20; 20)$ ,  $D = (20; 20; 60)$ ,  
 $E = (60; 20; 100)$ ,  $W = (100; 100; 100)$ ,  $K = (10; 20; 105)$ ,  $L = (60; 100; 10)$ ,  $M = (110; 20; 55)$ .
20.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (20; 60; 20)$ ,  $B = (20; 20; 20)$ ,  $C = (60; 20; 20)$ ,  $D = (100; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 100; 20)$ ,  $W = (20; 100; 100)$ ,  $K = (110; 105; 20)$ ,  $L = (10; 55; 20)$ ,  $M = (60; 10; 100)$ .
21.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (20; 60; 20)$ ,  $B = (20; 100; 20)$ ,  $C = (60; 100; 20)$ ,  $D = (100; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (20; 20; 100)$ ,  $K = (110; 65; 20)$ ,  $L = (10; 15; 20)$ ,  $M = (60; 120; 100)$ .
22.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 20)$ ,  $B = (100; 20; 60)$ ,  $C = (60; 20; 100)$ ,  $D = (20; 20; 60)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (100; 100; 60)$ ,  $K = (10; 20; 45)$ ,  $L = (110; 20; 95)$ ,  $M = (110; 80; 20)$ .
23.  $Pp = (350; 150)$ ,  $A = (20; 60; 20)$ ,  $B = (60; 100; 20)$ ,  $C = (100; 100; 20)$ ,  $D = (100; 60; 20)$ ,  
 $E = (60; 20; 20)$ ,  $W = (60; 60; 100)$ ,  $K = (110; 15; 20)$ ,  $L = (60; 110; 60)$ ,  $M = (10; 65; 20)$ .
24.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 20; 100)$ ,  $B = (60; 20; 100)$ ,  $C = (20; 20; 60)$ ,  $D = (60; 20; 20)$ ,  
 $E = (100; 20; 60)$ ,  $W = (60; 100; 60)$ ,  $K = (110; 20; 65)$ ,  $L = (10; 20; 15)$ ,  $M = (60; 60; 110)$ .
25.  $Pp = (150; 150)$ ,  $A = (100; 60; 20)$ ,  $B = (60; 20; 20)$ ,  $C = (20; 60; 20)$ ,  $D = (20; 100; 20)$ ,  
 $E = (60; 100; 20)$ ,  $W = (60; 60; 100)$ ,  $K = (110; 65; 20)$ ,  $L = (10; 15; 20)$ ,  $M = (60; 110; 60)$ .

## 8. Powierzchnie i bryły obrotowe

### 8.1. Powierzchnie obrotowe – podstawowe pojęcia

**Powierzchnia obrotowa** powstaje w wyniku pełnego obrotu wokół ustalonej prostej (**osi obrotu**) elementu zwanego **tworzącą**. Tworzącą może być dowolna ciągła linia płaska lub przestrzenna. Jeżeli tworzącą jest prosta, to taką powierzchnię nazywa się **prostokreślną**, w innych przypadkach otrzymuje się powierzchnie **nieprostokreślne**.

W zależności od wzajemnego położenia w przestrzeni osi obrotu i tworzącej można wyróżnić następujące prostokreślne powierzchnie obrotowe:

- **płaszczyznę** (oś obrotu i tworząca są do siebie prostopadłe),
- **powierzchnię walcową** (oś obrotu i tworząca są równoległe)
- **powierzchnię stożkową** (oś obrotu i tworząca przecinają się, tworząc ze sobą kąt różny od kąta prostego),
- **hiperboloidę jednopowłokową** (oś obrotu i tworząca są skośne i tworzą ze sobą kąt różny od kąta prostego).

W wyniku obrotu odcinka wokół prostej powstaje fragment jednej z wymienionych powierzchni.

Jeżeli tworzącą jest okrąg i oś obrotu leży w płaszczyźnie okręgu, to w zależności od ich wzajemnego położenia uzyskuje się następujące powierzchnie obrotowe:

- **powierzchnię pierścieniową zwykłą** (oś obrotu nie ma z okręgiem punktów wspólnych),
- **powierzchnię pierścieniową jednobiegunową** (oś obrotu jest styczna do okręgu),
- **powierzchnię pierścieniową dwubiegunową** (oś obrotu przecina okrąg w dwu punktach).

Punkt przecięcia osi obrotu i tworzącej nazywa się **biegunem powierzchni**, średnica okręgu tworzącego jest **średnicą powierzchni**. W szczególnym przypadku, gdy oś obrotu przechodzi przez środek okręgu otrzymuje się **powierzchnię sferyczną**. (Powierzchnię sferyczną można otrzymać również poprzez obrót połowy łuku okręgu wokół średnicy.) Środek łuku jest wtedy **środkiem** powierzchni sferycznej. W wyniku obrotu dowolnego łuku okręgu wokół osi leżącej w jego płaszczyźnie uzyskuje się fragmenty wymienionych powierzchni.

Jeżeli oś obrotu nie leży w płaszczyźnie okręgu, uzyskuje się przeważnie **powierzchnie obrotowe dowolne**. Wyjątek stanowi np. sytuacja, w której prosta przechodząca przez środek łuku i prostopadła do jego płaszczyzny przecina oś obrotu. Otrzymuje się wówczas fragment powierzchni sferycznej, której środkiem jest punkt przecięcia prostych.

Wymienione powierzchnie stanowią w całości lub części **pobocznie** (powierzchnie boczne) takich brył obrotowych jak **walec, stożek, kula, torus**. Bryłę, której pobocznicę stanowi powierzchnia obrotowa dowolna nazywa się **bryłą obrotową dowolną**. W wyniku obrotu innych krzywych niż prosta i okrąg powstają przeważnie powierzchnie obrotowe dowolne.

Każdy punkt tworzącej powierzchni określa okrąg zwany **równoleżnikiem**. W przypadku gdy tworzącą jest odcinek (bądź łuk okręgu) jego końce określają **równoleżniki brzeżne**. Jeżeli koniec odcinka (lub łuku) należy do osi obrotu (jest biegunem), wówczas równoleżnik brzeżny degeneruje się do punktu. Równoleżniki powierzchni nie będące brzeżnymi nazywają się **równoleżnikami pośrednimi**. Punkt okręgu tworzącego powierzchnię pierścieniową lub sferyczną, leżący najdalej od osi obrotu określa **równoleżnik główny** (równik), a punkt jej najbliższy określa **równoleżnik szyjny**. Wykreślenie rzutów powierzchni obrotowej polega na wykreśleniu rzutów równoleżników brzeżnych (jeśli istnieją) oraz pewnej ilości równoleżników pośrednich. Wśród równoleżników pośrednich należy uwzględnić równoleżniki główne i szyjne, jeśli konstruowana powierzchnia je posiada. Brzegiem rzutu powierzchni obrotowej jest **obwiednia** rzutów wszystkich równoleżników.

## 8.2. Przekroje powierzchni i brył obrotowych

Jeżeli powierzchnia i płaszczyzna posiadają co najmniej jeden punkt wspólny, to zbiór takich punktów nazywamy **przekrojem powierzchni**. Przekrój powierzchni płaszczyzną prostopadłą do osi nazywa się **przekrojem poprzecznym** i jest nim okrąg będący równoleżnikiem lub okręgi współśrodkowe. Przekrój powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu nazywa się **przekrojem wzdłużnym**. Przekrój wzdłużny jest figurą symetryczną względem osi obrotu. Przekrój nie będący ani wzdłużnym, ani poprzecznym nazywa się **przekrojem ukośnym**. Przekrojami omówionych powierzchni obrotowych mogą być:

- powierzchni stożkowej: elipsa, parabola, hiperbola, punkt (wierzchołek powierzchni), prosta, dwie proste przecinające się w wierzchołku,
- powierzchni walcowej: elipsa, prosta, para prostych równoległych,
- hiperboloidy jednopowłokowej: elipsa, hiperbola, para przecinających się prostych,
- powierzchni sferycznej: okrąg lub punkt
- powierzchni pierścieniowych: dwa okręgi (lub ich fragmenty), okrąg i punkt, punkt, krzywe stopnia drugiego lub czwartego.

Aby skonstruować rzuty przekroju powierzchni lub bryły obrotowej należy:

- określić jaką krzywa powstaje w wyniku przekroju,
- skonstruować rzuty elementów, które jednoznacznie określają tą krzywą (o ile elementy takie występują),
- skonstruować rzuty punktów styczności przekroju do brzegu powierzchni,
- skonstruować rzuty punktów pośrednich krzywej tak, aby można ją było poprawnie wykreślić.



### 8.3. Treść problemów

#### Problem I. Przekroje walca płaszczyznami rzutującymi

Dany jest kartezjański prostokątny prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm, oraz związany z nim **układ rzutni Monge'a**  $(\pi_1, \pi_2)$ , gdzie  $\pi_1 = \{x, y\}$  jest rzutnią poziomą, a  $\pi_2 = \{z, x\}$  — rzutnią pionową. Ponadto dane są: **prosta**  $l = \{P, Q\}$ , nieprzynależny do niej **punkt**  $R$  oraz **płaszczyzny**  $\alpha = \{A, B, P\}$  i  $\beta = \{C, D, Q\}$ .

1. Wykreślić podstawowe rzuty Monge'a **bryły wypukłej** ograniczonej **obrotową powierzchnią walcową**  $\Sigma$  przechodzącą przez punkt  $R$ , której osią obrotu jest prosta  $l$  oraz płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$ .

Punkt  $O$  (początek układu współrzędnych) przyjąć w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że rzut osi  $x=x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

2. Ustalić **widoczność** bryły **we wszystkich konstruowanych rzutach** przy założeniu, że jest ona nieprzezroczysta. **Zakreskować** ścianę przekroju w rzutach, w których jest ona **widoczna**.

#### Problem II. Przekrój stożka płaszczyzną w położeniu ogólnym

Dany jest kartezjański prostokątny prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm, oraz związany z nim **układ rzutni Monge'a**  $(\pi_1, \pi_2)$ , gdzie  $\pi_1 = \{x, y\}$  jest rzutnią poziomą, a  $\pi_2 = \{z, x\}$  — rzutnią pionową. Ponadto dany jest stożek obrotowy  $\Sigma$ , w którym **wierzchołkiem** jest **punkt**  $W$ , **środkiem podstawy** — **punkt**  $S$ , natomiast  $T$  jest punktem leżącym **na powierzchni** stożka. Stożek  $\Sigma$  rozcięto płaszczyzną  $\phi = \{K, L, M\}$ .

