niu pary wodnej. Przed i po doświadczeniu, a także po wysuszeniu, płyta była ważona, celem określenia ilości pobranej wody, a także sprawdzane były odchylenia od płaszczyzny. Nawet w tak niekorzystnych warunkach następowało tylko nieznaczne jednokierunkowe wygięcie płyty, które prawie całkowicie znikało po wysuszeniu.

Wycinki płyty zawieszone były na wspornikach nazewnątrz budynku przez dłuższy okres czasu i podlegały bezpośredniemu działaniu deszczu, mrozu i promieni słonecznych. Oglądając te wycinki na miejscu Dyr. Inst. Nauk. Bad. Budow., *G. Trzciński*, nie zauważył żadnych śladów uszkodzeń, lub rozklejenia warstw.

Naukowe badania przenośności dźwięku przez płyty Starachowickie nie były przeprowadzone. Jednakże stwierdzić można przez opukiwanie, że płyta słabo rezonuje i wydaje dźwięk głuchy, co dowodzi, że przewodność jej jest niska, niższa znacznie, niż przewodność pełnej deski takiej samej grubości.

Prof. L. KARASIŃSKI

Odkształcenia przestrzennych ustrojów prętowych

1. Ogniwo przestrzennego ustroju prętowego — pręt przestrzenny*) ma dwie główne powierzchnie bezwładności, przecinające się prostopadle wzdłuż nieodkształconej — pierwotnej osi pręta. W jednej z nich leżą osie najmniejszych momentów bezwładności wszystkich przekrojów poprzecznych pręta — w drugiej — największych.

Łączenia prętów przestrzennego ustroju mogą być sztywne, lub przegubowe — o przegubach kulistych, kardanowskich, walcowych. Te, lub inne łączenia stanowią o rodzaju prętów, węzłów i podpór przestrzennego ustroju prętowego. Obciążenie zewnętrzne odkształcające wzbudza w nim wewnętrzne siły węzłowe i odporowe.

Równania odkształconych wszystkich prętów i podpór przestrzennego ustroju, łącznie z warunkami równowagi wszystkich jego prętów i węzłów tworzą układ równań linjowych, służących do wyznaczania niewiadomych sił wewnętrznych, odporów i odkształceń ustroju. Przypadki osobliwości macierzy tego układu każdorazowo wymagają odrębnych rozważań.

Chcąc znaleźć równania odkształconej przestrzennego pręta, biorę w dowolnym punkcie O prostokątny układ stałych osi. X, Y, Z o zwrotach:

$$(x),\ (y),\ (z)$$

i skrętach:

$$(YZ) = (k),\quad (ZX) = (l),\quad (XY) = (m)$$

prawych, jak na rysunku, lub odwrotnych — lewych.

Gdy zwrot osi mierzy w oko patrzącego — jej skręt prawy jest kierunkowo zgodny z obiegiem wskazówki zegara, — lewy zaś — sprzeczny.

Bieżący punkt.

$$b\ (x,\ y,\ z)$$

nieodkształconej pręta jest kresem jej łuku s, mierzonego od początkowego punktu a do b w kierunku zwrotu (s). Styczna bB nieodkształconej ma zwrot (s) i spółczynniki kierunkowe:

$$u_x = \cos a_0 = \frac{dx}{ds}$$

$$u_y = \cos b_0 = \frac{dy}{ds}$$

$$u_z = \cos c_0 = \frac{dz}{ds}$$

*) O prętach płaskich mówi pierwsza część tej pracy: „Odkształcenia płaskich ustrojów prętowych". P. T. z 1935 r. str. 489. Korzystam z podanych tam określeń i znaków. Uogólnione wyniki przytaczam bez wywodzeń. Szerzej omawiam, co najważniejsze.

w układzie stałych osi X, Y, Z, lub jednozwrotnych miejscowych: bX', bY', bZ'.

W płaszczyźnie P bieżącego przekroju F pręta leżą prostopadłe główne osie bezwładności. Daję im znaki: bK_1, bK_2, ich spółczynnikom kierunkowym zaś:

$$v_x = \cos a_1,\quad v_y = \cos b_1,\quad v_z = \cos c_1$$

$$w_x = \cos a_2,\quad w_y = \cos b_2,\quad w_z = \cos c_2$$

bacząc aby, skręt $(K_1\ K_2)$ o kąt prosty około osi B był zgodny z (k).