1. **Metodą transformacji układu odniesienia** skonstruować rzuty Monge'a tej części rozciętego stożka, która ma **ścianę przekroju widoczną w rzucie pionowym**.

Przyjąć, że punkt  $O$  (początek układu współrzędnych) znajduje się w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego, oś  $x=x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome oraz zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

Wyznaczyć konstrukcyjnie wszystkie **punkty charakterystyczne** krzywej stanowiącej brzeg ściany przekroju: wierzchołki i punkty krzywej leżące na tworzących stożka, skrajnych w poszczególnych rzutach oraz wierzchołki konstruowanej bryły (o ile takie punkty istnieją).

2. Skonstruować rzut ściany przekroju, w którym zachowuje ona wszystkie swoje wymiary.

3. Ustalić **widoczność** powstałej bryły **we wszystkich konstruowanych rzutach** przy założeniu, że jest ona nieprzezroczysta. **Zakreskować** ścianę przekroju w rzutach, w których jest ona **widoczna**, oraz w rzucie zachowującym jej miarę

#### Informacje pomocnicze:

- **krawędzie niewidoczne** rysować **linią cienką kreskową**, **krawędzie widoczne** — **linią ciągłą grubą**; punkty oznaczać okręgami o średnicy 2 mm wykreślanymi **linią cienką ciągłą**; **nie zaczerniać ani nie przekreślać ich wewnątrz**; **konstrukcje pomocnicze** wykreślać **linią cienką ciągłą**,
- **zachować rozłączność wszystkich konstruowanych rzutów**,
- **elipsy aproksymować owalem** po uprzednim wyznaczeniu kierunków i długości osi (rozdział 1. problem I.); **nie oznaczać i nie opisywać** punktów oraz prostych wykorzystywanych w konstrukcji osi elipsy oraz owalu, **oznaczyć** natomiast punkty będące **końcami średnic sprzężonych i osi** elips,
- opisać **punkty dane w treści problemu** oraz (cyframi arabskimi) **punkty charakterystyczne** krzywej stanowiącej brzeg przekroju i **wierzchołki bryły**,
- widoczną w rzutach ścianę przekroju oraz rzut zachowujący jej miarę zakreskować ze stałą podziałką kreskowania 3 mm; zastosować we wszystkich rzutach ten sam kąt kreskowania równy  $45^\circ$  (ewentualnie  $135^\circ$ ); **kreskowanie wykonać linią ciągłą cienką!**

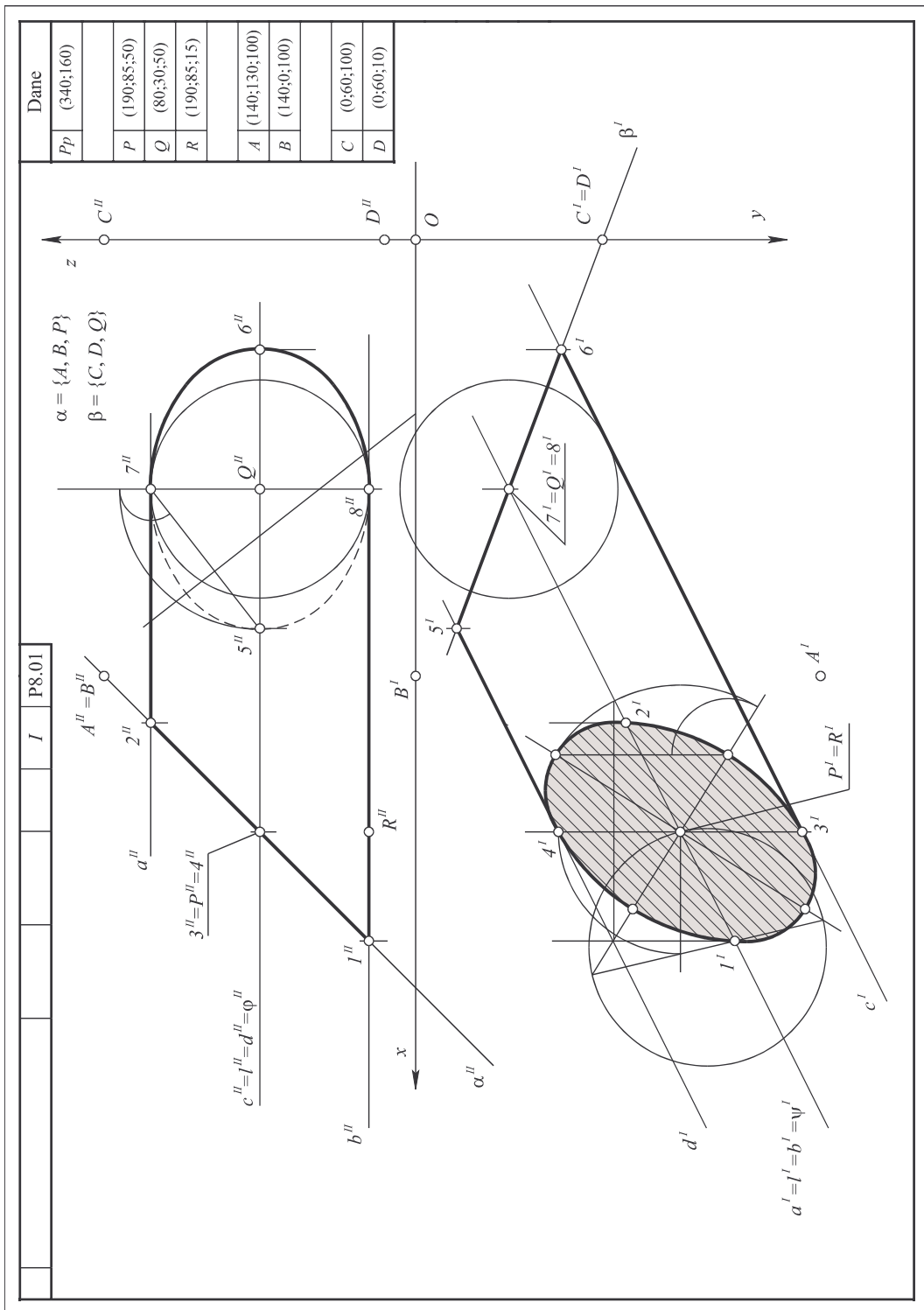
#### 8.4. Przykłady

##### Przykład 1. Zadanie P8.01. Problem I.

Dane	
$Pp$	(340; 160)
$P$	(190; 85; 50)
$Q$	(80; 30; 50)
$R$	(190; 85; 15)
$A$	(140; 130; 100)
$B$	(140; 0; 100)
$C$	(0; 60; 100)
$D$	(0; 60; 10)

#### Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności należy wykreślić rzuty powierzchni walcowej  $\Sigma$  i danych płaszczyzn. Do wykreślenia rzutów powierzchni  $\Sigma$  potrzebna jest znajomość położenia **osi** oraz **długości promienia**. W rozważanym przykładzie położenie osi określają punkty  $P$  i  $Q$ , zaś długość promienia jest równa  $\rho(P'', R'') = \rho(P, R)$ , gdyż odcinek  $PR$  — promień powierzchni — ma położenie pionowe. Pozwala to natychmiast wykreślić rzuty pionowe tworzących  $a$  i  $b$ , **skrajnych w rzucie pionowym**. Aby natomiast wyznaczyć rzuty poziome tworzących  $c$  i  $d$ , **skrajnych w rzucie poziomym**, wystarczy zauważyć, że są oddalone od rzutu poziomego osi  $l$  o odległość równą długości promienia powierzchni  $\Sigma$ .



Rys. 8.1. Rozwiązanie zadania P8.01

Ponieważ z danych do zadania wynika, że oś  $l$  jest równoległa do rzutni  $\pi_1$ , więc rzuty poziome tworzących  $a$  i  $b$  jednoczą się z rzutem poziomym osi  $l$ , zaś rzuty pionowe tworzących  $c$  i  $d$  jednoczą się z jej rzutem pionowym. Z danych do zadania wynika ponadto, że płaszczyzna  $\alpha = \{A, B, P\}$  jest prostopadła do  $\pi_2$ , zaś  $\beta = \{C, D, Q\}$  — prostopadła do  $\pi_1$ , przy czym żadna z nich nie jest równoległa do osi  $l$ . Tym samym istnieją niepuste przekroje powierzchni  $\Sigma$  płaszczyznami  $\alpha$  oraz  $\beta$  i w obu przypadkach przekrojami są elipsy. Ponieważ płaszczyzny  $\varphi = \{c, d\}$  i  $\psi = \{a, b\}$  są do siebie prostopadłe, więc punkty przebicia płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  przez tworzące  $a, b, c, d$  są końcami średnic sprzężonych elips stanowiących rozważane przekroje powierzchni  $\Sigma$ . Przyjmijmy, że punkty  $1, 2, 3, 4$  są punktami przebicia płaszczyzny  $\alpha$  przez tworzące  $b, a, c, d$  odpowiednio. Odcinki  $1-2$  i  $3-4$  są średnicami sprzężonymi elipsy powstałej w przekroju płaszczyzną  $\alpha$ . Rzutem pionowym tej elipsy jest odcinek  $1''-2''$ , natomiast rzut poziomy jest elipsą, której osie należy wyznaczyć w oparciu o znaną konstrukcję. Mając kierunki i długości osi, należy tę elipsę aproksymować owalem (por. rozdział 1, problem I.).

Analogicznie postępuje się z przekrojem w płaszczyźnie  $\beta$ , z tą różnicą, że w tym przypadku średnice  $5''-6''$  i  $7''-8''$  są do siebie prostopadłe. Oznacza to, że są to jednocześnie osie elipsy drugiego przekroju.

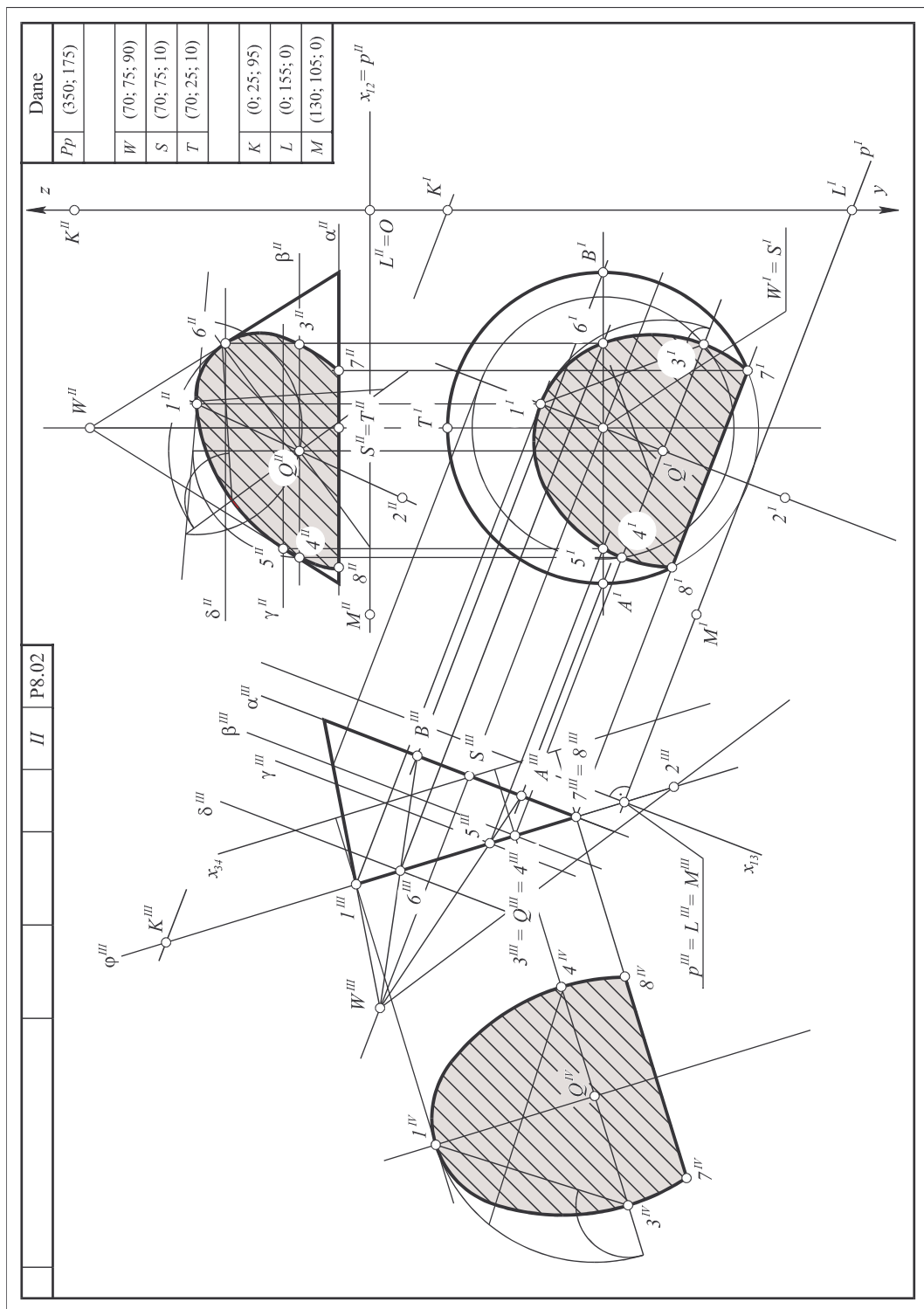
Po wyznaczeniu przekrojów powierzchni  $\Sigma$  płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$  można łatwo narysować rzuty bryły, o której mowa w treści problemu (rys. 8.1.). Ponieważ bryła leży **pod** płaszczyzną  $\alpha$  i **przed** płaszczyzną  $\beta$ , więc ściana przekroju płaszczyzną  $\alpha$  jest widoczna w rzucie poziomym, a ściana przekroju płaszczyzną  $\beta$  jest niewidoczna w rzucie pionowym. Zatem przesłoniętą przez powierzchnię bryły połowę elipsy należy narysować linią kreskową.

#### Przykład 2. Zadanie P8.02. Problem II.

Dane	
$Pp$	(350; 175)
$W$	(70; 75; 90)
$S$	(70; 75; 10)
$T$	(70; 25; 10)
$K$	(0; 25; 95)
$L$	(0; 155; 0)
$M$	(130; 105; 0)

#### Rozwiązanie:

Rozwiązanie należy rozpocząć od wykreślenia rzutów podstawowych stożka oraz rzutów punktów określających płaszczyznę  $\varphi$ . Ponieważ zadanie należy rozwiązać metodą transformacji układu odniesienia (patrz informacje pomocnicze), więc należy wprowadzić rzutnię  $\pi_3 \perp \varphi$ .



Rys. 8.2. Rozwiązanie zadania P8.02

W omawianym zadaniu płaszczyzna podstawy stożka (nazwijmy ją  $\alpha$ ) jest płaszczyzną poziomą. Rzut pionowy stożka jest trójkątem, zaś rzut poziomy — kołem. W takim przypadku najwygodniej jest wprowadzić rzutnię  $\pi_3$  prostopadłą do rzutni poziomej (rys. 8.2.).

Z danych do zadania wynika, że kierunek poziomy w płaszczyźnie  $\varphi$  określa prosta  $p = \{L, M\}$ , zatem po przyjęciu osi transformacji  $x_{13}$  prostopadłe do  $p^I$ , trzecim rzutem stożka jest trójkąt, zaś płaszczyzny  $\varphi$  — prosta. Brzegiem ściany przekroju jest figura złożona z fragmentu elipsy (część wspólna powierzchni stożka i płaszczyzny siecznej) oraz odcinka (części wspólnej płaszczyzny  $\varphi$  i podstawy stożka). Naturalną wielkość ściany przekroju otrzymuje się na rzutni  $\pi_4 \parallel \varphi$ , po przyjęciu osi transformacji  $x_{34} \parallel \varphi^{III}$ .

Aby wyznaczyć parametry elipsy, której fragment stanowi brzeg ściany przekroju, szukamy kierunków i długości jej osi. Dłuższa oś elipsy zachowuje miarę w rzucie trzecim (odcinek  $1^{III}-2^{III}$ ), zaś krótsza w rzucie poziomym. Krótszą oś wyznaczamy prowadząc płaszczyznę pomocniczą  $\beta$  prostopadłą do osi stożka, przechodzącą przez środek  $Q$  osi  $1-2$ . Przekrój powierzchni stożka tą płaszczyzną jest okręgiem równoległym do  $\pi_1$ . Punkty przecięcia tego okręgu z prostą prostopadłą do  $\pi_3$ , przechodzącą przez  $Q$ , wyznaczają końce mniejszej osi elipsy (punkty 3 i 4). Rzut poziomy dużej osi elipsy leży w płaszczyźnie symetrii stożka równoległej do rzutni trzeciej. Te informacje wystarczają do wykreślenia rzutów pierwszego i czwartego całej elipsy. Końce fragmentu elipsy będącego brzegiem ściany przekroju wyznacza się rozważając przekrój okręgu podstawy stożka płaszczyzną  $\varphi$ . Są to punkty opisane na rysunku jako 7 i 8. Brzegiem rzutu pionowego ściany przekroju jest elipsa, dla której odcinki  $1^{II}-2^{II}$  i  $3^{II}-4^{II}$  są średnicami sprzężonymi. Aby narysować jej rzut należy najpierw znaleźć kierunki i długości jej osi.

Na podstawie trzeciego rzutu wnioskujemy, że widoczną ścianę przekroju w rzucie pionowym ma część stożka, która nie zawiera wierzchołka  $W$ . Należy zatem narysować jej rzuty prostokątne. Do poprawnego ich wykreślenia potrzebna jest znajomość punktów wspólnych płaszczyzny siecznej i tworzących stożka, skrajnych w rzucie pionowym. **Punkty te wyznacza się w rzucie trzecim!**

## 8.5. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (220; 50; 85)$ ,  $Q = (110; 50; 30)$ ,  $R = (110; 15; 30)$ ,  $A = (185; 100; 10)$ ,  
 $B = (185; 10; 10)$ ,  $C = (60; 100; 130)$ ,  $D = (60; 100; 0)$ .
2.  $Pp = (340; 160)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 100; 60)$ ,  $R = (200; 60; 95)$ ,  $A = (140; 10; 0)$ ,  
 $B = (140; 150; 0)$ ,  $C = (50; 50; 60)$ ,  $D = (50; 50; 0)$ .
3.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 100)$ ,  $R = (100; 25; 100)$ ,  $A = (140; 60; 135)$ ,  
 $B = (140; 0; 135)$ ,  $C = (40; 0; 150)$ ,  $D = (40; 0; 10)$ .
4.  $Pp = (340; 160)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 100; 60)$ ,  $R = (200; 60; 95)$ ,  $A = (250; 110; 60)$ ,  
 $B = (250; 110; 0)$ ,  $C = (40; 150; 0)$ ,  $D = (40; 10; 0)$ .
5.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 100)$ ,  $Q = (100; 60; 60)$ ,  $R = (100; 25; 60)$ ,  $A = (140; 0; 10)$ ,  
 $B = (140; 0; 150)$ ,  $C = (140; 60; 135)$ ,  $D = (140; 0; 135)$ .
6.  $Pp = (340; 170)$ ,  $P = (190; 50; 50)$ ,  $Q = (80; 105; 50)$ ,  $R = (190; 50; 15)$ ,  $A = (240; 130; 100)$ ,  
 $B = (240; 0; 100)$ ,  $C = (115; 30; 100)$ ,  $D = (115; 30; 10)$ .