Zatem miejscowy układ osi głównych: B, K_1, K_2, jest zawsze jednozwrotny z układem odpowiednich osi: X, Y, Z stałych: jak on — prawy, lub lewy.

Obrany w sąsiedztwie bieżącego punktu b nieodkształconej punkt d o spółrzędnych:

$$ds,\quad dq_1,\quad dq_2$$

na osiach głównych miejscowych: $B, K_1\ K_2$ wyodrębni długostkę

$$bd$$

o składowych na osiach: X, Y, Z:

$$dx = u_x\, ds + v_x\, dq_1 + w_x\, dq_2$$

$$dy = u_y\, ds + v_y\, dq_1 + w_y\, dq_2$$

$$dz = u_z\, ds + v_z\, dq_1 + w_z\, dq_2$$

Ich zmiany po odkształcsniu — będą dla sąsiedniego punktu

$$c\ (ds,\ O,\ O)$$

nieodkształconej:

$$\delta dx = u_x\, \delta ds + v_x\, \delta dq_1 + w_x\, \delta dq_2 - \sin a_0\, ds\, \delta a_0$$

$$\delta dy = u_y\, \delta ds + v_y\, \delta dq_1 + w_y\, \delta dq_2 - \sin b_0\, ds\, \delta b_0$$

$$\delta dz = u_z\, \delta ds + v_z\, \delta dq_1 + w_z\, \delta dq_2 - \sin c_0\, ds\, \delta c_0$$

Prawe strony tych wzorów zależą od składowych odkształcenia — przyrostów osiowych:

$$\delta ds,\quad \delta dq_1,\quad \delta dq_2$$

i obrotów:

$$\delta k,\quad \delta l,\quad \delta m$$

około osi miejscowych: X', Y', Z'. Łatwo to uwydatnić, trzeba jednak powyznaczać kąty kierunkowe jednoznacznie.

Chcąc, dajmy na to, zmierzyć a_0, obracam płaszczyznę osi X', Y' skrętem (k) około osi X' aż do pokrycia stycznej bB. Odchylone przytem osie: Y', Z' oznaczam przez: Y'', Z'' i mierzę kąt a_0 — od zwrotu (x') do zwrotu (ds) skrętem $(X'\ Y'')$ osi Z'', zgodnym z (m).

Rzut ds na oś Y'' będzie zawsze równy:

$$\sin a_o \, ds$$

a obrót tego rzutu o dodatni przyrost δa_o da na osi X' składową:

$$-\sin a_o \, ds \, \delta a_o$$

Obroty: δl, δm długostek: dz, dy około osi Y', Z' dadzą na tejże osi X' składowe:

$$dz \, \delta l, \quad - dy \, \delta m$$

a przeto zawsze:

$$-\sin a_o \, ds \, \delta a_o = dz \, \delta l - dy \, \delta m =$$

$$= d\,(z\, \delta l) - z\, d\delta l - d\,(y\, \delta m) + y\, d\delta m \; .$$

Całkowanie w granicaeh dwóch jakichkolwiek punktów: a, i nieodkształconej pręta da wzory:

$$\delta x_i - \delta x_a = z_i\, \delta l_i - z_a\, \delta l_a - y_i\, \delta m_i + y_a\, \delta m_a + U$$

$$\delta y_i - \delta y_a = x_i\, \delta m_i - x_a\, \delta m_a - z_i\, \delta k_i + z_a\, \delta k_a + V$$

$$\delta z_i - \delta z_a = y_i\, \delta k_i - y_a\, \delta k_a - x_i\, \delta l_i + x_a\, \delta l_a + W$$

gdzie:

$$U = \int_{s_a}^{s_i} \left[u_x \frac{\delta ds}{ds} + v_x \frac{\delta dq_1}{ds} + w_x \frac{\delta dq_2}{ds} - \right.$$

$$\left. - z \frac{\delta dl}{ds} + y \frac{\delta dm}{ds} \right] ds$$

$$V = \int_{s_a}^{s_i} \left[u_y \frac{\delta ds}{ds} + v_y \frac{\delta dq_1}{ds} + w_y \frac{\delta dq_2}{ds} - \right.$$