7.  $Pp = (340; 110)$ ,  $P = (220; 50; 105)$ ,  $Q = (110; 50; 50)$ ,  $R = (110; 15; 50)$ ,  $A = (185; 100; 30)$ ,  
 $B = (185; 10; 30)$ ,  $C = (60; 0; 130)$ ,  $D = (60; 0; 0)$ .
8.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (220; 50; 85)$ ,  $Q = (110; 50; 30)$ ,  $R = (110; 15; 30)$ ,  $A = (170; 0; 130)$ ,  
 $B = (170; 0; 0)$ ,  $C = (30; 100; 60)$ ,  $D = (30; 10; 60)$ .
9.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (220; 50; 30)$ ,  $Q = (110; 50; 85)$ ,  $R = (110; 15; 85)$ ,  $A = (300; 100; 60)$ ,  
 $B = (300; 10; 60)$ ,  $C = (60; 0; 50)$ ,  $D = (60; 0; 0)$ .
10.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 100)$ ,  $Q = (100; 60; 60)$ ,  $R = (100; 25; 60)$ ,  $A = (250; 60; 50)$ ,  
 $B = (250; 0; 50)$ ,  $C = (160; 0; 150)$ ,  $D = (160; 0; 10)$ .
11.  $Pp = (340; 160)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 100; 60)$ ,  $R = (200; 60; 95)$ ,  $A = (260; 10; 0)$ ,  
 $B = (260; 150; 0)$ ,  $C = (60; 50; 60)$ ,  $D = (60; 50; 0)$ .
12.  $Pp = (340; 160)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 100; 60)$ ,  $R = (200; 60; 95)$ ,  $A = (260; 10; 0)$ ,  
 $B = (260; 150; 0)$ ,  $C = (140; 25; 60)$ ,  $D = (140; 25; 0)$ .
13.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 100)$ ,  $Q = (100; 60; 60)$ ,  $R = (100; 25; 60)$ ,  $A = (140; 0; 10)$ ,  
 $B = (140; 0; 150)$ ,  $C = (50; 60; 120)$ ,  $D = (50; 0; 120)$ .
14.  $Pp = (340; 160)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 100; 60)$ ,  $R = (200; 60; 95)$ ,  $A = (160; 135; 60)$ ,  
 $B = (160; 135; 0)$ ,  $C = (160; 10; 0)$ ,  $D = (160; 150; 0)$ .
15.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 100)$ ,  $R = (100; 25; 100)$ ,  $A = (140; 60; 135)$ ,  
 $B = (140; 0; 135)$ ,  $C = (160; 0; 150)$ ,  $D = (160; 0; 10)$ .
16.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (220; 50; 105)$ ,  $Q = (110; 50; 50)$ ,  $R = (110; 15; 50)$ ,  $A = (300; 100; 75)$ ,  
 $B = (300; 10; 75)$ ,  $C = (60; 0; 130)$ ,  $D = (60; 0; 0)$ .
17.  $Pp = (340; 170)$ ,  $P = (190; 50; 50)$ ,  $Q = (80; 105; 50)$ ,  $R = (190; 50; 15)$ ,  $A = (140; 130; 100)$ ,  
 $B = (140; 0; 100)$ ,  $C = (115; 30; 100)$ ,  $D = (115; 30; 10)$ .
18.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (220; 50; 30)$ ,  $Q = (110; 50; 85)$ ,  $R = (110; 15; 85)$ ,  $A = (300; 100; 60)$ ,  
 $B = (300; 10; 60)$ ,  $C = (60; 100; 50)$ ,  $D = (60; 100; 0)$ .
19.  $Pp = (340; 170)$ ,  $P = (190; 105; 50)$ ,  $Q = (80; 50; 50)$ ,  $R = (190; 105; 15)$ ,  $A = (155; 30; 100)$ ,  
 $B = (155; 30; 10)$ ,  $C = (30; 130; 100)$ ,  $D = (30; 0; 100)$ .
20.  $Pp = (340; 160)$ ,  $P = (200; 100; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 60)$ ,  $R = (200; 100; 95)$ ,  $A = (260; 10; 0)$ ,  
 $B = (260; 150; 0)$ ,  $C = (140; 135; 60)$ ,  $D = (140; 135; 0)$ .
21.  $Pp = (340; 160)$ ,  $P = (200; 100; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 60)$ ,  $R = (200; 100; 95)$ ,  $A = (260; 10; 0)$ ,  
 $B = (260; 150; 0)$ ,  $C = (50; 110; 60)$ ,  $D = (50; 110; 0)$ .
22.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 100)$ ,  $R = (200; 25; 60)$ ,  $A = (250; 60; 110)$ ,  
 $B = (250; 0; 110)$ ,  $C = (160; 0; 150)$ ,  $D = (160; 0; 10)$ .
23.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 100)$ ,  $R = (200; 25; 60)$ ,  $A = (250; 60; 110)$ ,  
 $B = (250; 0; 110)$ ,  $C = (40; 0; 150)$ ,  $D = (40; 0; 10)$ .
24.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 100)$ ,  $R = (200; 25; 60)$ ,  $A = (240; 0; 10)$ ,  
 $B = (240; 0; 150)$ ,  $C = (140; 60; 25)$ ,  $D = (140; 0; 25)$ .
25.  $Pp = (340; 120)$ ,  $P = (200; 60; 60)$ ,  $Q = (100; 60; 100)$ ,  $R = (200; 25; 60)$ ,  $A = (140; 0; 10)$ ,  
 $B = (140; 0; 150)$ ,  $C = (140; 60; 25)$ ,  $D = (140; 0; 25)$ .

### Problem II

1.  $Pp = (350; 175)$ ,  $W = (70; 75; 90)$ ,  $S = (70; 75; 10)$ ,  $T = (70; 25; 10)$ ,  $K = (0; 40; 0)$ ,  
 $L = (0; 155; 65)$ ,  $M = (130; 105; 65)$ .
2.  $Pp = (350; 175)$ ,  $W = (70; 75; 10)$ ,  $S = (70; 75; 90)$ ,  $T = (70; 25; 90)$ ,  $K = (0; 25; 0)$ ,  
 $L = (0; 155; 95)$ ,  $M = (130; 105; 95)$ .

3.  $Pp = (150; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 25)$ ,  $K = (0; 0; 105)$ ,  
 $L = (130; 0; 155)$ ,  $M = (130; 95; 25)$ .
4.  $Pp = (150; 100)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 25)$ ,  $K = (140; 65; 170)$ ,  
 $L = (10; 65; 105)$ ,  $M = (140; 0; 40)$ .
5.  $Pp = (350; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 25)$ ,  $K = (0; 0; 160)$ ,  
 $L = (130; 0; 95)$ ,  $M = (0; 80; 60)$ .
6.  $Pp = (350; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 25)$ ,  $K = (130; 0; 125)$ ,  
 $L = (0; 85; 50)$ ,  $M = (0; 0; 160)$ .
7.  $Pp = (150; 175)$ ,  $W = (70; 75; 90)$ ,  $S = (70; 75; 10)$ ,  $T = (70; 25; 10)$ ,  $K = (10; 115; 80)$ ,  
 $L = (140; 40; 0)$ ,  $M = (140; 150; 80)$ .
8.  $Pp = (150; 175)$ ,  $W = (70; 75; 90)$ ,  $S = (70; 75; 10)$ ,  $T = (70; 25; 10)$ ,  $K = (10; 0; 60)$ ,  
 $L = (140; 65; 60)$ ,  $M = (10; 135; 0)$ .
9.  $Pp = (350; 175)$ ,  $W = (70; 75; 90)$ ,  $S = (70; 75; 10)$ ,  $T = (70; 25; 10)$ ,  $K = (0; 155; 95)$ ,  
 $L = (130; 105; 95)$ ,  $M = (0; 45; 0)$ .
10.  $Pp = (350; 175)$ ,  $W = (70; 75; 90)$ ,  $S = (70; 75; 10)$ ,  $T = (70; 125; 10)$ ,  $K = (130; 0; 60)$ ,  
 $L = (0; 65; 60)$ ,  $M = (130; 135; 0)$ .
11.  $Pp = (150; 175)$ ,  $W = (70; 75; 90)$ ,  $S = (70; 75; 10)$ ,  $T = (70; 125; 10)$ ,  $K = (140; 160; 85)$ ,  
 $L = (10; 95; 85)$ ,  $M = (140; 50; 0)$ .
12.  $Pp = (150; 175)$ ,  $W = (70; 75; 90)$ ,  $S = (70; 75; 10)$ ,  $T = (70; 125; 10)$ ,  $K = (10; 125; 0)$ ,  
 $L = (140; 50; 85)$ ,  $M = (140; 160; 0)$ .
13.  $Pp = (150; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (10; 0; 125)$ ,  
 $L = (140; 85; 50)$ ,  $M = (140; 0; 160)$ .
14.  $Pp = (350; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (130; 80; 115)$ ,  
 $L = (0; 0; 40)$ ,  $M = (0; 80; 150)$ .
15.  $Pp = (350; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (0; 80; 50)$ ,  
 $L = (130; 0; 115)$ ,  $M = (0; 0; 150)$ .
16.  $Pp = (150; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (140; 85; 160)$ ,  
 $L = (10; 85; 90)$ ,  $M = (140; 0; 50)$ .
17.  $Pp = (150; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (140; 0; 160)$ ,  
 $L = (10; 0; 95)$ ,  $M = (140; 80; 60)$ .
18.  $Pp = (350; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (0; 65; 170)$ ,  
 $L = (130; 65; 105)$ ,  $M = (0; 0; 40)$ .
19.  $Pp = (350; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (130; 60; 0)$ ,  
 $L = (0; 60; 65)$ ,  $M = (130; 0; 135)$ .
20.  $Pp = (150; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (140; 95; 155)$ ,  
 $L = (10; 95; 105)$ ,  $M = (140; 0; 45)$ .
21.  $Pp = (150; 110)$ ,  $W = (70; 90; 75)$ ,  $S = (70; 10; 75)$ ,  $T = (70; 10; 125)$ ,  $K = (140; 0; 155)$ ,  
 $L = (10; 0; 105)$ ,  $M = (140; 90; 25)$ .
22.  $Pp = (350; 175)$ ,  $W = (70; 75; 10)$ ,  $S = (70; 75; 90)$ ,  $T = (70; 25; 90)$ ,  $K = (130; 125; 100)$ ,  
 $L = (0; 50; 15)$ ,  $M = (0; 160; 100)$ .
23.  $Pp = (350; 110)$ ,  $W = (70; 10; 75)$ ,  $S = (70; 90; 75)$ ,  $T = (70; 90; 25)$ ,  $K = (130; 100; 125)$ ,  
 $L = (0; 15; 50)$ ,  $M = (0; 100; 160)$ .
24.  $Pp = (150; 175)$ ,  $W = (70; 75; 10)$ ,  $S = (70; 75; 90)$ ,  $T = (70; 25; 90)$ ,  $K = (0; 125; 100)$ ,  
 $L = (130; 50; 15)$ ,  $M = (130; 160; 100)$ .
25.  $Pp = (150; 110)$ ,  $W = (70; 10; 75)$ ,  $S = (70; 90; 75)$ ,  $T = (70; 90; 25)$ ,  $K = (0; 100; 125)$ ,  
 $L = (130; 15; 50)$ ,  $M = (130; 100; 160)$ .



## 9. Przenikania brył

### 9.1. Modelowanie brył

Bryły o złożonym kształcie geometrycznym modeluje się poprzez kolejne modyfikacje brył o kształtach podstawowych (wielościanów, brył obrotowych itp.). Mają tu zastosowanie znane z algebry zbiorów operacje **sumy**, **różnicy** oraz **iloczynu**. Wykonanie każdej z tych operacji na dowolnych bryłach wymaga rozwiązania zagadnienia zwanego **przenikaniem brył**. Sprowadza się ono przede wszystkim do wyznaczenia tzw. **linii przenikania** powierzchni brył modyfikowanych oraz ustalenia ostatecznego kształtu bryły będącej wynikiem przeprowadzonej operacji.

**Linia przenikania** dwu (lub więcej) powierzchni nazywa się zbiór ich punktów wspólnych. Zazwyczaj jest to pewna krzywa przestrzenna o skomplikowanym, nieelementarnym kształcie. Aby wykreślić rzuty linii przenikania należy wyznaczyć **punkty charakterystyczne** jej rzutów oraz pewną liczbę tzw. **punktów pośrednich**, a następnie połączyć je w odpowiedniej kolejności. Do punktów charakterystycznych rzutów linii przenikania należą:

- punkty styczności rzutów linii przenikania i rzutów brzegów przenikających się powierzchni,
- ekstrema lokalne, punkty przegięcia, lokalne maksimum i minima krzywizny,
- **punkty osobliwe** krzywej (np. punkty jej samoprzecięcia),
- punkty o największej i najmniejszej głębokości (**najbliższy** i **najdalszy**) oraz punkty o największej i najmniejszej wysokości (**najwyższy** i **najniższy**, jeśli zagadnienie przenikania rozwiązuje się metodą Monge'a).

Punktami pośrednimi linii przenikania nazywa się punkty, które nie są jej punktami charakterystycznymi. Kolejność występowania punktów na krzywej jest lokalnym niezmiennikiem rzutowania. Oznacza to, że kolejność połączeń rzutów punktów lokalnie musi być zgodna z kolejnością połączeń tych punktów w przestrzeni.

Punktów charakterystycznych linii przenikania należy poszukiwać przede wszystkim w płaszczyznach symetrii poszczególnych powierzchni oraz w płaszczyznach symetrii złożenia (o ile takie płaszczyzny występują). Do wyznaczenia zarówno punktów charakterystycznych jak i pośrednich należy stosować typowe konstrukcje geometryczne. Jeśli nie istnieje konstrukcja teoretycznie dokładna wyznaczania danego punktu charakterystycznego lub konstrukcja taka posiada zbyt duży stopień skomplikowania, to należy wówczas zastosować konstrukcję przybliżoną, wyznaczając odpowiednią liczbę punktów pośrednich i na ich podstawie aproksymując dany fragment krzywej.

## 9.2. Przenikania brył - metody wykreślne

Rozwiązanie zagadnienia przenikania brył metodami geometrii wykreślnej polega na wyznaczeniu rzutów linii przenikania powierzchni będących brzegiem tych brył oraz na wyznaczeniu rzutów bryły wynikowej i określeniu jej widoczności. Niezależnie od rodzaju wykonywanej operacji (wyznaczenia sumy, różnic lub iloczynu brył) linia przenikania jest zawsze tą samą krzywą. Rodzaj operacji wpływa jedynie na jej widoczność w rzutach.

Wykreślne metody wyznaczania linii przenikania powierzchni brył opierają się na tzw. **uogólnionej metodzie przekrojów**. Metoda ta jest konsekwencją znanej własności iloczynu zbiorów, która mówi, że *część wspólna dwu zbiorów zawiera zawsze część wspólną dowolnych podzbiorów tych zbiorów*. (W zapisie formalnym wymienioną własność wyraża implikacja: jeśli  $\Gamma \subset \Xi$  i  $\Delta \subset \Theta$ , to  $(\Gamma \cap \Delta) \subset (\Xi \cap \Theta)$ .) Rozważanymi podziorami przenikających się powierzchni mogą być np.:

- przekroje **płaszczyznami** (tzw. metoda płaszczyzn siecznych),
- przekroje **powierzchniami sferycznymi** (tzw. metoda sfer),
- przekroje **powierzchniami walcowymi**.

Najbardziej uniwersalną jest metoda płaszczyzn siecznych. Płaszczyzny tnące należy tak dobrać, aby rzutami przekrojów były proste lub okręgi (bądź ich fragmenty). Metodą przekrojów można wyznaczać zarówno punkty charakterystyczne jak i punkty pośrednie rzutów linii przenikania.

Warto pamiętać, że linie przenikania **powierzchni zamkniętych** (np.: brzegów brył) są zawsze krzywymi zamkniętymi, przy czym w zależności od wzajemnego położenia przenikających się brył, linię może stanowić jedna krzywa zamknięta albo dwie i więcej. Linią przenikania dwóch kul jest zawsze okrąg, którego rzutami (w zależności od położenia prostej łączącej ich środki) mogą być: odcinek, okrąg, elipsa. Jeśli rzutem linii przenikania jest elipsa, w celu jej wykreślenia należy znaleźć kierunki i długości jej osi (lub inne parametry określające ją w sposób jednoznaczny).

W przypadku rozwiązywania w rzutach Monge'a zagadnień przenikania typowych brył obrotowych: walca, stożka, kuli lub torusa, których osie są prostopadłe lub równoległe do rzutni, w metodzie płaszczyzn siecznych należy rozważać płaszczyzny poziome lub czołowe oraz niektóre płaszczyzny poziomo i pionowo rzutujące. Rozwiązywanie zadania należy rozpoczynać od wyznaczenia punktów charakterystycznych. W pierwszej kolejności należy wyznaczyć punkty: najwyższy, najniższy, najbliższy i najdalszy (dokonując w razie potrzeby kładów prostokątnych odpowiednich płaszczyzn symetrii). Płaszczyzny poziome przeprowadzone przez punkty najwyższy i najniższy oraz czołowe przechodzące przez punkty najbliższy i najdalszy, ograniczają odpowiednio obszary rzutni pionowej i poziomej, w których mieszczą się rzuty linii przenikania. Tym samym ułatwiają wprowadzanie dalszych płaszczyzn potrzebnych do wyznaczania punktów pośrednich. Nie ma jednoznacznych reguł określających zarówno liczbę koniecznych płaszczyzn pomocniczych jak też ich rozmieszczenie w obszarze zawierającym rzut linii przenikania. Ich liczba wystarczająca praktycznie do określenia przebiegu krzywej wynosi 5. Można rozmieszczać je równomiernie ze stałą podziałką, niemniej zaleca się „zagęszczać” płaszczyzny tam, gdzie krzywizna linii przenikania jest większa.

### 9.3. Treść problemu

#### Problem I. Otwór walcowy w stożku

Dany jest kartezjański prostokątny prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm, oraz związany z nim **układ rzutni Monge'a**  $(\pi_1, \pi_2)$ , gdzie  $\pi_1 = \{x, y\}$  jest rzutnią poziomą, a  $\pi_2 = \{z, x\}$  — rzutnią pionową.

Ponadto dany jest **stożek obrotowy**  $\Sigma$  o wierzchołku w punkcie  $W$ , środku podstawy w punkcie  $S$ , którego powierzchnia boczna przechodzi przez punkt  $T$ . W stożku  $\Sigma$  wykonano **przelotowy otwór walcowy**, w taki sposób, że osią otworu jest prosta  $l = \{P, Q\}$ , zaś dany punkt  $A \in \Sigma$  leży na powierzchni otworu.

**1. Skonstruować rzuty Monge'a** stożka  $\Sigma$  z wykonanym otworem. Punkt  $O$  (początek układu współrzędnych) przyjąć w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego. Przyjąć ponadto, że oś  $x = x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”.

**2. Ustalić widoczność otrzymanej bryły** we wszystkich konstruowanych rzutach, zakładając, że jest wykonana z materiału nieprzezroczystego.

#### Informacje pomocnicze:

- krawędzie **niewidoczne** rysować linią **cienną kreskową**, krawędzie **widoczne** — linią **ciągłą grubą**; punkty oznaczać **okręgami** o średnicy 2 mm wykreślanymi linią cienką ciągłą; **nie zaczerniać** ani nie **przekreślać** ich wnętrza; konstrukcje pomocnicze wykreślać linią cienką ciągłą,
- **zachować rozłączność wszystkich konstruowanych rzutów**,
- oznaczyć i opisać **punkty dane w treści problemu**,
- wyznaczyć konstrukcyjnie, oznaczyć i opisać (liczbami zapisanymi cyframi arabskimi) **punkty charakterystyczne linii przenikania** powierzchni stożka i powierzchni otworu,
- nie opisywać **punktów pośrednich** linii przenikania,
- linię przenikania narysować odręcznie, wyznaczając uprzednio odpowiednią liczbę punktów pośrednich!

## 9.4. Przykładowe rozwiązanie

**Przykład. Zadanie P9.01. Problem I.**

Dane	
$Pp$	(240; 160)
$W$	(100; 80; 95)
$S$	(100; 80; 20)
$T$	(160; 80; 20)
$P$	(90; 100; 105)
$Q$	(90; 100; 0)
$A$	(120; 100; 20)

### Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności należy wykreślić rzuty podstawowe stożka  $\Sigma$  oraz powierzchni walcowej, której fragment będzie powierzchnią wykonanego otworu. W omawianym przykładzie (rys. 9.1.) oś symetrii stożka oraz oś otworu są prostymi równoległymi. W takim położeniu powierzchnia walcowa ma punkty wspólne zarówno z powierzchnią boczną (**poboczną**) stożka jak i z jego podstawą.