$$\left. - x \frac{\delta dm}{ds} + z \frac{\delta dk}{ds} \right] ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$W = \int_{s_a}^{s_i} \left[u_z \frac{\delta ds}{ds} + v_z \frac{\delta dq_1}{ds} + w_z \frac{\delta dq_2}{ds} - \right.$$

$$\left. - y \frac{\delta dk}{ds} + x \frac{\delta dl}{ds} \right] ds$$

Pozatem niewątpliwie:

$$\delta dk = u_x\, \delta dg + v_x\, \delta dh + w_x\, \delta di$$

$$\delta dl = u_y\, \delta dg + v_y\, \delta dh + w_y\, \delta di \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\delta dm = u_z\, \delta dg + v_z\, \delta dh + w_z\, \delta di$$

gdzie zaszłe przy odkształceniu zmiany

$$\delta dg, \; \delta dh, \; \delta di$$

dotyczą układu osi głównych: B, K_1, K_2 .

Po wyrugowaniu tych, lub owych przyrostów zapomocą równań *Clapeyron'a*:

$$\delta k_i - \delta k_a = U_o = \int_{s_a}^{s_i} \frac{\delta dk}{ds}\, ds$$

$$\delta l_i - \delta l_a = V_o = \int_{s_a}^{s_i} \frac{\delta dl}{ds}\, ds \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\delta m_i - \delta m_a = W_o = \int_{s_a}^{s_i} \frac{\delta\, dm}{ds}\, ds$$

otrzymam wzory Bresse'a:

$$\delta x = z\, \delta l_a - y\, \delta m_a + U + z_i\, V_o - y_i\, W_o =$$

$$= z\, \delta l_i - y\, \delta m_i + U + z_a\, V_o - y_a\, W_o \, .$$

$$\delta y = x\, \delta m_a - z\, \delta k_a + V + x_i\, W_o - z_i\, U_o = \quad . \; . \quad (4)$$

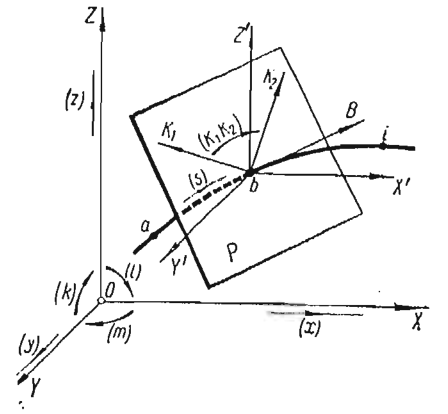
$$= x\, \delta m_i - z\, \delta k_i + V + x_a\, W_o - z_a\, U_o \, .$$

$$\delta z = y\, \delta k_a - x\, \delta l_a + W + y_i\, U_o - x_i\, V_o =$$

$$= y\, \delta k_i - x\, \delta l_i + W + y_a\, U_o - x_a\, V_o$$

gdzie dla skrócenia oznaczyłem

$$x = x_i - x_a\,, \quad y = y_i - y_a\,, \quad z = z_i - z_a\,.$$



Rys. 1.

2. Prawe strony tych wzorów uzależnię od obciążenia zewnętrznego, obrawszy zwrot (w) posuwania się wzdłuż pręta przy kolejnem uwzględnianiu wszystkich sił i momentów tej, lub owej części obciążenia pręta przestrzennego.

Przy zwrotach: (s), (w) zgodnych—otrzymam w bieżącym punkcie b nieodkształconej — wypadkowe: — na osi B siłę osiową S i moment skręcający M_o, a na osiach K_1, K_2 siły tnące: Q_1, Q_2 i momenty gnące: M_1, M_2.

Przy zwrotach: (s), (w) sprzecznych — sąsiedni, dalszy punkt c nieodkształconej jest środkiem sprowadzenia, a wypadkowe, leżące na osiach sąsiedniego układu głównego mają zwroty wprost przeciwne.

Siły osiowe mają zawsze zwrot (w) gdy są ujemne, ściskające, lub zwrot przeciwny ($-w$), gdy są dodatnie rozciągające.

Dodatnia siła tnąca leży na osi dodatniej przy zwrotach: (s), (w) sprzecznych — przy zgodnych — na dodatniej osi leży ujemna siła tnąca.