Zbiór punktów wspólnych powierzchni nazywa się **linią przenikania**. W przyjętej sytuacji linia przenikania składa się z dwóch krzywych zamkniętych nie posiadających punktów wspólnych (tzw. przenikanie zupełne): **okręgu** powstałego w przekroju powierzchni otworu płaszczyzną  $\alpha$  podstawy stożka, oraz pewnej **krzywej przestrzennej**, leżącej na powierzchni bocznej stożka, przy czym w rzucie poziomym obie krzywe jednoczą się z rzutem poziomym powierzchni walcowej. Rzutem pionowym okręgu leżącego w płaszczyźnie podstawy jest odcinek  $A''B''$ , natomiast okrąg ma środek w punkcie  $C$  (punkcie wspólnym osi  $l$  i płaszczyzny  $\alpha$ ), zaś odcinek  $AB$  jest jego średnicą ( $A$  i  $B$  są punktami przebicia podstawy przez tworzące  $a$  i  $b$ ).

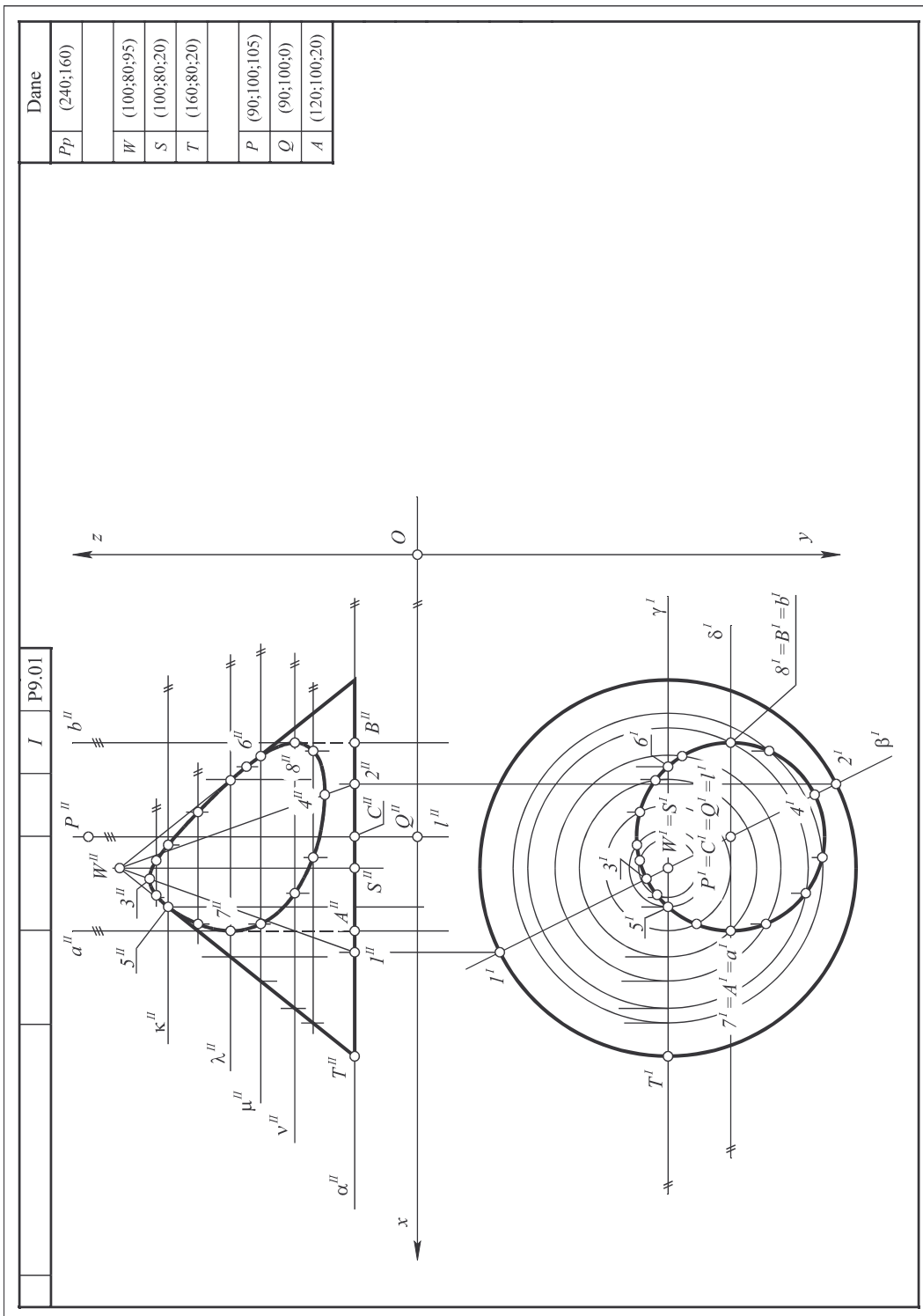
Drugi fragment linii przenikania (krzywa na powierzchni stożka) nie jest krzywą o znanych własnościach. W celu jej wykreślenia należy zastosować sposób postępowania przypominający procedurę badania przebiegu zmienności funkcji. Należy wyznaczyć pewien zbiór punktów tak, aby można było w sposób przybliżony naszkicować jej kształt. W tym celu w pierwszej kolejności wyznacza się tzw. **punkty charakterystyczne**, które zawierają najwięcej informacji o kształcie krzywej bądź jej rzutu, natomiast później wykorzystuje się tzw. **punkty pośrednie** (punkty, które nie są charakterystyczne). Do punktów charakterystycznych zalicza się **punkty o największej i najmniejszej wysokości**, **punkty o największej i najmniejszej głębokości**, **punkty styczności krzywej do zarysów rzutów** itp. W omawianym przykładzie punktami charakterystycznymi krzywej są punkty **najwyższy i najniższy**, leżące w płaszczyźnie  $\beta$  symetrii złożenia brył, **punkty styczności do tworzących stożka** skrajnych w rzucie pionowym, leżące w równoległej do rzutni  $\pi_2$  płaszczyźnie  $\gamma$  symetrii stożka, **punkty styczności do tworzących powierzchni walcowej** skrajnych w rzucie pionowym, leżące w równoległej do rzutni  $\pi_2$  płaszczyźnie  $\delta$  symetrii powierzchni walcowej.

Punkty linii przenikania wyznacza się stosując różne warianty tzw. **metody przekrojów**. Punkty linii przenikania w płaszczyźnie  $\beta$  znaleziono rozważając przekrój stożka i przekrój powierzchni walcowej. Płaszczyzna  $\beta$  kroi stożek w trójkącie  $1-2-W$ , natomiast powierzchnię walcową — w dwóch tworzących, których rzuty poziome są punktami przecięcia prostej  $\beta'$  i okręgu będącego rzutem poziomym powierzchni walcowej. Punkty wspólne tych tworzących i trójkąta  $1-2-W$  wyznaczają **punkt najwyższy 3** i **punkt najniższy 4** drugiej krzywej linii przenikania. W analogiczny sposób znajduje się punkty leżące w płaszczyźnie  $\gamma$ . Są to punkty 5 i 6 styczności linii przenikania do tworzących stożka, skrajnych w rzucie pionowym. Punkty te są potrzebne, aby prawidłowo narysować rzut pionowy powstałej bryły (odcinki  $5-W$  i  $6-W$  znajdują się w obszarze otworu, zatem nie należą do ostatecznej bryły). Tą samą metodą można znaleźć punkty 7 i 8 linii przenikania w płaszczyźnie  $\delta$ . Można jednak zastosować nieco inne rozumowanie. Chcąc znaleźć np. punkt wspólny powierzchni stożka i tworzącej  $a$ , prowadzimy przez tę prostą pomocniczą powierzchnię walcową współosiową ze stożkiem. Linia przenikania tej powierzchni z poboczną stożka jest okrąg leżący w płaszczyźnie  $\lambda$ . Punkt 7, wspólny dla okręgu i tworzącej  $a$  jest punktem przebicia pobocznic stożka przez prostą  $a$ . Podobne rozważania przeprowadzone w przypadku tworzącej  $b$  pozwalają otrzymać punkt 8. Punkty 7 i 8 są punktami styczności linii przenikania z tworzącymi powierzchni walcowej, skrajnymi w rzucie pionowym. Są one potrzebne do prawidłowego narysowania zarysów brzegu otworu w stożku (odcinki  $A-7$  oraz  $B-8$ ).

Punktami pośrednimi, które w pierwszej kolejności należy wyznaczyć, to punkty leżące w płaszczyznach poziomych  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , które przechodzą przez punkty charakterystyczne 5, 7, 6 i 8. Punkty pośrednie wyznacza się rozważając przekroje złożenia wymienionymi płaszczyznami. W celu dokładniejszego wykreślenia krzywej należy wprowadzić jeszcze kilka dodatkowych pomocniczych płaszczyzn siecznych (równoległych do  $\pi_1$ ) w miejscach, gdzie jest duża krzywizna linii przenikania bądź gdzie odległości pomiędzy wyznaczonymi wcześniej kolejnymi punktami krzywej są zbyt duże.

Wyznaczone punkty linii przenikania łączy się zgodnie z kolejnością ich występowania na krzywej (kolejność ta zachowuje się w rzucie poziomym).

Mając znalezione rzuty linii przenikania, można narysować rzuty stożka z wykonanym otworem. W rzucie poziomym widoczny jest brzeg podstawy stożka i górna część linii przenikania. W rzucie pionowym widoczny brzeg rzutu stanowi podstawa stożka, fragmenty tworzących i część linii przenikania od punktu 5 do punktu 6. Ponadto widoczna jest także pozostała część linii przenikania. Liniami niewidocznymi w tym rzucie są skrajne tworzące otworu — odcinki  $7-A$  i  $8-B$ .



Rys. 9.1. Rozwiązanie zadania P9.01

## 9.5. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (110; 60; 105)$ ,  
 $Q = (110; 60; 0)$ ,  $A = (140; 60; 20)$ .
2.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (80; 150; 60)$ ,  
 $Q = (80; 10; 60)$ ,  $A = (110; 80; 70)$ .
3.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 20)$ ,  $S = (100; 80; 95)$ ,  $T = (160; 80; 95)$ ,  $P = (80; 150; 70)$ ,  
 $Q = (80; 10; 70)$ ,  $A = (110; 80; 70)$ .
4.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (100; 60; 105)$ ,  
 $Q = (100; 60; 0)$ ,  $A = (130; 60; 20)$ .
5.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (100; 95; 105)$ ,  
 $Q = (100; 95; 0)$ ,  $A = (130; 95; 20)$ .
6.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (100; 105; 105)$ ,  
 $Q = (100; 105; 0)$ ,  $A = (130; 105; 20)$ .
7.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (95; 90; 105)$ ,  
 $Q = (95; 90; 0)$ ,  $A = (125; 90; 20)$ .
8.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (105; 90; 105)$ ,  
 $Q = (105; 90; 0)$ ,  $A = (135; 90; 20)$ .
9.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (105; 70; 105)$ ,  
 $Q = (105; 70; 0)$ ,  $A = (135; 70; 20)$ .
10.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (85; 50; 105)$ ,  
 $Q = (85; 50; 0)$ ,  $A = (115; 50; 20)$ .
11.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (115; 50; 105)$ ,  
 $Q = (115; 50; 0)$ ,  $A = (145; 50; 20)$ .
12.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (85; 60; 105)$ ,  
 $Q = (85; 60; 0)$ ,  $A = (115; 60; 20)$ .
13.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (115; 60; 105)$ ,  
 $Q = (115; 60; 0)$ ,  $A = (145; 60; 20)$ .
14.  $Pp = (240; 160)$ ,  $W = (100; 80; 95)$ ,  $S = (100; 80; 20)$ ,  $T = (160; 80; 20)$ ,  $P = (95; 60; 105)$ ,  
 $Q = (95; 60; 0)$ ,  $A = (125; 60; 20)$ .
15.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (100; 105; 60)$ ,  
 $Q = (100; 0; 60)$ ,  $A = (130; 20; 60)$ .
16.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (100; 105; 65)$ ,  
 $Q = (100; 0; 65)$ ,  $A = (130; 20; 65)$ .
17.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (100; 105; 55)$ ,  
 $Q = (100; 0; 55)$ ,  $A = (130; 20; 55)$ .
18.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (95; 105; 70)$ ,  
 $Q = (95; 0; 70)$ ,  $A = (125; 20; 70)$ .
19.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (105; 105; 90)$ ,  
 $Q = (105; 0; 90)$ ,  $A = (135; 20; 90)$ .
20.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (105; 105; 70)$ ,  
 $Q = (105; 0; 70)$ ,  $A = (135; 20; 70)$ .

21.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (85; 105; 110)$ ,  
 $Q = (85; 0; 110)$ ,  $A = (115; 20; 110)$ .
22.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (115; 105; 50)$ ,  
 $Q = (115; 0; 50)$ ,  $A = (145; 20; 50)$ .
23.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (85; 105; 60)$ ,  
 $Q = (85; 0; 60)$ ,  $A = (115; 20; 60)$ .
24.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (115; 105; 100)$ ,  
 $Q = (115; 0; 100)$ ,  $A = (145; 20; 100)$ .
25.  $Pp = (240; 130)$ ,  $W = (100; 95; 80)$ ,  $S = (100; 20; 80)$ ,  $T = (160; 20; 80)$ ,  $P = (95; 105; 100)$ ,  
 $Q = (95; 0; 100)$ ,  $A = (125; 20; 100)$ .



## 10. Wybór problemów

### 10.1. Treść problemów

Dany jest kartezjański prostokątny, prawoskrętny **układ współrzędnych**  $Oxyz$ , w którym odcinki jednostkowe na wszystkich osiach mają długość 1 mm, oraz związany z nim **układ rzutni Monge'a**  $(\pi_1, \pi_2)$ , gdzie  $\pi_1 = \{x, y\}$  jest rzutnią poziomą, a  $\pi_2 = \{z, x\}$  — rzutnią pionową.

#### Problem I. Ośmiościan foremny

Dana jest prosta  $a = \{M, N\}$  i punkt  $A$  nieleżący na niej. Punkt  $A$  jest wierzchołkiem **ośmiościanu foremnego**  $ABCDEFGF$  o przekątnych  $AB$ ,  $CD$  i  $EF$ . Skonstruować rzuty Monge'a tego ośmiościanu wiedząc, że wierzchołki  $C$  i  $E$  leżą na prostej  $a$ . Przyjąć dodatkowo, że wierzchołek  $C$  ma **niemniejszą głębokość** niż wierzchołek  $E$ , a ściana  $ACE$  jest **widoczna w rzucie poziomym**. Ustalić widoczność ośmiościanu we wszystkich konstruowanych rzutach przy założeniu, że wielościan jest wykonany z materiału nieprzezroczystego.

#### Problem II. Sześcián

Dane są punkty  $B, H, K$  i  $L$ . Odcinek  $BH$  jest **przekątną sześciánu**, którego ścianami są kwadraty  $ABCD$  i  $EFGH$ , zaś pozostałymi krawędziami — odcinki  $AE, BF, CG, DH$ . Skonstruować rzuty Monge'a tego sześciánu wiedząc, że wierzchołek  $A$  leży w płaszczyźnie  $\alpha = \{B, K, L\}$ , zaś wierzchołek  $C$  ma **głębokość niemniejszą** niż wierzchołek  $G$ . Ustalić widoczność bryły we wszystkich konstruowanych rzutach przyjmując, że jest ona nieprzezroczysta.

#### Problem III. Z geometrii czworościanu

Dane niewspółpłaszczyznowe punkty  $A, B, C$  i  $D$  są wierzchołkami czworościanu. Metodą Monge'a skonstruować rzuty tego czworościanu, w których zachowane są:

- odległość i kąt pomiędzy prostymi  $a = \{A, B\}$  i  $b = \{C, D\}$ ;
- kąt pomiędzy płaszczyznami  $\alpha = \{A, B, C\}$  i  $\beta = \{B, C, D\}$ ;
- kąt pomiędzy prostą  $a = \{A, B\}$  i płaszczyzną  $\beta = \{B, C, D\}$ ;
- odległość wierzchołka  $C$  od płaszczyzny  $\gamma = \{A, B, D\}$ .

Ustalić widoczność czworościanu we **wszystkich** wykreślonych rzutach.

#### Problem IV. Punkty przebiecia stożka prostą

Dane są niewspółliniowe punkty  $W, S, T$  oraz proste  $a = \{K, L\}$  i  $b = \{M, N\}$ . Punkt  $W$  jest wierzchołkiem **stożka obrotowego**  $\Sigma$ , punkt  $S$  — środkiem jego podstawy, zaś  $T$  — punktem na jego powierzchni bocznej. Proste  $a$  i  $b$  przebijają ten stożek odpowiednio w punktach  $A, B, C, D$  w taki sposób, że  $a \cap \Sigma = \{A, B\}$ ,  $b \cap \Sigma = \{C, D\}$ . Metodą Monge'a wyznaczyć punkty przebiecia i ustalić widoczność prostych względem stożka we wszystkich skonstruowanych rzutach. Przyjąć, że materiał stożka jest nieprzezroczysty.

#### Problem V. Otwór walcowy w graniastostupie

Dane są punkty  $A, B, C, D$  i  $T$  oraz prosta  $l = \{P, Q\}$ . W graniastostupie, którego podstawami są trójkąty  $ABC$  i  $DEF$ , zaś krawędziami bocznymi odcinki  $AD, BE$  i  $CF$  wykonano przelotowy otwór walcowy o osi  $l$  w taki sposób, że powierzchnia otworu przechodzi przez punkt  $T$ . Narysować rzuty Monge'a bryły z wykonanym otworem, wyznaczając uprzednio jej **wszystkie wierzchołki**. Ustalić widoczność bryły we wszystkich konstruowanych rzutach przy założeniu, że jest ona nieprzezroczysta.

#### Problem VI. Część wspólna graniastostupa i kuli

Dane są punkty  $S$  i  $T$  oraz  $A, B, C, D$ . Punkt  $S$  jest środkiem kuli  $\Gamma$ , której powierzchnia przechodzi przez punkt  $T$ . Graniastostup, którego podstawami są trójkąty  $ABC$  oraz  $DEF$ , zaś krawędziami bocznymi odcinki  $AD, BE, CF$ , wycina z kuli  $\Gamma$  pewien fragment materiału. Narysować rzuty Monge'a bryły stanowiącej część wspólną kuli i graniastostupa. **Wyznaczyć** konstrukcyjnie **wszystkie wierzchołki** tej bryły (o ile takie punkty istnieją). Ustalić widoczność bryły we wszystkich rzutach wiedząc, że jest ona nieprzezroczysta.

#### Problem VII. Przekrój sześciianu

Punkty  $A, B, C$  są wierzchołkami sześciianu  $ABCDEFGH$  o krawędziach  $AB, BC, CD, AD, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, EH$ , w którym wierzchołek  $E$  ma większą wysokość niż wierzchołek  $A$ . Sześciian ten rozcięto na dwie części płaszczyzną  $\varphi = \{K, L, M\}$ . Narysować rzuty Monge'a części zawierającej wierzchołek  $B$ . Ustalić widoczność tej bryły we wszystkich konstruowanych rzutach przyjmując, że jest ona nieprzezroczysta.

#### Problem VIII. Przekroje stożka

Dany jest **stożek obrotowy**  $\Sigma$  o wierzchołku w punkcie  $W$ , środku podstawy w punkcie  $S$ , którego powierzchnia boczna przechodzi przez punkt  $T$ . Stożek rozcinaemy płaszczyznami  $\alpha = \{A, B, C\}$ ,  $\beta = \{B, C, D\}$ ,  $\gamma = \{D, E, F\}$ . Narysować rzuty Monge'a wypukłej części stożka, która zawiera punkt  $T$ . Ustalić widoczność bryły we wszystkich konstruowanych rzutach zakładając, że jest ona nieprzezroczysta.

### **Problem IX. Otwór walcowy w kuli**

Dana jest kula o środku w punkcie  $S$ , której powierzchnia przechodzi przez punkt  $T$ . W tej kuli wykonano przelotowy otwór walcowy o osi  $l = \{P, Q\}$  tak, że jego powierzchnia przechodzi przez punkt  $A$ . Narysować rzuty Monge'a kuli z wykonanym otworem. Ustalić widoczność bryły we wszystkich rzutach przy założeniu, że jest ona nieprzezroczysta.

### **Problem X. Sfera opisana na czworościanie**

Dany jest czworościan  $ABCD$ . Metodą Monge'a skonstruować sferę opisaną na tym czworościanie. Ustalić widoczność zakładając, że sfera jest przezroczysta, zaś czworościan nie jest.