Przy zwrotach (s), (w) sprzecznych — dodatni moment leży na osi dodatniej: ma jej skręt. Przy zwrotach: (s), (w) zgodnych—skręty dodatniej osi i dodatniego momentu są sprzeczne: ujemny moment leży na osi dodatniej.

Na osiach głównych: bK_1, bK_2 leżą promienie krzywizny r_1, r_2 głównych prostolinjowych powierzchni bezwładności pręta przestrzennego: dodatni na osi dodatniej i naodwrót.

Zatem według znanych wzorów wytrzymałościowych:

$$\frac{\delta\, ds}{ds} = \frac{S}{EF} - \frac{M_1}{EFr_2} + \frac{M_2}{EFr_1}\,,$$

$$\frac{\delta\, dq_1}{ds} = \frac{n_1\, Q_1}{GF}\,, \quad \frac{\delta\, dq_2}{ds} = \frac{n_2\, Q_2}{GF}\,,$$

$$\frac{\delta\, dg}{ds} = \frac{M_o}{GD}\,,$$

$$\frac{\delta\, dh}{ds} = \frac{M_1}{EFr_2 j_2} - \frac{S}{EFr_2} - \frac{d}{ds}\left(\frac{n_2\, Q_2}{GF}\right),$$

$$\frac{\delta\, di}{ds} = \frac{M_2}{EFr_1 j_1} + \frac{S}{EFr_1} + \frac{d}{ds}\left(\frac{n_1\, Q_1}{GF}\right).$$

Nadto, przy zmianie pierwotnej temperatury t_o całego pręta na t i spółczynniku f cieplnej rozszerzalności jego tworzywa — należy dodać do S w tych wzorach — zastępczą cieplną siłę osiową:

$$S_t = EF(t - t_o) f$$

Możnaby również uwzględnić wpływ niejednostajnego nagrzania pręta, lub częściowego ochłodzenia.

Równania odkształconych dają przyrosty odkształceń dla prętów ustroju. Do wyznaczania jego hyperstatycznych lepiej nadają się moje wzory.

Korzystam z ustalonego w pierwszej części tej pracy pojęcia konturu i nazywam **konturem** (kk) — kontur przestrzenny, obustronie zakończony węzłami o przegubach kulistych. Dla konturu (kk) zamkniętego przegubem kulistym w punkcie o spółrzędnych:

$$x_b \quad y_b \quad z_b$$

wzory (4) dają:

$$\begin{aligned} U + z_b V_o - y_b W_o &= 0 \\ V + x_b W_o - z_b U_o &= 0 \\ W + y_b U_o - x_b V_o &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Dla zamkniętego konturu (ss):

$$U = V = W = U_o = V_o = W_o = 0 \qquad (6)$$

Kontury przestrzenne, zakończone węzłami o przegubach kardanowskich i walcowych pomijam milczeniem.

Mnożąc wzory (4) odpowiednio przez:

$$x = x_i - x_a, \quad y = y_i - y_a, \quad z = z_i - z_a$$

mam po dodaniu:

$$\begin{aligned} x\delta x + y\delta v + z\delta z &= x\,U + y\,V + z\,W + \\ &+ (z_i\, y_a - z_a\, y_i)\, U_o + (x_i\, z_a - x_a\, z_i)\, V_o + (y_i\, x_a - y_a\, x_i)\, W_o \end{aligned} \qquad (7)$$

wzór dla przestrzennego pręta, lub konturu otwartego.

Pozatem układ (4), wypisany dla dwóch złączonych konturów przestrzennych: (ab), (bc) da mi jeszcze trzy wzory:

$$\frac{B_1 x_2 - B_2 x_1}{z_1 x_2 - z_2 x_1} + \frac{C_1 x_2 - C_2 x_1}{y_1 x_2 - y_2 x_1} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{C_1 y_2 - C_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} + \frac{A_1 y_2 - A_2 y_1}{z_1 y_2 - z_2 y_1} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{A_1 z_2 - A_2 z_1}{y_1 z_2 - y_2 z_1} + \frac{B_1 z_2 - B_2 z_1}{x_1 z_2 - x_2 z_1} = 0 \qquad (10)$$

gdzie dla skrócenia użyłem oznaczeń:

$$x_1 = x_b - x_a \quad y_1 = y_b - y_a \quad z_1 = z_b - z_a$$

$$x_2 = x_c - x_b \quad y_2 = y_c - y_b \quad z_2 = z_c - z_b$$

$$A_1 = \delta x_b - \delta x_a - [U + z_a V_o - y_a W_o]_{ab}$$

$$A_2 = \delta x_c - \delta x_b - [U + z_c V_o - y_c W_o]_{bc}$$

$$B_1 = \delta y_b - \delta y_a - [V + x_a W_o - z_a U_o]_{ab}$$

$$B_2 = \delta y_c - \delta y_b - [V + x_c W_o - z_c U_o]_{bc}$$

$$C_1 = \delta z_b - \delta z_a - [W + y_a U_o - x_a V_o]_{ab}$$

$$C_2 = \delta z_c - \delta z_b - [W + y_c U_o - x_c V_o]_{bc}$$

W ostatnich trzech wzorach, zerowym mianownikom odpowiadają zerowe liczniki.

Gdy:

$$x_1 = x_2 = o$$

to z dwóch pierwszych wzorów:

$$-\frac{B_1}{z_1} = -\frac{B_2}{z_2} = \frac{C_1}{y_1} = \frac{C_2}{y_2}$$

a gdy:

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = o$$

to w tedy:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{z_1}{z_2} \qquad C_1 = C_2 = o$$

Wszystkie te wzory, naogół niezbyt proste, są jednak bardzo wygodne w użyciu zwłaszcza w zastosowaniu do ustrojów przestrzennych mniej złożonych, lub płaskich co do układu nieodkształconych, lecz obciążonych przestrzennie.

Ciekawy przykład: kratowy szkielet skrzydła jednopłatowca, złożony z dwóch podłużnic równoległych i poprzecznic — prostopadłych.

Przy jednakowem obciążeniu obu skrzydeł połowa każdej podłużnicy stanowi belkę, sprężyście osadzoną w pionowej płaszczyźnie kadłuba. Cała trudność polega tu na właściwem uzależnieniu sprężystych posuwów tych początkowych puntów: t_0, p_0 nieodkształconych podłużnicy tylnej i przedniej od sił odporowych w tych punktach podparcia.

Pierwotna oś pierwszej poprzecznicy przecina nieodkształcone podłużnic w punktach: t_1, p_1, — drugiej — w t_2 p_2, — ostatniej n-tej — punktach: t_n, p_n.

Zatem z ustoju wyodrębnić mogę kontury (ss) — zamknięte:

$$(t_i\, t_{i+1}\, p_{i+1}\, p_i\, t_i) \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1)$$

a nadto jeden kontur otwarty:

$$(t_0\, t_1\, p_1\, p_0).$$

Z warunków równowagi całego skrzydła wyznaczę odpory punktu osadzenia p_0 w zależności od sił odporowych:

$$H_{ox}, \quad H_{oy}, \quad H_{oz}$$

i momentów odporowych:

$$O_{ox}, \quad O_{oy}, \quad O_{oz}$$

punktu osadzenia t_0.

Zwroty: (s), (w) obiorę przeto zgodne — dla prętów obwodowych w kierunku:

$$t_0\, t_1\, t_2 \ldots t_n\, p_n\, p_{n-1} \ldots p_2\, p_1\, p_0,$$

a dla poprzecznie wewnętrznych — od punktew t_i ku punktom p_i.

Każda poprzecznica, z wyjątkiem ostatniej, wyprowadza po sześć hyperstatycznych: trzy siły:

$$H_{ix}, \quad H_{iy}, \quad H_{iz}$$

i trzy momenty:

$$O_{ix}, \quad O_{iy}, \quad O_{iz}$$

oddziaływania na węźle t_i. Ogółem — $6n$ hyperstatycznych ustroju łącznie z odporami w punkcie osadzenia t_0.

Zatem, przy danych obciążeniach zewnętrznych wszystkich prętów — wyznaczę wypadkowe bieżące w zależności od obciążenia i od tych $6n$ niewiadomych.

Kontury zamknięte dadzą mi

$$6(n-1)$$

równań (6), a kontur otwarty — jeszcze sześć równań, wiążących przyrosty odkształceń punktów osadzenia: t_0, p_0. Razem — $6n$ równań linjowych dla tyluż hyperstatycznych ustroju.

Podobny ustrój dają dwie równoległe podłużnice i prostopadłe poprzecznice stalobetonowej kraty mostowej obustronnie wspartej na podporach.