### **Problem XI. Czworoscian foremny i prosta**

Narysować rzuty Monge'a czworoscianu foremnego  $ABCD$ , jeżeli jego ściana  $ABC$  leży na rzutni  $\pi_1$ , wierzchołek  $C$  ma większą głębokość niż  $B$ , zaś wierzchołek  $D$  ma dodatnią wysokość. Wyznaczyć punkty przebicia  $P, Q$  tego czworoscianu prostą  $a = \{M, N\}$  i określić widoczność prostej na tle bryły.

### **Problem XII. Sześciąt i prosta**

Narysować rzuty Monge'a sześciąt  $ABCDEFGH$ , jeżeli kwadrat  $ABCD$  jest jego ścianą, zaś wierzchołki  $E, F, G$  i  $H$  mają dodatnią wysokość. Wyznaczyć punkty przebicia  $P, Q$  tego sześciąt prostą  $a = \{M, N\}$  i określić widoczność prostej na tle bryły.

### **Problem XIII. Przebiecie walca prostą**

Narysować rzuty Monge'a walca obrotowego, którego środkami podstaw są punkty  $A$  i  $B$ , a punkt  $C$  leży na jego powierzchni bocznej. Wyznaczyć punkty przebicia  $P, Q$  tego walca prostą  $a = \{M, N\}$  i określić widoczność prostej na tle bryły.

### **Problem XIV. Rzuty stożka obrotowego**

Narysować rzuty Monge'a stożka obrotowego, którego wierzchołkiem jest punkt  $W$ , środkiem podstawy punkt  $S$ , a punkt  $T$  jest punktem leżącym na powierzchni bocznej.

### **Problem XV. Sfera i proste**

Dana jest nieprzezroczysta sfera o środku  $S$  przechodząca przez punkt  $A$ . Sferę tą przebijają proste  $a = \{A, B\}$  i  $b = \{C, D\}$ . Metodą Monge'a skonstruować punkty  $M, N, P, Q$ , w których proste  $a$  i  $b$  przebijają powierzchnię sfery. Określić widoczność obu prostych na tle bryły.

### Informacje pomocnicze:

- początek układu współrzędnych (punkt  $O$ ) przyjmować w punkcie początkowym  $Pp$  arkusza rysunkowego; oś  $x=x_{12}$  ma na arkuszu położenie poziome i zwrot w lewą stronę, oś  $y$  — położenie pionowe i zwrot „w dół”, oś  $z$  — położenie pionowe i zwrot „w górę”,
- **krawędzie niewidoczne** rysować **linią cienką kreskową**, **krawędzie widoczne** — **linią ciągłą grubą**; punkty oznaczać okręgami o średnicy 2 mm wykreślanymi **linią cienką ciągłą**; **nie zaczerniać** ani **nie przekreślać ich wnętrza**; **konstrukcje pomocnicze** wykreślać **linią cienką ciągłą**; widoczne ściany przekrojów kreskować **linią cienką**, stosować stałą podziałkę kreskowania i kąt kreskowania  $45^\circ$ ,
- w przypadku przecinania się rzutów krawędzi widocznych i niewidocznych należy krawędź niewidoczną przerwać na długości około 1,5 mm po obu stronach krawędzi widocznej,
- **zachować rozłączność wszystkich konstruowanych rzutów!**
- oznaczać i opisywać **punkty, proste i płaszczyzny dane** w treści problemów,
- wymagane elementy rozwiązania (**wierzchołki brył, punkty charakterystyczne** krzywych, **punkty przebicia** itp.) wyznaczać konstrukcyjnie; opisywać rzuty figur wykorzystywanych w konstrukcjach geometrycznych, w szczególności rzuty płaszczyzn i prostych pomocniczych; **rzuty płaszczyzn opisuje się jedynie, gdy ich rzutami są proste!**
- **elipsy aproksymować owalami** znajdując uprzednio kierunki i długości osi; **konstrukcję owalu traktować jako znaną** (nie opisywać etapów pośrednich).

## 10.2. Zadania

### Problem I

1.  $Pp = (180; 140)$ ,  $A = (40; 60; 90)$ ,  $M = (100; 120; 90)$ ,  $N = (100; 0; 90)$ .
2.  $Pp = (180; 140)$ ,  $A = (90; 100; 90)$ ,  $M = (20; 40; 90)$ ,  $N = (150; 40; 90)$ .
3.  $Pp = (180; 140)$ ,  $A = (75; 85; 90)$ ,  $M = (55; 15; 90)$ ,  $N = (160; 75; 90)$ .
4.  $Pp = (150; 140)$ ,  $A = (80; 10; 85)$ ,  $M = (100; 90; 30)$ ,  $N = (40; 25; 55)$ .

### Problem II

1.  $Pp = (200; 140)$ ,  $B = (100; 60; 90)$ ,  $H = (100; 60; 15)$ ,  $K = (60; 20; 100)$ ,  $L = (60; 20; 0)$ .
2.  $Pp = (180; 140)$ ,  $B = (40; 60; 60)$ ,  $H = (115; 60; 60)$ ,  $K = (140; 20; 110)$ ,  $L = (140; 20; 0)$ .
3.  $Pp = (250; 140)$ ,  $B = (40; 60; 65)$ ,  $H = (115; 60; 45)$ ,  $K = (130; 60; 100)$ ,  $L = (130; 60; 0)$ .
4.  $Pp = (180; 140)$ ,  $B = (85; 60; 45)$ ,  $H = (160; 60; 65)$ ,  $K = (160; 100; 110)$ ,  $L = (160; 100; 0)$ .

### Problem III

1.  $Pp = (250; 170)$ ,  $A = (55; 10; 10)$ ,  $B = (40; 40; 75)$ ,  $C = (20; 80; 40)$ ,  $D = (85; 70; 40)$ .
2.  $Pp = (250; 170)$ ,  $A = (85; 70; 40)$ ,  $B = (40; 40; 75)$ ,  $C = (20; 80; 40)$ ,  $D = (55; 10; 10)$ .
3.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (30; 40; 40)$ ,  $B = (30; 85; 40)$ ,  $C = (10; 45; 80)$ ,  $D = (60; 65; 90)$ .
4.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (10; 45; 80)$ ,  $B = (30; 40; 40)$ ,  $C = (30; 85; 40)$ ,  $D = (60; 65; 90)$ .

#### Problem IV

1.  $Pp = (200; 140)$ ,  $W = (170; 60; 70)$ ,  $S = (60; 60; 70)$ ,  $T = (60; 10; 70)$ ,  $K = (195; 45; 90)$ ,  
 $L = (20; 45; 90)$ ,  $M = (120; 125; 120)$ ,  $N = (90; 60; 10)$ .
2.  $Pp = (200; 140)$ ,  $W = (100; 60; 80)$ ,  $S = (100; 60; 20)$ ,  $T = (140; 60; 20)$ ,  $K = (100; 10; 40)$ ,  
 $L = (100; 120; 40)$ ,  $M = (130; 110; 15)$ ,  $N = (70; 10; 90)$ .
3.  $Pp = (200; 140)$ ,  $W = (100; 60; 80)$ ,  $S = (100; 60; 20)$ ,  $T = (140; 60; 20)$ ,  $K = (85; 110; 40)$ ,  
 $L = (85; 5; 40)$ ,  $M = (150; 90; 80)$ ,  $N = (75; 5; 15)$ .
4.  $Pp = (200; 140)$ ,  $W = (100; 60; 80)$ ,  $S = (100; 60; 20)$ ,  $T = (140; 60; 20)$ ,  $K = (150; 45; 45)$ ,  
 $L = (50; 45; 45)$ ,  $M = (150; 75; 0)$ ,  $N = (50; 75; 105)$ .

#### Problem V

1.  $Pp = (200; 130)$ ,  $A = (160; 20; 100)$ ,  $B = (30; 20; 100)$ ,  $C = (30; 120; 100)$ ,  $D = (160; 20; 20)$ ,  
 $P = (20; 60; 30)$ ,  $Q = (120; 60; 100)$ ,  $T = (120; 90; 100)$ .
2.  $Pp = (200; 140)$ ,  $A = (135; 20; 20)$ ,  $B = (135; 90; 20)$ ,  $C = (40; 90; 20)$ ,  $D = (135; 20; 100)$ ,  
 $P = (155; 70; 70)$ ,  $Q = (20; 70; 70)$ ,  $T = (135; 70; 40)$ .
3.  $Pp = (200; 140)$ ,  $A = (150; 100; 15)$ ,  $B = (150; 30; 15)$ ,  $C = (150; 30; 110)$ ,  $D = (40; 100; 15)$ ,  
 $P = (100; 55; 120)$ ,  $Q = (100; 55; 0)$ ,  $T = (65; 55; 110)$ .
4.  $Pp = (200; 140)$ ,  $A = (165; 85; 30)$ ,  $B = (165; 65; 80)$ ,  $C = (165; 15; 30)$ ,  $D = (85; 85; 30)$ ,  
 $P = (125; 55; 100)$ ,  $Q = (125; 55; 10)$ ,  $T = (125; 25; 30)$ .

#### Problem VI

1.  $Pp = (250; 150)$ ,  $A = (110; 130; 95)$ ,  $B = (195; 130; 10)$ ,  $C = (60; 130; 10)$ ,  $D = (110; 15; 95)$ ,  
 $S = (120; 70; 70)$ ,  $T = (165; 70; 70)$ .
2.  $Pp = (340; 150)$ ,  $A = (50; 25; 0)$ ,  $B = (115; 25; 0)$ ,  $C = (115; 115; 0)$ ,  $D = (50; 25; 115)$ ,  
 $S = (60; 60; 60)$ ,  $T = (105; 60; 60)$ .
3.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (145; 0; 110)$ ,  $B = (70; 0; 110)$ ,  $C = (70; 0; 25)$ ,  $D = (145; 110; 110)$ ,  
 $S = (80; 60; 60)$ ,  $T = (35; 60; 60)$ .
4.  $Pp = (200; 150)$ ,  $A = (115; 40; 110)$ ,  $B = (80; 90; 110)$ ,  $C = (45; 40; 110)$ ,  $D = (115; 40; 10)$ ,  
 $S = (80; 60; 60)$ ,  $T = (35; 60; 60)$ .